

Rec. 12.02.82

IFT.M-01/81

QUEBRA E RESTAURAÇÃO DE

SIMETRIAS

EM TEORIAS DE GAUGE

20

A.A. Natale

INDICE

	<u>pag</u>
1. Introdução	1
2. Quebra Espontânea de Simetria	2
3. O Teorema de Goldstone	5
4. O Mecanismo de Higgs	7
5. O padrão da quebra de simetria de gauge	11
6. O Mecanismo de Higgs em Teorias Unificadas	16
7. Quebra de simetria através das correções radiativas	30
8. Violação de CP através do Mecanismo de Higgs	36
9. Teorias de Gauge a temperatura finita	40
10. O potencial efetivo a temperatura finita - A temperatura crítica	44
11. Transição de fase em um modelo $O(N)$ com dois vetores de bosons de Higgs	55
12. Análise do tipo de transição de fase	62
13. Comportamento da violação de CP "soft" a altas temperaturas	69
14. Restauração da simetria pela ação de campos eletromagnéticos	74
15. Consequências de uma transição de fase de primeira ordem. "Supercooling". Implicações Cosmológicas	80
16. Supressão de monopolos magnéticos. O problema do termo cosmológico nas equações de evolução do Universo	87
17. Transição de fase em modelos com quebra dinâmica de simetria	93
<u>Apêndice A</u> - Quebra de simetria em $O(N)$ através de dois vetores de bosons de Higgs	99
<u>Apêndice B</u> - Cálculo das correções radiativas do potencial efetivo em teorias de gauge	105
<u>Apêndice C</u> - Expansão do termo dependente da temperatura no potencial efetivo ao nível de "1 Loop" (Eq.10-24)	115
<u>Apêndice D</u> - Quebra de simetria em duas dimensões ?...	120
<u>Bibliografia</u>	122

1. Introdução

Nos últimos anos houve um grande progresso na descrição das interações fracas, fortes e eletromagnéticas, através das teorias de "gauge"⁽¹⁾, a ponto de se tornarem comuns, modelos que pretendem unificar estas interações em uma única teoria⁽²⁾.

Um dos aspectos fundamentais das teorias de gauge é o processo pelo qual os bosons de gauge adquirem massa. Nestas teorias a invariança da simetria de calibre impede que coloquemos "a mão" na lagrangeana um termo de massa para os bosons de gauge* (isto naturalmente, nos modelos em que estes bosons devem ser massivos). Para resolvermos este problema as massas são implementadas através do chamado mecanismo de Higgs⁽³⁾ (ou Higgs-Kibble-Brout - Englert-Gur Vnik-Hagen). Este processo, que foi proposto em bases puramente fenomenológicas, implica na existência de bosons escalares, não observados experimentalmente até o presente momento.

Com o passar do tempo a idéia da quebra espontânea de simetria, e a utilização do mecanismo de Higgs, foi adquirindo maior importância, sendo hoje um dos pontos fundamentais das teorias de gauge. Servindo como base, para a explicação de uma grande série de problemas da fenomenologia presente e futura.

* Devemos lembrar que estaremos considerando a invariança de gauge como um princípio sagrado, porém mesmo que este não fosse o caso, a existência de um termo de massa colocado "a mão" na lagrangeana leva a um comportamento divergente ultravioleta, ou seja, a teoria não será renormalizável.

A nossa intenção com esta revisão será a de apresentar uma visão da utilização do mecanismo de Higgs na quebra de simetrias. Verificando inicialmente, que estas idéias originaram-se de uma analogia com a teoria fenomenológica de supercondutividade baseada na Lagrangeana de Ginzburg-Landau⁽⁴⁾. Passando então a exemplos de quebra de simetria, em teorias de gauge, e finalmente, extrapolando a relação do mecanismo de Higgs com a supercondutividade⁽⁵⁾, estudaremos a restauração das simetrias por influência da temperatura.

Assumir-se-a o conhecimento de alguns dos princípios básicos de teorias de gauge que podem ser encontrados nos textos clássicos de Abers e Lee⁽¹⁾, Itzykson e Zuber⁽⁶⁾ e Taylor⁽⁷⁾, onde podem ser estudados os aspectos de quebra de simetria. Quanto a parte de restauração da simetria, um texto fundamental é o elaborado por Linde⁽⁸⁾.

De forma geral, esta revisão estará longe de ser completa, preocupar-nos-emos portanto em citar a bibliografia necessária para suprir os pontos que forem tratados superficialmente.

2. Quebra Espontânea de Simetria

Como comentamos na introdução, temos teorias em que os bosons de gauge são partículas massivas, no entanto, sabemos que um termo de massa explícito na Lagrangeana irá eliminar a invariância de gauge (o nosso princípio sagrado).

Portanto, iremos discutir uma forma alternativa* de quebra de simetria, a qual é usualmente denominada de "quebra espontânea de simetria". A idéia consiste em obter-se uma teoria cuja Lagrangeana, seja exatamente simétrica sobre transformações do grupo de gauge, porém esta mesma teoria deverá dar origem (por razões dinâmicas) a um estado fundamental que não seja um invariante por transformações de gauge. Devemos lembrar que em teoria quântica de campos, o estado fundamental é aquele caracterizado pela ausência de partículas, ou seja o vácuo. A não invariância do vácuo levará a um padrão bem definido de efeitos de quebra de simetria.

A idéia que o vácuo não apresentasse uma simetria explícita da natureza foi introduzida no campo das partículas elementares por Nambu e Jona-Lasinio⁽⁹⁾ porém, propriedades deste tipo já eram conhecidas no contexto da física do estado sólido através da teoria de transição de fase de Ginzburg-Landau⁽⁴⁾.

Ginzburg e Landau propuzeram uma teoria fenomenológica para explicar as transições de fase de segunda ordem. Esta teoria seria descrita pela seguinte densidade de energia livre

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_N + \alpha |\psi|^2 + \frac{1}{2} \beta |\psi|^4 \quad (2.1)$$

* Que não seja a simples adição à Lagrangeana, de termos não invariantes por transformações de gauge.

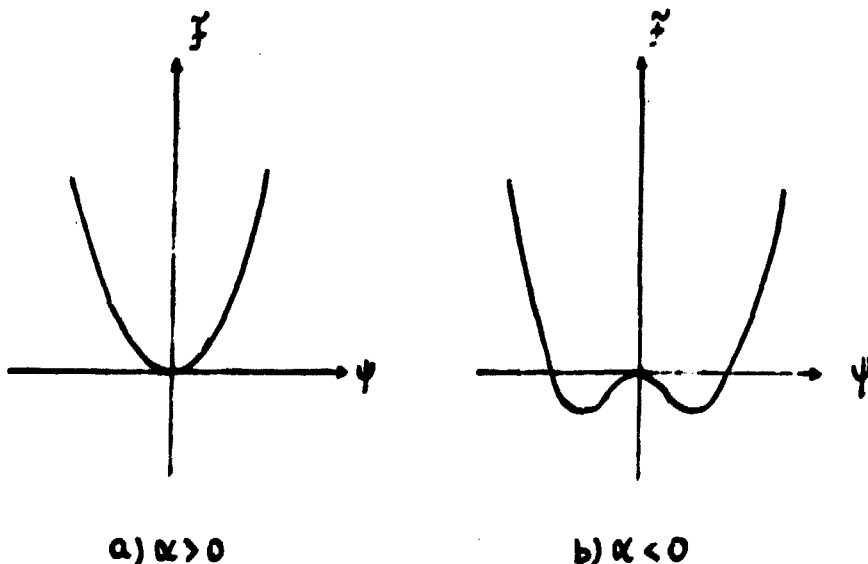
ou seja a energia livre pode ser expandida em um polinômio (bem comportado) no parâmetro de ordem Ψ (que poderia, em particular, ser a magnetização) e onde \tilde{F}_n é a energia livre do estado normal (estado na ausência de campo magnético) e α e β são funções regulares da temperatura*. Para estarmos em um estado estável (ou equilíbrio termodinâmico) devemos ter

$$\frac{\delta \tilde{F}}{\delta \Psi} = 0 \quad (2-2)$$

o que nos leva a solução:

$$|\Psi|^2 = - \frac{\alpha}{\beta} \quad (2-3)$$

temos também a solução $|\Psi| = 0$. Verifiquemos portanto qual o estado de menor energia livre segundo os gráficos abaixo



* Note que $\beta > 0$, para que a energia livre seja limitada por baixo.

α é maior que zero para temperaturas acima da temperatura crítica (fase desordenada) e menor que zero abaixo da temperatura crítica (fase ordenada) e a temperatura crítica por sua vez é definida tal que α seja nulo.

O ponto importante a ser ressaltado é que existe um mínimo de energia tal que $\psi \neq 0$. Assim sendo, quando $\alpha < 0$ se o parâmetro de ordem, por exemplo, for a magnetização \vec{M} , sua magnitude estará especificada no mínimo, porém sua direção será "espontaneamente" determinada pelo magneto. Ou seja, o magneto "escolherá" uma direção entre os estados degenerados do mínimo, fazendo com que o sistema perca a simetria rotacional que inicialmente possuía. A este processo damos o nome de quebra espontânea de simetria.

3. O Teorema de Goldstone

Goldstone⁽¹⁰⁾ foi o primeiro a idealizar em teoria de campos, um modelo onde ocorre o processo de quebra espontânea de simetria.

