FR8301384

ELECTRICITE DE FRANCE
DIRECTION DES ÉTUDES ET RECHERCHES

Service Applications de l'Electricité et Environnement

DEPARTEMENT LABORATOIRE NATIONAL D'HYDRAULIQUE

6, quai Watier
78400 CHATOU
Tél. : 977-02-44

EDF - 82H406492

A. WARLUZEL - J.P. BENQUE

DISPERSION DANS UNE MER A MAREE

HE/041/78/09

Résumé

Ce rapport est relatif à la dispersion dans un écoulement moyen bidimensionnel - cas de la mer par exemple - Il présente une théorie qui aboutit à définir la dispersion par un tenseur (2x2) dont on établit l'expression littérale de ses termes en fonction de la répartition de la vitesse de l'écoulement suivant la verticale et du coefficient de viscosité turbulente. Une estimation pessimiste (faible) des coefficients de ce tenseur est ensuite fournie en calculant la répartition des vitesses suivant la verticale dans le cas où le fond est plat, le domaine infini, le vent nul et en se donnant une répartition verticale de la viscosité turbulente dont l'estimation est tirée de la littérature. Les résultats en régime permanent comme en régime de marée sont présentés sous forme d'abaques. Les coefficients du tenseur de dispersion ont également été calculés à partir de mesures en nature donnant la répartition des vitesses suivant une verticale et exécutées par le L.N.H. au large de Flammanville.

☐ Confidentiel
☐ Diff. restreinte
☐ Diff. EDF
■ Diff. générale
☐ Non signalé

S O M M A I R E

INTRODUCTION

Dans de nombreux problèmes de pollution où la principale inconnue est le champ de concentration de l'effluent on peut être amené à s'intéresser à une valeur de cette concentration moyenne sur une ou deux directions de l'espace. Ainsi dans le modèle filaire on prend comme inconnue la concentration moyenne dans une section de l'écoulement. Daubert [1] a alors montré en repartant des idées de Taylor que cette concentration moyenne vérifie une équation de transport-diffusion où la diffusion est due aux hétérogénéités de vitesses et de concentration autour des moyennes dans une section. Ce mécanisme est à une échelle spatiale très supérieure à celle de la diffusion turbulente et est appelé dispersion. Le coefficient de diffusion (dispersion) s'exprime en fonction des fluctuations de vitesse autour de la valeur moyenne dans une section et de la diffusion turbulente.

Dans ce rapport on a tenté de généraliser le résultat obtenu par Daubert au cas où l'écoulement moyen est bidimensionnel, la grandeur considérée est la valeur moyenne de la concentration dans une direction de l'espace. Ce cas est celui des rejets en mer à marée où la turbulence est suffisamment forte pour rendre presque homogène la concentration et la vitesse sur la verticale. On met en évidence dans ce cas un tenseur de dispersion (2,2) non diagonal, dont chacune des composantes s'exprime en fonction des hétérogénéités de vitesse sur la verticale et de la diffusion turbulente.

Une première estimation de la valeur de chacune des composantes de ce tenseur est obtenue en calculant un profil vitesse vertical pour un courant de masse donné [illegible]

[illegible] à partir de mesures in situ en Manche, une autre estimation peut être donnée, les valeurs obtenues sont supérieures à celles obtenues par le [illegible]

I - POSITION DU PROBLEME

Lorsqu'un écoulement présente deux directions prépondérantes suivant lesquelles s'effectuent les transferts de masse, il appartient à la classe des écoulements plans. C'est le cas des écoulements dus à la marée. Il est naturel de les modéliser en première analyse en utilisant la vitesse moyennée sur la direction verticale. Moyennant quelques hypothèses simplificatrices on aboutit aux équations de Saint-Venant qui donnent, quand on les a résolues, les courants de marée et le marnage en tout point du domaine d'intégration.

Lorsque cet écoulement sert à transporter et mélanger un effluent on est conduit à chercher également une concentration moyenne sur la verticale. *Le paragraphe suivant a pour but d'établir les équations qui régissent* le champ de concentration moyenne sur la verticale d'un polluant placé dans un écoulement de marée.

I.I - Equation de la concentration moyenne

On note par x et y les deux directions horizontales et par z la direction verticale. Si on désigne par $c\,(x,y,z,t)$ le champ de concentration du polluant à tout instant, l'équation d'évolution de ce champ, s'écrit :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} + v\frac{\partial c}{\partial y} + w\frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\, d_c\, \frac{\partial c}{\partial z} \qquad (1)$$

Avec les notations suivantes :

u, v, w : les composantes de la vitesse suivant x, y, z

d_c désigne le coefficient de diffusion turbulente

On ne tient compte que de la diffusion turbulente dans la direction verticale ; on constate en effet que suivant cette direction les termes de convection sont faibles et les gradients sont les plus importants. (Hypothèse de Taylor).

On pose :

$$u\ (x,\ y,\ z,\ t) = \overline{u}\ (x,\ y,\ t) + u'(x,\ y,\ z,\ t)$$

$$v\ (x,\ y,\ z,\ t) = \overline{v}\ (x,\ y,\ t) + v'(x,\ y,\ z,\ t)$$

$$c\ (w,\ y,\ z,\ t) = \overline{c}\ (x,\ y,\ t) + c'(x,\ y,\ z,\ t)$$

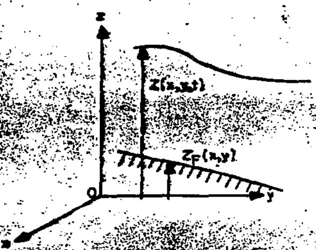
En intégrant cette équation sur la verticale on obtient :

$$\int_{ZF}^{Z} \frac{\partial c}{\partial t}\, dz + \int_{ZF}^{Z} \left(\frac{\partial uc}{\partial x} + \frac{\partial vc}{\partial y}\right) dz + \Big[c\ w\Big]_{ZF}^{Z} = \Big[d_t\ \ \frac{\partial c}{\partial z}\Big]_{ZF}^{Z}$$

Le terme entre crochet du membre de droite représente les flux du polluant à la surface libre et au fond, posons :

$$\Big[d_t\, \frac{\partial c}{\partial z}\Big]_{ZT}^{Z} = \phi_s + \phi_F$$

Les normales unitaires à la surface libre et au fond, en supposant que les composantes de grad Z et grad ZF restent petites devant 1, s'écrivent :



$$\vec{n}\ \text{surface} \left|\begin{array}{l} -\dfrac{\partial Z}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial Z}{\partial y} \\ \quad 1 \end{array}\right.$$

$$\vec{n}\ \text{au fond} \left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial Z_F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Z_F}{\partial y} \\ \quad 1 \end{array}\right.$$

L'imperméabilité de la surface libre et du fond s'écrivent :

A la surface libre :

$$w\ (x,y,Z,t) = \frac{\partial Z}{\partial t} + u\ (x,y,Z,t)\ \frac{\partial Z}{\partial x} + v\ (x,y,Z,t)\ \frac{\partial Z}{\partial y}$$

Au fond :

$$w\ (x,y,Z_F,t) = u\ (x,y,Z_F,t)\ \frac{\partial Z_F}{\partial x} + v\ (x,y,Z_F,t)\ \frac{\partial Z_F}{\partial y}$$

En tenant compte de ces expressions, l'intégration donne :

$$\boxed{\frac{\partial h\,\bar{c}}{\partial t} + \frac{\partial h\,\bar{\bar{u}}\,\bar{c}}{\partial x} + \frac{\partial h\,\bar{v}\,\bar{c}}{\partial y} + \frac{\partial h\,\overline{u'c'}}{\partial x} + \frac{\partial h\,\overline{v'c'}}{\partial y} = \phi_s + \phi_F} \qquad \text{(1 bis)}$$

Avec

$$\overline{u'c'} = \frac{1}{h}\int_{Z_F}^{Z} u'\,c'\,dz \qquad\qquad h = Z - Z_F$$

$$\overline{v'c'} = \frac{1}{h}\int_{Z_F}^{Z} v'\,c'\,dz$$

I.2 – Tenseur de dispersion

Ces équations font apparaître la divergence d'un vecteur $\vec{\psi}$ inconnu de composantes $\overline{u'c'}$, $\overline{v'c'}$.

Par analogie à ce qui est fait pour résoudre certains problèmes relatifs aux écoulements turbulents on est tenté d'écrire :

$$\vec{\psi} = \bar{\bar{K}}\ \text{grad}\ \bar{C}$$

où $\bar{\bar{K}}$ est un tenseur (2,2) appelé tenseur de dispersion.

L'objet de ce rapport est d'établir ce résultat et ses conditions de validité et de donner une estimation du tenseur $\bar{\bar{K}}$.

II – TRANSPORT HORIZONTAL PAR CONVECTION ET DIFFUSION VERTICALE

L'analyse du phénomène physique a été faite par Taylor [2] puis reprise par Daubert [1]. Le résultat cherché dépend essentiellement de la comparaison entre deux échelles de temps ; celle liée à la convection horizontale et celle de la diffusion verticale.

II.1 – Echelles des temps

Si on désigne par L une longueur qui caractérise l'échelle horizontale et par H celle correspondant à échelle verticale :

Le temps caractéristique de la convection horizontale s'écrit :

$$T_{CV} = L / U_o$$

où U_o représente une vitesse caractéristique de la convection horizontale. De même on définit un temps caractéristique de la diffusion verticale :

$$T_{diff} = H^2 / D$$

où D représente un coefficient de diffusion caractéristique de la turbulence verticale.

On s'intéresse au cas où les hétérogénéités de concentration de polluant sur la verticale sont faibles, c'est-à-dire lorsque la diffusion a le temps d'agir vis-à-vis des échanges convectifs. On suppose que l'on a :

$$\frac{T_{diff}}{T_{CV}} = \nu \ll 1$$

La validité de cette hypothèse sera examinée par la suite.

Lorsque l'effluent a des échanges non nuls avec l'atmosphère ou avec le fond, il intervient une nouvelle échelle de temps : celle qui caractérise ces échanges. Supposons qu'il n'y a d'échanges qu'à travers la surface libre c'est le cas lorsque l'effluent est la température, le fond peut être considéré comme adiabatique. Soit ϕ_{so} la grandeur caractéristique de l'échange à la surface libre. On définit une échelle de temps des échanges atmosphériques en posant :

$$T_{ech} = \frac{H\,C_o}{\phi_{so}}$$

C_o caractérise les variations de la concentration moyenne sur la verticale de polluants.

L'expérience montre que dans les cas courants (température) on a :

$$\frac{T_{CV}}{T_{ech}} = \nu' \ll 1 \qquad \nu' \simeq \nu$$

Ces hypothèses étant fixées on va maintenant examiner les simplifications qu'elles entraînent au niveau de la mise en équations. Pour cela on utilise la mise sous forme adimensionnelle.

II.2 - Mise sous forme adimensionnelle

On cherche à relier les deux intégrales suivantes aux grandeurs moyennes, aux fluctuations de vitesse et à la diffusion turbulente :

$$\overline{u'c'} = \frac{1}{h}\int_{Z_F}^{Z} u'c'\,dz$$

$$\overline{v'c'} = \frac{1}{h}\int_{Z_F}^{Z} v'c'\,dz$$

Ainsi si il était possible de déterminer c' en fonction de $\overline{c}$, $\overline{u}$, u' et d_t, il suffirait alors de remplacer c' par sa valeur dans l'intégrale. L'équation qui fait intervenir c' est l'équation (1) que l'on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial z} d_t \frac{\partial c'}{\partial z} - \frac{\partial c'}{\partial t} - \overline{u}\frac{\partial c'}{\partial x} - \overline{v}\frac{\partial c'}{\partial y} - u'\frac{\partial c'}{\partial x} - v'\frac{\partial c'}{\partial y} - w\frac{\partial c'}{\partial z} = \frac{\partial \overline{c}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{c}}{\partial x} + u'\frac{\partial \overline{c}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{c}}{\partial y} + v'\frac{\partial \overline{c}}{\partial y} \qquad (2)$$

Avec : $d_t \dfrac{\partial c'}{\partial z} = \phi_s$ en $z = Z$

$d_t \dfrac{\partial c'}{\partial z} = 0$ en $z = Z_F$

On a ici placé de part et d'autre du signe égal ce qui est connu de ce qui ne l'est pas. Les hypothèses sur les temps caractéristiques des différents phénomènes permettent de simplifier cette équation.

La mise sous forme adimensionnelle s'effectue de la façon suivante :

$\overline{c} = C_o \, \overline{c}_+$ — C_o concentration de référence précédemment introduite

$\overline{u} = U_o \, \overline{u}_+$ — U_o vitesse de référence précédemment introduite

$\overline{v} = U_o \, \overline{v}_+$

$u' = U_o \, u'_+$
$v' = U_o \, v'_+$ — Les fluctuations de vitesse autour de la moyenne verticale du même ordre de grandeur que la grandeur moyenne

$w = \varepsilon U_o \, H w_+ / L$*

$c' = \varepsilon \, C_o \, c'_+$ — Les fluctuations de concentration autour de la valeur moyenne sont considérées petites vis-à-vis de c

$d_t = D \, d_{t+}$ — D coefficient de diffusion turbulent de référence précédemment introduit. On pose souvent $D = U_o H$ afin d'exprimer que la turbulence est conditionnée par la convection horizontale et l'échelle verticale.

$x = L . x_+$ — L longueur de référence horizontale précédemment introduite

$y = L \, y_+$

$z = H \, z_+$ — H longueur de référence verticale

$t = T_{CV} \, t_+^{o}$ ou $t = T_{diff} t_+$ — Le temps caractéristique des variations temporelles de $\overline{c}$ est lié à la convection alors que celui des variations c' est lié à la diffusion turbulente.

En remplaçant dans (2), on obtient** :

$$\frac{\varepsilon C_o}{T_{diff}} \frac{\partial c'_+}{\partial t_+} + \frac{\varepsilon U_o C_o}{L} \left(\overline{u}_+ \frac{\partial c'_+}{\partial x_+} + \overline{v}_+ \frac{\partial c'_+}{\partial y_+} + u'_+ \frac{\partial c'_+}{\partial x_+} + v'_+ \frac{\partial c'_+}{\partial y_+} \right) + \varepsilon^2 \frac{U_o}{L} C_o W_+ \frac{\partial c'_+}{\partial z_+}$$

$$- \frac{D \varepsilon C_o}{H^2} \frac{\partial}{\partial z_+} d_{t+} \frac{\partial c'_+}{\partial z_+} = - \frac{C_o}{T_{CV}} \frac{\partial \overline{c}_+}{\partial t_+} - \frac{U_o C_o}{L} \left(\overline{u}_+ \frac{\partial \overline{c}_+}{\partial x_+} + \overline{v}_+ \frac{\partial \overline{c}_+}{\partial y_+} + u'_+ \frac{\partial \overline{c}_+}{\partial x_+} + v'_+ \frac{\partial \overline{c}_+}{\partial y_+} \right) \qquad (3)$$

avec les conditions aux limites :

$$- D \frac{\varepsilon C_o}{H} d_{t+} \frac{\partial c'_+}{\partial z_+} = \phi_s \qquad z_+ = Z_+$$

$$- D \frac{\varepsilon C_o}{H} d_{t+} \frac{\partial c'_+}{\partial z_+} = 0 \qquad z_+ = Z_{F+}$$

---

* Cette expression provient de l'écriture de la vitesse verticale à la surface libre.

** On choisit comme échelle de temps pour les variations de $\overline{c}$ T_{CV} et pour celles de c' T_{diff}.

En divisant par $\frac{\nu C_o}{T_{diff}}$ (3) devient :

$$\frac{\partial c'_+}{\partial t_+} + \nu \left(\bar{u}_+ \frac{\partial c'_+}{\partial x_+} + \bar{v}_+ \frac{\partial c'_+}{\partial y_+} + u'_+ \frac{\partial c'_+}{\partial x_+} + v'_+ \frac{\partial c'_+}{\partial y_+} + \nu W_+ \frac{\partial c'_+}{\partial z_+}\right) - \frac{\partial}{\partial z_+} d_{t+} \frac{\partial c'_+}{\partial z_+} =$$

$$- \frac{\partial \bar{c}}{\partial t'_+} - \bar{u}_+ \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial x_+} - \bar{v}_+ \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+} - u' \frac{\partial \bar{c}}{\partial x_+} - v'_+ \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+} \quad (4)$$

$$d_{t+} \frac{\partial c'_+}{\partial z_+} = \nu' \qquad z_+ = Z_+$$

$$\frac{\partial c'_+}{\partial z_+} = 0 \qquad z_+ = Z_{F+}$$

Puisque ν et $\nu' \ll 1$, l'équation se simplifie :

$$\frac{\partial c'_+}{\partial t_+} - \frac{\partial}{\partial z_+} d_{t+} \frac{\partial c'_+}{\partial z_+} = - \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{c}}{\partial t'_+} + \bar{u}_+ \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial x_+} + \bar{v}_+ \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+}\right)}_{\substack{A(x,y,t) \\ \text{indépendant de } z_+}} - u'_+ \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial x_+} - v'_+ \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+} \quad (5)$$

$$d_{t+} \frac{\partial c'_+}{\partial z_+} = 0 \text{ en } z_+ = Z_+ \text{ et } z_+ = Z_{F+}$$

Cette équation mérite quelques commentaires. On constate qu'il n'intervient plus de dérivées de c' que dans la direction verticale, ceci permet par intégration de cette équation de ne faire dépendre $c'(x,y,z,t)$ que des grandeurs moyennes et de leurs dérivées au point x,y considéré. On voit apparaître dans le second membre un terme indépendant de z. La solution générale de cette équation s'écrit :

$$c'_+(x_+,y_+,z_+,t_+) = \int_0^{t_+} A \, dt_+ + c^*_+(x_+,y_+,z_+,t_+)$$

où c^* vérifie l'équation :

$$\frac{\partial c^*_+}{\partial t_+} - \frac{\partial}{\partial z_+} d_{t+} \frac{\partial c^*_+}{\partial z_+} = - u' \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial x_+} - v' \frac{\partial \bar{c}_+}{\partial y} \quad (6)$$

$$d_{t+} \frac{\partial c^*_+}{\partial z_+} = 0 \text{ en } z_+ = Z \text{ et } z_+ = Z_{F+}$$

Il faut encore que c'_+ représente les fluctuations autour de la concentration moyenne sur la verticale, c'est-à-dire que :

$$\int_{Z_{F+}}^{Z_+} c'_+ \, dz_+ = 0$$

En intégrant (6) sur la verticale, en tenant compte des conditions aux limites et que :

$$\int_{Z_{F+}}^{Z_+} u'_+ \, dz = \int_{Z_{F+}}^{Z_+} v'_+ \, dz_+ = 0$$

on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{Z_{F+}}^{Z_+} c^*_+ \, dz_+ \right) = 0$$

Ainsi si la concentration c^* est initialement à moyenne nulle elle le reste. Le terme A indépendant de z dans le second membre de (5) ne contribue qu'à la moyenne de c'_+ et non à la répartition transversale suivant z_+. L'équation que vérifie c'_+ astreint à demeurer à moyenne nulle est donc identique à celle de c^*_+.

