

**ELECTRICITE DE FRANCE**

DIRECTION DES ETUDES ET RECHERCHES

Service Applications de l'Electricité  
et EnvironnementDEPARTEMENT  
LABORATOIRE NATIONAL D'HYDRAULIQUE6, quai Watier  
78400 CHATOU  
Tél. : 071.72.44

26

EDF - 82H406614

82H406614

BENQUE J.P. - RONAT J.

QUELQUES DIFFICULTES DES MODELES NUMERIQUES  
EN HYDRAULIQUE(Texte d'une communication présentée au  
"Fifth International Symposium on Computing  
Methods in Applied Sciences & Engineering"  
Versailles Décembre 1981

E41/82.03

25 pages  
10 figures

## Resume

Parmi les difficultés que l'on rencontre dans la modélisation numérique en Mécanique des Fluides, le traitement de la convection occupe une place importante. On présente ici une famille de méthodes basée sur l'utilisation des caractéristiques et qui peut être utilisée en éléments finis.

Divers exemples sont donnés permettant de juger des performances des approches proposées.

The discretization of advective terms in the numerical models is one of the main difficulty that we have to deal with in Fluid Mechanics. Different methods are proposed here using a characteristic approach which can be used in finite element discretization.

Different examples are given which show the possibilities of the method.

- Confidentiel
- Diff. restreinte
- Diff. EDF
- Diff. générale
- Non signalé

QUELQUES DIFFICULTÉS DES MODELES NUMERIQUES  
EN HYDRAULIQUE

J.P. Benqué\* - J. Ronat\*\*

Electricité de France

(\* Laboratoire National d'Hydraulique LNH Chatou France)

(\*\* Département TIEM Clamart France)

Une des principales difficultés que l'on rencontre dans la modélisation numérique de problèmes d'hydraulique réside dans la discrétisation des termes de convection. On propose dans ce texte une formulation qui s'inspire d'une méthode de caractéristiques et qui semble particulièrement applicable à une discrétisation par éléments finis.

Dans une deuxième partie, on présente quelques exemples où ces termes sont déterminants pour la solution. Au travers de ces exemples, on constate que la modélisation adoptée est très différente suivant l'échelle à laquelle on moyenne le phénomène.

INTRODUCTION

L'élaboration d'un modèle numérique peut généralement être décomposée en trois parties :

. L'analyse des phénomènes physiques que l'on cherche à étudier et la détermination d'un système d'équations (en général aux dérivées partielles) qui permet de les décrire.

. La recherche d'un algorithme qui doit conduire à une solution approchée de ces équations.

. La programmation, c'est-à-dire la traduction en langage informatique de l'algorithme choisi.

Nous n'aborderons ici qu'essentiellement les deux premiers points en essayant de dégager les principales difficultés que l'on rencontre et de décrire quelques tentatives pour les surmonter.

Compte tenu de la taille des ordinateurs dont on peut disposer à l'heure actuelle, il n'est pas envisageable de disposer d'un modèle numérique qui soit applicable à tous les cas que l'on souhaite aborder. Il faut particulariser la modélisation et ainsi dégager des "familles de modèles". Toutefois, les équations aux dérivées partielles qui représentent ces modèles sont en général assez semblables et les difficultés à les résoudre sont donc communes.

Cet exposé se décompose en deux grandes parties. Dans une première partie, on s'attache à présenter une méthode pour aborder une difficulté très souvent rencontrée dans la modélisation numérique :

Discrétisation des termes de convection.

Dans une deuxième partie, à l'aide de quelques exemples, on donne une idée de quelques cas traités en hydraulique que cela soit dans le domaine de

l'environnement ou de l'hydraulique industrielle. Ces exemples illustrent le fait que la modélisation doit être particularisée aux quantités que l'on cherche à déterminer.

Lorsqu'on examine les équations qui régissent différents modèles en Mécanique des Fluides, on ne peut pas ne pas remarquer leur ressemblance. Celle-ci provient généralement du fait que, dans la détermination du modèle, on part des équations de Navier Stokes auxquelles on fait subir quelques simplifications [1].

La forme générale des équations peut être écrite de la façon suivante :

(1)		$\frac{1}{C^2(P)} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot U$		= 0
(2)	$\frac{\partial U}{\partial t}$	$+ Q(U) \otimes \nabla U$	$+ \nabla P$	Diff (U) + F(U,T) = 0
(3)	$\frac{\partial T}{\partial t}$	$+ Q(U) \cdot \nabla T$		Diff (T) + S(U,T) = 0
	I	II	III	IV

L'équation (1) représente l'équation de continuité. C(P) représente la célérité des ondes de pression, elle peut être infinie, le fluide étant alors considéré comme incompressible.

L'équation (2) représente le bilan de quantité de mouvement. U représente un flux lié à la quantité de mouvement et P représente une grandeur liée directement à la pression. On désigne par Diff un opérateur de diffusion sur la quantité de mouvement non nécessairement linéaire. Q(U) représente la vitesse de transport par le courant.

L'équation (3) représente le bilan d'un champ scalaire qui peut, par exemple, être la température. On trouve souvent des modèles qui font intervenir plusieurs équations de transport de champs scalaires (différentes quantités liées au niveau de turbulence). La limitation à un seul champ scalaire n'est là que par soucis de clarifier l'exposé, la généralisation se fait sans mal.

Afin de préciser le rôle des différents termes sur la solution dans les équations aux dérivées partielles, on peut être amené à distinguer trois classes différentes :

I Les termes de la colonne I n'apparaissent pas dans l'équation de continuité ; ils représentent les effets du transport par le fluide du champ scalaire et de la quantité de mouvement. Ces termes ont un comportement essentiellement hyperbolique ; ils rendent, lorsqu'ils sont importants, la solution très sensible aux conditions amont.

II Les termes de la colonne II n'apparaissent pas dans l'équation du champ scalaire. Ils traduisent la conservation de la masse et la propagation (si le fluide est compressible) de la pression. Leur comportement est soit elliptique (C = ∞) soit hyperbolique, mais, dans tous les cas, isotrope ; les ondes de pression ne particularisent pas une direction d'espace.

III + IV Ces termes représentent la diffusion de la quantité de mouvement et du champ scalaire avec des termes sources éventuels. Cet opérateur est de nature parabolique, il peut être non linéaire et représente les effets de la turbulence le plus souvent. La forme précise de cet opérateur varie d'un modèle à un autre en fonction des grandeurs que l'on cherche à approcher.

Ces constatations amènent la remarque suivante :

Il existe une différence fondamentale de comportement entre les termes de la première classe et les autres. En effet, les termes de convection rendent prédominant les effets des conditions amont. L'espace physique se trouve "polarisé" dans le sens du courant. Les autres termes, que la célérité des ondes de pression soit finie ou non, ne créent pas cette polarisation. C'est de cette coexistence entre ces termes de nature différente que naît une difficulté essentielle, celle-ci a fait l'objet de nombreux travaux. On trouve dans [5] une bibliographie très complète de ce qui a été fait sur ce sujet à l'aide d'éléments finis.

On décrit ici une approche que l'on a développée et qui semble permettre de traiter assez correctement ces termes. Celle-ci s'applique indifféremment à une discrétisation en éléments finis ou différences finies. Afin de simplifier l'exposé, on va tout d'abord se placer dans le cadre d'une équation de convection-diffusion et ensuite généraliser aux équations (1), (2) et (3).

I - Une approche pour traiter la convection dans les équations de Mécanique des Fluides :

I.1 - Equation de convection diffusion.

I.1.1. - Généralités :

On se propose, connaissant le champ de vitesse  $u(x)$  de résoudre l'équation de convection-diffusion suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (u\theta - k \nabla \theta) = 0 \text{ dans } \omega \text{ de frontière } \gamma$$

La fonction  $\theta(x, t)$  est supposée connue à l'instant  $t_1$  et inconnue à l'instant  $t_2$ .

La méthode proposée s'inspire directement d'une méthode de caractéristiques et n'en diffère essentiellement que par le fait qu'une égalité prise au sens fort ne l'est plus qu'au sens faible.