Seja a densidade da lagrangeana dada por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \varphi^\dagger \partial^\mu \varphi - \mu^2 \varphi^\dagger \varphi - \lambda (\varphi^\dagger \varphi)^2 \quad (3-1)$$

onde

$$\varphi = \frac{\varphi_1 + i \varphi_2}{\sqrt{2}} \quad (3-2)$$

É visível a semelhança deste modelo, com a lagrangeana (densidade de energia livre) de Ginzburg-Landau. Este modelo descreve um campo escalar complexo, de massa μ^2 e interação quártica descrita por um acoplamento λ . Podemos procurar as soluções de campo estacionário através da solução de

$$[\mu^2 + 2 \lambda (\psi^\dagger \psi)] \psi = 0 \quad (3-3)$$

e verificamos que se $\mu^2 > 0$ a única solução será $\psi = 0$, porém se $\mu^2 < 0$ existe uma segunda solução dada por

$$\psi^\dagger \psi = \psi_1^2 + \psi_2^2 = - \frac{\mu^2}{2\lambda} \quad (3-4)$$

verifica-se portanto que o vácuo* possui um valor esperado diferente de zero.

O campo ψ pode ser definido a menos de uma fase arbitrária, ou seja, seu módulo é especificado, porém sua fase terá a mesma liberdade que a direção de magnetização no caso da lagrangeana de Ginzburg-Landau. Isso nos permite escolher direções tais que

$$\langle 0 | \psi_1 | 0 \rangle = - \frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda} \quad , \quad \langle 0 | \psi_2 | 0 \rangle = 0 \quad (3-5)$$

(deve-se observar que μ é um imaginário puro), podemos então definir um novo campo ψ'_1 tal que

* Note que a expressão (3-4) é obtida ao nível clássico, e ao falarmos em vácuo neste ponto, é devido ao fato que o caso clássico é a primeira aproximação para a teoria quântica.

$$\varphi'_1 = \varphi_1 - \langle 0 | \varphi_1 | 0 \rangle \quad (3-6)$$

cujo valor esperado no vácuo é nulo.

Com esta definição a Lagrangeana será dada por:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi'_1)^2 + (\partial_\mu \varphi_2)^2 - \mu^2 \varphi_1'^2 + \begin{matrix} \text{termos cúbicos} \\ \text{e quáticos} \\ \text{em } \varphi'_1 \text{ e } \varphi_2 \end{matrix} \quad (3-7)$$

portanto como resultado da quebra espontânea de simetria o boson φ_2 ficou sem massa. Este boson recebe comumente o nome de boson de Goldstone. Com este resultado Goldstone estabeleceu o seguinte teorema: "Existirão bosons sem massa (bosons de Goldstone), sempre que as equações de movimento tiverem soluções que não sejam invariantes, por uma simetria contínua da Lagrangeana". Posteriormente foram elaboradas provas rigorosas deste teorema⁽¹¹⁾.

Evidentemente estamos sendo breves na apresentação destes resultados. Porém os mesmos encontram-se detalhados em um grande número de revisões, entre as quais podemos destacar especificamente a de Coleman⁽¹²⁾ (vide também os textos básicos citados na introdução^{(1), (6), (7)}).

4) O Mecanismo de Higgs

O nosso problema fundamental era gerar massa para partículas que não apresentam massa explicitamente na lagrangeana ini-

cial. Na secção anterior no entanto, descobrimos como partir partir de uma lagrangeana cujos campos são massivos e chegar a uma outra, onde alguns dos campos não tem massa. O que sem dúvida, parece indicar que estamos caminhando na direcção contrária à desejada. O mecanismo de Higgs nos indicará exatamente como tirar proveito do teorema de Goldstone e gerar massa para os campos que realmente devem ter massa.

Tomemos a Lagrangeana da eletrodinâmica escalar com auto interação

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + [(\partial_\mu + ig A_\mu)\phi^* (\partial^\mu - ig A^\mu)\phi] \\ & - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \end{aligned} \quad (4-1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Ela é invariante sob as transformações de gauge locais, que agem sobre os campos da seguinte forma

$$\begin{aligned} \phi(x) & \longrightarrow \phi'(x) = \exp\{-i\alpha(x)\} \phi(x) \\ A_\mu & \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x) \end{aligned} \quad (4-2)$$

Como vimos anteriormente, se $\mu^2 < 0$, o campo ϕ irá apresentar um valor esperado no vácuo diferente de zero ou seja

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = -\mu / \sqrt{2\lambda}$$

Reparametrizando o campo ϕ em função de dois campos reais χ e η , temos*

$$\phi = \exp\left(i \frac{\chi}{\nu}\right) \frac{(\nu + \eta)}{\sqrt{2}} \quad (4-3)$$

onde $\nu = -\mu^2/\lambda$, expandindo a exponencial chegamos a†

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\nu + \eta + i\chi + \text{termos de menor ordem} \right] \quad (4-4)$$

Na realidade temos um processo idêntico ao elaborado no modelo de Goldstone onde inicialmente tínhamos

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad (4-5)$$

porém

$$\langle 0 | \phi_1 | 0 \rangle = \nu \quad \text{e} \quad \langle 0 | \phi_2 | 0 \rangle = 0 \quad (4-6)$$

e redefinimos os campos por

$$\phi_1 \rightarrow \nu + \eta \quad , \quad \phi_2 \rightarrow \chi \quad (4-7)$$

substituindo-se na Lagrangeana temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \partial^\mu \chi \partial_\mu \chi \\ & + \frac{1}{2} g^2 \nu^2 A_\mu A^\mu + \mu^2 \eta^2 - \sqrt{2} g \nu A_\mu \partial^\mu \chi \end{aligned} \quad (4-8)$$

+ termos cúbicos e quarticos

- * O significado da escolha desta parametrização está implícito na invariância de gauge.
- † Os termos de maior ordem na expressão (4-4), podem ser eliminados pelo fato de não desejarmos estas interações na teoria.

Constata-se que o campo χ não tem massa, o campo η tem uma massa $2\mu^2$ e o boson de gauge "ganhou" uma massa $g^2 v^2$. Pode-se notar também que apareceu um termo de propagador misto entre A_μ e χ . Existe um procedimento para se manipular este termo misto. Porém, podemos fazer uma particular escolha de transformação de gauge, tal que

$$\begin{aligned}\phi &\rightarrow \phi' = \exp \left\{ -i \frac{\chi}{v} \right\} \phi = (v + \eta) / \sqrt{2} \\ A_\mu &\rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{g v} \partial_\mu \chi\end{aligned}\tag{4-9}$$

e como a Lagrangeana é invariante sob estas transformações podemos aplicá-las a (4-8) e verificamos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} g^2 v^2 A'_\mu A'^\mu \\ &+ \frac{1}{2} g^2 A'_\mu \eta (2v + \eta) - \frac{1}{2} m^2 (3\lambda v^2 + \mu^2) \\ &- \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4\end{aligned}\tag{4-10}$$

Nota-se que o campo χ desapareceu na Lagrangeana acima. Fisicamente podemos dizer que seu grau de liberdade foi "engulido" pelo campo de gauge, gerando massa para este último.

Chegamos também, com a Lagrangeana acima, ao verdadeiro espectro de massas, ou seja, temos presente apenas as partículas físicas. Devemos lembrar porém, que para escrever esta Lagrangeana

fizemos uma escolha de um gauge específico.

O campo χ é o boson de Goldstone de nossa teoria, e este somente se desacopla do problema quando trabalhamos no gauge unitário⁽¹³⁾. Porém, como podemos ver na Lagrangeana acima (4-10), esta em nada difere de um modelo, no qual a massa dos bosons de gauge é colocada "a mão". Portanto no gauge unitário perdemos a evidência de renormalizabilidade da teoria⁽¹³⁾, apesar do mesmo mostrar claramente o espectro de partículas.

5. O Padrão da Quebra de Simetria de Gauge

Após a demonstração que as teorias de gauge são renormalizáveis, tornou-se possível a construção de uma teoria de campos, que unificasse as interações fracas e eletromagnéticas⁽¹⁴⁾. Bem como teorias, em que fossem unificadas estas duas interações, mais as interações fortes.^(2,18)

Na construção destas teorias partimos de uma Lagrangeana de Yang-Mills baseada em um dado grupo de simetria, onde todos os bosons de gauge não possuem massa. E então, quebra-se a simetria espontaneamente, com o potencial de bosons de Higgs adequado gerando as massas desejadas.

Como em geral nosso acesso fenomenológico as predições das teorias unificadas é pequeno, temos uma certa liberdade na escolha do grupo de gauge inicial, o que nos leva a enorme prolifera-

ração de modelos unificados⁽¹⁸⁾. Para trabalhar com vários grupos (leia-se modelos) é necessário ter-se anteriormente um conhecimento das possibilidades de quebra de simetria, ou melhor, do padrão de quebra de simetria para cada grupo, uma vez dado um certo potencial invariante pelas transformações deste grupo.