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial c'_+}{\partial t_+} - \dfrac{\partial}{\partial z_+} d_{t+} \dfrac{\partial c'_+}{\partial z_+} = - u'_+ \dfrac{\partial \bar{c}_+}{\partial x_+} - v'_+ \dfrac{\partial \bar{c}_+}{\partial y_+} \\[2ex] d_{t+} \dfrac{\partial c'_+}{\partial z_+} = 0 \qquad \text{en } z_+ = Z_+ \text{ et } z_+ = Z_{F+} \end{array}} \qquad (7)$$

Le paragraphe suivant est consacré à la détermination de la solution de l'équation 7.

II.3 - Recherche de la solution

L'équation (7) est linéaire, la solution peut être exprimée à partir de la fonction de Green de l'opérateur.

Soit $G(z,t\ /\ z',t')$ solution de l'équation :

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\, d_t(z)\, \frac{\partial}{\partial z} = \delta\,(z-z')\ \delta\,(t-t')$$

(*)

$$d_t\,\frac{\partial G}{\partial z} = 0 \qquad \text{en} \quad z_+ = 1 \quad \text{et} \quad z = 0$$

On prend comme origine des cotes le fond et on omet d'écrire à partir de maintenant les symboles + d'adimensionnalisation.

G est appelé fonction de Green associée à l'opérateur que vérifie c'.

Si à l'instant initial on choisit $c'(x,y,z,0) = 0$, la solution générale de l'équation (7) s'écrit :

$$c'(x,y,z,t) = -\int_0^t dt' \int_0^1 G(z,t/z',t')\ u'(z,y,z',t')\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}(x,y,t')\ dz'$$

$$-\int_0^t dt' \int_0^1 G(z,t/z',t')\ v'(x,y,z',t')\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}(x,y,t')\ dz'$$

En reportant cette expression dans le terme de flux inconnu, on obtient :

$$\bar{\psi} = \begin{bmatrix} \int_0^1 u'c'\, dz \\ \int_0^1 v'c'\, dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\int_0^1 u'\, dz \left[\int_0^t dt'\, \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \int_0^1 G\, u'\, dz' + \int_0^t dt'\, \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \int_0^1 G\, v'\, dz'\right] \\ -\int_0^1 v'\, dz \left[\int_0^t dt'\, \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \int_0^1 G\, v'\, dz' + \int_0^t dt'\, \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \int_0^1 G\, v'\, dz'\right] \end{bmatrix}$$

On a donc ainsi relié le flux de dispersion à des grandeurs connues. Cette expression assez compliquée fait intervenir l'histoire des fluctuations

---

(*) Voir Annexe I l'expression de G pour une expression particulière de $d_t(z)$.

de vitesse autour de la moyenne ainsi que l'histoire du gradient de concentration moyen au point x.y.

La divergence du vecteur $\vec{\Psi}$ intervient dans l'équation de convection de la concentration moyenne (1 bis), les évolutions temporelles de $\vec{\Psi}$ sont à comparer avec l'échelle de temps de convection. Par hypothèse la constante de temps de la diffusion est beaucoup plus courte que celle de la convection. Cela signifie qu'à cette échelle de temps on peut considérer, pour déterminer c', le problème stationnaire(*) associé à (7), on a alors :

$$\vec{\Psi} = \begin{pmatrix} \int_0^1 u'c'\,dz \\ \\ \int_0^1 v'c'\,dz \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \int_0^1 u'\,dz \int_0^1 G^* u'\,dz' , & \int_0^1 u'\,dz \int_0^1 G^* v'\,dz \\ \\ \int_0^1 v'\,dz \int_0^1 G^* u'\,dz' , & \int_0^1 v'\,dz \int_0^1 G^* v'\,dz \end{pmatrix}}_{-\bar{\bar{K}}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

G^* est la fonction de Green solution de l'équation suivante :

$$\frac{d}{dz} d_t(z) \frac{d}{dz} G^* (z,z') = \delta (z - z') - 1$$

$$d_t \frac{dG^*}{dz} = 0 \qquad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1$$

Il apparaît donc que le flux $\vec{\Psi}$ peut être relié aux grandeurs moyennes de la façon suivante :

$$\vec{\Psi} = - \bar{\bar{K}} \text{ grad } \bar{c}$$

$\bar{\bar{K}}$ est un tenseur 2,2. Ce tenseur est appelé tenseur de dispersion.

On vient de montrer que la divergence de $\vec{\Psi}$ pouvait être représentée par une diffusion.

(*) Ceci revient à choisir comme échelle des temps dans (7) T_{CV} au lieu de T_{diff} pour les évolutions temporelles de c'.

Il convient, maintenant d'expliciter l'expression du tenseur de dispersion.

La fonction de Green du problème stationnaire vérifie :

$$\frac{d}{dz} d_t \frac{dG^*}{dz} = \delta(z - z') - 1$$

$$\frac{dG^*}{dz} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1$$

Par intégration on a immédiatement :

$$G^*(z,z') = \int_0^z \frac{Y(u-z') - u}{d_t(u)} du$$

Y représente la fonction d' Heavyside.

On suppose, pour alléger l'écriture,que les fluctuations de vitesse sur la verticale ne dépendent que de la cote.

Les composantes du tenseur de dispersion s'écrivent :

$$K_{ij} = -\int_0^1 u_i(z)\, dz \int_0^1 u_j(z') \left(\int_0^z \frac{Y(u-z') - u}{d_t(u)} du \right) dz'$$

avec $u_i = u'$ si $i = 1$

$u_i = v'$ si $i = 2$

Cette expression peut s'écrire (*) :

$$\boxed{K_{ij} = -\int_0^1 u_i(z) \int_0^z \frac{dz'}{d_t(z')} \int_0^{z'} u_j(u)\, du\, dz}$$

Cette expression est analogue à celle fournie par Elder mais généralisée au cas bidimensionnel.

On peut encore écrire (*) :

$$\boxed{K_{ij} = \int_0^1 \frac{dz'}{d_t(z')} \int_0^{z'} u_i(u)\, du \int_0^{z'} u_j(v)\, dv}$$

Il semble que ce soit cette dernière expression qui soit la plus maniable lorsque l'écoulement moyen est bidimensionnel ; il est en effet aisé de montrer à partir de cette expression que le tenseur $\overline{\overline{K}}$ est associé à une forme quadratique symétrique définie et positive (*).

(*) Voir annexe 2.

II.4 - Validité des hypothèses

La démonstration qui permet d'exprimer la divergence du vecteur (de composantes $\overline{u'c'}$ et $\overline{v'c'}$) par une diffusion (dispersion sous forme d'un tenseur (2 x 2)), a pu être établie moyennant deux principales hypothèses qu'il convient de rappeler et dont il faut montrer la validité :

- le temps caractéristique de la diffusion verticale doit être petit vis-à-vis du temps caractéristique de la convection horizontale :

$$\frac{T_{diff}}{T_{CV}} \ll 1$$

- le temps caractéristique des échanges de chaleur avec l'atmosphère doit être grand par rapport au temps caractéristique de la convection :

$$\frac{T_{CV}}{T_{ech}} \ll 1$$

Examinons la première hypothèse; on considère que le temps de convection est de l'ordre d'une demie marée. Ceci signifie que l'on choisit comme longueur horizontale de référence l'excursion et comme vitesse de référence une vitesse moyenne sur la demie période

$$T_{CV} \simeq 20\ 000 \text{ s}$$

En Manche la profondeur moyenne est de l'ordre de 20 m et on verra plus loin que la diffusion turbulente sur la verticale peut être estimée de l'ordre de 0,05 m^2/s (cf. III.2, fig. 2)

$$T_{diff} \simeq 8\ 000 \text{ s}$$

Ainsi le temps caractéristique de la diffusion n'est pas d'un ordre de grandeur inférieur au temps de convection. Examinons de plus près le comportement d'un profil vertical de concentration; on admet qu'il est régi par l'équation suivante :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \mathrm{dt}\,(z) \frac{\partial c}{\partial z}$$

On constate alors qu'une répartition initiale de concentration linéaire sur la verticale correspondant à un écart de température de 2° C entre le fond et la surface disparaît grâce à la diffusion turbulente en

5 000 s dans les cas les plus défavorables de viscosité. On admettra donc que la diffusion a le temps d'agir vis-à-vis de la convection si on n'autorise pas de fortes variations de concentration sur la verticale. Celles-ci doivent rester faibles devant la concentration moyenne. Cette dernière hypothèse a, par ailleurs, été utilisée au cours du raisonnement.

Examinons la validité de la seconde hypothèse :

L'équation des échanges thermiques avec l'atmosphère d'une colonne d'eau de section S unitaire et de hauteur h s'écrit :

$$\frac{\rho C_p}{S} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{A}{h} (T - T_E)$$

Avec T température de l'eau, T_E température de l'eau à l'équilibre thermique avec l'atmosphère. On choisit pour le coefficient d'échange A avec l'atmosphère une valeur moyenne de 50 Watts par mètre carré et par degré, C_p est la chaleur massique à pression constante ($2{,}18 \cdot 10^3$ MKS).

L'intégration de l'équation précédente donne :

$$T = T_0 \, e^{-\frac{A S t}{h \rho C_p}}$$

Le temps caractéristique des échanges avec l'atmosphère est donc :

$$[illegible] = \frac{\rho h C_p}{A S} = 1\,600\,000 \text{ s} \simeq 15 \text{ jours}$$

(pour h = 20 m)

valeur très grande par rapport à T_{CV} qui a été défini précédemment.

III – ESTIMATION DU TENSEUR DE DISPERSION A PARTIR D'UN MODELE SIMPLE

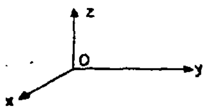
III-1 – Formulation mathématique du modèle

Dans ce chapitre on fournit une estimation pessimiste de la dispersion à partir de l'expression donnée dans le chapitre précédent, en se plaçant dans les hypothèses suivantes : fond plat, vent nul et domaine infini. Dans ces conditions on peut considérer que les hétérogénéités de vitesses sur la verticale sont les plus faibles. Les forces agissantes sur l'écoulement sont celles dues à la viscosité turbulente, au gradient de pression, à l'inertie temporelle et à la force de Coriolis qui est la seule cause d'une déviation du champ de vitesse dans la direction perpendiculaire à l'écoulement moyen. Cette dernière s'écrit :

$$-2\,\vec{\omega}\,\sin\varphi \wedge V$$

($\vec{\omega}$ rotation instantanée de la terre, φ latitude du lieu et V vitesse de l'eau). Ses composantes dans un repère orthonormée Ox, Oy, Oz (Oz verticale ascendante) s'écrivent :

$$\begin{matrix} f\,v \\ -\,f u \\ 0 \end{matrix}$$



en posant $f = 2\,\omega \sin\varphi$ et u et v étant les composantes de V suivant Ox et Oy (on suppose la vitesse verticale négligeable).

Compte tenu de ces hypothèses de départ, le champ de vitesse ne dépend que de z.

Les équations du mouvement de l'eau s'écrivent, en appelant ϵ le coefficient de viscosité turbulente, P la pression et ρ la masse spécifique de l'eau :

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\epsilon \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + f\,v - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\epsilon \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) - f u - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} \end{array}\right.$$

L'intégration, suivant la verticale, des équations précédentes donne :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f\,V - \frac{1}{\rho}\,H\,\frac{\partial P}{\partial x} - \left[\varepsilon\,\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{\text{au fond}}$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\,f\,U - \frac{1}{\rho}\,H\,\frac{\partial P}{\partial y} - \left[\varepsilon\,\frac{\partial v}{\partial z}\right]_{\text{au fond}} \qquad (9)$$

On désigne par U et V les composantes du courant de masse H la cote de la surface libre comptée à partir du fond ($\frac{\partial u}{\partial z}$ et $\frac{\partial v}{\partial z}$ sont nuls en surface)

D'autre part on peut considérer, pour ce type d'écoulement quasi-horizontal, que la pression est hydrostatique :

$$P = \rho\,g\,(H - z)$$

Ceci implique :

$$\frac{1}{\rho}\,H\,\frac{\partial P}{\partial x} = g\,H\,\frac{\partial H}{\partial x}$$
$$\frac{1}{\rho}\,H\,\frac{\partial P}{\partial y} = g\,H\,\frac{\partial H}{\partial y} \qquad (10)$$

et le système (9) s'écrit en appelant τ_x et τ_y les composantes de la contrainte sur le fond :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = f\,V - g\,H\,\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho}$$
$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\,f\,U - g\,H\,\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_y}{\rho}$$
$$\frac{\tau_x}{\rho} = \varepsilon\,\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{\text{fond}} \qquad \frac{\tau_y}{\rho} = \varepsilon\,\frac{\partial v}{\partial z}\bigg|_{\text{fond}}$$

[illegible] considère un courant de masse sinusoïdal d'amplitude correspondant à une vitesse u_o, on a :

$$U = u_o\,H\,\sin\omega t \quad \text{et} \quad V = 0$$

et les équations précédentes s'écrivent :

$$\frac{1}{\rho} H \frac{\partial P}{\partial x} = g H \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\tau_x}{\rho} - u_o \omega H \cos \omega t$$

$$\frac{1}{\rho} H \frac{\partial P}{\partial y} = g H \frac{\partial H}{\partial y} = - \frac{\tau_y}{\rho} + f u_o \sin \omega t$$

En reportant cette expression du gradient de pression dans l'équation (8), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial z}\right) + f v + \frac{\tau x}{\rho H} + u_o \omega \cos \omega t$$

(11)

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial v}{\partial z}\right) - f u + \frac{\tau y}{\rho H} + f u_o \sin \omega t$$

avec

$$\frac{\tau_x}{\rho} = \epsilon \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\tau_y}{\rho} = \epsilon \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{au fond}$$

Pour écrire le système (11) sous forme adimensionnelle, on pose

$$u_+ = \frac{u}{u_o} \qquad z_+ = \frac{z}{H}$$

soit : $u = u_o u_+$

$z = H z_+$

De ces variables fondamentales, on déduit :

$$t = t_+ \frac{H}{u_o} \qquad \left(t_+ = t \frac{u_o}{H}\right)$$

$$\epsilon = \epsilon_+ u_o H \qquad (\epsilon_+ \text{ sera précisé par la suite})$$

$$f = f_+ \frac{u_o}{H} \quad \text{avec} \quad f = \frac{4 \pi}{T} \sin \varphi \text{ (T période de la rotation terrestre)}$$

$$\omega = \omega_+ \frac{u_o}{H} \qquad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T'} \quad \text{(T' période de la marée)}$$

$$\frac{\tau_x}{\rho} = \tau_{x_+} u_o^2$$

$$\frac{\tau_y}{\rho} = \tau_{y_+} u_o^2$$

avec

$$\tau_{x_+} = \epsilon_+ \frac{\partial u_+}{\partial z_+} \text{ au fond}$$

$$\tau_{y_+} = \epsilon_+ \frac{\partial v_+}{\partial z_+} \text{ au fond}$$

L'équation (11) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+}{\partial t_+} &= \frac{\partial}{\partial z_+}\left(\epsilon_+ \frac{\partial u_+}{\partial z_+}\right) + f_+ v_+ + \tau_{x_+} + \omega_+ \cos \omega_+ t_+ \\ \frac{\partial v_+}{\partial t_+} &= \frac{\partial}{\partial z_+}\left(\epsilon_+ \frac{\partial v_+}{\partial z_+}\right) - f_+ u_+ + \tau_{y_+} + f_+ \sin \omega_+ t_+ \end{aligned} \tag{12}$$

Si le courant de masse est permanent, on obtient :

$(U = u_o H, \; V = 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_+}{\partial t_+} &= \frac{\partial}{\partial z_+}\left(\epsilon_+ \frac{\partial u_+}{\partial z_+}\right) + f_+ v_+ + \tau_{x_+} \\ \frac{\partial v_+}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\epsilon_+ \frac{\partial v_+}{\partial z}\right) - f_+ u_+ + \tau_{y_+} + f_+ \end{aligned} \tag{13}$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$u_+ = v_+ = 0$ au fond

$\frac{\partial u_+}{\partial z_+} = \frac{\partial v_+}{\partial z_+} = 0$ en surface

La détermination du champ de vitesse s'obtient en résolvant les équations 12 ou 13 après avoir précisé la valeur de ϵ_+ : c'est l'objet du paragraphe suivant.

III-2 - Estimation du coefficient de viscosité turbulente ϵ

La littérature relative à ce sujet fournit différentes estimations ; dans ce paragraphe on cherche à dégager une fourchette de valeurs possibles.