I.1.2 - Equations :

On cherche une approximation de l'équation de convection diffusion en réalisant l'égalité suivante :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \psi(x, t) \left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (u\theta - k \nabla \theta) \right] dw dt = 0$$

soit :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left( \frac{\partial \psi \theta}{\partial t} - \theta \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (u\theta \psi) - u\theta \nabla \psi - \nabla \cdot (k \psi \nabla \theta) + k \nabla \psi \nabla \theta \right) dw dt = 0$$

A la condition que

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \theta \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} + u \nabla \psi \right) d\omega dt = 0$$

condition remplie si  $\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \nabla \psi = 0$  au sens fort, l'équation de base s'écrit :

$$(4) \int_{t_1}^{t_2} \int_{\omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} + k \nabla \psi \nabla \theta \right) d\omega dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\gamma} \psi n (u \theta - k \nabla \theta) d\gamma dt = 0$$

L'intégrale de bord correspond aux conditions aux limites naturelles qui sont à prendre en compte :

sur  $\gamma_0$   $u \cdot n = 0$  On suppose que le flux par conduction est donné ou que  $\theta$  est donné soit :

$$k \cdot \nabla \theta \cdot n = q \quad \text{grandeurs connues} \\ \theta = T$$

sur  $\gamma^-$   $u \cdot n < 0$  la condition à la limite naturelle correspond à se donner la puissance qui rentre à la fois par conduction et convection :

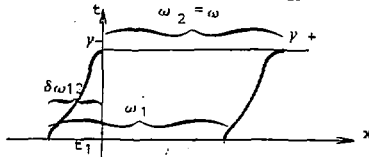
$$(u \theta - k \nabla \theta) \cdot n = p$$

sur  $\gamma^+$   $u \cdot n > 0$  Comme le fluide sort la convection ne nécessite pas de conditions aux limites et on supposera que le flux par conduction est nul. On a donc :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\gamma^+} \psi n \cdot (u \theta - k \nabla \theta) d\gamma dt = 0$$

Afin de simplifier la mise en oeuvre de ces conditions aux limites, on adopte la procédure suivante :

Sur  $\gamma^-$  qui correspond à la partie de la frontière où le courant entre, on admet que la diffusion est négligeable. Physiquement, on constate en effet que les transferts convectifs sont bien supérieurs aux transferts conductifs. En conséquence, la donnée de la puissance en entrée revient à se donner la fonction  $\theta$ . Pratiquement afin d'éviter le calcul de l'intégrale de bord, on prolonge le domaine par un domaine  $\partial \omega_{12}$  qui est l'ensemble des points  $X(x, t, t_2)$  pour  $x \in \gamma^-$  pour  $t \in [t_1, t_2]$ .



Sur ce domaine, on se donne la fonction  $\theta$  correspondant à la condition à la limite que l'on cherche à s'imposer. On transforme donc l'intégrale de bord sur  $\gamma^-$  en une intégrale sur  $\partial \omega_{12}$ .

Si on introduit une discrétisation en temps de type Crank Nicholson, l'équation (4) devient :

$$\int_{\omega_2} \theta \psi d\omega - \int_{\omega_1} \theta \psi d\omega + \frac{1}{2} (t_2 - t_1) \left[ \int_{\omega_2} k \nabla \theta \nabla \psi d\omega + \int_{\omega_1} k \nabla \theta \nabla \psi d\omega \right] \\ - \frac{1}{2} (t_2 - t_1) \left[ \int_{\gamma_0^-} \psi k \nabla \theta \cdot n d\gamma \right]_{t_2} + \int_{\gamma_0^-} \psi k \nabla \theta \cdot n d\gamma \Big|_{t_1} = 0$$

avec  $\gamma_0^* \subset \gamma_0$  partie de  $\gamma_0$  où le flux est donné.

. Choix des fonctions test :

Les fonctions test  $\psi_i(x,t)$  vérifient l'équation de transport :

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + u \cdot \nabla \psi_i = 0$$

Ces fonctions seront totalement définies lorsque des conditions initiales auront été fixées.

Deux cas sont envisagés :

. convection "forte"  $\psi_i(x, t_2) = \sigma(x - x_i)$  (masse de Dirac placée en  $x_i$ ),

. convection "faible"  $\psi_i(x, t_2) = \psi_i(x)$

On trouve dans [3] un calcul de l'erreur introduite par la discrétisation.

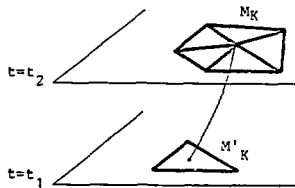
### I.1.3 - Formulation forte :

Dans ce cas, compte tenu des fonctions test choisies, on ne peut prendre en compte que les termes de convection, on a alors :

$$\int_{\omega_2} \theta \psi \, d\omega = \int_{\omega_1} \theta \psi \, d\omega$$

soit :

$$\sum_j \theta_{2j} (\varphi_j \psi_k)_{\omega_2} = \sum_j \theta_{1j} (\varphi_j \psi_k)_{\omega_1}$$



d'où :

$$\theta_{2k} = \theta_{1k'}$$

$\theta_{1k'}$  désignant la valeur de  $\theta$  au point  $M'K'$ , pied, à l'instant  $t_1$  de la caractéristique issue à l'instant  $t_2$  du point  $M_K$  noeud du maillage. En règle générale, le point  $M'K'$  ne sera pas un noeud du maillage mais sera intérieur à un triangle  $T$ . La valeur de  $\theta_{1k'}$  sera obtenue à partir des fonctions de base et des valeurs à l'instant  $t_1$  de  $\theta$  aux noeuds du triangle  $T$ .

Ce schéma, bien qu'explicite, est inconditionnellement stable, en particulier la condition de Courant est toujours vérifiée.

. Cas monodimensionnel :

On transporte dans un champ uniforme ( $u = 1$ ) une gaussienne. Pour des conditions aux limites et initiales appropriées, la solution analytique est une gaussienne d'écart type  $s$  et de moyenne  $m$  :

$$f(x,t) = e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-t-m}{s} \right)^2}$$

Pour le test numérique, le pas d'espace est  $\Delta x = 1/40$ . La gaussienne initiale est centrée en  $m = 0,15$  et son écart type  $s = 0,04$ . Les résultats des figures (1.a) sont obtenus par une interpolation linéaire et ceux des figures (1.b) par une interpolation quadratique. On a fait varier le pas de temps de 0,0125 s à 0,0375 s afin de voir l'influence du nombre de Courant.

On constate que l'approximation quadratique donne de meilleurs résultats que celle d'ordre 1 qui conduit à une diffusion importante.

Par ailleurs, on remarque que la précision est meilleure lorsque le nombre de Courant est proche d'un entier. Les résultats avec un nombre de Courant de 1 coïncident exactement avec la solution analytique car la vitesse étant uniforme l'interpolation n'a pas d'influence sur le calcul.

. Cas bidimensionnel :

On transporte un cône dans un champ circulaire uniforme. Les courbes caractéristiques sont des cercles concentriques.

Le domaine de calcul est une grille carrée contenant  $31 \times 31$  points de discrétisation. La vitesse de rotation est de  $1/2$  tour par seconde et le pas de temps de 0,02 seconde. L'approximation est parabolique.

La figure (2.a) représente la fonction à l'état initial ainsi que la solution calculée après un quart de tour soit 25 pas de temps. La figure (2.b) montre les solutions calculées et exactes après successivement  $1/2$ ,  $3/4$  et un tour. La cote du sommet du cône diminue de 1 à 0,6 en un tour.

Il convient de noter, qu'a priori, la méthode forte n'est pas conservative, c'est-à-dire que les fonctions de base n'engendrent pas l'unité. Les résultats numériques le montrent ; la relation suivante n'est pas rigoureusement vérifiée :

$$\int_{\omega} f(t_2) d\omega = \int_{\omega} f(t_1) d\omega$$

On observe un écart de l'ordre de 3 % sur un tour.

I.1.4. - Formulation faible :

$$\text{Dans ce cas, on a } \psi_i(x_2, t_2) = \psi_i(x)$$

Les termes de diffusion et de convection peuvent être traités simultanément.