Para ilustrarmos o que dissemos acima, consideremos o modelo padrão⁽¹⁸⁾ $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, ou seja, o grupo de simetria que descreve a fenomenologia conhecida atualmente. Se desejarmos construir uma teoria de grande unificação^(2,18,19), podemos procurar grupos simples que contenham a física do modelo padrão, por exemplo: $SU(5)$ ^(2,19). Porém nada nos impede de realizarmos escolhas mais complexas, como $SU(7)$, $SO(18)$, etc..., desde que estes grupos reproduzam a física do modelo padrão a baixas energias. (Naturalmente estes modelos irão implicar em uma fenomenologia mais rica, a qual não temos acesso no momento). É evidente que um dos critérios para a construção de uma teoria unificada, é de que a mesma apresente uma sequência de quebras de simetria, resultando no modelo padrão no final da sequência. Por isso é necessário o conhecimento do padrão de quebra de simetria, ao propor-se uma nova teoria.

O primeiro trabalho no sentido de estudar o padrão de quebra espontânea de simetria foi realizado por L.F.Li. Posteriormente Ruegg e seus colaboradores^(16,17) refinaram o trabalho de Li e estudaram particularidades na quebra de simetria dos grupos $SU(N)$ e $SO(N)$.

O procedimento para se estudar a quebra de simetria para um determinado grupo pode ser resumido em: a) escolhe-se uma representação para os bosons escalares e escreve-se o potencial mais geral* possível para o grupo em questão, b) determina-se o mínimo deste potencial, c) calcula-se o número de bosons de gauge sem massa que determinarão a simetria não quebrada.

Iremos descrever alguns exemplos simples e na próxima secção resolveremos o problema da quebra de simetria no modelo de Weinberg-Salam⁽¹⁴⁾ e no modelo de grande unificação SU(5)⁽²⁾.

5.a. Bosons de Higgs na representação vetorial de O(N).

O potencial mais geral* para esta apresentação toma a forma

$$V(\phi) = -\frac{\mu^2}{2} \phi_i \cdot \phi_i + \frac{\lambda}{4} (\phi_i \cdot \phi_i)^2 \quad (5-1)$$

onde $i=1, \dots, N$ e $\lambda > 0$ para o potencial ser limitado por baixo. O mínimo será dado por

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = (-\mu^2 + \lambda \phi_i \cdot \phi_i) \phi_i = 0 \quad (5-2)$$

cuja solução com quebra espontânea é dada por

* Com o potencial mais geral possível, queremos dizer que tomamos todos os produtos de representações que formem um escalar, com interações quarticas no máximo e desprezaremos termos cúbicos impondo uma simetria de reflexão sobre os bósons de Higgs

(Obs. Isto impede a existência de um vácuo falso⁽⁵⁹⁾ - vide secção (15)).

$$|\phi|^2 = \phi_i \cdot \phi_i = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad (5-3)$$

escolhendo-se o mínimo em uma dada direção $\vec{\phi} = (0, 0, \dots, 0, \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}})$
 ou $\phi_i = \delta_{i,N} \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$, o termo de massa de bosons de gauge é dado por*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W^2} &= -\frac{1}{2} g^2 W_{ij}^\mu \langle \phi_j \rangle W_{ik}^\mu \langle \phi_k \rangle \\ &= -\frac{1}{2} g^2 \sum_{i=1}^{N-1} (W_{iN}^\mu)^2 \left(\frac{\mu^2}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (5-4)$$

obtém-se assim $(N-1)$ bosons de gauge massivos (W_{Ni}) e $(N-1)(N-2)/2$ bosons sem massa W_{ij} , $i, j = 1, \dots, N-1$, que no total nos dão $N(N-1)/2$ bosons de gauge iniciais correspondentes a igual número de geradores de $O(N)$. Portanto, a simetria que permanece intacta é $O(N-1)$ correspondente aos $(N-1)(N-2)/2$ bosons de gauge sem massa.

5b) Representação vetorial de $SU(N)$

O potencial será dado por

$$V(\psi) = -\frac{\mu^2}{2} \psi_i \psi^i + \frac{\lambda}{4} (\psi_i \psi^i)^2 \quad (5-5)$$

em procedimento análogo ao caso $O(N)$, a solução de quebra será dada por $\psi_i \psi^i = \frac{\mu^2}{\lambda}$ e calculando-se a matriz de massa dos bosons de gauge, esta será diferente de zero para $(2N-1)$ bosons e nula para $[(N-1)^2 - 1]$ bosons de gauge. O que indica a quebra de

* No apêndice A faremos um cálculo detalhado da obtenção de um termo de massa, para o caso com dois vetores de bosons de Higgs no grupo $O(N)$.

$SU(N)$ $[(N^2-1)$ geradores] para $SU(N-1)$ $\{ [(N-1)^2-1]$ geradores $\}$

5c. Dois N-vetores de bosons de Higgs em $O(N)$

Seja o potencial mais geral possível formado com dois vetores $\vec{\chi}$ e $\vec{\eta}$ no grupo $O(N)$

$$\begin{aligned}
 V(\vec{\eta}, \vec{\chi}) = & -\frac{1}{2} m_1^2 \vec{\chi}^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \vec{\eta}^2 + \frac{1}{4} f_1 (\vec{\chi}^2)^2 \\
 & + \frac{1}{4} f_2 (\vec{\eta}^2)^2 + \frac{1}{2} f_3 \vec{\chi}^2 \vec{\eta}^2 + \frac{1}{2} f_4 (\vec{\chi} \cdot \vec{\eta})^2
 \end{aligned}
 \tag{5-6}$$

apresentamos a seguir, os resultados dos cálculos obtidos no Apêndice A. Sendo que cada item indicará a simetria restante, após a quebra de simetria, e as condições sobre as constantes de acoplamento, para que cada simetria seja atingida:

- 1) $O(N-1)$, $f_3 > \frac{m_1^2}{m_2^2} f_2$, $f_4 > 0$
- 2) $O(N-1)$, $f_3 > \frac{m_2^2}{m_1^2} f_1$, $f_4 > 0$
- 3) $O(N-2)$, $-(f_1 f_2)^{1/2} < f_3 < f_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} \cdot f_1 \frac{m_2^2}{m_1^2}$, $f_4 > 0$
- 4) $O(N-1)$, $-(f_1 f_2)^{1/2} < f_3 + f_4 < f_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} \cdot f_1 \frac{m_2^2}{m_1^2}$, $f_4 < 0$

5d. Outras representações

Daremos aqui os resultados do padrão de quebra de simetria obtido por L.F.Li⁽¹⁵⁾, nos casos de quebra de $SU(N)$ por várias representações de bosons de Higgs (o mesmo para $O(N)$). Resu

tados mais específicos para $SU(N)$ podem ser vistos nos trabalhos de Ruegg e colaboradores⁽¹⁶⁾; como também para o grupo $O(10)$ quebrado pelas representações adjunta e spinorial⁽¹⁷⁾.

Os resultados de Li são:

Representação dos bosons de Higgs	Simetria resultante da quebra de	
	$O(N)$	$SU(N)$
vetorial	$O(N-1)$	$SU(N-1)$ $[SU(2) \rightarrow U(1)]$
k vetores	$O(N-k)$	$SU(N-k)$
Tensor simétrico de 2ª ordem	$O(N-1)$ ou $O(L) \otimes O(N-L)$ onde $L = \begin{bmatrix} N \\ 2 \end{bmatrix}$	$SU(N-1)$ ou $O(N)$
tensor antis. de 2ª ordem	$U(L)$ ou $U(1) \otimes O(N-2)$	$O(2L+1)$ $L = \begin{bmatrix} N \\ 2 \end{bmatrix}$ ou $SU(N-2)$
represent. adjunta		$SU(L) \otimes SU(N-L) \otimes U(1)$ ou $SU(N-1)$ $L = \begin{bmatrix} N \\ 2 \end{bmatrix}$

6. O Mecanismo de Higgs em Teorias Unificadas

Os dois casos em que a aplicação das idéias de quebra espontânea foram mais estudados, pela sua maior importância na fenomenologia atual e futura, correspondem ao modelo de Weinberg-

Salam⁽¹⁴⁾ e ao modelo de grande unificação SU(5)⁽²⁾. Iremos na sequência, determinar o espectro de massa dos bosons de gauge no modelo de Weinberg-Salam e, também, o padrão de quebra de simetria no modelo SU(5).

6a. Quebra espontânea de simetria no modelo de Weinberg-Salam

O modelo de Weinberg-Salam, formulado para unificar as interações fracas e eletromagnéticas, é caracterizado por uma estrutura de grupo SU(2) x U(1), onde SU(2)_L corresponde ao grupo de isospin fraco e uma simetria de "hipercarga" U(1). A Lagrangeana que descreve os campos de gauge livres é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (6-1)$$

aonde temos

$$\begin{aligned} G^{\alpha\beta} &= \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha + g A^\alpha \times A^\beta \\ F^{\alpha\beta} &= \partial^\alpha B^\beta - \partial^\beta B^\alpha \end{aligned} \quad (6-2)$$

A^α são os campos de SU(2) e B^β o de U(1).

As evidências fenomenológicas que possuímos para as interações fracas indicam a existência de três bosons de gauge massivos, os quais intermediam a interação fraca. Portanto se partirmos de SU(2)x U(1) devemos quebrar o grupo de forma a sobrar apenas uma simetria

tria U(1) (resta o fóton, que mantém-se com massa nula). A simetria que resta não será necessariamente o U(1) inicial.

Como vimos na secção anterior apenas um conjunto de bosons de Higgs na representação fundamental de SU(2) realizaremos a quebra desejada.