En assimilant ensuite la diffusion turbulente de matière d_t mentionnée en II à ϵ. On peut, après intégration du profil de vitesse, calculer les valeurs des termes du tenseur de dispersion.

A partir de mesures de vitesse, différents auteurs ont cherché une expression de la diffusion turbulente qui permette de retrouver les mesures effectuées. La suite de ce paragraphe décrit quelques unes de ces expressions.

a) Profil de viscosité turbulente parabolique obtenu à partir d'un profil de vitesse logarithmique [3]

L'expérience montre que le profil de vitesse, en absence de tout obstacle, peut être souvent décrit par une loi logarithmique :

$$u = u_* \, k_o^{-1} \log \zeta/\zeta_o$$

avec $\zeta = z/h$ $\quad \zeta_o = z_o/h$

h étant la profondeur et z_o l'épaisseur de la rugosité du fond, k_o la constante de Karman (0,41) et u_* la vitesse de cisaillement au fond.

Si de plus, on admet une décroissance linéaire de la contrainte de cisaillement du fond à la surface où sa valeur est nulle :

$$\tau = \tau_o \, (1-\zeta)$$

avec $\tau_o = \rho u_*^2 = \gamma \rho u_m^2$ $\qquad u_m$ courant moyen [3]

On peut alors montrer (voir Annexe 3.b) que le coefficient de viscosité turbulente varie paraboliquement en fonction de la profondeur :

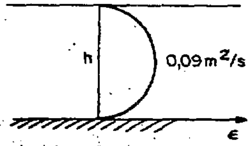
$$\epsilon = k_o \, u_* \, h \, \zeta \, (1 - \zeta)$$

avec
$$\epsilon = k_o \sqrt{k} \, u_m \, h \, \zeta \, (1 - \zeta)$$

Compte tenu des valeurs de k_o, et pour $h = 20$ m, on obtient :

$$\epsilon = 0{,}36 \, u_m \, \zeta \, (1 - \zeta)$$

avec $k = 2.10^{-3}$ ce qui correspond à un nombre de Chezy de 70.



$u_m = 1$ m/s

b) Profil de viscosité turbulente linéaire au voisinage du fond, constant au-dessus.

A partir d'observations de courants de marée dans la zone de la baie de Red Wharf dans la mer d'Irlande, Bowden et Fairlairn [3] ont donné :

pour $0 < \zeta < 0{,}14$ $\qquad \zeta = z/h$

$$u = u_* k_o^{-1} (\log \zeta / \zeta_o - \zeta + \zeta_o)$$

$$\epsilon = k_o \, u_* \, h \, \zeta$$

pour $0{,}14 < \zeta < 1$

$$u = u_* k_o^{-1} \left[\alpha^{-1} (\zeta - 1/2 \, \zeta^2) + \log (\alpha / \zeta_o) - 1/2 \alpha - 1 \right]$$

$$\epsilon = \alpha \, k_o \, u_* \, h \qquad (\alpha = 0.14)$$

avec
$$u_*^2 = k \, u_m^2$$

Compte tenu de la valeur de k_o (0,40) et pour $k = 2.10^{-3}$ (Chezy de 70) le coefficient de viscosité turbulente est :

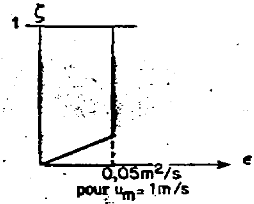
pour $0 < \zeta < 0,14$ $\qquad \epsilon = 0,018\ u_m\ h\ \zeta$

$0,14 < \zeta < 1$ $\qquad \epsilon = 0,0025\ u_m\ h$

Dans le cas où $h = 20$ m

pour $0 < \epsilon < 0,14$ $\qquad \epsilon = 0,36\ u_m\ \zeta$

$0,14 < \epsilon < 1$ $\qquad \epsilon = 0,05\ u_m$



c) Profil de viscosité turbulente obtenu à partir d'une répatition des vitesses de la forme $u = U\zeta^{\beta}$ [3]

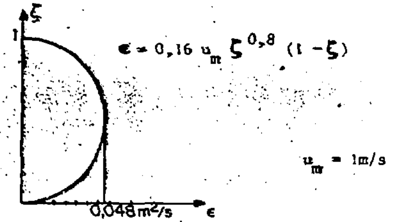
A partir d'un grand nombre d'observations des courants de marée dans les estuaires hollandais et dans le détroit du Pas-de-Calais Van Veen (1938) a trouvé un profil de vitesse de la forme :

$$u = U\zeta^{\beta}$$

En admettant, comme dans le paragraphe précédent, que la contrainte de cisaillement décroisse linéairement du fond à la surface pour y atteindre une valeur nulle on obtient (voir Annexe 3.c) :

$$\boxed{\epsilon = \frac{k^2 u_m h \zeta^{1-\beta}(1-\zeta)}{\beta(\beta+1)}}$$

ce qui donne pour $k = 2.10^{-3}$ (Chezy de 70), un coefficient β de 0,2 et $h = 20$ m



L'examen d'autres résultats, notamment ceux obtenus par Le Floch et Deniaud [5] confirment les ordres de grandeurs trouvés précédemment.

d) Forme et valeur du profil de viscosité turbulente pris en compte dans le code de calcul.

L'examen des mesures de répartition des courants suivant des verticales exécutées au large de Flamanville par E.D.F. montre que la forme du profil de vitesse envisagée dans le paragraphe c) $u = U\zeta^{\beta}$ permet de s'adapter à la plupart des résultats obtenus en donnant à β des valeurs variant de 0,2 à 0,6 (voir figure 1). C'est la raison pour laquelle on adopte ce profil de vitesse et la répartition de viscosité turbulente qui en résulte. Pour tenir compte de différentes conditions de frottements sur le fond, les valeurs choisies pour k sont de 2.10^{-3} et 4.10^{-3} qui correspondent à des coefficients de Chezy de 70 et de 50. Les courbes de la figure 2 illustrent, pour une profondeur de 20 m et pour une vitesse moyenne de 1 m/s, les répartitions de viscosité turbulente correspondant à ces paramètres. On y porte également les profils de viscosité donnés aux paragraphes a) et b) ; on voit qu'ils sont largement encadrés par les profils qui ont été adoptés.

III-3 - Résolution et résultats du modèle

Le code de calcul (voir Annexe 5) consiste à résoudre le système d'équations (12) qui fournit les composantes adimensionnelles de la vitesse u_+ et v_+ suivant la profondeur. La connaissance de cette répartition verticale du courant permet alors de calculer les coefficients du tenseur de dispersion définis sous forme adimensionnelle par l'intégrale triple :

$$K_{ij} = \int_o^1 \frac{dz}{\epsilon_+(z)} \int_o^z u_i(u)\, du \int_o^z u_j(v)\, dv$$

avec $u_i = u_+ - u_{m+}$

$u_j = v_+ - v_{m+}$

u_{m+} et v_{m+} étant respectivement les valeurs adimensionnelles du courant moyen. On assimile pour cela la diffusion de matière d_t à ϵ.

Notons que l'expression dimensionnelle des coefficients du tenseur de dispersion est :

$$K_{ij_O} = K_{ij}\, u_o\, H$$

La résolution du système (12) (ou 13) a été effectuée par une méthode de différences finies en discrétisant les équations en 50 points sur la verticale. Ces points ne sont pas uniformément répartis mais plus resserrés dans le voisinage du fond, là où les gradients de vitesse sont les plus forts de façon à augmenter la précision du calcul.

Notons enfin que les équations (12) ou (13) forment un système d'évolution dans le temps. La condition initiale est le repos mais la solution converge assez rapidement vers des valeurs indépendantes du temps pour un courant de masse uniforme ou vers des valeurs périodiques dans le cas de la marée.

III.3.1. Régime permanent.

Généralités - Profils de vitesse et coefficients du tenseur de dispersion obtenus

Pour se faire une idée de la variation de la dispersion dans la fourchette de la viscosité turbulente que l'on a admise, on a tracé sur la figure 3 la répartition de la vitesse suivant la verticale pour différentes valeurs des paramètres. On trouve deux profils, l'un de la composante dans le sens de l'écoulement principal, et l'autre dans la direction perpendiculaire (écoulement transversal).

Le tableau suivant donne les coefficients du tenseur de dispersion correspondants :

$H = 20$ m
$U_o = 1$ m/s

β	k	K_{11} (m^2/s)	K_{12} (m^2/s)	K_{22} (m^2/s)
0,2	2.10^{-3}	40	- 2,4	0,15
0,2	4.10^{-3}	20	- 0,48	0,0128
0,4	2.10^{-3}	160	- 18	2,2
0,4	4.10^{-3}	84	- 4,2	0,24
0,6	2.10^{-3}	420	- 64	10
[illegible]	4.10^{-3}	[illegible]20	- 15,6	[illegible],2

Notons que des trois coefficients K_{22} est le plus important : Il caractérise la dispersion dans le sens transversal à l'écoulement (voir annexe 4).

Ces premiers résultats mettent en évidence l'importance du choix de viscosité. On voit par exemple que dans la fourchette de la viscosité que nous avons choisie K_{22} passe de 10 m^2/s à 0,0128 ! La comparaison de ces résultats et des répartitions de viscosité exposées sur la figure 2 montrent que plus la viscosité est grande, plus faible est la perturbation causée à la vitesse transversale et plus petits sont les coefficients du tenseur de dispersion. Ces premières constatations vont être approfondies dans l'étude paramétrique du problème.

<u>Etude paramétrique du problème</u>

En régime permanent, si on pose :

$$\varepsilon(z) = k\,\tilde{\varepsilon}(z)$$

$\tilde{\varepsilon}(z)$ étant alors seulement fonction de β : $\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\beta(\beta+1)}\,\zeta^{1-\beta}(1-\zeta)$

le système d'équations devient :

$$\frac{\partial}{\partial z_+}\left(\tilde{\varepsilon}(z)\frac{\partial u_+}{\partial z_+}\right) + \frac{f}{k}v_+ + \left[\tilde{\varepsilon}(z)\frac{\partial u_+}{\partial z_+}\right]_{\text{au fond}} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z_+}\left(\tilde{\varepsilon}(z)\frac{\partial v_+}{\partial z_+}\right) - \frac{f}{k}u_+ + \left[\tilde{\varepsilon}(z)\frac{\partial v_+}{\partial z_+}\right]_{\text{au fond}} + \frac{f}{k} = 0$$

β étant fixé le problème dépend d'un seul paramètre $\frac{f^+}{k}$ rapport entre la force de Coriolis et les forces de viscosité.

a) Répartition des vitesses en fonction de $\frac{f^+}{k}$.

On a tracé les profils de vitesse obtenus pour différentes valeurs de β, (figures 4, 5, 6) en fonction de f^+/k qui s'écrit $\frac{f\ H\ C^2}{g\ u_o}$ (en exprimant f^+ par $\frac{f\ H}{u_o}$ et k le coefficient de frottement par $\frac{g}{C^2}$, C étant le coefficient de Chezy).

On constate que les vitesses transversales augmentent avec le paramètre $\frac{f\ H\ C^2}{g\ u_o}$; ceci peut s'interpréter de la façon suivante :

- elles augmentent lorsque la viscosité diminue puisque :

$$\epsilon = \frac{k\ \zeta^{1-\beta}}{\beta(\beta+1)}(1-\zeta) = \frac{g}{C^2}\ \frac{\zeta^{1-\beta}(1-\zeta)}{\beta(\beta+1)}$$

- elles augmentent lorsque le tirant d'eau augmente ;

- elles augmentent également avec f mais à nos latitudes, ce paramètre est pratiquement constant.

A la limite cependant lorsque $\frac{f\ H\ C^2}{g\ u_o}$ est très grand, l'examen des équations montre que v tend vers 0 tandis que u tend vers 1. Ceci correspond à une viscosité extrêmement faible, soit à un tirant d'eau très grand ; dans ce dernier cas on retrouve ici un résultat de la théorie d'Ekman : au-dessus de la profondeur d'Ekman, c'est-à-dire au-dessus d'une épaisseur d'eau définie par $D = \pi\sqrt{\frac{2\epsilon}{f}}$, ϵ étant une viscosité turbulente supposée constante l'écoulement est le courant géostrophique (courant uniforme). Ainsi, si la profondeur devient très grande, D devient négligeable vis-à-vis de la profondeur et tout l'écoulement tend vers le courant géostrophique $u = u_o$ $v = 0$. L'allure des courbes des figures 5 et 6, pour les grandes valeurs de $\frac{f\ H\ C^2}{g\ u_o}$ montre une tendance vers ce phénomène : on observe une légère diminution de la vitesse transversale et un profil de vitesse principal qui tend à devenir plus plat.

Notons enfin que les vitesses transversales augmentent avec β. Ceci est en bon accord avec les conclusions précédentes puisque quand β augmente la viscosité diminue (voir figure 2).

b) Coefficients du tenseur de dispersion

A partir de la formule donnée au paragraphe II et pour les profils de vitesse obtenus par intégration numérique des équations, on peut obtenir les valeurs des différentes composantes du tenseur de dispersion. On a assimilé la diffusion turbulente de matière d_t à ϵ.

Sur les figures 7, 8 et 9, on a tracé, sous forme adimensionnelle, une série de courbes donnant les coefficients du tenseur de dispersion en fonction de $\frac{f}{k}$+ $(\frac{f\ H\ C^2}{u_o\ g})$ pour des valeurs de β égales à 0,2, 0,4 et 0,6. Sur la figure 10, dans le cas où $f = 10^{-4}$ (force de Coriolis à la latitude de 45°) et pour $u_m = 1$ m/s, on trouve les coefficients du tenseur de dispersion, sous forme dimensionnelle en fonction de $\frac{f\ H\ C^2}{u_o\ g}$. Cette figure permet de se rendre compte que la dispersion croît avec H et avec C (la croissance de ce dernier paramètre correspond à une décroissance de la viscosité turbulente). Cette constatation est conforme à ce qui a déjà été vu pour la vitesse transversale qui crée la dispersion transversale mais cette tendance est accentuée par la présence de la viscosité turbulente au dénominateur dans l'expression des termes du tenseur de dispersion. La décroissance des courbes pour $\beta = 0,4$ et $\beta = 0,6$ et pour les grandes valeurs de $\frac{f\ H\ C^2}{u_o\ g}$ correspond au cas limite que l'on a exposé lors de l'étude des vitesses.

On trouve sur la figure 11 les directions principales du tenseur de dispersion et les valeurs propres correspondantes écrites sous forme adimensionnelle.

III.3.2. Application du code de calcul au cas de la marée.

L'étude paramétrique précédente ne peut s'appliquer au cas de la marée. Les équations 12 ne peuvent en effet ne dépendre que des seuls paramètres β et $\frac{f_+}{k}$ comme dans le cas du régime permanent. Les termes d'inertie rendent les phénomènes plus complexes : β, k et f_+ agissent séparément.

- **Allure de l'évolution de la répartition des vitesses transversales et des coefficients du tenseur de dispersion au cours de la marée.**

Pour donner une idée de l'évolution de la répartition des vitesses transversales et des coefficients du tenseur de dispersion au cours de la marée on présente ces résultats sur les figures 12, 13 et 14 dans un cas particulier :

Le courant de marée est sinusoïdal d'amplitude $u_o = 1$ m/s :

$$u_m = u_o \sin \frac{2 \pi t}{T}$$

la viscosité turbulente s'écrit alors :

$$\epsilon = k\, u_o \left| \sin \frac{2 \pi t}{T} \right| H \frac{\xi^{1-\beta}(1-\xi)}{\beta\,(\beta+1)}$$

Elle a été écrêtée à une valeur minimale de :

$$\epsilon = k \frac{u_o\ 0{,}01\ H\ \zeta^{1-\beta}(1-\zeta)}{\beta(\beta+1)}$$

pour éviter qu'aux instants $\frac{\lambda T}{2}$ (λ entier) elle ne prenne une valeur nulle ce qui provoquerait une dispersion infinie. Elle garde cette valeur constante pendant :

$$2 \times \frac{12^{h}24 \times \text{Arc sin } 0{,}01}{2\pi} = 2{,}4 \text{ minutes}$$

On choisit $k = 2.10^{-3}$ et $\beta = 0{,}2$.

Le paramètre f_+ $(f \frac{H}{u_o})$ est pris égal à 2.10^{-3} (cette valeur correspond par exemple à une profondeur de 20 m et un courant sinusoïdal de marée d'une amplitude de 1 m/s).

Sur la figure 12 on a porté en plus des coefficients du tenseur de dispersion la vitesse moyenne du courant et l'amplitude maximale de la viscosité.

Les profils des vitesses transversales et longitudinales tracés sur les figures 13 et 14 correspondent aux instants "1", "2", "3", "4", "5", "6", "7" et "8" répartis sur une demi marée et indiqués sur la figure 12; ils correspondent respectivement à des vitesses moyennes de 0, 30, 60, 80, 100, 80, 30 et 0 cm/s. Les profils correspondant à des instants répartis de la même façon sur l'autre demi marée (2' 3' etc...) seront symétriques des premiers; ils n'ont pas été tracés pour ne pas alourdir les figures.

Les figures 13 et 14 mettent en évidence les effets d'inertie. Celle-ci se manifeste :

. par un déphasage de la vitesse transversale en surface d'environ 45° par rapport à la vitesse moyenne longitudinale (voir fig. 14) (donc un déphasage égal pour les vitesses transversales près du fond puisque la vitesse transversale moyenne doit être nulle).

. par les formes des profils de la vitesse longitudinale.
On constate en effet que, si au maximum de la vitesse longitudinale moyenne (point 5) le profil est identique à celui obtenu en régime permanent (voir fig. 4), pour les vitesses longitudinales moyennes inférieures les profils sont plus plats et accusent même des pentes négatives.

En ce qui concerne l'amplitude des vitesses transversales en surface la figure 14 montre que, pendant la plus grande partie de la marée, elles sont supérieures à celles que l'on obtient en régime permanent pour une vitesse unitaire.