Les fonctions de base  $\varphi_i(x)$  engendrant l'unité  $\sum_i \varphi_i(x) = 1$ , il en est de même des fonctions  $\psi_i(x,t)$ .

$$\sum_i \psi_i(x, t_2) = 1 \text{ par définition de } \psi_i(x, t_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\sum_i \psi_i) - u \cdot \nabla (\sum_i \psi_i) = 0$$

entraînent :  $\sum_i \psi_i(x, t) = 1$

Lorsque le coefficient de diffusion est nul, l'équation de base s'écrit :

$$\int_{\omega_2} \theta \psi_i \, d\omega = \int_{\omega_1} \theta \psi_i \, d\omega$$

soit :

$$\sum_j \theta_{2j} \langle \varphi_j | \psi_i \rangle = \sum_j \theta_{1j} \langle \varphi_j | \psi_i \rangle$$

On déduit immédiatement de cette égalité que la masse totale se conserve dans le domaine à l'inverse de la méthode précédente (formulation forte).

I.1.4.1 - Stabilité du schéma lorsque le champ de vitesse respecte  $\bar{v} \cdot u = 0$ .

$$\sum_j \langle \varphi_i | \varphi_j \rangle_{\omega_2} \theta_{2j} = \sum_j \langle \varphi_i^{-ct} | \varphi_j \rangle_{\omega_1} \theta_{1j}$$

en adoptant pour notation :

$$\varphi_i^{-ct} = \psi_i(x, t_1) \text{ avec : } \psi_i(x, t_2) = \varphi_i(x)$$

et :

$$\varphi_i^{ct} = \psi_i(x, t_2) \text{ avec : } \psi_i(x, t_1) = \varphi_i(x)$$

La divergence du champ de vitesse  $u$  étant supposée nulle, le Jacobien de la transformation  $x \rightarrow X(x, t_1, t_2)$  est égal à 1, ce qui entraîne :

$$\langle \varphi_i^{ct}, \varphi_j \rangle_{\omega_1} = \langle \varphi_i, \varphi_j^{ct} \rangle_{\omega_2}$$

soit :

$$\sum_j \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle_{\omega_2} \theta_{2j} - \langle \varphi_j^{ct}, \varphi_i \rangle_{\omega_1} \theta_{1j} = 0$$

Posons :

$$\alpha = \sum_j \varphi_j^{ct} \theta_{1j} \text{ et } \beta = \sum_j \varphi_j \theta_{2j}$$

on a :

$$\langle \varphi_i, \beta - \alpha \rangle_{\omega_2} = 0$$

Soit :

$$\langle \beta, \beta - \alpha \rangle_{\omega_2} = 0$$

compte tenu que :

$$\langle \beta - \alpha, \beta - \alpha \rangle_{\omega_2} \geq 0$$

il découle de ceci que :

$$\|\alpha\|_{\omega_2}^2 \geq \|\beta\|_{\omega_2}^2$$



Soit :

$$\sum_{ij} (\varphi_i^{\sigma t} \varphi_j^{\sigma t}) \omega_2 \theta_{1i} \theta_{1j} \gg \sum_{ij} (\varphi_i \varphi_j) \omega_2 \theta_{2i} \theta_{2j}$$

la divergence du champ de vitesse étant nulle :

$$(\varphi_i^{\sigma t} \varphi_j^{\sigma t})_2 = (\varphi_i \varphi_j) \omega_1$$

Soit :

$$\sum_{ij} (\varphi_i \varphi_j) \omega_1 \theta_{1i} \theta_{1j} \gg \sum_{ij} (\varphi_i \varphi_j) \omega_2 \theta_{2i} \theta_{2j}$$

Cette dernière inégalité implique la stabilité du schéma.

I.1.4.2 - Schéma monodimensionnel :

Notation - hypothèses :

$$\Delta x = \text{cte} \quad \sigma t \text{ désigne le pas de temps } \sigma t = t_2 - t_1$$

Noeud du maillage :  $x_p = p \Delta x$

$U$  : vitesse constante

$\psi_p$  : fonction de base affine ( $P_1$ )

$\sigma$  : nombre de Courant  $\sigma = u \frac{\sigma t}{\Delta x}$

Par soucis de simplification des notations  $\theta_{1i}$  sera noté  $\theta_i$  et  $\theta_{2i}$   $\theta_i^*$ . Pour étudier les propriétés du schéma, on suppose que le nombre de Courant reste compris entre 0 et 1. Il est sans difficulté de généraliser les résultats obtenus quelque soit la valeur de ce nombre. Dans ces conditions, l'équation de base discrétisée (avec  $k = 0$ ) s'écrit :

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}^* + 4\theta_n^* + \theta_{n-1}^* &= \theta_{n+1} + 4\theta_n + \theta_{n-1} \\ &- 3\sigma(\theta_{n+1} - \theta_{n-1}) \\ &+ 3\sigma^2(\theta_{n+1} - 2\theta_n + \theta_{n-1}) \\ &- \sigma^3(\theta_{n+1} - 3\theta_n + 3\theta_{n-1} - \theta_{n-2}) \end{aligned}$$

. Analyse de Fourier :

$$\theta(x) = e^{2i\pi(x/\lambda)}$$

$$\text{Soit } \theta_n = \theta(n \Delta x) = e^{i\alpha n} \text{ avec } \alpha = 2\pi \Delta x / \lambda$$

la solution théorique correspondant à  $\theta_n^*$  est égale à  $\theta_n = e^{i\alpha(n-\sigma)}$ .

Le facteur d'amplification du schéma A sera défini par la relation :

$$\theta_n^* = A e^{i\alpha(n-\sigma)}$$

. Module de A :

Posant  $t = 1 - \cos \alpha$ , un calcul sans difficulté montre que :

$$\|A\|^2 = 1 - \left[ \frac{\sigma(1-\sigma)t}{3-t} \right]^2 [3 + 2\sigma(1-\sigma)t]$$

Pour  $\sigma \in [0,1]$  et  $t \in [0,2]$ , la valeur minimale de  $3 + 2\sigma(1-\sigma)t$  est positive, il découle de ceci que  $\|A\| \leq 1$  et que le schéma est stable.

Posant  $A = \|A\| e^{i\phi_A}$  on a :

$$\text{tg}(\omega\sigma - \phi_A) = \frac{\sigma \sin \alpha (3 - \sigma^2 t)}{3 - t(1 + 3\sigma^2) + \sigma^2 t}$$

Les variations de  $\|A\|$  d'une part, et de  $\phi_A$  d'autre part sont portées sur les figures 3a et 3b en fonction du nombre de points de discrétisation par longueur d'onde ( $\lambda/\Delta x$ ) pour différentes valeurs de  $\sigma$ .

On constate que la fonction  $\|A(\sigma, \alpha)\|$  est symétrique par rapport à  $\sigma = 1/2$  et que la fonction  $\phi_A(\sigma, \alpha)$  est antisymétrique par rapport à cette même valeur.

Il apparaît qu'à partir d'un nombre de points par longueur d'onde de 5, le schéma ne fait plus apparaître ni déphasage ni amortissement quelque soit le nombre de Courant. On peut donc constater que bien que les fonctions d'interpolation soient linéaires, il n'y a plus d'amortissement. La formulation forte ne permettait pas l'utilisation d'interpolation linéaire.

Comme dans le cas de la formulation forte, on a testé le schéma sur l'exemple d'une "gaussienne" dans un champ de vitesse constant sur le même maillage. On retrouve sur les résultats de la figure 4 ce qui avait été prévu par l'analyse de Fourier.

I.1.4.3 - Cas général ( $k \neq 0$ ) :

Les fonctions  $\theta(x, t_2)$  et  $k \frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t)$  sont supposées respectivement connues sur  $\gamma_0^{**}$  et  $\gamma_0^* \times [t_1, t_2]$ .

Dans ces conditions désignant par  $I_0^{**}$  l'ensemble des valeurs de  $i$  correspondant à des noeuds situés sur  $\gamma_0^{**}$  le système général s'écrit :

$$i \in I_0^{**} \quad \theta_{2i} = T_i$$

$$i \notin I_0^{**} \quad \sum_j [(\psi_i \psi_j) \omega + k \frac{\partial \psi_i}{\partial n} (\nabla \psi_j) \omega] \theta_{2j} =$$

$$\left( \psi_i \theta_1 \right) \omega_1 - \frac{k \partial \psi_i}{\partial n} (\nabla \psi_j) \omega_1 - \frac{(t_2 - t_1)}{2} \int_{\gamma_0} (\psi_i q|_{t_2} + \psi_i q|_{t_1}) d\gamma$$

avec  $T$  et  $q = -k n \nabla \theta$  grandeurs connues.