Antes de introduzirmos simplesmente o potencial de Higgs é conveniente verificarmos algumas peculiaridades do modelo. A primeira delas, será a forma de escrever a derivada covariante dos bosons de Higgs.

Dado um campo Ψ , verifiquemos como sua Lagrangeana livre comporta-se sob transformações de gauge locais, ou seja se

$$\Psi(x) \rightarrow e^{-i\Theta(x) \cdot \frac{\xi}{2}} \Psi(x) \approx \left(1 - i\Theta(x) \cdot \frac{\xi}{2}\right) \Psi(x) \quad (6-3)$$

como será que $\mathcal{L}_{\text{Livre}}$ se transforma, se

$$\mathcal{L}_{\text{Livre}} = \bar{\Psi} (i\gamma - m) \Psi \quad (6-4)$$

temos então:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Livre}} &\rightarrow \bar{\Psi} \left(1 + i\Theta(x) \cdot \frac{\xi}{2}\right) (i\gamma - m) \left(1 - i\Theta(x) \cdot \frac{\xi}{2}\right) \Psi \\ &\approx \mathcal{L}_{\text{Livre}} + \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\xi}{2} \Psi \partial_\mu \Theta(x) \end{aligned} \quad (6-5)$$

portanto $\mathcal{L}_{\text{livre}}$ não é invariante, a menos que, substitua-se a derivada comum pela derivada covariante dada por

$$i\partial_\alpha \rightarrow D_\alpha \equiv i\partial_\alpha - g A_\alpha(x) \frac{\tilde{\zeta}}{2} \quad (6-6)$$

o que introduz um termo de interação

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -g \bar{\psi} \gamma^\alpha \frac{\tilde{\zeta}}{2} \psi A_\alpha(x) \quad (6-7)$$

este termo, por sua vez, também não é invariante, a menos que A^α se transforme como

$$A^\alpha \rightarrow A^\alpha + \Theta(x) \times A^\alpha(x) + \frac{1}{g} \partial^\alpha \Theta(x) \quad (6-8)$$

O ponto a que queremos chamar a atenção, é a forma de construir a derivada covariante em uma teoria não-abeliana. Em nosso caso temos um grupo $[SU(2) \times U(1)]$ com constantes de acoplamento g e g' . Assim, dado um campo ϕ , devemos fazer a generalização pura e simples de (6-6) e teremos a derivada de ϕ passando para

$$i\partial^\alpha \phi \rightarrow i\partial^\alpha \phi - g A^\alpha \cdot \frac{\tilde{\zeta}}{2} \phi + \frac{g'}{2} B^\alpha \phi \quad (6-9)$$

onde $\frac{\tilde{\zeta}}{2}$ é uma representação de dimensão 3 de $SU(2)$.

Outro aspecto que devemos considerar, são as representações e os números quânticos do modelo. Consideremos a parte Leptonica do modelo de Weinberg-Salam, os campos dos leptons são introduzidos em dupletos de mão esquerda tais que

$$L(x) = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix} \quad (6-10)$$

e o operador carga é definido por

$$Q_L L(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} L(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e_L \end{pmatrix} \quad (6-11)$$

Considerando-se um isospin fraco (T) e uma hipercarga (Y), temos uma relação de Gell-Mann-Nishijima generalizada para os Leptons

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y \quad (6-12)$$

onde T e Y são operadores associados aos geradores de $SU(2)$ e $U(1)$ respectivamente.

Os bosons escalares em $SU(2) \times U(1)$ serão introduzidos em um duplete de forma idêntica aos Leptons. Teremos assim

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^-(x) \end{pmatrix} \quad \phi^\dagger(x) = (\bar{\phi}^+(x), \phi^+(x)) \quad (6-13)$$

com os seguintes números quânticos

	T	T ₃	Y	Q = T ₃ + Y/2
ϕ^0	1/2	1/2	-1	0
ϕ^-	1/2	-1/2	-1	-1

Podemos passar agora a quebra de simetria propriamente dita. A Lagrangeana dos bosons de Higgs será dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0 &= \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi + m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (6-14) \\
 &= \partial^\mu \bar{\phi}^0 \partial_\mu \phi + \partial^\mu \phi^\dagger \partial_\mu \phi^- + m^2 (\bar{\phi}^0 \phi^0 + \phi^\dagger \phi^-) \\
 &\quad - \lambda (\bar{\phi}^0 \phi^0 + \phi^\dagger \phi^-)^2
 \end{aligned}$$

onde as derivadas acima devem ser substituídas pelas respectivas derivadas covariantes dada por (6-9).

Definindo-se o ângulo de Weinberg por

$$\tan \theta_w = \frac{g'}{g}, \quad \sin \theta_w = \frac{g'}{\sqrt{g'^2 + g^2}}, \quad \cos \theta_w = \frac{g}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad (6-15)$$

assim, teremos para a Lagrangeana dos bosons de gauge e de Higgs

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \mathcal{G}^{\alpha\beta} \mathcal{G}_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (6-16) \\
 &+ (\partial^\alpha + ig A^\alpha \cdot \frac{\tau}{2} - ig \tan \theta_w B^\alpha) \phi^\dagger (\partial_\alpha - ig A_\alpha \cdot \frac{\tau}{2} + ig \tan \theta_w B_\alpha) \phi \\
 &+ m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2
 \end{aligned}$$

Esta Lagrangeana é invariante por transformações de gauge $SU(2)_T \times U(1)_Y$. A simetria será quebrada espontaneamente supondo-se que o vácuo tenha uma solução tal que $\langle 0 | \phi | 0 \rangle \neq 0$

Para não eliminar a invariância de gauge das interações eletromagnéticas é necessário que se imponha que o vácuo tenha uma carga eletromagnética nula*, ou seja

$$Q|0\rangle = 0 \Rightarrow \langle 0 | [Q, \phi] | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \langle 0 | \phi | 0 \rangle = 0 \quad (6-17)$$

o que implica que $\langle 0 | \phi | 0 \rangle$ deverá ser da forma

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-18)$$

de onde temos

$$\langle 0 | \phi^0 | 0 \rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \langle 0 | \phi^- | 0 \rangle = 0 \quad (6-19)$$

Reparametrizando o campo como fizemos na secção 4. teremos

$$\phi = e^{i \frac{\xi}{\sqrt{2}}} \frac{\phi^0 + v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-20)$$

A parametrização descrita por (6-20) corresponde a escolha do gauge unitário, de forma que ξ será o boson de Goldstone

* Com isto queremos dizer que o vácuo é invariante sob $U(1)$

não aparecendo no resultado final em virtude de nossa escolha de gauge. A Lagrangeana contendo apenas os bosons de Higgs físicos será obtida através da substituição:

$$\phi \rightarrow \frac{\phi^0 + \sigma}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6-21)$$

e chegamos a

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} G^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - 2v^2 \lambda \phi^0{}^2) \\ & - \lambda v \phi^0{}^3 - \frac{\lambda}{4} \phi^0{}^4 \quad (6-22) \\ & + \frac{g^2}{8} (\phi^0{}^2 + 2v \phi^0) (A^\mu A_\mu + \tan^2 \theta_w B^\mu B_\mu - 2A_3^\mu B_\mu \tan \theta_w) \\ & + \frac{g^2 v}{8} (A^\mu A_\mu + \tan^2 \theta_w B^\mu B_\mu - 2A_3^\mu B_\mu \tan \theta_w) \end{aligned}$$

realizando-se as seguintes substituições

$$\begin{aligned} W^{+\alpha} &= \frac{A_1^\alpha + i A_2^\alpha}{\sqrt{2}} \quad , \quad W^{-\alpha} = \frac{A_1^\alpha - i A_2^\alpha}{\sqrt{2}} \\ Z^\alpha &= \sin \theta_w B^\alpha - \cos \theta_w A_3^\alpha \quad (6-23) \\ A^\alpha &= \cos \theta_w B^\alpha + \sin \theta_w A_3^\alpha \end{aligned}$$

onde A (foton), Z (corrente neutra) e W 's (correntes carregadas) são os verdadeiros campos físicos, daí chega-se a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} G^{\mu\nu} G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{g^2 v^2}{4} W^{\mu\alpha} W_{\alpha} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{g^2 v^2}{4 \cos^2 \theta_w} Z^{\mu} Z_{\mu} + \frac{1}{2} (\partial^{\mu} \phi^0 \partial_{\mu} \phi^0 - 2 v^2 \lambda \phi^0{}^2) \quad (6-24) \\
 & - \lambda v \phi^0{}^3 - \frac{\lambda}{4} \phi^0{}^4 - \frac{g^2}{4} (\phi^0{}^2 + 2 v \phi^0) \left(W^{\mu\alpha} W_{\alpha} + \frac{1}{2 \cos^2 \theta_w} Z^{\mu} Z_{\mu} \right)
 \end{aligned}$$

Como resultado final os bosons W^{\pm} e Z adquiriram massa e ficamos com um boson de Higgs físico de massa $m_{\phi}^2 = 2 v^2 \lambda$

6b. O padrão de quebra de simetria no modelo de grande unificação SU(5).

O primeiro modelo visando a unificação das interações fracas, fortes e eletromagnéticas foi proposto por Pati e Salam⁽²⁾ (baseado em um grupo semi-simples). No entanto, o modelo mais estudado até o momento, foi elaborado por Georgi e Glashow baseado no grupo SU(5).