L'allure de l'évolution des coefficients du tenseur de dispersion au cours de la marée (figure 12) montre qu'ils atteignent des valeurs très grandes quand la vitesse moyenne de l'écoulement est faible - ce qui est normal car, alors, la viscosité devient petite et elle intervient au dénominateur dans leur calcul -. Ces valeurs étant extrêmes, on a défini des coefficients moyens au cours de la marée après avoir écrêté chaque courbe à la moyenne des 2 valeurs du coefficient obtenues pour une vitesse égale à 0,3 fois l'amplitude du courant moyen de marée (aux points 2 et 7, figure 12).

Dans le cas particulier qui vient d'être exposé on obtient les valeurs suivantes :

$$K_{11} = 27\ m^2/s \qquad K_{12} = 2,5\ m^2/s \qquad K_{22} = 0,5\ m^2/s.$$

En écoulement permanent, dans les mêmes conditions de profondeur, de viscosité, la vitesse étant unitaire, on obtient :

$$K_{11} = 40 \qquad K_{12} = 2,5 \qquad K_{22} = 0,15.$$

On voit que lorsqu'on passe du régime permanent au régime de marée, K_{22} augmente tandis que K_{11} diminue. Ce résultat mérite quelques commentaires :

. On a comparé la dispersion en régime de marée avec celle obtenue en régime permanent d'intensité égale à l'amplitude du courant de marée. La viscosité turbulente est donc inférieure dans le premier cas, ce qui devrait a priori augmenter les coefficients du tenseur de dispersion. En fait les effets d'inertie sur le profil de vitesse sont prépondérants et conduisent au résultat précédent.

- <u>Etude paramétrique de la dispersion moyenne au cours de la marée.</u>

Les coefficients moyens de dispersion au cours de la marée sont donnés sur les figures 15, 16 et 17 sous forme adimensionnelle en fonction de $f\frac{H}{u_0}$ pour des valeurs de β égales à 0,2, 0,4 et 0,6 et pour des valeurs du coefficient de Chezy égales à 50 et 70. Bien que les phénomènes soient plus complexes que dans le cas du régime permanent on retrouve des lois similaires :

Les coefficients du tenseur de dispersion augmentent quand la viscosité diminue. On voit en effet que ceux-ci augmentent quand C passe de 50 à 70 ou quand β croît de 0,2 à 0,6, ce qui se traduit dans les deux cas par une diminution de la viscosité. Ils augmentent avec le tirant d'eau. On déduit en effet des courbes exposées aux figures 15, 16 et 17 que la valeur dimensionnelle des coefficients du tenseur de dispersion croît avec H.

- <u>Comparaison entre le régime permanent et le régime de marée.</u>

La comparaison des résultats donnés par les figures 7, 8, 9 et 15, 16, 17 montre que pour une viscosité donnée (β et C fixes) et pour une vitesse du courant permanent égale à celle de l'amplitude du courant de marée K_{11} diminue quand on passe du régime permanent au régime de marée; c'est l'inverse pour K_{22} tandis que K_{12} varie peu. C'est un résultat que l'on avait observé dans le cas particulier étudié au début de ce chapitre. Le tableau suivant où les valeurs des coefficients de dispersions sont tirées des figures 7, 8, 9, 15, 16 et 17 illustre ce phénomène.

Profondeur	β	C	Régime permanent			Régime de marée		
			K_{11}	K_{12} m^2/s	K_{22}	K_{11} m^2/s	K_{12} (moyens)	K_{22}
20 m	0,2	70	40	2,4	0,15	27	2,5	0,5
	0,6	70	440	65	14	282	64	32
40 m	0,2	70	76	9,6	1,3	51	10	4
	0,6	70	760	214	68	511	190	152
100 m	0,2	70	160	50	15	111	44	37
	0,6	70	950	550	390	970	450	470

Le régime de marée est favorable à la dispersion transversale qui est caractérisée par K_{22}.

IV - ESTIMATION DU TENSEUR DE DISPERSION A PARTIR DE MESURES EN NATURE.

Le calcul du tenseur de dispersion nécessite la connaissance de la vitesse en amplitude et en direction en tous les points d'une verticale. Comme il est assez difficile en mer de faire des mesures simultanées en un nombre suffisant de points suivant une verticale, les données nécessaires à notre calcul sont rares et celles qui existent sont imprécises. Le L.N.H. a cependant tenté de telles mesures au large de Flamanville. On présente sur les figures 18, 19 et 20 les résultats de celles-ci pour le point 49°30'52" N et 01°52'43" W (profondeur 15 m environ). Les mesures ont été faites en 6 points également répartis suivant la profondeur. Elles peuvent être considérées comme simultanées bien qu'elles aient été exécutées à l'aide d'un seul détecteur de courant. Le temps nécessaire à l'enregistrement de la vitesse successivement en ces six points (10 mn) est petit eu égard à la période de la marée.

Pour une verticale, après avoir déterminé à chaque cote les composantes de la vitesse u_G v_G suivant les axes orientés W-E, S-N, on a calculé un écoulement moyen par ces composantes :

$$u_M = \frac{1}{H} \int_0^H u_G \, dz$$

$$v_M = \frac{1}{H} \int_0^H v_G \, dz$$

qui définissent la direction et l'amplitude u_o du courant moyen à un instant donné.

[illegible]

Par changement d'axe on détermine les composantes u et v de la vitesse dans la direction du courant moyen et perpendiculairement à cette direction.

Les composantes du tenseur de dispersion sont données sous forme adimensionnelle par les intégrales suivantes :

$$[illegible] \int [illegible] \frac{[illegible]}{\epsilon(z)} \int_0^z u_i(u) \, du \int_0^z u_j(v) \, dv$$

avec [illegible]

$$u_i = \frac{u}{u_o}$$

[illegible]

La viscosité turbulente conserve la même expression que précédemment :

$$\epsilon_{+} = \frac{k\,\zeta^{1-\beta}(1-\zeta)}{\beta\;(\beta+1)}$$

après avoir calé une courbe $U\,\zeta^{\beta}$ sur chaque profil u(z), un coefficient moyen β a été pris égal à 0,4.

On a donné à k les valeurs 2.10^{-3} (Chezy = 70) et 4.10^{-3} (Chezy = 50).

On présente sur les figures 21 et 22 les résultats de ces calculs pour $k = 4.10^{-3}$, cas où la dispersion est la plus faible (pour $k = 2.10^{-3}$ les résultats sont à doubler). La dispersion trouvée est plus importante que celle qui avait été obtenue par le code de calcul en régime de marée : en effet pour $k = 4.10^{-3}$, pour une profondeur de 15 m et une amplitude de la vitesse de 0,4 m/s les abaques de la figure 16 donnent approximativement les coefficients suivants :

$$K_{11} = 15 \;;\; K_{12} = 2{,}7 \;;\; K_{22} = 0{,}9 \;(m^2/s)$$

tandis que les coefficients moyens déduits des courbes des figures 21 et 22 seraient de l'ordre de :

$$K_{11} = 12 \;;\; K_{12} = 5 \;;\; K_{22} = 3\;m^2/s.$$

L'importance de ces derniers coefficients du tenseur de dispersion vient non seulement de la dispersion des mesures mais aussi de perturbations que les courants subissent dans la région de Flamanville et qui s'ajoutent aux effets de la force de Coriolis. Ceci tend à prouver que les résultats du code de calcul sont pessimistes ; ce qui se comprend bien puisque l'on a négligé par exemple les effets du relief des fonds.

CONCLUSION

Ce rapport est relatif à la dispersion d'un effluent en mer. Dans la théorie qui est exposée dans les chapitres I et II la dispersion apparaît sous la forme d'un tenseur (2x2) dont les termes sont fonction de la répartition verticale des vitesses et de la viscosité turbulente. Ce calcul a pu être établi moyennant deux hypothèses qui ont été vérifiées par la suite : la diffusion turbulente verticale a le temps d'agir vis-à-vis de la convection horizontale et les échanges d'effluents avec l'atmosphère ont une constante de temps très grande vis-à-vis de celle de la convection horizontale. Le calcul pratique des coefficients du tenseur de dispersion donné par l'expression suivante :

$$K_{ij} = \int_0^1 \frac{dz}{\epsilon(z)} \int_0^z u_j(u)\, du \int_0^z u_i(u)\, du$$

a ensuite été effectué à l'aide d'un modèle mathématique simple qui donne la répartition verticale des vitesses d'un écoulement dans des conditions pessimistes pour la dispersion : milieu infini, fond plat, vent nul. Ce modèle tant pour le calcul de la répartition verticale des vitesses que pour celui de l'expression précédente, donnant les coefficients du tenseur de dispersion, nécessite la connaissance de la viscosité turbulente. Elle nous a été fournie par la littérature.

Les résultats sont exposés sous forme d'abaques. Ceux-ci donnent dans le cas d'un régime permanent ou d'un régime de marée les coefficients du tenseur de dispersion. Dans l'un et l'autre cas la dispersion est une fonction décroissante de la viscosité turbulente et elle croît avec le tirant d'eau. Les résultats ont montré également, pour des conditions hydrauliques comparables, que le régime de marée était beaucoup plus favorable à la dispersion transversale que le régime permanent, d'une part à cause des forces d'inertie de l'écoulement qui créent des vitesses transversales importantes et d'autre part à cause de la viscosité qui s'annule avec le courant à ses renverses.

Enfin la dispersion calculée à partir de mesures en nature exécutées sur le site de Flamanville est plus importante que celle que l'on déduit du modèle mathématique, les conditions hydrauliques étant voisines. Ceci peut s'expliquer par le fait que l'écoulement réel peut être perturbé par la côte, le vent, le relief du fond, facteurs qui sont ignorés dans le modèle mathématique.

Dans des cas courants que l'on peut rencontrer dans la Manche (profondeur 20 ou 40 m, vitesse de 1 m/s), le tableau suivant donne, en régime permanent ou en régime de marée, le coefficient K_{22} du tenseur de dispersion. Il caractérise la dispersion dans le sens transversal à l'écoulement, la plus intéressante à connaître puisque, d'une part, c'est dans cette direction que les gradients thermiques ou de concentration d'une tache polluante sont les plus importants et que, d'autre part, dans le sens de l'écoulement les phénomènes de convection sont prépondérants vis-à-vis de la dispersion ou de la diffusion. Il a été calculé pour deux valeurs extrêmes de la viscosité (β=0,2 C = 50, β = 0,6 C = 70) et pour une valeur intermédiaire (β = 0,2 C = 70).

REGIME PERMANENT K_{22} m^2/s			
Profondeur	β = 0,2 C = 50	β = 0,2 C = 70	β = 0,6 C = 70
20 m	0,012	0,15	13
40 m	0,15	1,3	70
REGIME DE MAREE			
Profondeur			
20 m	0,04	0,5	32
40 m	0,6	4	152

On voit que si on élimine les résultats trouvés pour la plus faible viscosité - manifestement trop importants - on peut admettre pour une profondeur de 20 m une valeur de 0,1 m^2/s en régime permanent et une valeur de 0,3 m^2/s en régime de marée. Dans chacun de ces cas, pour une profondeur de 40 m, on aurait des valeurs de 0,7 et 2,3 m^2/s. Notons que ces estimations sont issues de calculs menés à partir d'hypothèses pessimistes.

A N N E X E 1

EXPRESSION DE LA FONCTION DE GREEN DU PROBLEME INSTATIONNAIRE

Soit $G(z, z', t, t')$ la fonction de Green solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} d_t(z) \frac{\partial G}{\partial z} = \delta(z - z')\, \delta(t - t')$$

$$d_t(z) \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1$$

Ce problème n'est pas tout à fait classique dans la mesure où d_t dépend de z. On va tout d'abord chercher à déterminer la transformée de Laplace de G

$$\hat{G}(z,p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, G(z,t)\, dt$$

$\hat{G}$ vérifie :

$$p\,\hat{G} - \frac{d}{dz} d_t(z) \frac{d\hat{G}}{dz} = \delta(z - z')$$

$$d_t(z) \frac{d\hat{G}}{dz} = 0 \quad \text{en} \quad z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1$$

$\hat{G}$ est donc aussi une solution élémentaire, elle vérifie l'image de l'équation initiale par la transformation de Laplace. On sait que l'on peut exprimer $\hat{G}$ à partir des fonctions propres $f_n(z)$ associées aux valeurs propres λ_n du problème suivant :

$$(\lambda_n + p)\, f_n - \frac{d}{dz} d_t(z) \frac{d f_n}{dz} = 0$$

$$d_t(z) \frac{d f_n}{dz} = 0 \quad \text{en } z = 0 \quad \text{et} \quad z = 1$$

Ainsi posé ce problème consiste à trouver les solutions propres d'un problème de Sturm Lionville.

On choisit pour poursuivre l'intégration une expression de $d_t(z)$

$$d_t(z) = a\, z\, (1 - z) \qquad (*)$$

(*) Cette expression de $d_t(z)$ est assez proche de celle choisie pour l'étude de la marée (III).

Dans ce cas les solutions propres s'écrivent :

$$\lambda_n + p = -\alpha\, n\,(n+1) \qquad n \in \mathbb{N}$$

et $$f_n(z) = \sqrt{2\,n+1}\; P_n(z)$$

où $$P_n(z) = \frac{1}{n\,!}\,\frac{d^n}{dz^n}\; z^n\,(1-z)^n \quad \text{(Polynômes de Legendre)}$$

La fonction $\hat{G}$ s'écrit alors :

$$\hat{G}\,(z,z'/p) = \sum_{n=0}^{\infty} -\,(2\,n+1)\,\frac{P_n(z)\,P_n(z')}{\alpha\,n\,(n+1)+p}$$

Par transformation inverse de Laplace, on obtient immédiatement :

$$\boxed{G\,(z,z'/t-t') = \sum_{n=0}^{\infty} -\,(2\,n+1)\,P_n(z)\,P_n(z')\,e^{-\alpha n(n+1)(t-t')}\;Y(t-t')}$$

A N N E X E 2

DIFFERENTES EXPRESSIONS DU TENSEUR DE DISPERSION ET QUELQUES PROPRIETES.

On a :

$$K_{ij} = - \int_o^1 u_i(z)\, dz \int_o^1 u_j(z')\left(\int_o^z \frac{Y(u-z') - u}{d_t(u)}\, du\right) dz'$$

avec $u_i = u'$ si $i = 1$

$u_i = v'$ si $i = 2.$

Compte tenu du fait que $\int_o^1 u_j(z')\, dz' = 0$ l'expression précédente peut s'écrire :

$$K_{ij} = -\int_o^1 u_i(z)\, dz \int_o^1 u_j(z') \int_o^z \frac{Y\,(u-z')}{d_t(u)}\, du$$

soit

$$K_{ij} = -\int_o^1 u_i(z) \int_o^1 u_j(z')\; Y\,(z-z')\, dz\left(\int_{z'}^z \frac{du}{d_t(u)}\, dz\right)$$

Ce qui s'écrit encore :

$$K_{ij} = -\int_o^1 u_i(z) \left(\int_o^z u_j(z') \left(\int_{z'}^z \frac{du}{d_t(u)}\right) dz'\right) dz$$

Considérons l'expression suivante :

$$\int_o^z u_j(z') \left(\int_{z'}^z \frac{du}{d_t(u)}\, dz'\right) = \int_o^z u_j(z')\, (F\,(z) - F(z'))\, dz'$$

où $F(z)$ désigne une primitive de $1/d_t(u)$.

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_o^z u_j(z') \int_{z'}^z \frac{du}{d_t(u)}\, dz' = \left[\int_o^{z'} u_j(z')\, dz'\; (F(z) - F(z'))\right]_o^z + \int_o^z \frac{dz'}{d_t(z')} \int_o^{z'} u_j(u)\, du$$

Le terme entre crochets est identiquement nul, on obtient donc pour K_{ij} l'expression suivante :

$$\boxed{K_{ij} = - \int_0^1 u_i(z)\, dz \int_0^z \frac{dz'}{d_t(z')} \int_0^{z'} u_j(u)\, du}$$

On peut donner une autre expression de K_{ij} en effectuant une autre intégration par parties :

$$K_{ij} = - \int_0^1 u_i(z)\, dz \int_0^z \frac{dz'}{d_t(z')} \int_0^z u_j(u)\, du = - \Big[\Big(\int_0^z u_i(u)\, du \Big)$$

$$\Big(\int_0^z \frac{dz'}{d_t(z')} \int_0^{z'} u_j(u)\, du \Big) \Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{dz}{d_t(z)} \Big(\int_0^z u_j(u) \Big) . \Big(\int_0^z u_i(u)\, du \Big)$$

Le terme entre crochets est identiquement nul, on obtient donc :

$$\boxed{K_{ij} = \int_0^1 \frac{dz}{d_t(z)} \int_0^z u_j(u)\, du \,.\, \int_0^z u_i(u)\, du}$$

Il est clair sur cette expression que le tenseur $\overline{\overline{K}}$ est symétrique.

$$K_{ij} = K_{ji}\,.$$

Le déterminant de $\overline{\overline{K}}$ s'écrit :

$$\det \overline{\overline{K}} = \int_0^1 \frac{dz}{d_t(z)} \Big(\int_0^z u'(u)\, du \Big)^2 . \int_0^1 \frac{dz}{d_t(z)} \Big(\int_0^z v'(u)\, du \Big)^2$$

$$- \Big(\int_0^1 \frac{dz}{d_t(z)} \int_0^z u'(u)\, du \int_0^z v'(u)\, du \Big)^2$$

Par application de l'inégalité de Schwarz on a immédiatement :

$$\int_o^1 \frac{dz}{d_t(z)} \left(\int_o^z u'(u)\, du\right)^2 \cdot \int_o^1 \frac{dz}{d_t(z)} \left(\int_o^z v'(u)\, du\right)^2 \geqslant \left(\int_o^1 \frac{dz}{d_t(z)} \int_o^z u'(u) du \int_o^1 v'(u)\, du\right)^2$$

On en déduit donc que det $\overline{\overline{K}} \geqslant 0$.