Il apparaît donc que la résolution de cette équation nécessite l'inversion d'un système symétrique et positif de même nature que celui fourni par la diffusion si on sait construire des fonctions  $\psi_i$  vérifiant :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \nabla \psi = 0$$

C'est l'objet du paragraphe suivant.

. Calcul des intégrales  $(\psi_i, \theta_1) \omega_1$  et  $(k \nabla \psi_i, \nabla \theta_1) \omega_1$ .

On se place dans le cas bidimensionnel pour expliciter le calcul de ces intégrales. La construction des fonctions  $\psi$  est envisagée ici dans le cas où les fonctions de base  $\psi$  sont paraboliques sur un maillage de triangles droits (voir figure 5).

- A tout noeud M de coordonnées  $x_m, y_m$  du maillage, on fait correspondre un point  $M^c$  de coordonnées  $x_m^c$  et  $y_m^c$  défini comme suit :

$$t = t_2 \quad X = x_m \quad Y = y_m$$

$$\frac{dX}{dt} = u(x,y) \quad \frac{dY}{dt} = v(x,y)$$

$$t = t_1 \quad x_m^c = X \quad y_m^c = Y$$

- A tout triangle T du maillage de  $\omega$  défini par ses noeuds  $S_i (x_i, y_i) i = 1,6$  (sommets et milieux des cotés),

on associe un triangle de référence  $\hat{T}$  rectangle isocèle. Il existe une correspondance biunivoque entre les points intérieurs aux triangles T et  $\hat{T}$ .

Un point M intérieur au triangle T de coordonnées  $(x,y)$  est l'image d'un point  $\hat{M}$  intérieur au triangle  $\hat{T}$  de coordonnées  $(\hat{x}, \hat{y})$  défini par la correspondance :

$$\begin{aligned} x &= \sum_i x_i \varphi_i(\hat{x}, \hat{y}) \\ y &= \sum_i y_i \varphi_i(\hat{x}, \hat{y}) \end{aligned}$$

Cette procédure permet d'associer à tout point d'un triangle T du maillage de  $\omega_2$  un point du triangle  $T^c$ . L'ensemble des triangles  $T^c$  réalise un maillage de  $\omega_1$  en n'ayant convecté que les noeuds de discrétisation.

Remarque : Désignant par A, B et C les isomorphismes faisant correspondre  $\hat{M}$  à M ; M à  $M_c$  et  $M_c$  à  $\hat{M}_c$ , l'isomorphisme CoBoA se réduit à l'identité.

Les intégrales  $(\psi_i, \theta_1) \omega_1$  et  $(k \nabla \psi_i, \nabla \theta_1) \omega_1$  seront obtenues par sommation sur les divers triangles  $T^c$  des intégrales  $(\psi_i, \theta_1)_{T^c}$  et  $(k \nabla \psi_i, \nabla \theta_1)_{T^c}$ .

Calcul de  $(\psi_i, \theta_1)_{T^c}$  et  $(k \nabla \psi_i, \nabla \theta_1)_{T^c}$  :

Pour ce faire, on cherche à calculer les quantités  $\psi_i, \theta_1$  et  $k \nabla \psi_i, \nabla \theta_1$  aux différents points d'intégration.

Description de la procédure de calcul :

.. Choix des points d'intégration  $\hat{P}^c(\hat{x}_p^c, \hat{y}_p^c) \in \hat{T}^c$ .

.. Détermination des points  $P^c(x_p^c, y_p^c) \in T^c$  correspondant aux points  $(\hat{x}_p^c, \hat{y}_p^c) \in \hat{T}^c$ .

.. Détermination de  $\psi_{ip}$  et  $\nabla \psi_{ip}$ .

$$\psi_{ip} = \hat{\varphi}_{ip} \quad \nabla \psi_{ip} = J_p \nabla \hat{\varphi}_{ip}$$

Au point  $(\hat{x}_p, \hat{y}_p)$ , comme CoRoA est l'identité, on a :

$$\hat{\psi}_{ip} = \hat{\varphi}_{ip} \text{ et } \nabla \hat{\psi}_{ip} = \nabla \hat{\varphi}_{ip}$$

$J_p$  jacobien de la transformation  $(x^c, y^c) \rightarrow (\hat{x}_c, \hat{y}_c)$  pris au point  $\hat{x}_p, \hat{y}_p$ .

.. Détermination du triangle  $\hat{T}_p$  du maillage de  $\omega$  tel que  $(x_p, y_p) \in \hat{T}_p$ .

Une telle détermination ne présente pas de difficultés majeures car on connaît a priori les triangles d'appartenance des noeuds du triangle  $T^c$ .

.. Détermination de  $(\hat{x}_p, \hat{y}_p) \in \hat{T}$  :

Remarque : lorsque  $\hat{T}_p$  est un triangle droit (ce qui est le cas) une telle détermination ne présente pas de difficulté.

.. Détermination de  $\hat{\varphi}_{ip}$  et  $\nabla \hat{\varphi}_{ip}$  (espace de référence  $\hat{T}_p$ )

.. Détermination de  $\tilde{\varphi}_{ip}$  et  $\nabla \tilde{\varphi}_{ip}$

$$\tilde{\varphi}_{ip} = \hat{\varphi}_{ip} \nabla \hat{\varphi}_{ip} = J_p \nabla \hat{\varphi}_{ip}$$

$\tilde{J}_p$  jacobien de la transformation  $(\tilde{x}_p, \tilde{y}_p) \rightarrow (\hat{x}_p, \hat{y}_p)$ .

.. Détermination de  $\theta_{ip}$  et  $\nabla \theta_{ip}$  à partir des valeurs de :

$\tilde{\varphi}_{ip}$  et  $\nabla \tilde{\varphi}_{ip}$  (espace  $\tilde{T}_p$ )

valeurs de  $\theta_1$  aux noeuds du triangle  $\tilde{T}_p$

.. Calcul de  $(\psi_1 \theta_1)_{TC} + (k \nabla \psi_1 \nabla \theta_1)_{TC}$  :

$$(\psi_1 \theta_1 + k \nabla \psi_1 \nabla \theta_1)_{TC} = \frac{\text{Aire}(\hat{T}^c)}{2} \sum_{p=1}^N \omega_p |\det J_p| (\theta_{ip} \psi_{ip} + \nabla \theta_{ip} \nabla \psi_{ip})$$

(intégration par formule numérique).

Un seul cas d'utilisation de la convection faible a été testé : celui des cônes dans un champ de vitesse circulaire dans des conditions analogues à celui présenté précédemment. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 5 bis. On note une nette amélioration par rapport à ceux présentés figure 2b (maximum supérieur après un tour à 85 %).

## 1.2. - Equations de la Mécanique des Fluides :

Seule la formulation forte a été utilisée à ce jour pour traiter les équations définies (1), (2), (3). La formulation faible se généraliserait très facilement à ces équations et, comme nous l'avons vu permettrait sans doute d'obtenir de meilleurs résultats ; ce point fait l'objet des développements actuels. Les exemples qui vont être présentés utilisent la formulation suivante :

Si on désigne par  $G^n$  les grandeurs au temps  $nDT$  que l'on suppose connues (on cherche à déterminer celles au temps  $(n-1)DT$ ), il est alors facile de montrer que la résolution des équations (1), (2), (3) peut être effectuée en deux étapes dans un pas de temps de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{U}^{n+1} - \tilde{U}^n}{\Delta T} + O(U)^n \otimes \nabla U^n = 0 \\
(1) \quad & \frac{C^2(P)DT}{\tilde{T} - T^n} + Q(U)^n \nabla T^n = 0 \\
& \frac{DT}{p^{n+1} - p^n} + \nabla \cdot U^{n+1} = 0 \\
(2) \quad & \frac{U^{n+1} - \tilde{U}^n}{DT} + \nabla p^{n+1} - \text{Diff } U^{n+1} + F(U, T) = 0 \\
& \frac{T^{n+1} - \tilde{T}^n}{DT} - \text{Diff } T^{n+1} + S(U, T) = 0
\end{aligned}$$

La première étape est discrétisée en utilisant la procédure décrite au I.1, la deuxième étape est résolue par différents procédés déjà décrits dans la littérature [6], [9]. Cette façon de procéder conduit à une résolution explicite de la convection qui est inconditionnellement stable. D'autre part, la résolution des équations (1), (2), (3) ne conduit qu'à des inversions de matrices symétriques.