A idéia dos modelos de grande unificação é englobar em uma única teoria, as teorias que descrevem a fenomenologia atual. Que no caso, seriam, SU(3) (cromodinâmica quântica) e SU(2)xU(1) (modelo de Weinberg-Salam), formando o que denominamos anteriormente de modelo padrão (SU(3) x SU(2) x U(1)). O primeiro passo na construção de uma teoria de grande unificação, é a procura de um grupo, que contenha como subgrupo o modelo padrão. Pode-se verifi

car que o modelo mínimo* de grande unificação, tem o grupo SU(5) como grupo de simetria de gauge^(2,18,19).

Sem nos preocuparmos com as inúmeras peculiaridades do modelo de grande unificação SU(5) (vide Ref.18), vamos nos dedicar ao estudo de seu potencial de Higgs. O primeiro passo para isto será imaginar todas as estruturas de potenciais de Higgs passíveis de quebrar SU(5) em SU(3) x SU(2) x U(1), e posteriormente em SU(3) x U'(1) que é a estrutura de simetria das teorias que temos a baixas energias. Voltando-se a secção 5. através dos resultados de Li podemos notar que isto será realizado através de um potencial de Higgs, com bosons nas representações adjunta e fundamental de SU(5).

O estudo da quebra de simetria em SU(5) foi realizado por Buras et al⁽¹⁹⁾ e posteriormente detalhado por Magg e Shafi⁽²⁰⁾ do qual apresentamos parte dos resultados.

O potencial mais geral possível formado por bosons de Higgs nas representações adjunta e fundamental é dado por

$$\begin{aligned} V(\Phi, H) = & -\frac{1}{2} \mu^2 \text{Tr}(\Phi^2) + \frac{a}{4} (\text{Tr} \Phi^2)^2 + \frac{b}{2} \text{Tr}(\Phi^4) \\ & + \frac{c}{3} \text{Tr}(\Phi^3) - \frac{1}{2} v^2 (H^\dagger H) + \frac{\lambda}{4} (H^\dagger H)^2 \\ & + \alpha (H^\dagger H) \text{Tr}(\Phi^2) + \beta H^\dagger \Phi^2 H \end{aligned} \quad (6-25)$$

* Com modelo mínimo estamos nos referindo ao fato, que qualquer outro modelo (que contenha SU(3) x SU(2) x U(1)) irá introduzir novos aspectos fenomenológicos, além dos que são apresentados por SU(5).

Para obtenção do mínimo de $V(\Phi, H)$ impomos uma simetria discreta $\Phi \leftrightarrow -\Phi$ tal que $c=0$. (Isto é necessário para obtermos um mínimo simétrico, sem a existência de um vácuo falso. Vide nota ao final da pág. 13). Em (6.25) Φ são os bosons de Higgs da representação adjunta (24), na notação matricial $\Phi = \sum_{a=1}^{24} \phi^a (\lambda^a / \sqrt{2})$ (λ^a são os geradores de SU(5)), e H os campos da representação fundamental (5) ($H_i, i=1, \dots, 5$)

A matriz Φ pode ser diagonalizada por uma transformação de gauge de SU(5), tal que

$$\phi_i^j = \delta_{ij} \phi_i \quad (6-26)$$

mantendo a condição de traço nulo

$$\sum_{i=1}^5 \phi_i = 0 \quad (6-27)$$

E as componentes do setor complexo pentadimensional podem ser tomadas a menos de uma fase idêntica para todas as componentes*

$$\begin{aligned} H_i &= x \hat{H}_i & x &\in \mathbb{C} \\ \sum_{i=1}^5 \hat{H}_i^2 &= 1 & \hat{H}_i &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (6-28)$$

* Isto é decorrente da forma do potencial (6.25), que é independente da fase do campo H

Desta forma o potencial resultante será

$$\begin{aligned}
 V(\phi_i, |x|, \hat{H}_i) = & -\frac{\mu^2}{2} \sum_{i=1}^5 \phi_i^2 + \frac{a}{4} \left(\sum_{i=1}^5 \phi_i^2 \right)^2 \\
 & + \frac{b}{2} \sum_{i=1}^5 \phi_i^4 - \frac{1}{2} \gamma^2 |x|^2 + \frac{\lambda}{4} |x|^4 + \alpha |x|^2 \sum_{i=1}^5 \phi_i^2 \\
 & + \beta |x|^2 \sum_{i=1}^5 \hat{H}_i^2 \phi_i^2 \quad (6-29)
 \end{aligned}$$

o passo seguinte será determinar os pontos de mínimo deste potencial, porém, adotando antes, uma convenção tal que

$$\phi_5^2 \leq \phi_i^2 \quad (1 \leq i \leq 4) \quad , \quad \beta > 0 \quad (6-30)$$

$$\phi_5^2 \geq \phi_i^2 \quad (1 \leq i \leq 4) \quad , \quad \beta < 0$$

com isto podemos estudar o último termo do potencial (6-29) =>

$\beta |x|^2 \sum_{i=1}^5 \hat{H}_i^2 \phi_i^2$ e verificar que o mínimo para uma variação de \hat{H}_i irá ocorrer conforme a condição

$$\langle \hat{H}_i \rangle^2 (\langle \phi_5 \rangle^2 - \langle \phi_i \rangle^2) = 0 \quad (1 \leq i \leq 4) \quad (6-31)$$

ou seja, no mínimo $\langle \hat{H}_i \rangle^2 = 0$ para $i = 1, 2, 3, 4$ desta forma o último termo em (6-29) pode ser escrito como

$$\beta |x|^2 \sum_{i=1}^5 \hat{H}_i^2 \phi_i^2 = \beta |x|^2 \phi_5^2 \quad (6-32)$$

Deve-se acrescentar ao potencial, um termo devido a um multiplicador de Lagrange $-\sigma \sum_{i=1}^5 \phi_i$ *. Finalmente, as condições de extremo, com relação a ϕ_i serão:

$$\begin{aligned} & [-\mu^2 + 2\alpha |x|^2 + a \sum_{j=1}^5 \phi_j^2 + 2b \phi_i^2] \phi_i = \sigma \quad (1 \leq i \leq 4) \\ & [-\mu^2 + 2\alpha |x|^2 + 2\beta |x|^2 + a \sum_{j=1}^5 \phi_j^2 + 2b \phi_5^2] \phi_5 = \sigma \end{aligned} \quad (6-33)$$

onde pode-se notar que $\langle \phi_i \rangle^2 \neq \langle \phi_5 \rangle^2$ para $i=1,2,3,4$ e como vimos anteriormente (6-31) $\langle H_i \rangle = \langle x \rangle \delta_{i5}$ para $i=1, \dots, 5$.

A determinação da solução das equações acima pode ser vista no apêndice B do artigo de L.F.Li, de onde pode-se obter as seguintes possíveis soluções

$$\begin{aligned} \text{a) } \langle \phi_i^j \rangle &= \begin{pmatrix} \delta & & & & \\ & \delta & & & \\ & & \delta & & \\ 0 & & & \delta & \\ & & & & -4\delta \end{pmatrix} & \text{b) } \langle \phi_i^j \rangle &= \begin{pmatrix} \delta & & & & \\ & \delta & & & \\ & & \delta & & \\ 0 & & & \delta(-\frac{1}{2} + \epsilon) & \\ & & & & \delta(-\frac{1}{2} - \epsilon) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \langle \phi_i^j \rangle &= \begin{pmatrix} \delta & & & & \\ & \delta & & & \\ & & \delta(1+\epsilon) & & \\ 0 & & & \delta(1+\epsilon) & \\ & & & & -2\delta(2+\epsilon) \end{pmatrix} & \text{d) } \langle \phi_i^j \rangle &= \begin{pmatrix} \delta & & & & \\ & \delta & & & \\ & & \delta(-1+\epsilon) & & \\ 0 & & & -\epsilon\delta & \\ & & & & -\delta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

* Este termo leva em conta a condição de traço nulo, permitindo-nos variar os ϕ_i independentemente.

a substituição destas soluções nas equações de extremos, nos dará os valores de δ e ϵ em função dos parâmetros do potencial.

O valor δ será da ordem de $\langle \phi_i \rangle$ e caracterizará a quebra do grupo SU(5) ($\langle \phi_i \rangle \sim 10^{14} \text{ GeV}$), $\langle x \rangle$ por sua vez, caracterizará a ordem de grandeza da quebra do modelo de Weinberg-Salam (a representação fundamental é introduzida com apenas esta finalidade e $\langle x \rangle \sim 10^2 \text{ GeV}$)*. A solução que nos interessará é aquela que mantém $\langle x^2 \rangle / \delta^2 \ll 1$. Isto é o que conhecemos por hierarquia de escalas de energias. Em todos os trabalhos sobre o padrão de quebra de simetria em modelos unificados, existe um problema para manter-se válida a relação $\langle x^2 \rangle / \delta^2 \ll 1$. Porém, este é todo um contexto a parte, para o qual indicamos as referências (18) e (21) a partir de onde poderão ser obtidos os trabalhos a este respeito.