Il s'agit bien d'une diffusion, $\overline{\overline{K}}$ est associée à une forme quadratique symétrique et positive(trace $\overline{\overline{K}} \geqslant 0$, det $\overline{\overline{K}} \geqslant 0$).

Il existe donc une base orthonormée qui diagonalise ce tenseur.

ANNEXE 3

a) Généralités

Dans l'étude de la turbulence la contrainte exercée par une couche d'eau sur l'autre, due aux forces de viscosité est définie par :

$$\boxed{\tau = \rho\ \epsilon\ \frac{\partial u}{\partial z}} \qquad (1)$$

τ force par unité de surface (N/m^2)
ϵ étant appelé coefficient de viscosité turbulente (m^2/s)

τ est aussi exprimé à partir des fluctuations de vitesse :

$$\tau = -\rho\ u'v' \qquad (2)$$

Prandtl en 1942 introduit la notion de longueur de mélange et écrit :

$$\tau = \rho\ \ell^2\ \frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

que l'on peut encore écrire :

$$\boxed{\sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \ell\ \frac{\partial u}{\partial z} = u_*} \qquad (3)$$

u_* étant appelé la vitesse de frottement.

b) On a par hypothèse :

$$u = u_*\ k_o^{-1}\ \log \zeta/\zeta_o$$

$$\tau = \tau_o\ (1 - \zeta)$$

τ_o étant la contrainte de frottement sur le fond (force par unité de surface) qui vaut :

$$\tau_o = \rho u_*^2 = \rho k\, u_m^2 = \rho g \frac{u_m^2}{C^2} \qquad (4)$$

k étant un coefficient de frottement égal à 2.10^{-3} (réf. [3] et [4]) ce qui correspond à un coefficient de Chezy C de 70, u_m représente le courant moyen.

D'après [1] :

$$\epsilon = \frac{\tau}{\rho \frac{\partial u}{\partial z}} = \frac{\tau_o (1-\zeta)}{\rho \frac{\partial u}{\partial z}}$$

or $$\frac{\partial u}{\partial z} = u_* k_o^{-1} \frac{1}{\zeta h}$$

et $$\epsilon = \frac{\rho u_*^2 \zeta\, h(1-\zeta)}{\rho u_* \cdot k_o^{-1}} = k_o u_* h \zeta (1-\zeta)$$

et en exprimant d'après [4] u_* en fonction de la vitesse moyenne :

$$\epsilon = k_o \sqrt{k}\, u_m h \zeta (1-\zeta)$$

c) On a $\boxed{u = U\zeta^{\beta}}$

avec U vitesse en surface

et $$\tau = \tau_o (1-\zeta)$$

avec $$\tau_o = \rho u_*^2 = \rho k \bar{u}_m^2$$

La vitesse moyenne sera :

$$\bar{u}_m = U/(\beta + 1)$$

et $$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{U\beta\, z^{\beta-1}}{h^{\beta}} = u_m \frac{\beta(\beta+1)\, z^{\beta-1}}{h^{\beta}}$$

et l'expression donnant ϵ :

$$\epsilon = \frac{\tau}{\rho \dfrac{\partial u}{\partial z}}$$

s'écrit en remplaçant τ et $\dfrac{\partial u}{\partial z}$ par leur expression en fonction de u_m :

$$\epsilon = \frac{\rho k\, u_m^{\,2}\,(1-\zeta)\, h^{\beta}}{\rho\, u_m\, \beta\,(\beta+1)\, z^{\beta-1}}$$

ou

$$\boxed{\epsilon = \frac{k\, u_m\, h}{\beta(\beta+1)}\,(\quad)^{1-\beta}\,(1-\zeta)}$$

ou en remplaçant k par $\dfrac{g}{C^2}$:

$$\epsilon = \frac{g\, u_m\, h}{C^2\beta(\beta+1)}\,\zeta^{(1-\beta)}\,(1-\zeta)$$

ANNEXE 4

Si le tenseur de dispersion s'écrit :

$$\overline{\overline{K}} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{vmatrix}$$

le flux de concentration est :

$$\vec{\phi} = \overline{\overline{K}}\ \overrightarrow{\text{grand}}\ c$$

Le gradient de concentration (ou de température) peut s'écrire :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ c = \alpha \begin{vmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{vmatrix}$$

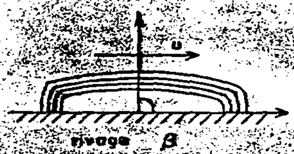
alors

$$\vec{\phi} = \alpha \begin{vmatrix} K_{11}\cos\beta + K_{12}\sin\beta \\ K_{12}\cos\beta + K_{22}\sin\beta \end{vmatrix}$$

et la valeur du flux dans une direction quelconque δ est :

$$\alpha \begin{vmatrix} K_{11}\cos\beta + K_{12}\sin\beta \\ K_{12}\cos\beta + K_{22}\sin\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \end{vmatrix} =$$

$$\alpha \left[K_{11}\cos\beta\cos\delta + K_{12}(\sin\beta\cos\delta + \cos\beta\sin\delta) + K_{22}\sin\beta\sin\delta \right]$$



Or dans une tache thermique le gradient de température est souvent perpendiculaire à l'écoulement, donc $\beta = \frac{\pi}{2}$, de plus on ne s'intéresse qu'à la dispersion perpendiculaire à l'écoulement car dans le sens du courant la diffusion est négligeable vis-à-vis de la convection, donc $\delta = \frac{\pi}{2}$ et l'expression précédente devient αK_{22}. C'est donc cette valeur qui caractérise le gradient thermique perpendiculairement au courant moyen.

Annexe 5

Programme de résolution

La résolution du système 12 et le calcul des coefficients du tenseur de dispersion se sont effectués à l'aide du programme "Dispersion". C'est un programme d'évolution en temps. Il résout les équations adimensionnelles 12, c'est-à-dire qu'il calcule u_+ et v_+ en 50 points de la verticale. Les coefficients du tenseur de dispersion sont ensuite calculés sous forme adimensionnelle.

Pour une question de précision – très importante – :

1) La maille suivant la verticale est variable et plus petite aux alentours de la surface et principalement du fond.

2) Les dérivées spatiales sont centrées.

3) Tous les termes des équations sont centrés sur les dérivées en temps :

$$\frac{\partial u_+}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial v_+}{\partial t} \left(\frac{u_+^{t+\Delta t} - u_+^{t}}{\Delta t}, \frac{v_+^{t+\Delta t} - v_+^{t}}{\Delta t}\right)$$

soit à l'instant $t + \frac{\Delta t}{2}$ à l'exception de τ_x et τ_y dont les valeurs sont prises à l'instant t dans la discrétisation. Deux itérations permettent cependant d'approcher τ_x et τ_y à l'instant $t + \frac{\Delta t}{2}$.

En régime permanent le pas en temps Δt a été choisi à 100 s et le régime permanent a été atteint après 1 000 pas en temps environ (cela dépend de la profondeur et des paramètres β et k qui définissent la viscosité).

En régime de marée le pas en temps a été pris égal à $\frac{1}{40}$ de la durée de la marée adimensionnelle soit $\frac{44\,500}{u_\alpha\, H.40}$ et le régime périodique a été atteint en 50 marées.

Notons que, malgré les précautions prises en ce qui concerne la précision du calcul, celle-ci devient mauvaise pour les faibles tirants d'eau

($\leqslant$ 10 m) quand la viscosité devient grande ($\beta = 2$, $k = 4\,10^{-3}$) – les vitesses transversales devenant très faibles –.

<u>Entrées</u> : on donne :

ΔT le pas en temps

H la profondeur

u_o la vitesse du courant moyen ou l'amplitude du courant moyen en régime de marée

BETA (β)
COEF (k) ou ($\frac{g}{C^2}$) } caractérisent la viscosité

NTC le nombre de pas en temps entre chaque sortie des résultats (il a été choisi égal à 40 en régime permanent et à 2 en régime de marée de façon à obtenir les résultats à chaque vingtième de marée).

<u>Sorties</u> :

Le programme imprime à chaque point indice K de la discrétisation verticale :

K, u(K), V(K), uP(K), VP(K), WI(K), Z(K)

soit :

K, u_+, v_+, $u_+ - u_{m_+}$, $v_+ - v_{m_+}$, ε_+, z,

u_{m_+} et v_{m_+} étant les vitesses moyennes adimensionnelles longitudinales et transversales.

(v_{m_+} doit être nul ou voisin de 0 – c'est la précision du calcul –, u_{m_+} est égal ou voisin de 1 en régime permanent).

A la suite de ce tableau, le programme imprime :

XK11, XK12, XK22, UM, VM, soit les valeurs adimensionnelles des coefficients des tenseurs de dispersion K_{11}, K_{12}, K_{22} et u_{m_+} et v_{m_+}.

Il imprime ensuite :

AL1, AL2, U11, V11, U22, V22, soit les 2 valeurs propres AL1 et AL2 du tenseur de dispersion et les 2 directions propres associées : U11, V11, U22, V22 (avec U11 = 1, U22 = 1).

REFERENCES

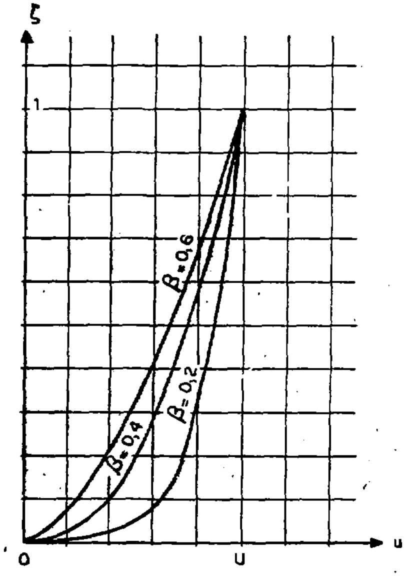
[1] DAUBERT : Mécanique des Fluides appliqués - Chapitre 7, publié sous la direction de M. Michel Hug. Edition Eyrolles.

[2] TAYLOR : 1953 Pro. Roy. Soc. A. 219, 186.

[3] K.F. BOWDEN : "Horizontal mixing in the sea due to a shearing current"

[4] AKIRA - OKUBO : "A review of theorical models for turbulent diffusion in the sea".

[5] J. LE FLOCH et Y. DENIAUD : "Mesure du gradient de vitesse au voisinage du fond en Manche".



Profils de vitesse $u = U\zeta^{\beta}$ *pour* $\beta = 0{,}2$, $\beta = 0{,}4$, $\beta = 0{,}6$

Figure : 1

Profils de viscosité turbulente

(h=20m , u_m=1m/s)

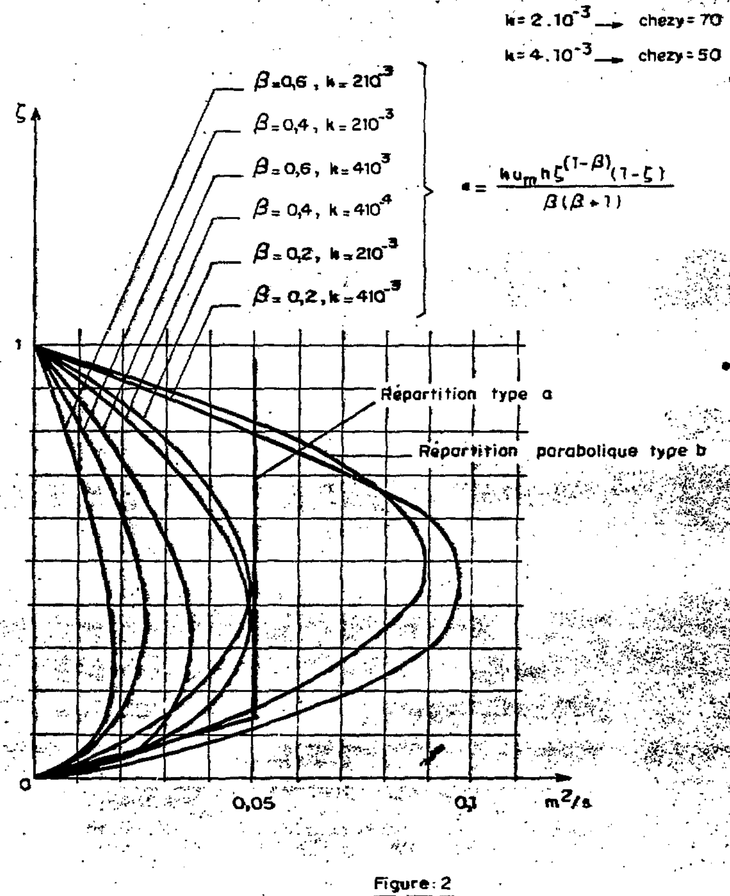


Figure: 2

Répartition verticale des vitesses suivant la direction principale de l'écoulement et suivant la direction perpendiculaire (vitesse transversale)

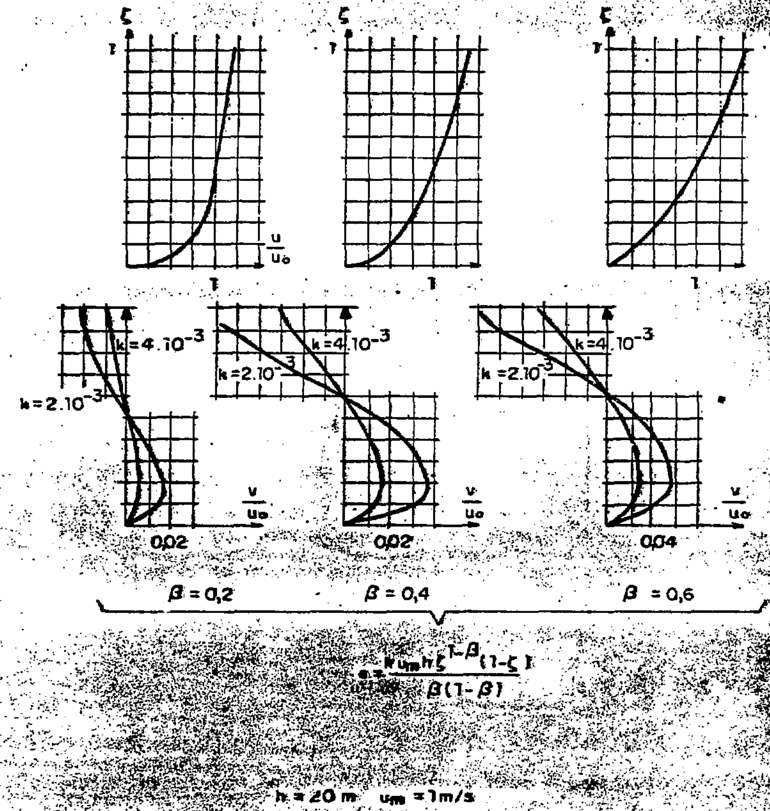


Figure : 3

Répartition des vitesses ($\beta = 0,2$)

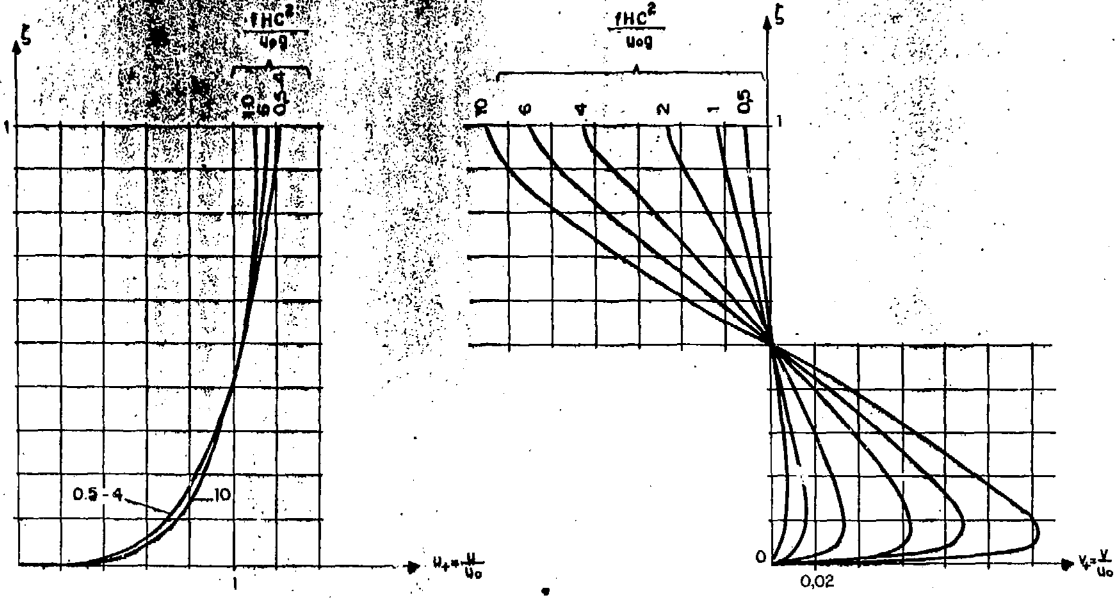


Figure : 4

Répartition des vitesses (β = 0,4).