On trouve dans [2] et [4] des comparaisons sur l'écoulement incompressible dans une cavité carrée à paroi mobile (Driven Cavity) qui montrent que les résultats obtenus par la présente méthode sont en accord avec ce qui avait été publié précédemment par d'autres auteurs à bas nombre de Reynolds. On constate d'autre part que la méthode permet de "monter en Reynolds" sans voir naître d'oscillations parasites. Ceci ne signifie pas pour autant que l'écoulement trouvé ait physiquement un sens.

## II - Quelques exemples :

Il n'est pas possible de décrire en détail ici les différents modèles utilisés pour traiter les exemples qui vont suivre. On se limite à décrire brièvement les résultats en renvoyant le lecteur intéressé à une référence plus complète.

### II.1 - Equations de St Venant :

Ce sont les équations qui régissent les équations de la marée au voisinage des côtes. Elles sont du type mentionné dans l'introduction, la hauteur d'eau joue le rôle de la pression et la célérité des ondes dépend de cette hauteur de la manière suivante  $C(h) = \sqrt{gh}$  où  $g$  désigne l'accélération de la pesanteur. Au voisinage des côtes, il faut faire intervenir une diffusion (qui est un des paramètres du modèle) afin de reproduire les couches limites qui se développent. Sur la figure 6, on trouve le champ de vitesse calculé à différents instants de la marée, on remarque l'importance des termes non linéaires de convection qui sont responsables avec les termes de viscosité de l'apparition de tourbillons importants.

La résolution de la partie (2) est décrite dans [8]. Elle s'apparente à celle décrite dans [6]. Une collaboration est à l'heure actuelle mise en œuvre entre l'I.N.R.I.A. et l'E.D.F. afin de perfectionner la résolution de cette partie.

### II.2 - Ecoulement dans un échangeur :

Un échangeur est un milieu fluide en présence de très nombreux obstacles. Ceux-ci sont suffisamment denses et proches pour qu'il soit "raisonnable" de ne chercher à déterminer que des grandeurs moyennes dans le milieu.

On trouve dans [15] et [16] une modélisation de ce type d'écoulement qui met en oeuvre des techniques d'homogénéisation. Les équations trouvées sont du même type mais les opérateurs de diffusion soit sont négligeables, soit n'ont pas les propriétés classiques [16]. Sur la figure 7 on trouve les résultats d'un calcul utilisant cette approche. Là encore, le rôle des termes de convection est important. Des tests ont montré que l'écoulement était radicalement modifié dans la zone d'entrée lorsqu'ils étaient négligés.

Ce modèle appliqué à l'échangeur du réacteur Phénix a donné des résultats tout à fait comparables aux mesures in situ [14] (figure 7).

### II.3 - Ecoulements en cavité :

Dans ce cas, le problème consiste à chercher le champ thermique le long de certaines parois afin de déterminer ultérieurement les contraintes qui en résultent. On doit donc mettre en oeuvre une modélisation assez fine car le champ thermique de paroi est très largement influencé par l'écoulement à l'intérieur de la cavité. Il convient dans ce cas de bien représenter d'une part le domaine de calcul (on utilise dans la mesure du possible les mailles curvilignes ou les éléments finis) et d'autre part les échanges turbulents.

Sur ce dernier point, un modèle est assez largement utilisé bien qu'imparfait. Il s'agit de calculer l'énergie cinétique turbulente et la dissipation par deux équations supplémentaires [10] et d'en déduire une diffusion turbulente à introduire pour simuler l'effet des fluctuations turbulentes sur l'écoulement moyen que l'on cherche à approcher. Dans ce cas on moyenne (homogénéise) sur des échelles de temps et d'espace de l'ordre de grandeur des échelles de la turbulence.

Le premier exemple est celui d'une tuyauterie industrielle dans laquelle circule du sodium liquide. A l'entrée de la tuyauterie un choc thermique d'une amplitude 170°C se produit brutalement. Sur la figure 8, on trouve le champ de vitesse et de température à différents instants du choc et la comparaison avec des résultats expérimentaux.

On peut constater que la stratification prédite par le modèle dans la partie horizontale de la conduite a effectivement lieu. Le modèle de turbulence utilisé bien que sommaire, permet de reproduire ce phénomène. On trouve dans [12] et [10] une description complète du modèle utilisé et des comparaisons avec les expériences. Le deuxième exemple est celui de la cuve chaude du futur réacteur (éventuellement !) Super Phénix 2. Plus précisément, le problème consiste à déterminer les effets sur les structures au contact du sodium d'une décroissance brutale de température.

Ici, la modélisation bidimensionnelle a été abandonnée. Les équations de Navier Stokes à trois dimensions d'espace couplées à une équation thermique ont été résolues en transitoire. La géométrie choisie est 1/8ème du réacteur. Elle est représentée à l'aide de coordonnées cylindriques. Compte tenu de la taille du problème, le système de coordonnées choisi était assez simplifié et ceci conduit à une description des frontières qui n'est pas parfaite. On utilise les différences finies pour traiter la deuxième étape.

La figure 8 représente une vue en perspective du champ de vitesse à l'état permanent. A partir de cet état, un transitoire a été réalisé. Sur la figure 8, on trouve également le champ thermique à divers instants après le début du choc. La comparaison avec des expériences montre une assez bonne concordance [13].

## CONCLUSIONS

Les difficultés numériques qui apparaissent quand on cherche à bien représenter les échanges par convection constituent un vieux problème pour les mécaniciens des fluides qui réalisent des codes de calcul. Les éléments de solutions qui ont été décrits ici ne sont, bien sûr, pas les seuls envisageables, l'intérêt de la méthode proposée réside dans sa relative facilité de mise en oeuvre d'une part, et dans le fait qu'elle introduit une diffusion numérique assez faible d'autre part.

Seule la formulation forte a été utilisée à ce jour pour traiter des exemples pratiques. La présentation qui a été faite d'une formulation faible permet de penser que l'on devrait obtenir de meilleurs résultats en l'utilisant. Ce point est en cours de développement à l'heure actuelle.

Les quelques exemples ont permis de constater que, suivant la grandeur recherchée, le modèle n'était pas le même. Les échanges turbulents par exemple étant modélisés de façon très différente, lorsque l'on s'intéresse à un échangeur de chaleur, ou quand il s'agit d'une cuve de réacteur. Dans l'avenir, la possibilité d'effectuer des calculs en trois dimensions devrait permettre de mettre au point des modèles de turbulence où on ne chercherait plus un écoulement moyen indépendant du temps mais où on décrirait le comportement des gros tourbillons. Ceci ne peut se faire que grâce à la venue sur "le marché" de nouveaux calculateurs vectoriels ; cela apporte en effet un gain de temps considérable et donc favorise, d'une part, l'utilisation de méthodes assez coûteuses, comme les éléments finis ou les mailles curvilignes, et, d'autre part, une utilisation courante de calculs tridimensionnels.

### Définition - notation :

On suppose la solution de l'équation que l'on cherche à résoudre connue à l'instant  $t_1$  et on cherche à la déterminer au temps  $t_2$ .

$\omega$  domaine d'intégration à l'instant  $t_2$   $Y$  sa frontière.

La frontière  $Y$  se décompose en trois parties :

- \* $Y^+$  correspondant à  $u.n > 0$
- \* $Y^0$  correspondant à  $u.n = 0$  (\*)
- \* $Y^-$  correspondant à  $u.n < 0$

$Y_0^*$  partie de  $Y_0$  où  $\theta(x, t_2)$  est connu

$Y_0^{**}$  partie de  $Y_0$  où  $\frac{\partial \theta}{\partial n}(x, t_2)$  est connu

avec  $n$  normale extérieure au domaine.