Voltando às nossas soluções, verifica-se que cada uma delas será um mínimo absoluto, apenas para certas condições dos parâmetros do potencial. Abaixo apresentamos as condições obtidas

* A primeira análise das escalas de energia envolvidas em teorias grande-unificadas, foi elaborada por H.Georgi, H.R.Quinn e S. Weinberg, Phys.Rev.Lett.33(1974)451. Nestes modelos, duas escalas de energia são bem estabelecidas. Uma correspondente a quebra de simetria do modelo de Weinberg-Salam, determinada através da fenomenologia, como sendo da ordem de 10^2 GeV . A outra escala será a da quebra da simetria de grande unificação, e será caracterizada pelo "threshold" dos bosons intermediários de SU(5). Como estes bosons causam o decaimento do proton, e a vida média deste último possui um limite inferior de 10^{30} anos, por simples análise dimensional (19) $\left[\tau(\text{proton}) \approx (10^3 - 10^4) \frac{(e\langle \phi \rangle)^4}{m_p^3} \right]$ espera-se que

$$\langle \phi \rangle \sim 10^{14} \text{ GeV}$$

por Magg e Shafi⁽²⁰⁾ para o padrão de quebra de $SU(5)$ com uma representação adjunta mais uma representação fundamental de bosons de Higgs

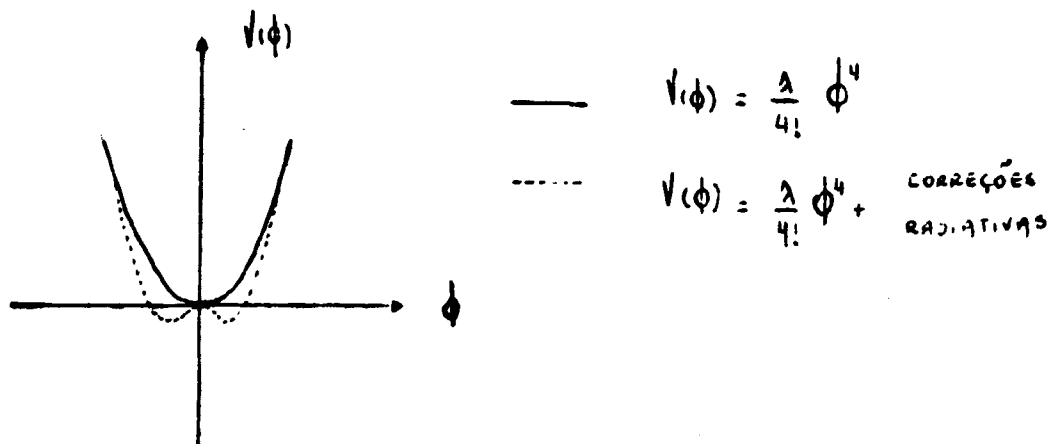
	$\beta > 0$	$\beta < 0$
$a > -\frac{7}{15} b$ $b > 0$	$SU(5)$ \downarrow $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ \downarrow $SU(2) \times SU(2) \times U(1)$	$SU(5)$ \downarrow $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ \downarrow $SU(3) \times U(1)$ quebra desejada
$a > 0, b < 0$ $ b < \frac{10}{13} a$	$SU(5)$ \downarrow $SU(4) \times U(1)$ \downarrow $SU(3) \times U(1)$	$SU(5)$ \downarrow $SU(4) \times U(1)$ \downarrow $SU(4)$

Assim somente com as condições $\beta < 0$ e $a > -\frac{7}{15} b$ e $b > 0$ obtemos o padrão de quebra de simetria desejado.

7. Quebra de simetria através das correções radiativas

S.Coleman e E.Weinberg foram os primeiros a notar que as correções radiativas podem produzir a quebra espontânea de simetria. Mesmo quando esta não existe explicitamente na Lagrangeana

ao nível de árvore. Com isto queremos dizer que mesmo não existindo um termo com uma massa imaginária ao nível de árvore na Lagrangeana, as correções quânticas do potencial simulam o mesmo efeito de uma massa imaginária. O efeito das correções ao potencial pode ser visto no gráfico abaixo



O cálculo das citadas correções é realizado dentro do formalismo funcional idealizado por Schwinger⁽²²⁾ e introduzido no estudo da quebra espontânea de simetria por Jona-Lasinio⁽²³⁾ e por Goldstone, Salam e Weinberg⁽¹¹⁾. Ao potencial mais suas correções damos o nome de potencial efetivo, e pode-se verificar que este será dado pela expansão em "Loops" da função de Green de n-pernas. Não iremos nos detalhar nas peculiaridades da expansão funcional, porém a seguinte relação de referências poderá ser útil para o estudo destes aspectos:

a) uma introdução pedagógica ao estudo dos métodos funcionais pode

ser vista na revisão de Coleman⁽¹²⁾, que não difere em muito de seu artigo original⁽²⁴⁾ b) a determinação da ação efetiva através do método do "Steepest descent" pode ser vista de forma clara na revisão de Abers e Lee⁽¹⁾ c) o artigo de Iliopoulos e outros⁽²⁴⁾ apresenta a dedução do potencial efetivo através da expansão em loops, deixando em evidência que esta é uma expansão em série de potenciais de \hbar (isto foi notado pela primeira vez por Nambu*) d) o trabalho mais detalhado a respeito é de Jackiw⁽²⁴⁾, aonde encontra-se também como exemplo o cálculo do potencial efetivo de uma teoria $\lambda\phi^4$ até dois "loops". O resultado foi generalizado para teorias de gauge por Dolan e Jackiw⁽²⁴⁾, onde é verificado um sinal da não dependência do gauge no potencial efetivo ao nível de "1 Loop". e) um método alternativo (como discutido por Coleman⁽¹²⁾) é apresentado por Weinberg⁽²⁴⁾, onde a derivada do potencial é calculada através da equação que indica que a soma dos "tadpoles" da teoria é nula (condição de estacionariedade do potencial).

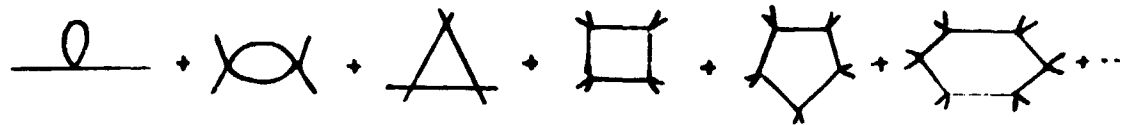
Nosso plano nesta secção será o de dar uma descrição rápida do cálculo realizado por Coleman e Weinberg⁽²⁴⁾. Discutindo em seguida as correções radiativas no modelo da secção 5c. utilizando-nos do formalismo desenvolvido por Jackiw⁽²⁴⁾.

Seja o potencial dado por

$$V = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (71)$$

* Y.Nambu, Phys.Lett.26B(1966)626.

ao nível de árvore, que nos indica a existência de uma interação quartica com um acoplamento λ . As correções na ordem de "1 loop" serão dadas pela soma dos seguintes gráficos



Sem levarmos em conta os contratermos provenientes da renormalização, o potencial efetivo será dado por

$$V = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \left(\frac{\frac{1}{2} \lambda \phi_c^2}{k^2 + ie} \right)^m \quad (7-2)$$

onde o fator i vem da definição do potencial efetivo. O fator $1/2$ no numerador da fração é proveniente da estatística de Bose (a troca de duas linhas externas no mesmo vértice não leva a um novo gráfico) e o fator $1/2m$ indica que a rotação ou reflexão de um polígono de n -lados não leva a uma nova contração na expansão de Wick.

O resultado deste cálculo (já renormalizado) após somar a série e integrar será

$$V = \frac{\lambda}{4!} \phi^4 - \frac{\lambda^2 \phi^4}{256 \pi^2} \left(\ln \frac{\phi^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right) \quad (7-3)$$

cujo gráfico corresponde ao desenho pontilhado da figura à pag 31

Na verdade "escondeu-se o jogo" neste cálculo, pois, o que descrevemos acima não é nada esclarecedor, porém os detalhes podem ser encontrados na revisão de Coleman⁽¹²⁾, a parte de análise combinatória de gráficos pode ser vista no "Diagrammar"⁽²⁵⁾. (Um estudo detalhado da análise combinatória em gráficos de Feynman foi realizado por Cvitanovic e outros⁽²⁶⁾). Para compensarmos a falta de detalhes no cálculo acima, resolveremos um caso mais complexo no apêndice B. Onde partindo da Lagrangeana (o mesmo modelo apresentado na secção 5c. a menos dos termos de massa)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} f_1 (\chi^2)^2 - \frac{1}{4} f_2 (\eta^2)^2 \\ & - \frac{1}{2} f_3 \chi^2 \eta^2 - \frac{1}{2} f_4 (\chi \cdot \eta)^2 + \frac{1}{2} (D_\mu \eta D^\mu \eta) \\ & + \frac{1}{2} (D^\mu \chi D_\mu \chi) \end{aligned} \quad (7-4)$$

chegamos ao potencial efetivo

$$\begin{aligned} V_2(\eta, \chi) = & \frac{1}{4} f_1 \chi^4 + \frac{1}{4} f_2 \eta^4 + \frac{1}{2} f_3 \chi^2 \eta^2 + \frac{1}{2} f_4 (\chi \cdot \eta)^2 \\ & + \frac{1}{32\pi^2} \left[\frac{3}{2} (N-2) (g^4 \eta^4 \ln \frac{\eta^2}{M^2} + g^4 \chi^4 \ln \frac{\chi^2}{M^2}) + \right. \\ & \left. + \frac{3}{2} g^4 (\chi^2 + \eta^2)^2 \ln \frac{\chi^2 + \eta^2}{M^2} \right] \end{aligned}$$

Este resultado foi obtido no apêndice B, onde consideramos o potencial massivo (o fato de termos massa ao nível de árvore não altera a forma de cálculo do potencial efetivo), também não apresentamos acima a contribuição dos bosons escalares para o potencial (o que está incluído no resultado do apêndice B).