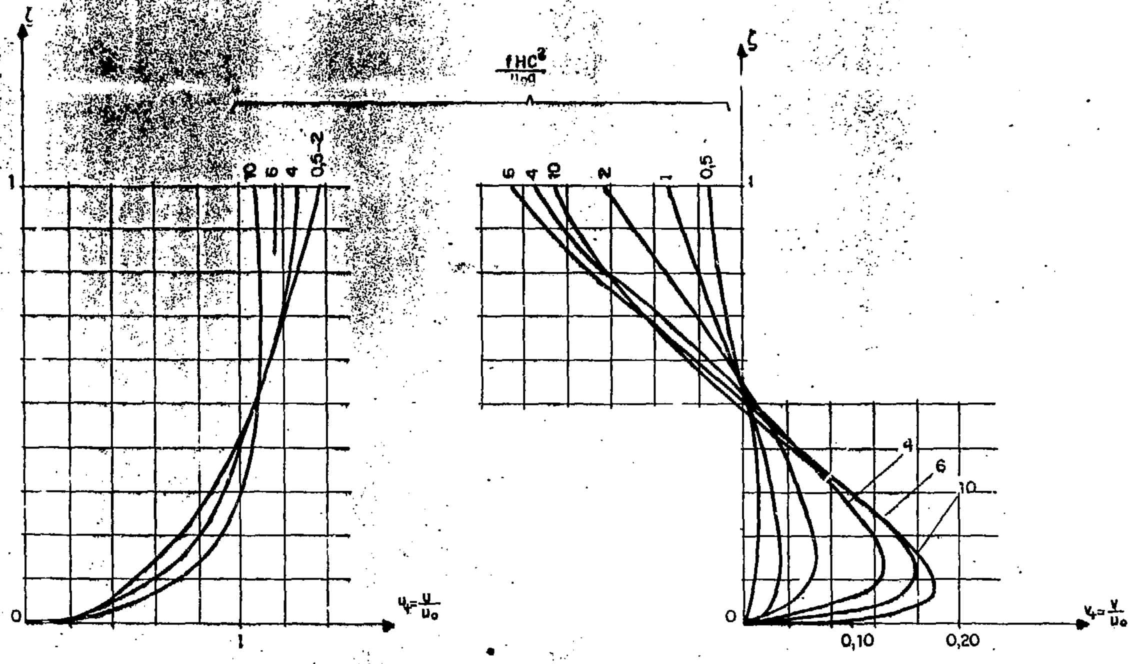


Figure : 5

Répartition des vitesses ($\beta = 0,6$)

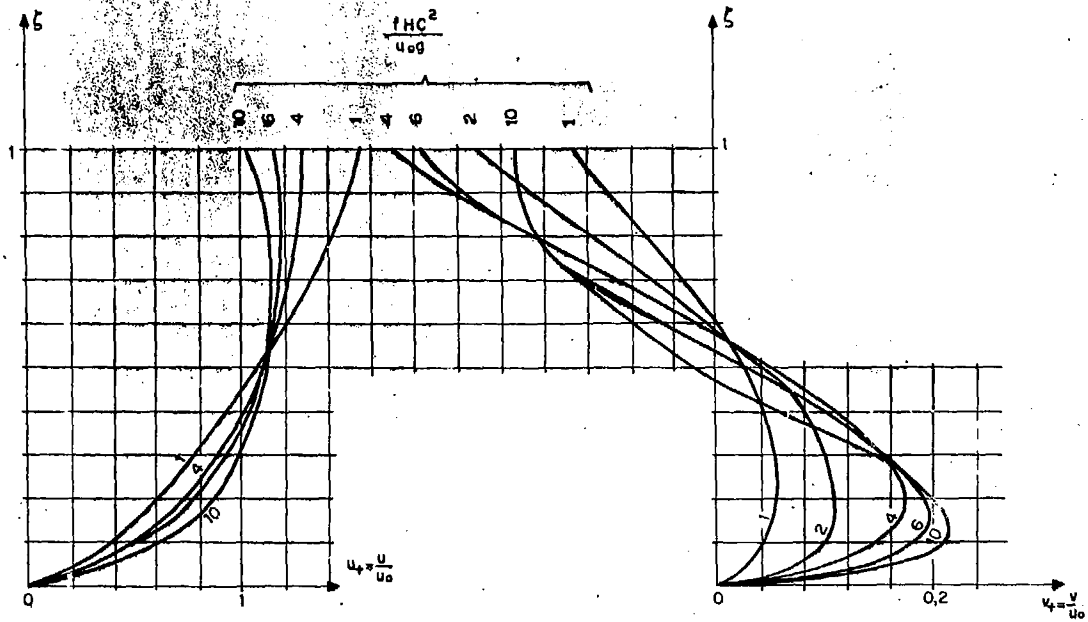
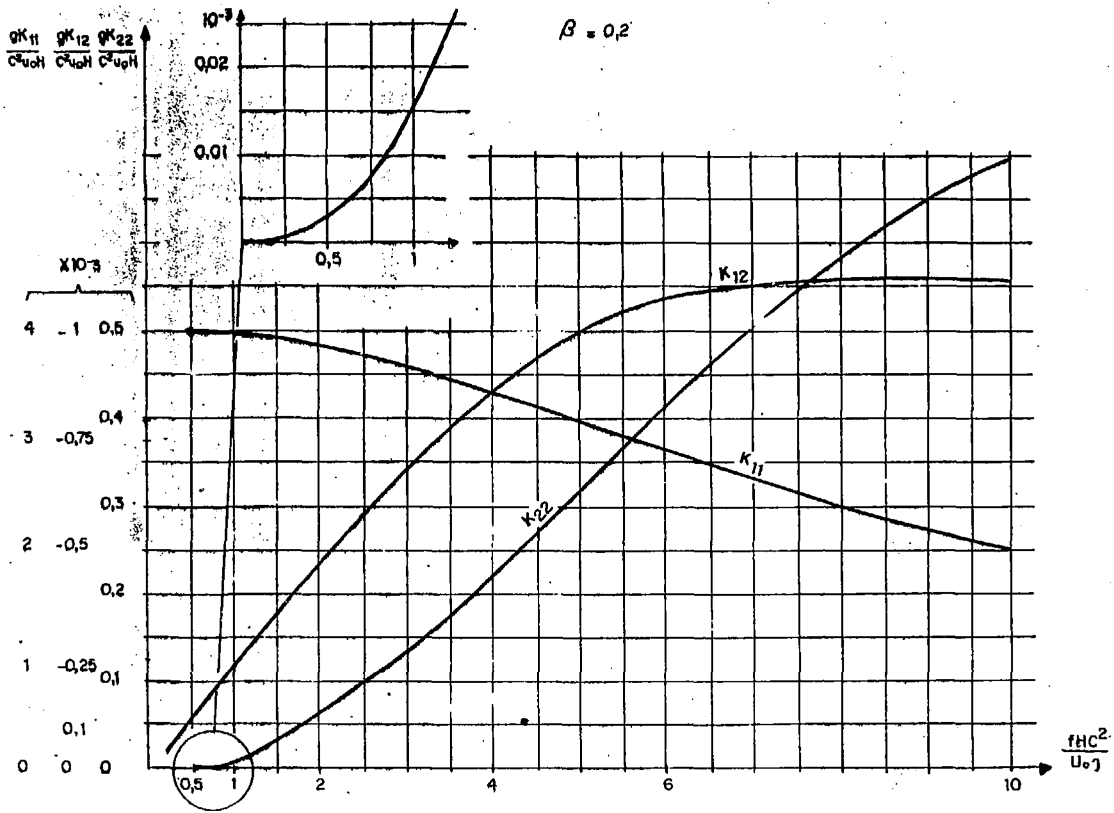
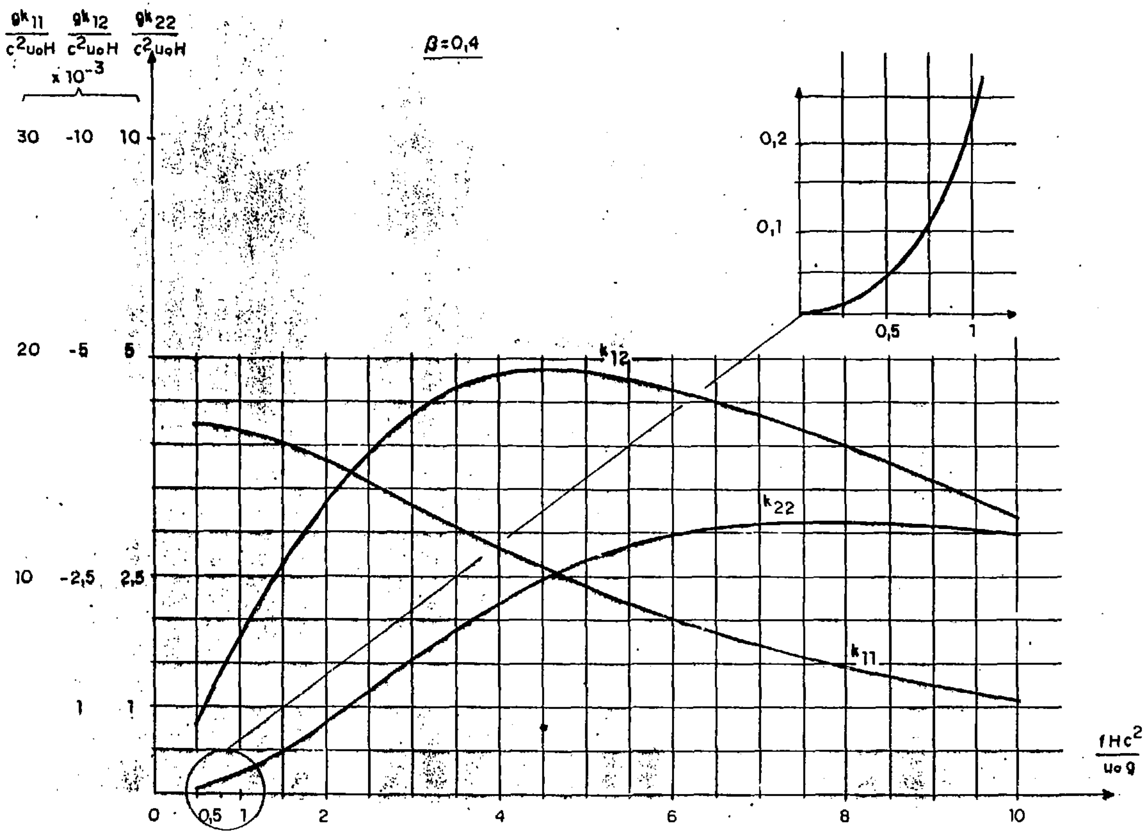


Figure : 6



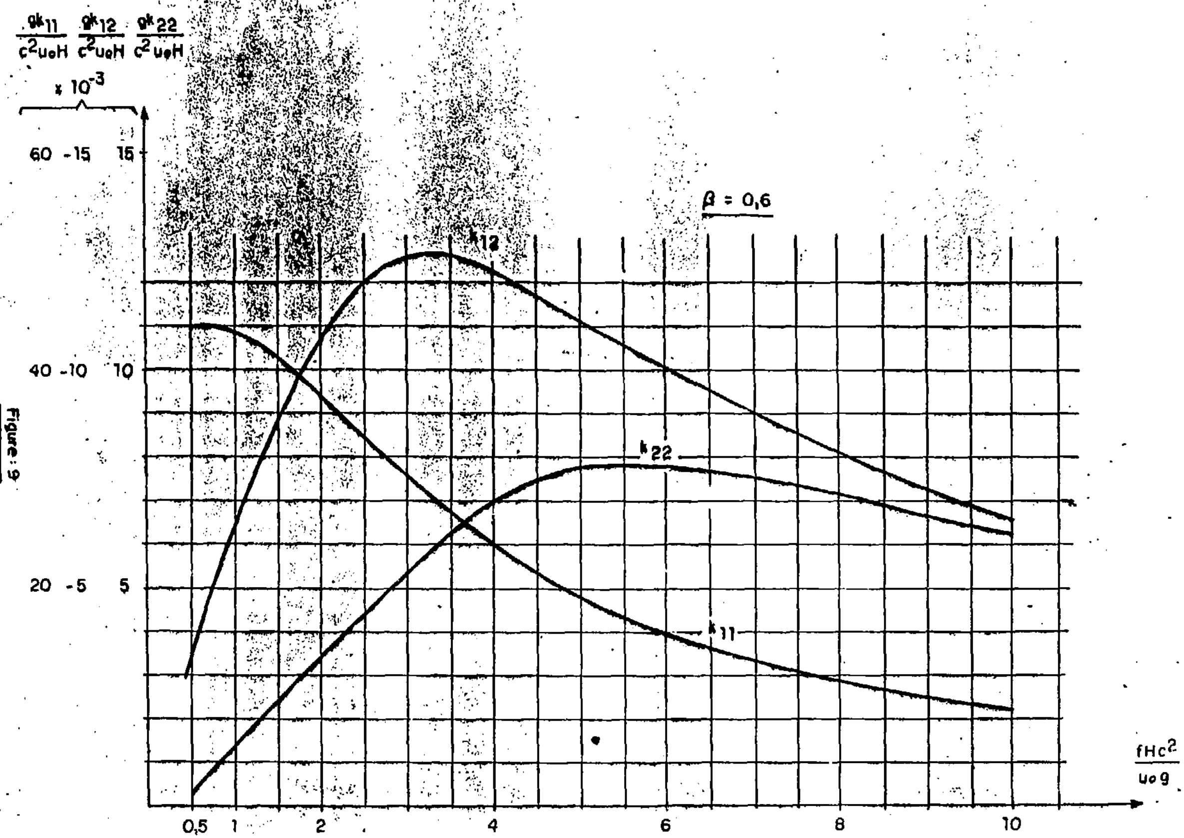
β = 0,2
gK11/c²u0H
gK12/c²u0H
gK22/c²u0H
X10-3
10-3
0,02
0,01
0,5
1
K12
K11
K22
4
3
2
1
0
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0,1
0
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0,5
1
2
4
6
10
fHC²/U0ν

Figure : 7



gk11 / c2uoH
gk12 / c2uoH
gk22 / c2uoH
x 10-3
β=0,4
30 -10 10
20 -5 5
10 -2,5 2,5
1 1
0 0,5 1 2 4 6 8 10
fHc2 / uo g
k12
k22
k11
0,2
0,1
0,5 1

Figure : 8



$\frac{gk_{11}}{c^2u_0H}$ $\frac{gk_{12}}{c^2u_0H}$ $\frac{gk_{22}}{c^2u_0H}$
$\times 10^{-3}$
60 -15 15
40 -10 10
20 -5 5
$\beta = 0,6$
k_{12}
k_{22}
k_{11}
$\frac{fHc^2}{u_0 g}$
0,5
1
2
4
6
8
10

Figure : 9

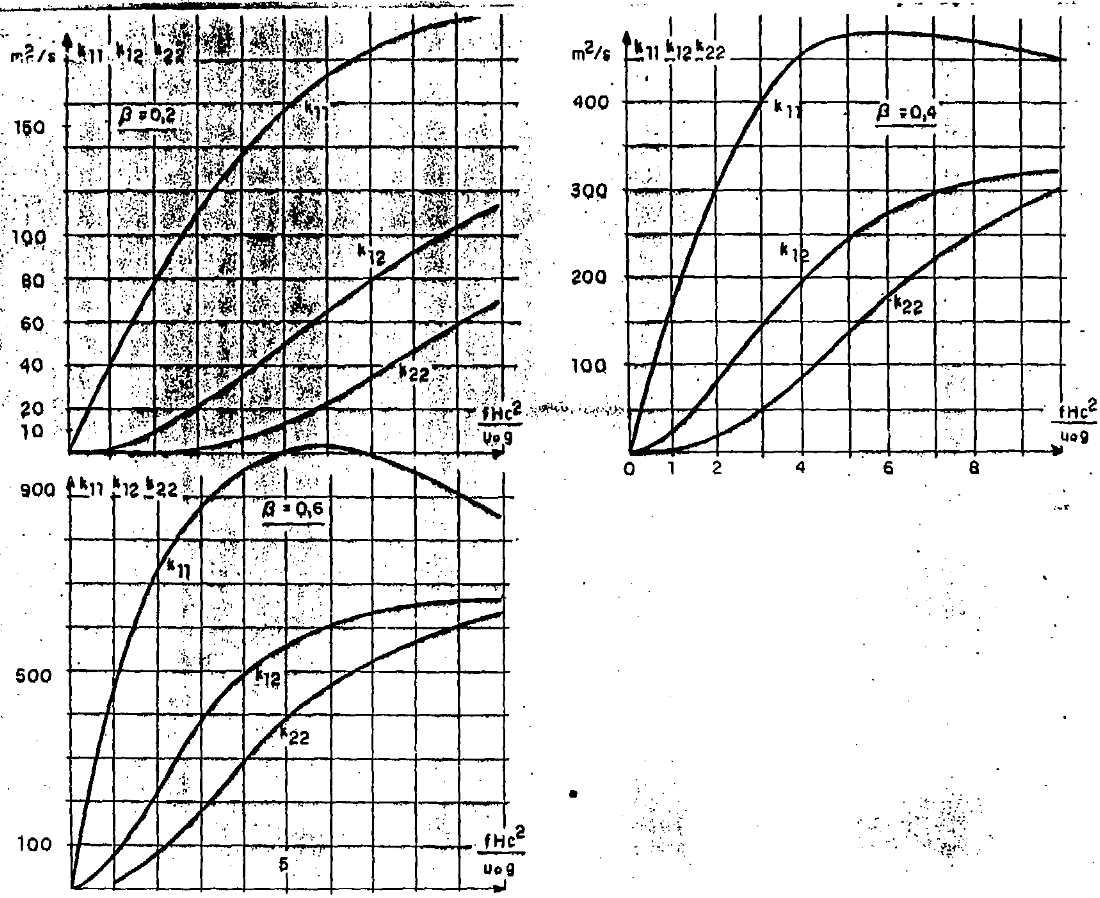
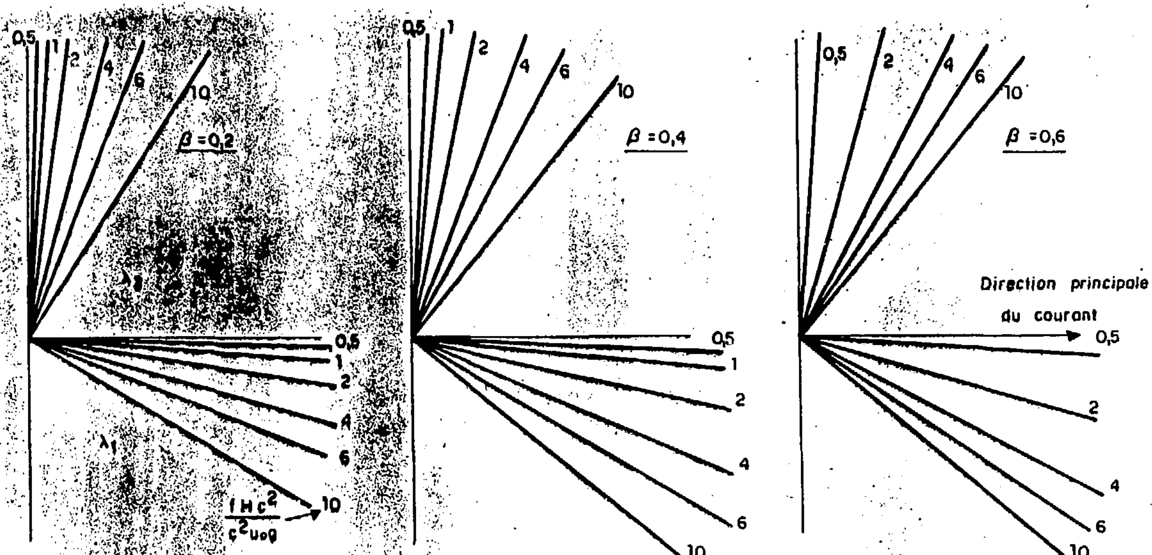

m²/s
k11 k12 k22
β = 0,2
k11
k12
k22
150
100
80
60
40
20
10
fHc²
uog
m²/s
k11 k12 k22
β = 0,4
k11
k12
k22
400
300
200
100
0
1
2
4
6
8
fHc²
uog
900
k11 k12 k22
β = 0,6
k11
k12
k22
500
100
5
fHc²
uog