On admet que l'on sait prolonger la fonction  $u(x, t)$  à l'extérieur de  $\omega$  au voisinage de  $Y^-$ .

$$X(x, t, \tau) : \frac{dx}{d\tau} = u(x, \tau) \quad X(x, t, t) = x$$

domaine  $\omega_2 = \omega$

domaine  $\omega_1 =$  ensemble des points  $X(x, t_2, t_1)$  pour  $x \in \omega$ .

$$\begin{aligned} \text{A l'instant } t_1 \quad \theta(x, t_1) &= \theta_1(x) = \sum_j \delta_{1j} \varphi_j(x) \\ t_2 \quad \theta(x, t_2) &= \theta_2(x) = \sum_j \delta_{2j} \varphi_j(x) \end{aligned}$$

$\varphi_i(x)$  fonction de base du domaine  $\omega$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

| 1| Simulation numérique en Mécanique des Fluides par la méthode des éléments finis (Formation Permanente Nice 19-23 Janvier 1980).

| 2| J.P. BENOUE - B. IBLER - A. KERAMSI - G. LABADIE : A finite element method for Navier Stokes equations. Proceedings of the Third International Conference on Finite Elements in flow Problems. Banff Alberta Canada. June 12-13 1980.

| 3| O. PIRONNEAU : On the transport diffusion algorithm and its applications to the Navier Stokes equations. Rapport INRIA.

| 4| J.P. BENOUE - B. IBLER - G. LABADIE : A finite element method for Navier Stokes equations - Proceedings of the International Conference on Numerical Methods for Non Linear Problems. Swansea U.K.. Septembre 2-5 1980.

| 5| F. THOMASSET : Finite element methods for Navier Stokes equations. Rapport INRIA. VKI lecture series Computational Fluid Dynamics. March 25-29 1980.

| 6| M.O. BRISTEAU - R. GLOWINSKI - J. PERIAUX - P. PERRIER - O. PIRONNEAU - G. POIRIER : Application of optimal control and finite element methods to the calculation of transonic flows and incompressible viscous flows. Rapport de recherche n° 294. Avril 1978. Laboria IRIA.

| 7| B. IBLER : Résolution des equations de Navier Stokes par une méthode d'éléments finis. Thèse de 3ème cycle. Université de Paris Sud 1981.

| 8| G. LABADIE - J.P. BENOUE - B. LATTEUX : A finite element method for the shallow water equations 2nd International Conference on Numerical Methods for Laminar and Turbulent Flow (Venice, Italy).

| 9| A.J. CHORIN : The numerical solution of the Navier Stokes equations for an incompressible fluid 1967. Bulletin Amer. Math. Soc.

| 10| W. RODI : Turbulence models for environmental problems. Prediction methods for turbulent flows. VKI lectures séries 1979.2.

| 11| LANDAU - LIFCHITZ : Mécanique des fluides. Editions de Moscou.

| 12| P.L. VIOLLET : Modélisation numérique de courant de densité dans une conduite non rectiligne. Rapport E.D.F. E44/81.30.

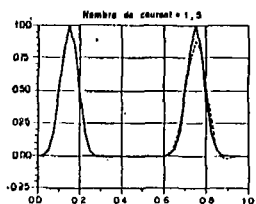
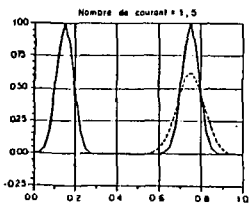
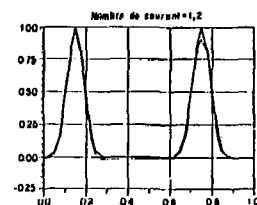
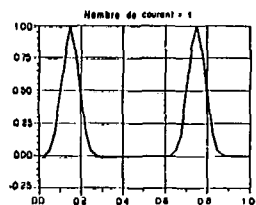
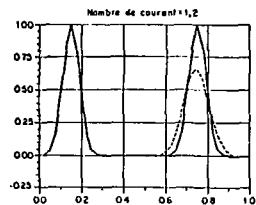
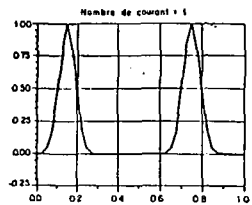
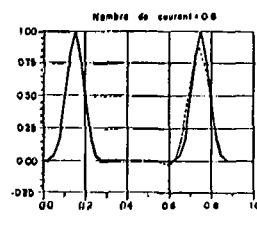
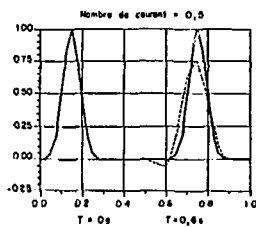
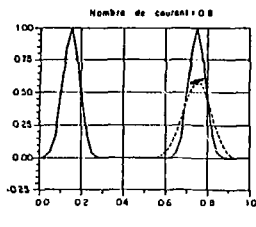
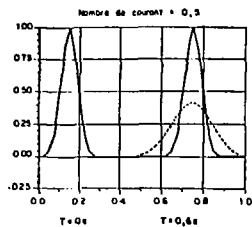
| 13| P. ESPOSITO : Tentatives de calculs tridimensionnels stationnaires et transitoires dans la cuve chaude de Super Phénix. Rapport E.D.F. E41/78.07.

| 14| O. DAUBERT : Phénix. Echangeurs intermédiaires. Etudes des répartitions thermiques primaire et secondaire dans le faisceau de tubes. Rapport E.D.F. E41/78.01.

| 15| J.P. BENOUE : Quelques modèles mathématiques en hydraulique industrielle. GANNI Congrès International sur les Méthodes Numériques de l'Ingénieur. Chateaufort Malabry. Décembre 1980

| 16| J.P. BENOUE : Champ de température moyen dans un échangeur. Rapport E.D.F. à paraître.





TRANSPORT D'UNE GAUSSIENNE

Interpolation linéaire

— solution exacte  
 - - - - calcul

Figure 1a

TRANSPORT D'UNE GAUSSIENNE

Interpolation quadratique

— solution exacte  
 - - - - calcul

Figure 1b

Transport d'un cône dans un champ circulaire.

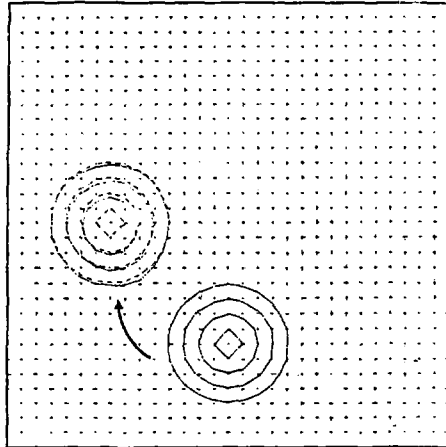


Fig. 2.a : cône initial et après 1/4 de tour.  
( — solution calculée, ---- solution exacte).

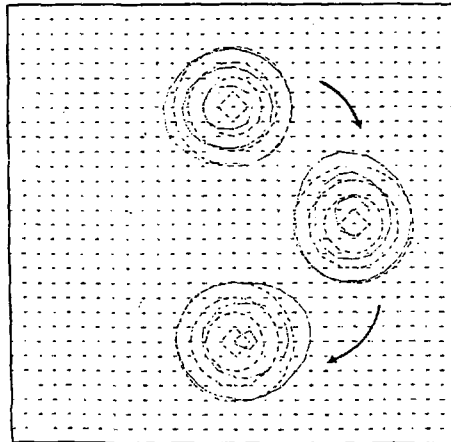


Fig. 2.b : cône après 1/2, 3/4 et 1 tour complet.