As peculiaridades de modelos em que a quebra de simetria é realizada através das correções radiativas, bem como o padrão da quebra de simetria foi elaborado por E.Gildener⁽²⁷⁾. Uma aplicação destas idéias ao modelo de Weinberg-Salam foi realizada por Weinberg e Gildener⁽²⁸⁾.

Com este processo de quebra de simetria pode-se obter a massa do boson de Higgs em função de outras massas da teoria^(24,28). Portanto se a quebra do modelo de Weinberg-Salam for realizada via correções radiativas, prevê-se uma massa da ordem de 10GeV para o boson de Higgs, este resultado suscitou uma imensa quantidade de publicações a respeito da fenomenologia do boson de 10 GeV (uma excelente revisão é o trabalho de Barbiellini e outros⁽³⁰⁾).

Uma consequência importante da análise das correções radiativas é a imposição de um limite mínimo para a massa do boson de Higgs do modelo de Weinberg-Salam (este limite corresponde a uma condição de estabilidade do potencial frente as correções radiativas⁽²⁹⁾).

A quebra de simetria através das correções radiativas em modelos de grande unificação também pode ser realizada. Aliás

o único cálculo que existe neste sentido até o momento foi elaborado por Ellis et al⁽³¹⁾ para o modelo SU(5).

8. Violação de CP através do Mecanismo de Higgs

Após a constatação experimental de que a simetria de CP é violada no sistema $K^0-\bar{K}^0$ passou-se a procura das causas da não conservação desta simetria. Atualmente existem duas hipóteses mais estudadas sobre a origem desta violação. A primeira devida a Kobayashi e Maskawa⁽³²⁾, baseia-se no fato que temos pelo menos seis sabores diferentes de quarks. Portanto, pode-se mostrar que a matriz de Cabibbo mais geral para estes quarks, apresenta uma fase que viola T e não pode ser eliminada por uma transformação de gauge. A segunda hipótese implica numa violação de T através do mecanismo de Higgs⁽³³⁾. A idéia é partir de uma Lagrangeana com um potencial de Higgs invariante por T (e conseqüentemente por CP) que admita um mínimo degenerado. No momento em que a teoria escolher um determinado vácuo, a invariância por T que implicava $\langle \phi \rangle : \mathcal{U} \leftrightarrow \langle \phi \rangle : -\mathcal{U}$ é perdida. Podendo-se verificar que certas transições violam CP explicitamente já na ordem mais baixa.

Um esquema simples de violação de CP "soft" (adota-se esta terminologia no caso da violação via boson de Higgs; no caso de Kobayashi e Maskawa temos a violação de CP "hard") foi elaborado por T.D.Lee⁽³³⁾ para o modelo de unificação das interações fracas e eletromagnéticas de Georgi e Glashow⁽³⁴⁾ e baseia-se na seguinte Lagrangeana:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D^\mu \eta \bar{D}_\mu \eta) + \frac{1}{2} (D^\mu \chi \bar{D}_\mu \chi) + \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 \\
 & + \frac{1}{2} m_\eta^2 \eta^2 - \frac{1}{4} f_1 (\chi^2)^2 - \frac{1}{4} f_2 (\eta^2)^2 - \frac{1}{2} f_3 \chi^2 \eta^2 - \frac{1}{2} f_4 (\chi \cdot \eta)^2 \\
 & + \bar{\Psi} (i \not{D}_\mu - m) \Psi + \bar{\Psi} (\lambda_1 \chi \Psi + \lambda_2 \eta \gamma_5 \Psi) \quad (8-1)
 \end{aligned}$$

onde χ e η são tripletos de $O(3)$.

Devemos observar que temos a mesma Lagrangeana estudada em seções anteriores e nos apêndices A e B, com exceção dos dois últimos termos que nos dão o acoplamento dos tripletos de fermions da teoria com os bosons de gauge e bosons de Higgs, além do fato que agora estes bosons de Higgs são carregados. Nós não nos atermos as peculiaridades da violação de CP, estamos apenas interessados na quebra de simetria através do potencial de Higgs. Para um maior entendimento a respeito da violação de CP no sistema de Higgs pode-se recomendar o texto de T.D.Lee⁽³⁵⁾. Quanto a este esquema aplicado ao modelo de Weinberg-Salam pode-se encontrar o trabalho de Weinberg⁽⁴³⁾. Para a introdução da violação de T em modelos mais complexos, pode ser necessária a introdução de uma maior quantidade de bosons de Higgs tornando a análise bastante trabalhosa.

Um ponto importante a ser lembrado é que para existir a violação de CP devemos introduzir mais bosons de Higgs na teoria, de tal maneira que na diagonalização da matriz de massa chega-se a campos diagonalizados com vértices que levam a interações não

invariantes por CP. Porém estes novos bosons de Higgs não devem quebrar ainda mais a simetria de gauge da teoria. Portanto uma vez promovida a quebra da simetria de gauge, os novos bosons de Higgs, os quais devem ser acrescentados a teoria para violar CP, só podem possuir uma "direção de Goldstone", que será a determinada pelo sistema de Higgs que quebrou a simetria de gauge original. Na realidade, todos os bosons de Higgs participarão da quebra da simetria de gauge, adquirindo diferentes valores esperados no vácuo em direções paralelas.

Após o que discutimos acima, e como já discutimos no Apêndice A o potencial dado por (8-1), podemos constatar que "a única solução que nos interessa e que leva à violação de CP, será aquela cujo mínimo é dado pela condição de campos paralelos (vide apêndice A) $f_4 < 0$ ", teremos então:

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{m_2^2 f_2 - (f_3 + f_4) m_1^2}{f_1 f_2 - (f_3 + f_4)^2} = \epsilon^2, \quad \langle \eta^2 \rangle = \frac{m_2^2 f_3 - (f_3 + f_4) m_1^2}{f_1 f_2 - (f_3 + f_4)^2} = \sigma^2 \quad (8.2)$$

cuja condição de estabilidade implica

$$-(f_1 f_2)^{1/2} < f_3 + f_4 < f_1 m_2^2 / m_1^2 \quad (8.3)$$

Com esta escolha de mínimos a simetria inicial $O(3)$ reduz-se a do eletromagnetismo $O(2)$. Podemos também adotar a seguinte estrutura de campos

$$\langle \chi_{\pm} \rangle = \langle \sqrt{\frac{1}{2}} (\chi_1 \pm i \chi_2) \rangle = 0$$

$$\langle \eta_{\pm} \rangle = \langle \sqrt{\frac{1}{2}} (\eta_1 \pm i \eta_2) \rangle = 0 \quad (8-4)$$

$$\langle \chi_3 \rangle = \epsilon \quad \langle \eta_3 \rangle = \nu$$

As matrizes de massa dos bosons carregados e neutros se rão

$$M_C^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \chi_+ \partial \chi_-} & \frac{\partial^2 V}{\partial \chi_+ \partial \eta_-} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_+ \partial \chi_-} & \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_+ \partial \eta_-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_1^2 + f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2 & f_4 \eta \chi \\ f_4 \eta \chi & -m_2^2 + f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2 \end{pmatrix} \quad (8-5)$$

$$M_N^2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \chi_3^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \chi_3 \partial \eta_3} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_3 \partial \chi_3} & \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_1^2 + 3f_1 \chi^2 + (f_3 + f_4) \eta^2 & 2(f_3 + f_4) \chi \eta \\ 2(f_3 + f_4) \eta \chi & -m_2^2 + 3f_2 \eta^2 + (f_3 + f_4) \chi^2 \end{pmatrix} \quad (8-6)$$

Pode-se diagonalizar a matriz de massa dos bosons de Higgs carregados tal que

$$M_C^2(\chi, \eta) = (-m_2^2 + f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2) \cos^2 \beta - 2f_4 \chi \eta \sin \beta \cos \beta + \quad (8-7)$$

$$+ (-m_1^2 + f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2) \sin^2 \beta$$

onde β é dado por

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{J}{\epsilon} = \sqrt{\frac{f_2 m_2^2 - (f_3 + f_4) m_1^2}{f_2 m_1^2 - (f_3 + f_4) m_2^2}} \quad (8-8)$$

a massa dos bosons neutros é dada pela diagonalização de (8-6) .

Como já dissemos, nós nos preocupamos aqui, apenas com a estrutura da quebra de simetria através do potencial de Higgs. (Detalhes sobre a violação de CP podem ser vistos nos trabalhos de T.D.Lee^(33,35)).

9. Teorias de Gauge a Temperatura Finita

Como dissemos anteriormente (secção 2) o mecanismo de Higgs possui uma analogia com a física dos supercondutores. Sabe-se também que quando um supercondutor é aquecido o mesmo sofre uma transição de fase correspondente a uma mudança no sinal de α na equ.(2.1) (vide gráficos a pag. 4).