Figure : 10

Figure 11



$\frac{fHc^2}{u_0 g}$	$\frac{g\,\lambda 1}{c^2 u_0 H}$	$\frac{g\,\lambda 2}{c^2 u_0 H}$	$\frac{g\,\lambda 1}{c^2 u_0 H}$	$\frac{g\,\lambda 2}{c^2 u_0 H}$	$\frac{g\,\lambda 1}{c^2 u_0 H}$	$\frac{g\,\lambda 2}{c^2 u_0 H}$
0,5	$4 \cdot 10^{-3}$	$0{,}28 \; 10^{-6}$	$17{,}2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-6}$	$45{,}8 \cdot 10^{-3}$	$11 \cdot 10^{-6}$
1	4 "	1,1 "	16,9 "	16 "	—	—
2	3,92 "	4 "	16 "	60 "	40 "	280 "
4	3,68 "	15,8 "	13,4 "	180 "	30,6 "	700 "
6	3,36 "	30 "	10,7 * "	280 "	22 "	860 "
10	2,64 "	29 "	6,94 "	320 "	14 "	740 "

Directions propres et valeurs propres λ_1 et λ_2

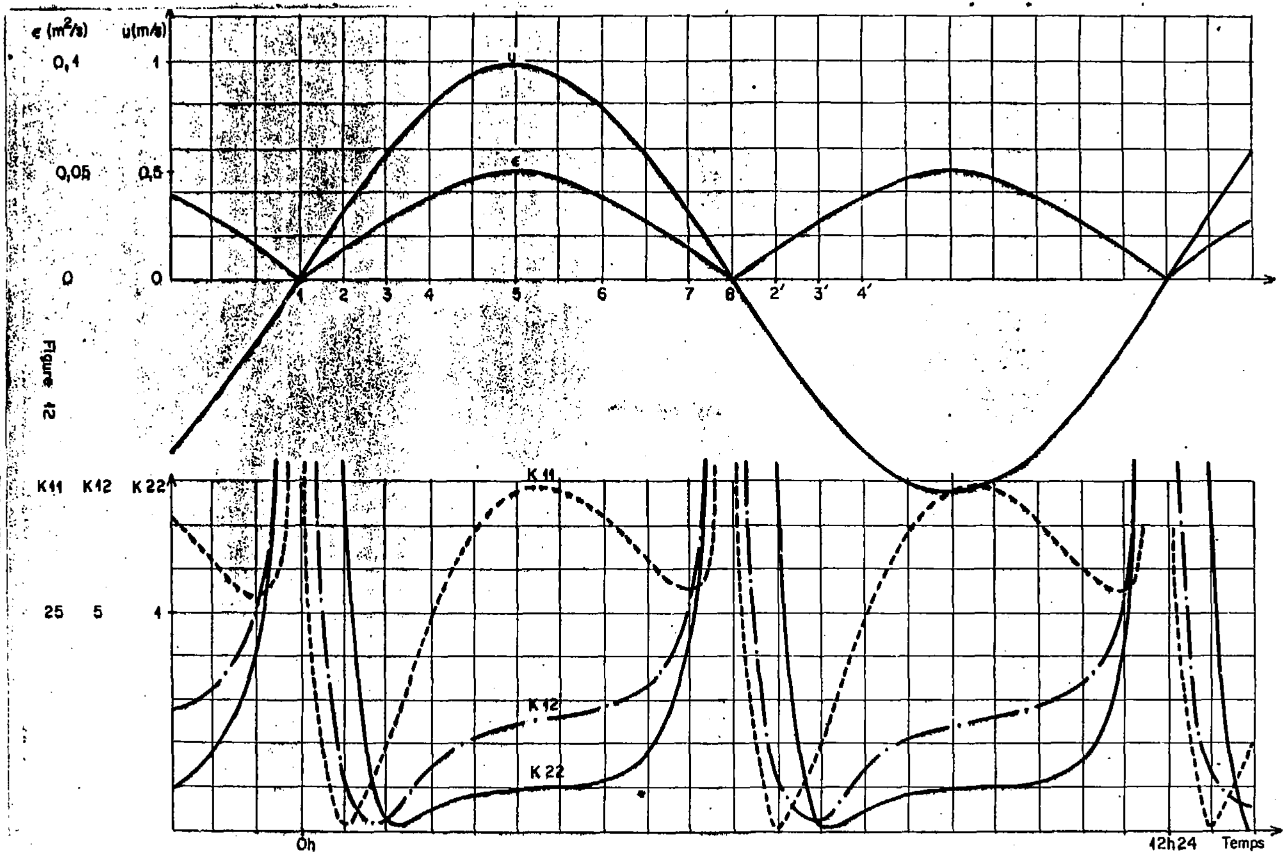
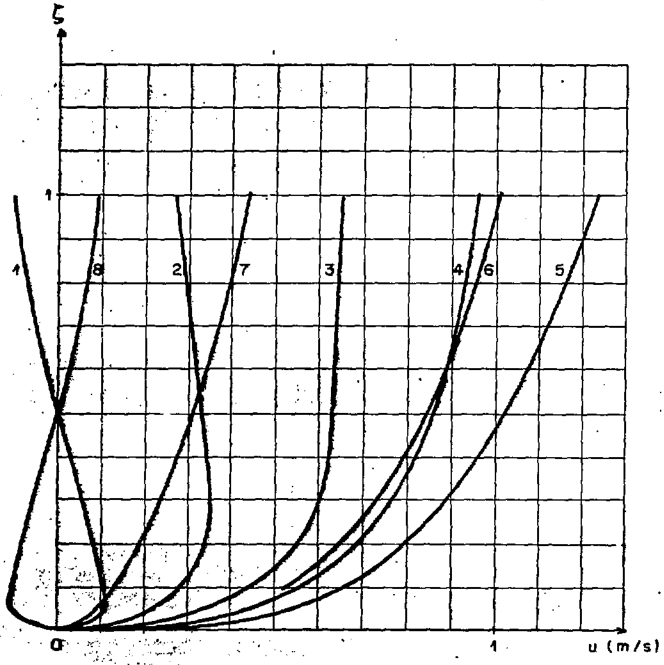


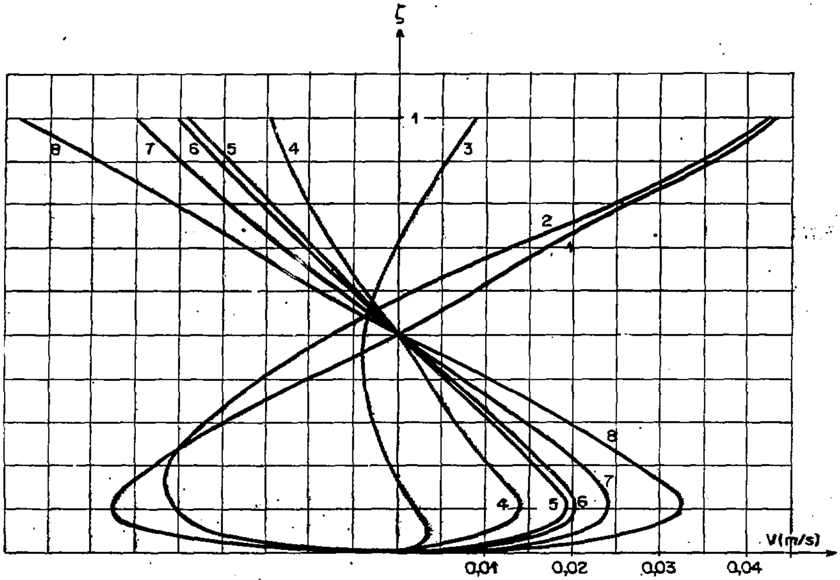
Figure 12

Evolution des coefficients du tenseur de dispersion, de la vitesse moyenne et de la viscosité au cours de la marée.

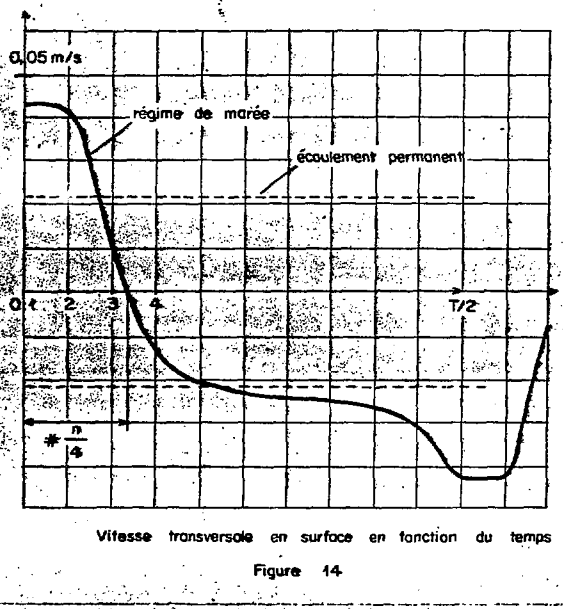


Profils des vitesses longitudinales au cours de la marée.

Figure 13



Profils de vitesses transversales au cours de la marée



Vitesse transversale en surface en fonction du temps

Figure 14

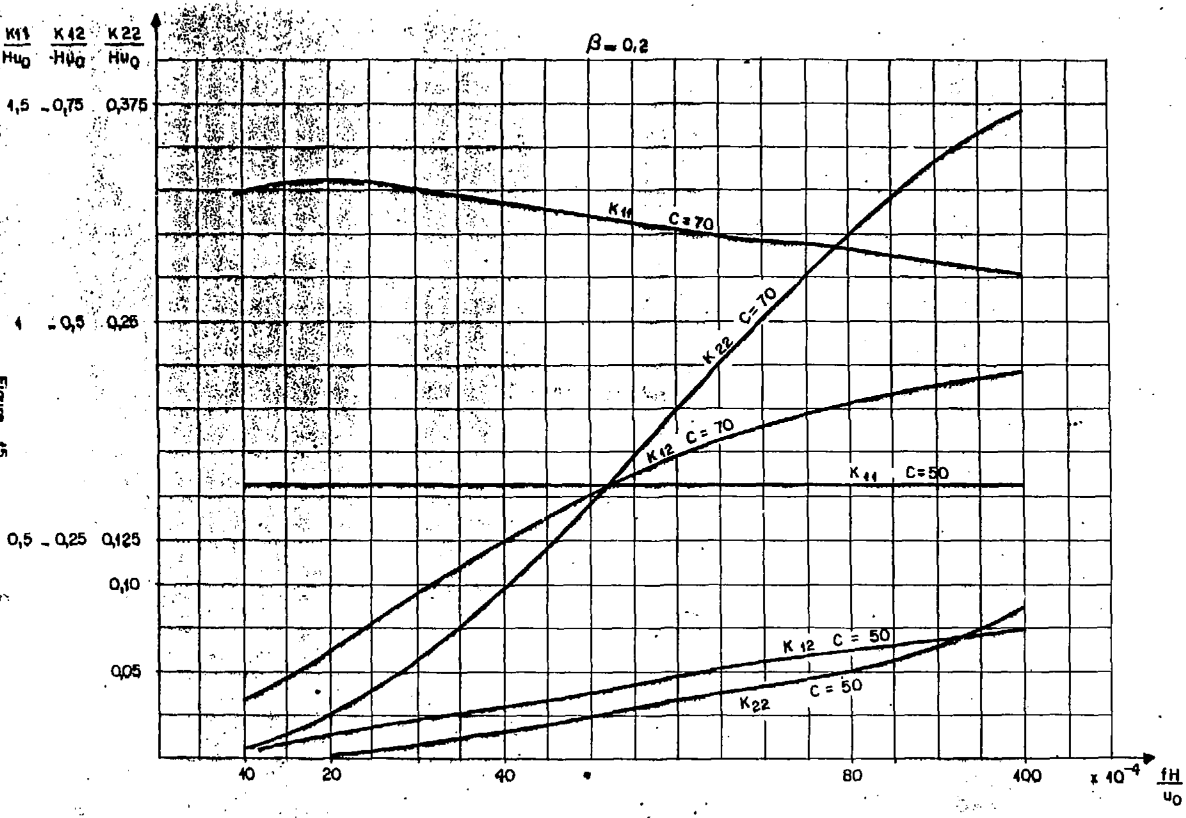

β = 0,2
K11/Hu0
K12/Hu0
K22/Hu0
1,5
0,75
0,375
1
0,5
0,25
0,5
0,25
0,125
0,10
0,05
K11 C = 70
K22 C = 70
K12 C = 70
K11 C = 50
K12 C = 50
K22 C = 50
10
20
40
80
100
x 10^-4
fH/u0

Figure 15

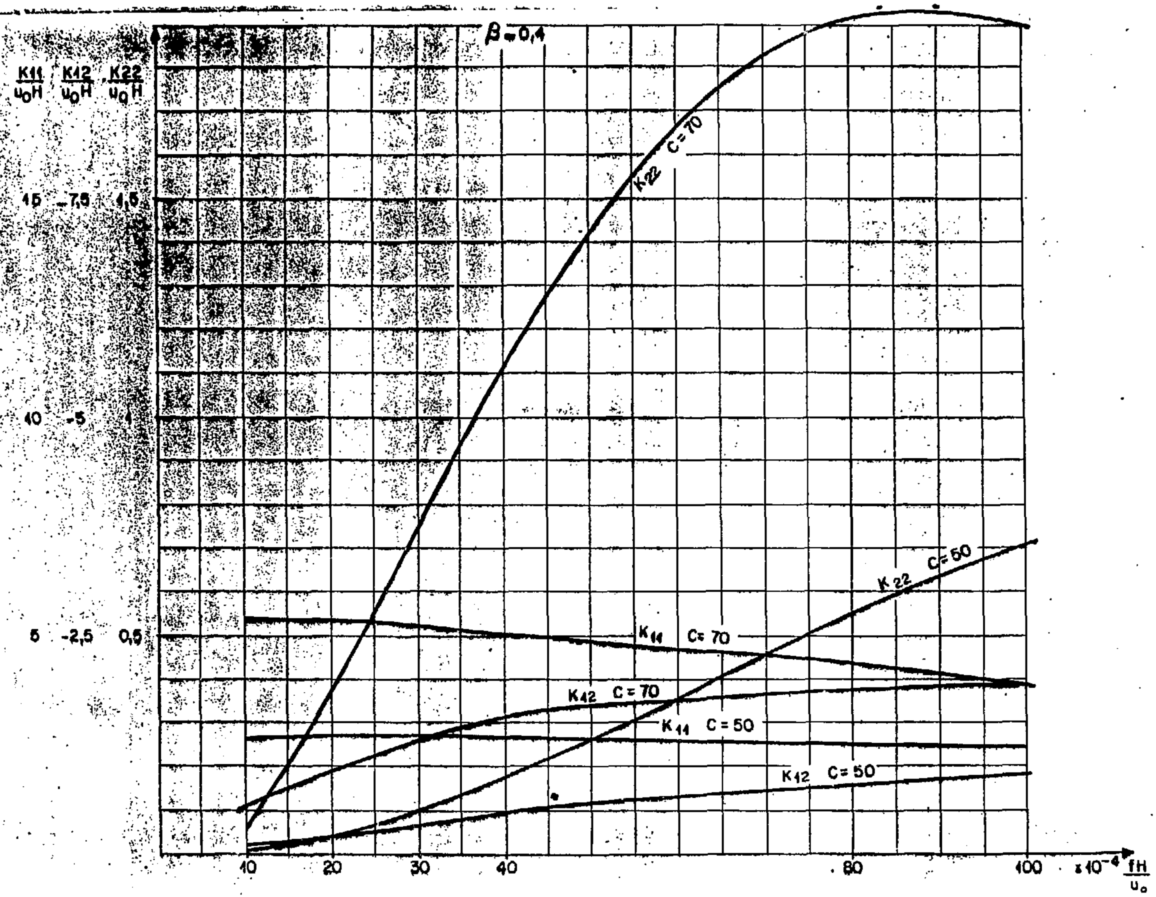

β = 0,4
K11/u0H , K12/u0H , K22/u0H
15 -7,5 1,5
10 -5 1
5 -2,5 0,5
10
20
30
40
80
100
x 10⁻⁴ fH/u0
K22 C = 70
K22 C = 50
K11 C = 70
K12 C = 70
K11 C = 50
K12 C = 50