# FACTEUR D'AMORTISSEMENT ET DE DEPHASAGE

AMPLITUDE

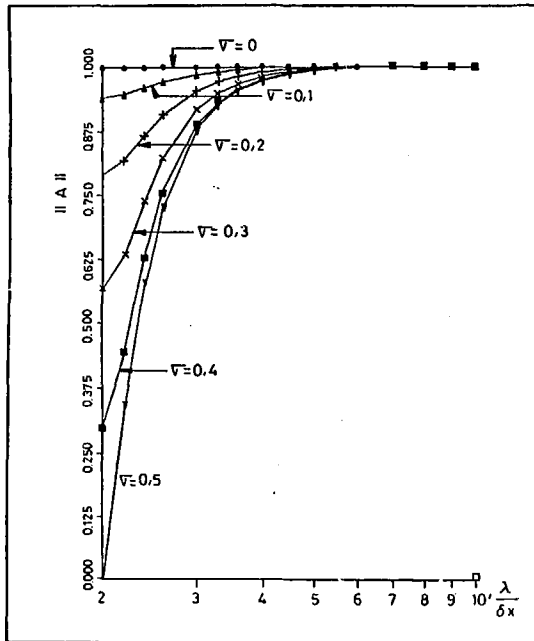


Figure 3a

ERREUR DE PHASE

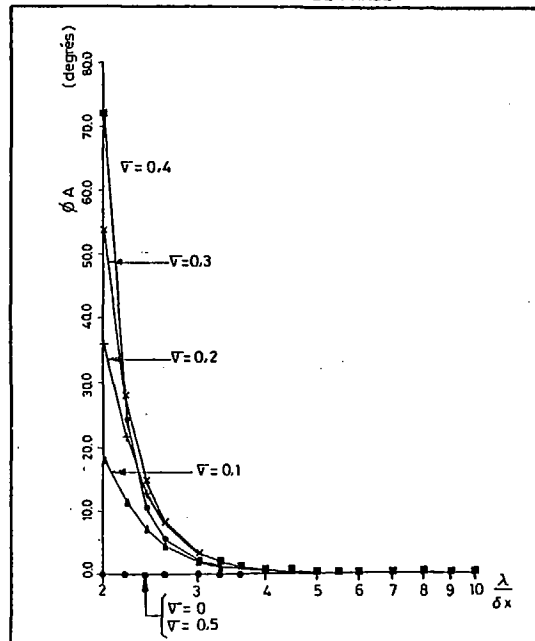
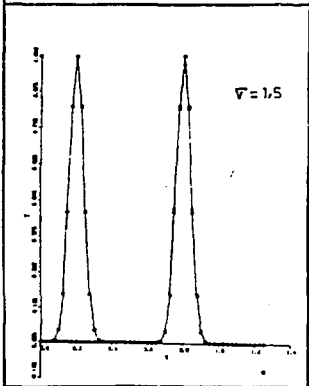
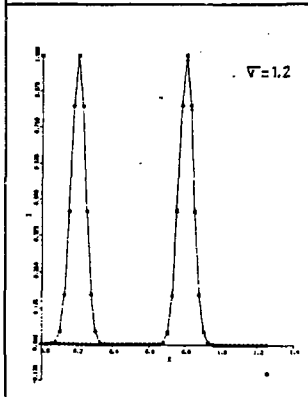
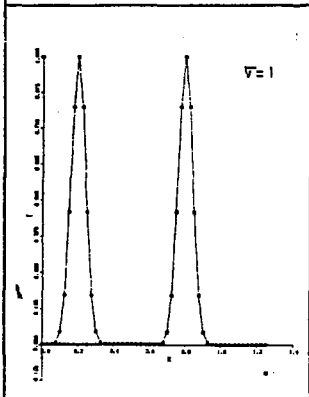
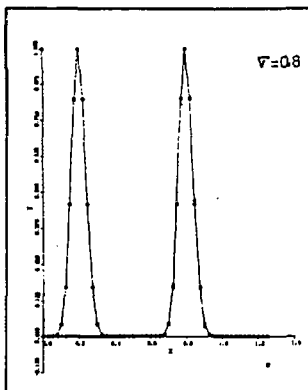
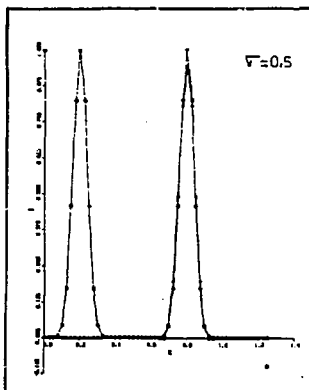


Figure 3b



TRANSPORT D'UNE GAUSSIENNE

o solution exacte  
 Δ calcul

FIGURE: 4

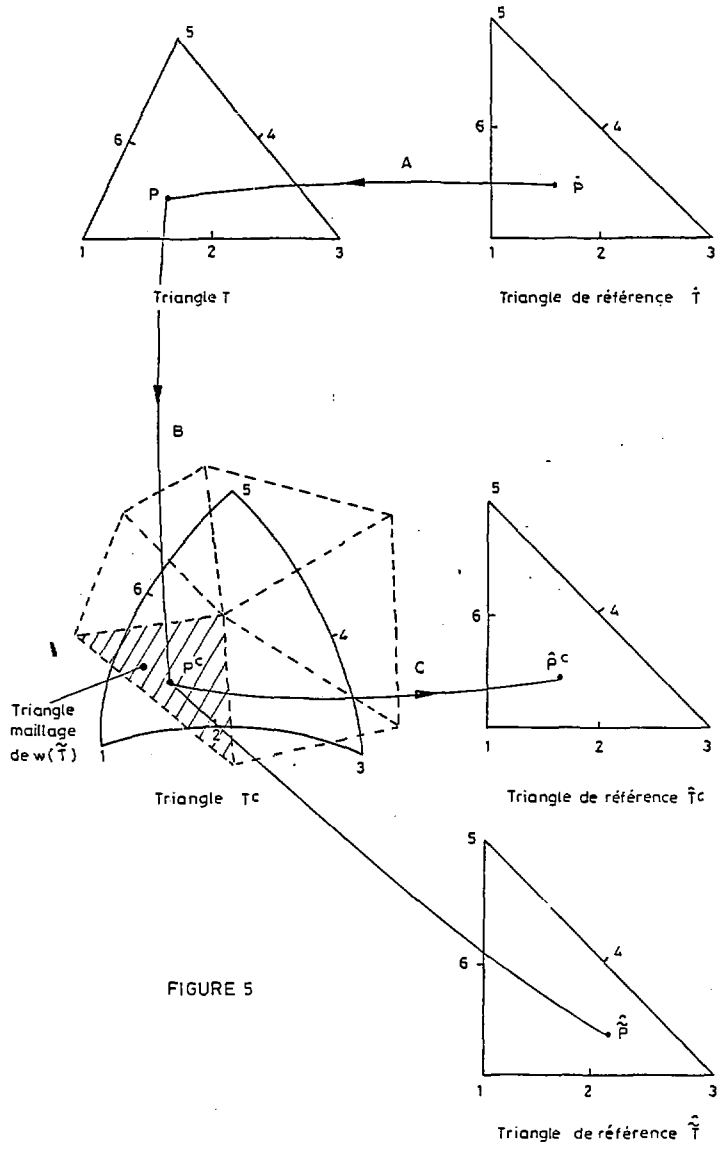


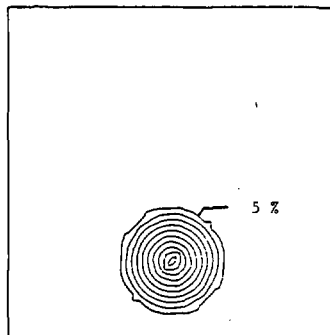
FIGURE 5

TRANSPORT D'UN CONE  
(convection faible)

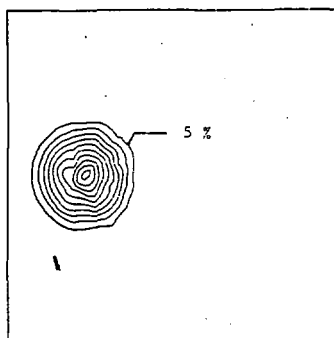
Champ de vitesse circulaire  
tel qu'un tour  
correspond à 48 pas de temps

Approximation  $P_2$

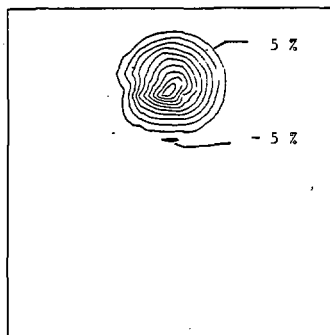
Isovaleurs correspondant à  
- 5 %, + 5 %, + 15 %, etc ...