Figure 16

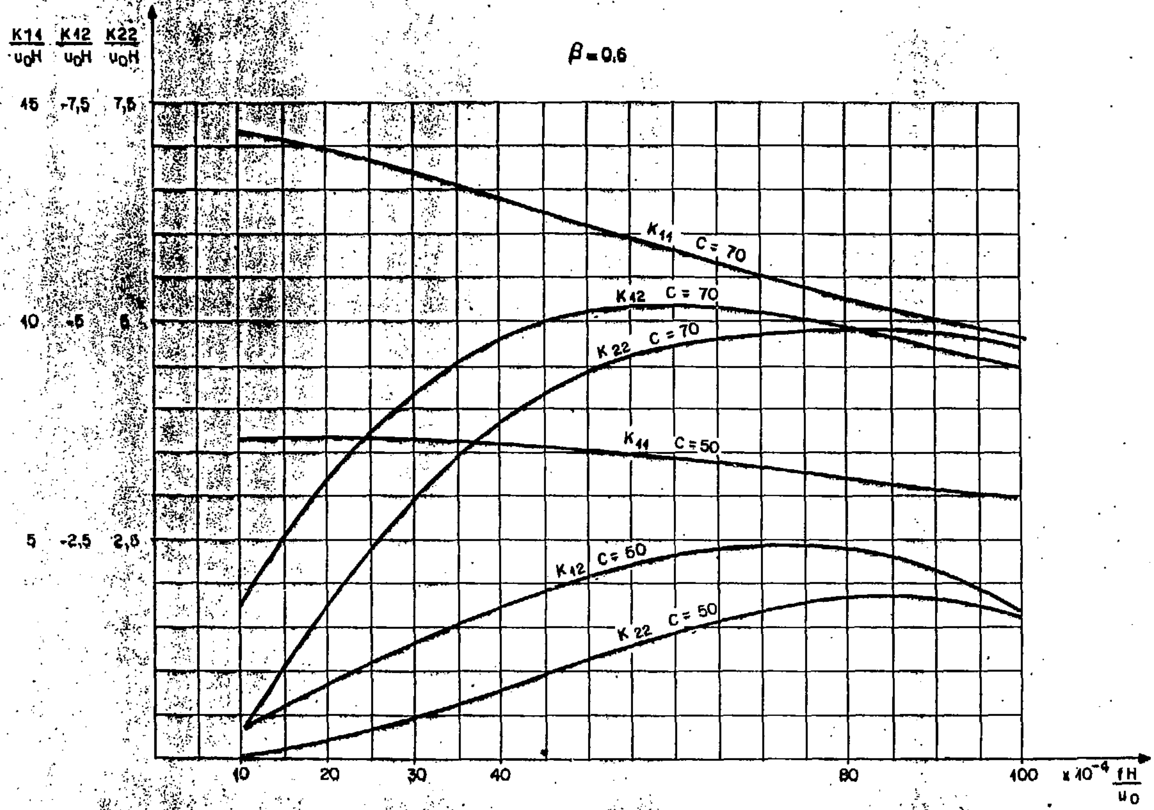
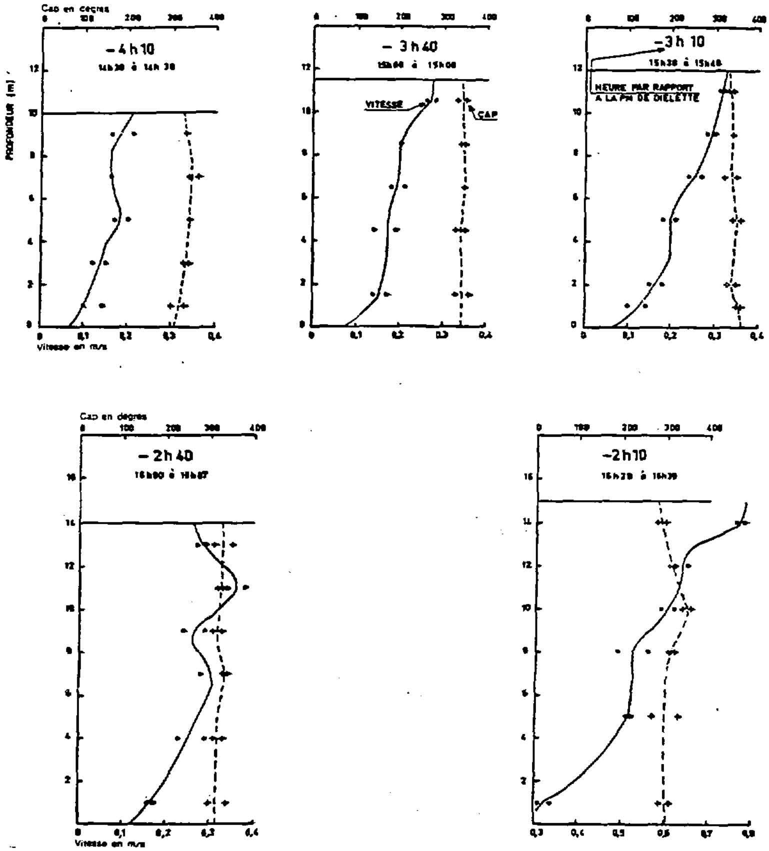

K11 / u0H
K12 / u0H
K22 / u0H
β = 0,6
15 -7,5 7,5
10 -5 5
5 -2,5 2,5
K11 C = 70
K12 C = 70
K 22 C = 70
K11 C = 50
K12 C = 50
K 22 C = 50
10
20
30
40
80
100
x 10⁻⁴ fH / u0

Figure 17



Date: Mercredi 22 Septembre 1976

Marée de coefficient: 82 -90

Point de mesure: L: 49° 30' 52'' N, G: 01° 52' 42'' W

Pleine mer à Diélette: 7h12, 19h30 TU+1

Basse mer à Diélette: 13h43 TU+1

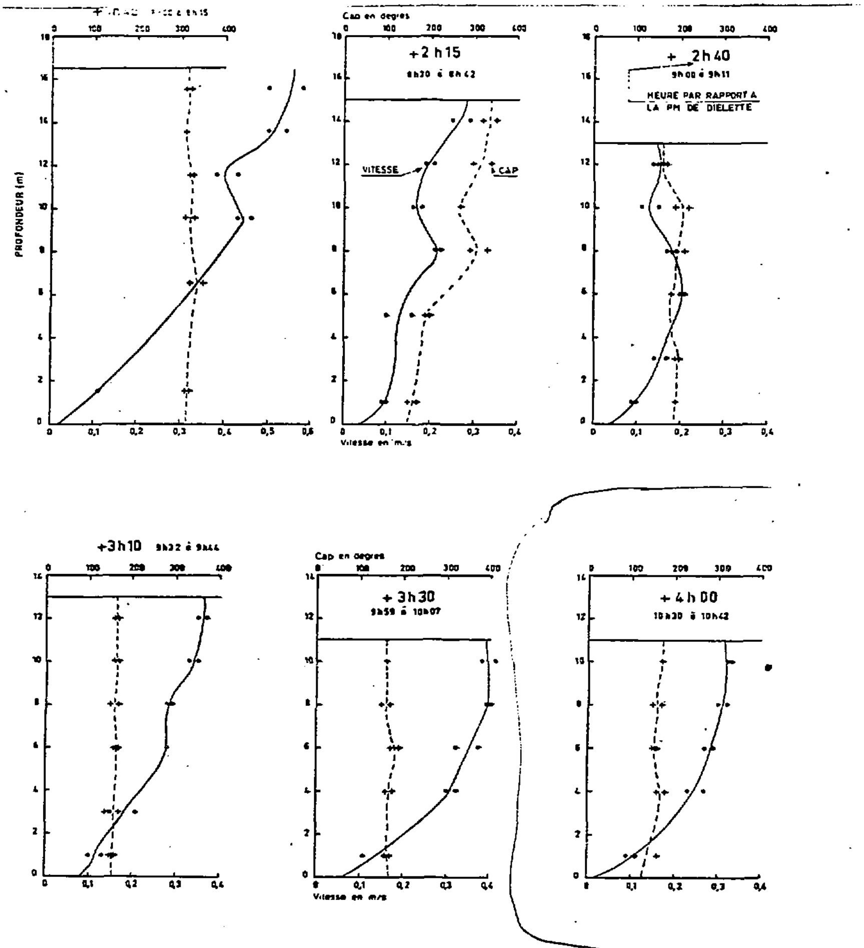
Vent:
9h00 = Sud Ouest 3m/s
12h00 = Calme
14h00 = Nord Ouest 2m/s
16h00 = Ouest 3m/s
18h00 = Ouest Nord Ouest 3m/s

Mer:
9h00 = Houle 0,5m
12h00 = Houle 0,3m
14h00 = Houle 0,5m
16h00 = Houle 0,5m
18h00 = Clapot 0,5 (Houle 1 à 1,5m)

Fond: SABLE

FLAMANVILLE : VERTICALES DE COURANT

Figure : 18



Date: Mercredi 22 Septembre 1976

Marée de coefficient: 82 - 90

Point de mesure: L: 49° 30' 52" N G: 01° 57' 43" W

Pleine mer à Diélette: 7h13 19h36 TU+1

Basse mer à Diélette: 13h43 TU+1

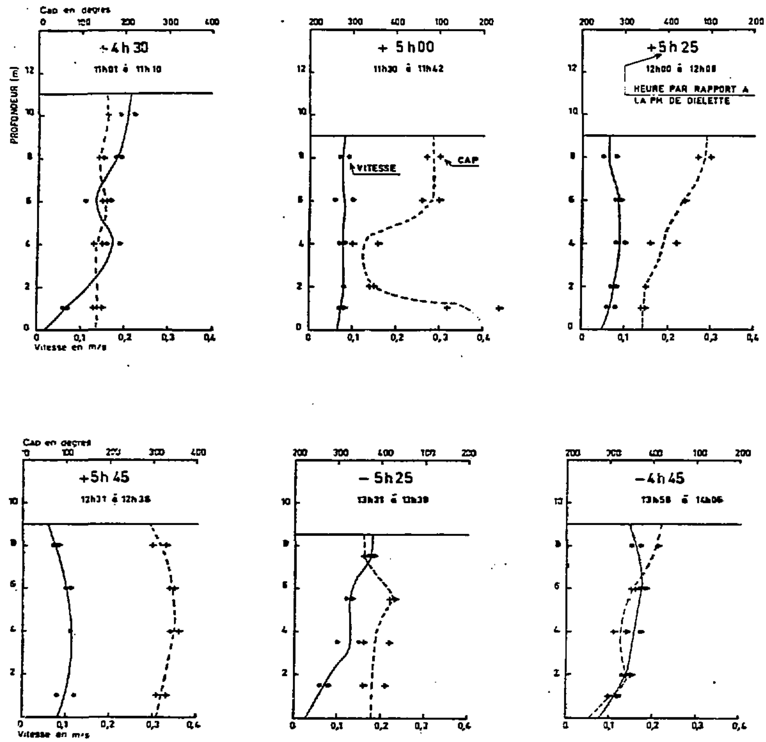
Vent:
9h00 = Sud Ouest 3m/s
12h00 = Calme
14h00 = Nord Ouest 2m/s
16h00 = Ouest 3m/s
18h00 = Ouest Nord Ouest 3m/s

Mer:
9h00 = Houle 0.5m
12h00 = Houle 0.3m
14h00 = Houle 0.5m
16h00 = Houle 0.5m
18h00 = Clapot 0.5 (Houle 1 à 1.5m)

Fond: SABLE

FLAMANVILLE: VERTICALES DE COURANT

Figure: 19



Date: Mercredi 22 Septembre 1976

Marée de coefficient: 82 - 90

Point de mesure: L: 49° 30' 52" N ; G: 01° 52' 43" W

Pleine mer à Diélette: 7h13 ; 19h36 TU+1

Basse mer à Diélette: 13h43 TU+1

Vent:
9h00 = Sud Ouest 3m/s
12h00 = Calme
14h00 = Nord Ouest 2m/s
16h00 = Ouest 3m/s
18h00 = Ouest Nord Ouest 3m/s

Mer:
9h00 = Houle 0.5m
12h00 = Houle 0.3m
14h00 = Houle 0.5m
16h00 = Houle 0.5m
18h00 = Clapot 0.5
(Houle 1 à 1,5m)

Fond: SABLE

FLAMANVILLE : VERTICALES DE COURANT

Figure : 20

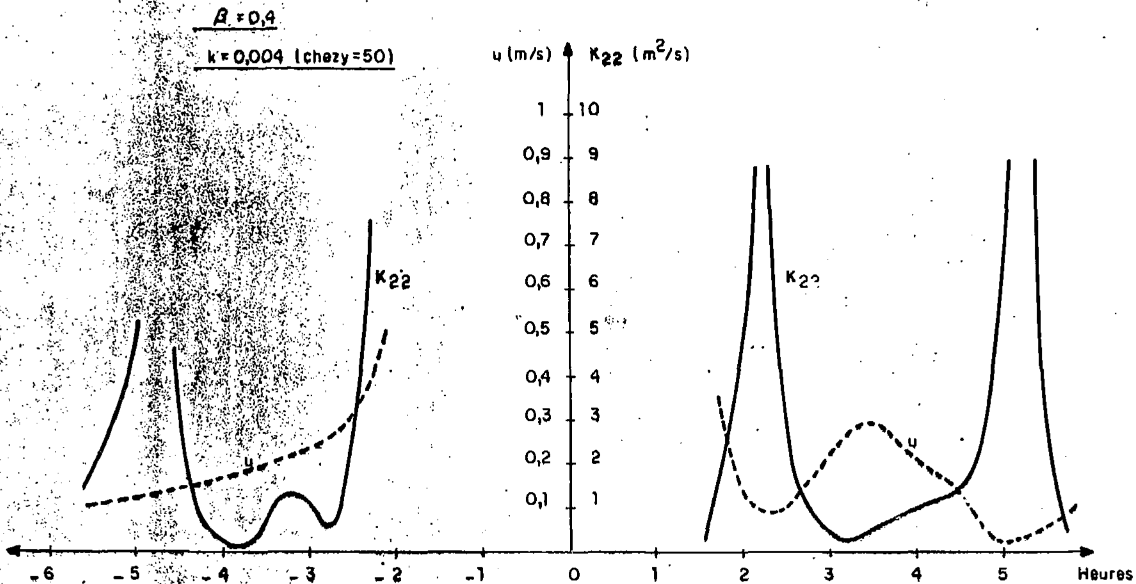


Figure: 21

FLAMANVILLE

Evolution de K_{22} et de la vitesse moyenne au cours de la marée

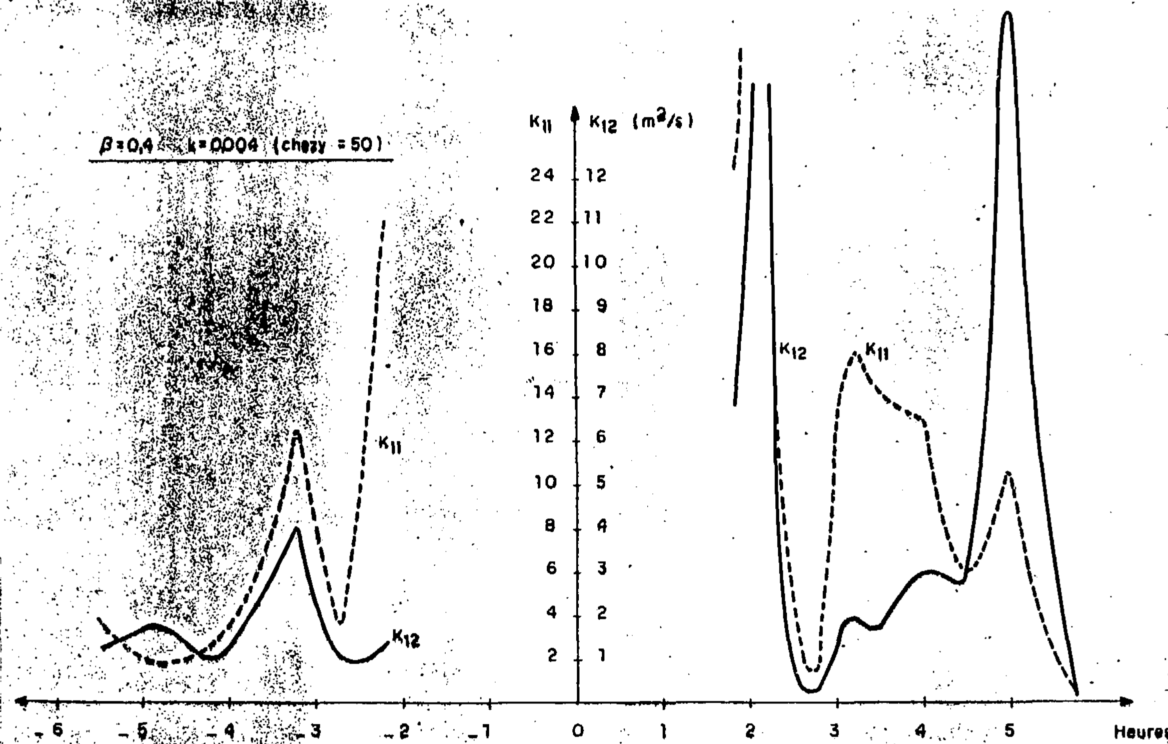


Figure : 22

FLAMANVILLE

Evolution de K_{11} et K_{12} au cours de la marée