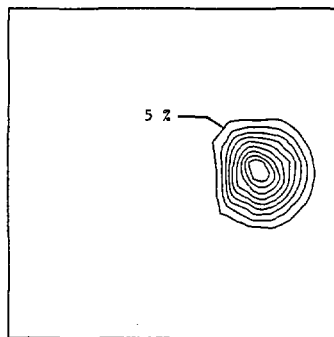
Instant initial



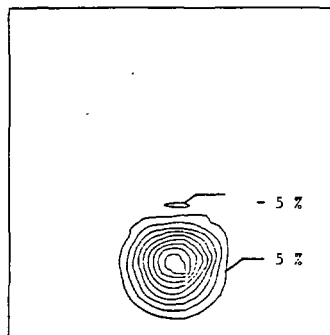
1/4 de tour



1/2 tour

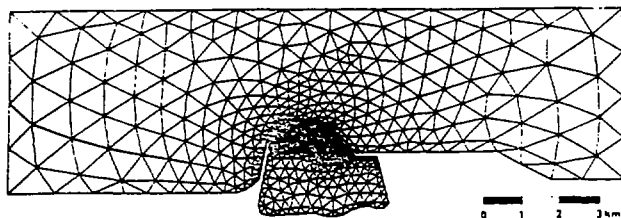


3/4 de tour

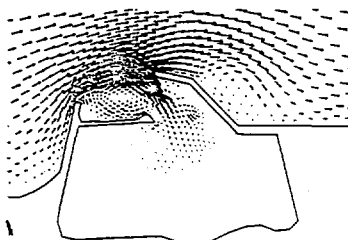


1 tour

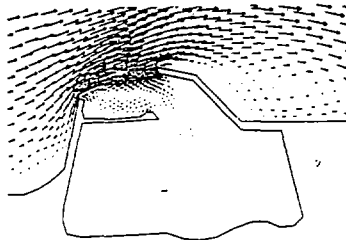
FIGURE 5 bis



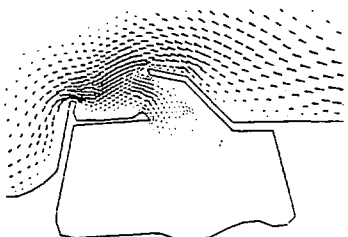
Maillage en élément finis



Champ de vitesse  
2H00 avant PM

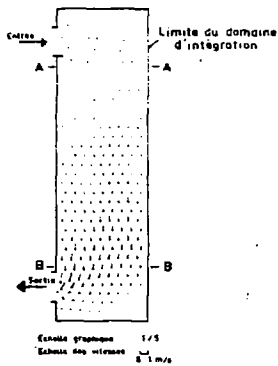


Champ de vitesse  
0 H45 avant PM

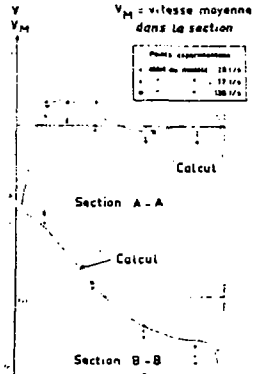


Champ de vitesse  
3H00 après PM

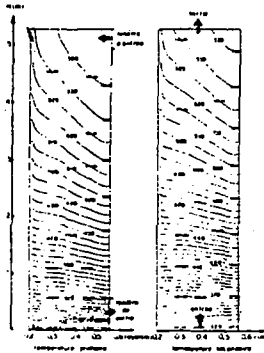
Fig 6 Calcul des courants  
de marées dans l'avant-port de  
Dunkerque par élément finis



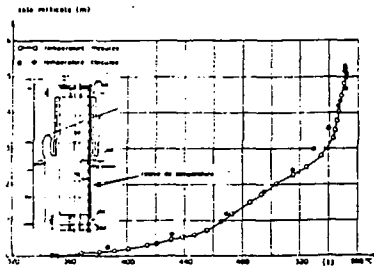
**CALCUL DU CHAMP DE VITESSE**  
(Champ de courants :  $T = 23$ )



**REPARTITION TRANSVERSALE  
DES VITESSES LONGITUDINALES**



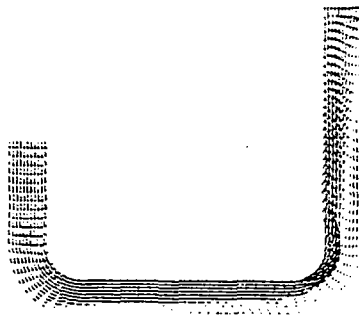
**CHAMPS DE TEMPERATURE**



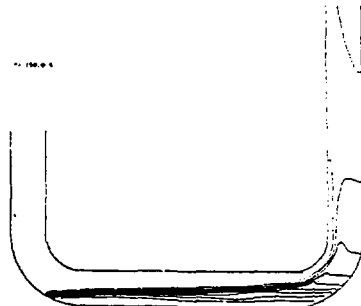
**PHENIX  
TEMPERATURE DU SODIUM PRIMAIRE  
CALCUL - MESURE**

**FIGURE:7**

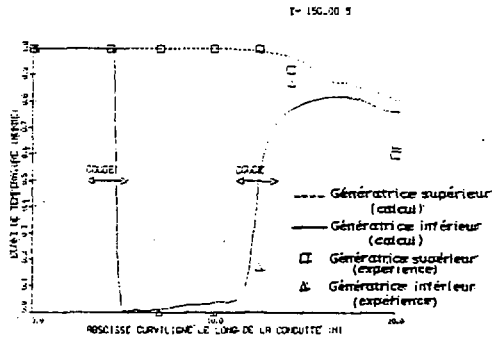




Champ de vitesse 150s après le début du transitoire



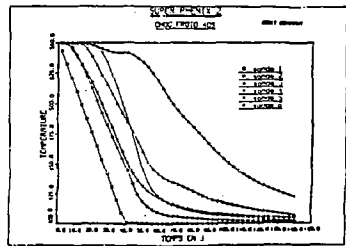
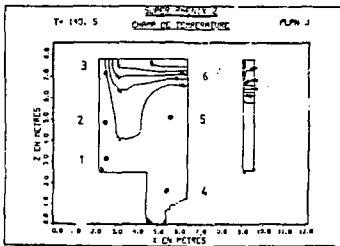
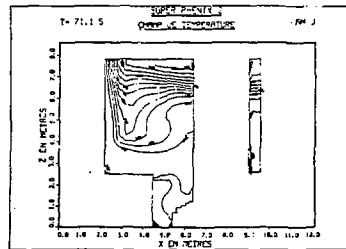
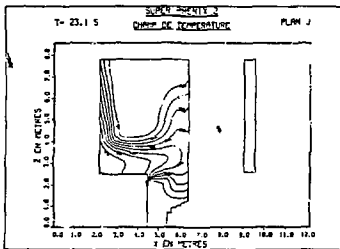
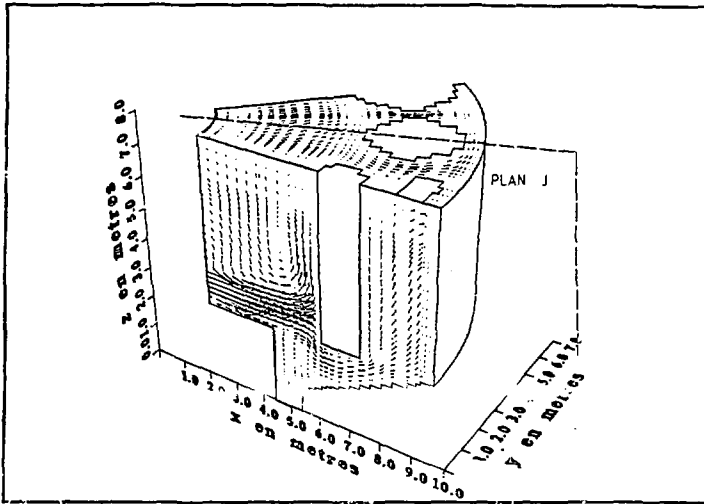
Champ thermique 150s après le début du transitoire



Comparaison des résultats expérimentaux et des résultats de calcul 150s après le début du transitoire

FIGURE 8

# Super Phenix 2



POSITION DES SONDES-

FIGURE 9