Kirzhnits e Linde⁽⁵⁾ seguindo esta analogia por completo, argumentaram que em uma teoria de gauge onde a simetria é quebrada à temperatura zero, esta deverá ser restaurada, quando o sistema for aquecido. Estes efeitos serão de importância vital no estudo de Cosmologia, onde conforme ocorrer a evolução do Universo, estaremos partindo de uma simetria total das interações, a qual vai sendo quebrada a medida que a temperatura diminui. Este efeito também poderá ser observado na presença de campos eletromagnéticos intensos conforme será visto mais adiante.

A introdução da temperatura na análise de processos em teorias de gauge, segue um formalismo proveniente de estudos realizados em mecânica estatística, muito anteriores às idéias de se estudarem transições de fases em teorias de gauge. Sendo que grande parte do formalismo utilizado em teorias de gauge (isto mesmo a temperatura zero) são originários de estudos em mecânica estatística.

Em mecânica estatística podemos deduzir a expansão de Wick, as funções de Green e as regras de Feynman em função da temperatura. Este formalismo foi estabelecido por Matsubara⁽³⁶⁾, Abrikosov et al⁽³⁷⁾, Fradkin⁽³⁷⁾ e Martin e Schwinger⁽³⁷⁾. Uma explanação bastante suscinta destes trabalhos pode ser vista no livro de Fetter e Walecka⁽³⁸⁾ (o cap. 7 deste livro resume tudo o que é necessário para um entendimento do formalismo quântico relativístico dependente da temperatura). Um segundo texto clássico é o livro de Abrikosov e outros⁽³⁸⁾. Exporemos aqui os resultados principais dos trabalhos acima, sendo que basicamente nossa intenção é obter as regras de Feynman dependentes da temperatura.

A função de Green dependente da temperatura para um dado campo será obtida através da média de Gibbs do produto ordenado temporal dos operadores de campo.

$$G_{\beta}(x_i, \dots, x_j) = \frac{\text{Tr } e^{-\beta H} T[\phi(x_i) \dots \phi(x_j)]}{\text{Tr } e^{-\beta H}} \quad (9-1)$$

onde $\beta = 1/kT$ e H a Hamiltoniana do sistema. Sendo que as funções de Green irão depender de um tempo imaginário $\tau = it$ onde τ irá variar no intervalo $[0, i/\tau]$ ⁽³⁶⁾. A partir desta definição, pode-se determinar a expansão de Wick. Um ponto crucial na dedução das regras de Feynman dependentes da temperatura, é o fato que, partindo-se da definição (9.1) pode-se demonstrar que as funções de Green são funções da diferença do tempo ($\tau_1 - \tau_2 = \tau$), sendo que este é definido no intervalo $-\beta\hbar < \tau < \beta\hbar$ (vide Fetter e Walecka⁽³⁸⁾ pag.236 e Abrikosov⁽³⁸⁾ pag.101). Isto permite que a função de Green seja expandida em uma série de Fourier de período $2\beta\hbar$, portanto

$$\begin{aligned} \underline{G}(x_1, \tau_1, x_2, \tau_2) &= \underline{G}(x_1, x_2, \tau_1 - \tau_2) = \underline{G}(x_1, x_2, \tau) \\ &= (\beta\hbar)^{-1} \sum_m e^{-i\omega_m \tau} \underline{G}(x_1, x_2, \omega_m) \end{aligned} \quad (9.2)$$

onde

$$\omega_m = \frac{m\pi}{\beta\hbar}$$

Nas refs.(38) é desenvolvido todo o formalismo diagramático da expansão de Wick e equações de Dyson. Com relação as teorias de gauge é conveniente utilizar-se o formalismo funcional, e a dedução das regras de Feynman no formalismo funcional foi realizada por C. Bernard⁽³⁹⁾.

Os resultados de Bernard podem ser sumariados como:

i) A função de partição $T_n e^{-\beta H} = \sum_{\psi} \langle \psi | e^{-\beta H} | \psi \rangle$

(a função de partição faz o mesmo papel da ação efetiva, ou seja, suas derivadas funcionais nos dão as funções de Green) é uma quantidade dependente do gauge e só terá significado físico quando trabalharmos em um gauge no qual não apareçam partículas não físicas (gauge unitário, porém neste gauge não é possível observar a restauração de simetrias⁽⁴⁰⁾).

ii) As regras de Feynman são exatamente as mesmas de temperatura zero, realizando-se as modificações

$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 \rightarrow i\omega_m \\ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \rightarrow i \frac{1}{\beta} \sum_m \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \\ (2\pi)^4 \delta^4(k-k') \rightarrow \frac{1}{i} (2\pi)^3 \beta \delta_{\omega\omega'} \delta^3(k-k') \end{array} \right. \quad 9-3$$

onde $\omega_m = 2\pi m/\beta$ para os bosons e para os fantasmas de Fadeev-Popov e $(2m+1)\pi/\beta$ para os fermions.

Devemos observar os seguintes pontos:

a) como o tempo é uma função periódica da temperatura, temos como resultado a troca da variável k_0 por $i\omega_m$ e a integral pela somatória devido a expansão da função de Green como uma soma de Fourier.

b) Bernard praticamente assume "a priori" a estatística de Bosons para os Fantasmas de Fadeev-Popov, a prova que isto é coerente somente foi realizada recentemente⁽⁴¹⁾.

Portanto, qualquer cálculo em teoria de gauge, que envolva temperatura, poderá ser realizado de forma idêntica ao procedimento de temperatura zero. Desde, que se realize as alterações citadas acima.

Após o trabalho de Kirzhnits e Linde⁽⁵⁾, Weinberg⁽⁴⁰⁾ e Jackiv e Dolan⁽⁴²⁾ elaboraram trabalhos fundamentais para o estudo de teorias de gauge à temperatura finita, estudando o comportamento do potencial efetivo, e a determinação da temperatura crítica, em gauges renormalizáveis bem como no gauge unitário. Alguns destes aspectos serão vistos nas secções seguintes.

10. O potencial efetivo à temperatura finita

A temperatura crítica

Nesta secção calcularemos o potencial efetivo para um modelo $O(N)$, determinando a temperatura crítica para o mesmo. Como vimos na secção anterior as funções de Green à temperatura finita são idênticas as da teoria a temperatura zero. A diferença estará nas condições de contorno temporal que, para temperatura finita, são determinadas como periódicas no tempo imaginário.

De maneira geral o procedimento que iremos expor aqui, poderá ser aplicado de forma idêntica, a qualquer teoria de gauge, (mesmo que não tenhamos bosons de Higgs), as únicas mudanças que ocorrerão estarão ligadas com as particularidades do modelo seja este quadri-dimensional ou bi-dimensional (modelo de Schwinger

modelo de Gross-Neveu, etc...). Podendo a análise do potencial ser realizada através da expansão em Loops, ou com considerações sobre a expansão $1/N$, etc... . Na sequência definiremos a temperatura crítica e determinaremos o potencial efetivo para uma teoria de bo sons escalares, cujo cálculo será tomado como padrão, e cuja Lagrangeana será dada por

$$\int_0 \{ \varphi^{(4)} \} = \frac{1}{2} \partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \quad (10-1)$$

(para que exista quebra de simetria m será sempre imaginário)

a. Definição da temperatura crítica

Estaremos trabalhando com teorias cujo potencial efetivo à temperatura zero $V^0(\varphi^2)$ (o potencial será sempre função de $\hat{\varphi}^2$ aonde $\hat{\varphi}$ é um valor constante para o campo) apresenta uma solução do tipo

$$\frac{\partial V^0(\hat{\varphi}^2)}{\partial \varphi_a} = 0 \quad , \quad \hat{\varphi}_a \neq 0 \quad (10-2)$$

O potencial dependente da temperatura $V^\beta(\varphi^2)$ deverá reduzir-se a $V^0(\hat{\varphi}^2)$ para β infinito ($T = 0$), e nós estaremos procurando uma solução que elimine a quebra de simetria, tal que

$$\frac{\partial V^\beta(\hat{\varphi}^2)}{\partial \hat{\varphi}_a} = 2 \hat{\varphi}_a \frac{\partial V^\beta(\hat{\varphi}^2)}{\partial \hat{\varphi}^2} = 0 \quad (10-2')$$

para a qual $\hat{\psi}_a = 0$

e garantiremos que não há quebra de simetria desde que

$$\frac{\partial V^\beta(\hat{\psi}^2)}{\partial \hat{\psi}^2} \neq 0 \quad \text{para} \quad \hat{\psi}^2 \neq 0 \quad (10-3)$$

para que a simetria persista, podemos escrever

$$\left. \frac{\partial V^\beta(\hat{\psi}^2)}{\partial \hat{\psi}^2} \right|_{\hat{\psi} \neq 0} > 0 \quad (10-4)$$

decompondo-se $V^\beta(\hat{\psi}^2)$ em uma parte que nos dá o potencial à temperatura zero $V^0(\hat{\psi}^2)$ e uma parte dependente da temperatura $\overline{V}^\beta(\hat{\psi}^2)$, assim, temos a condição (10-4) dada por

$$\left. \frac{\partial V^0(\hat{\psi}^2)}{\partial \hat{\psi}^2} \right|_{\hat{\psi}=0} + \left. \frac{\partial \overline{V}^\beta(\hat{\psi}^2)}{\partial \hat{\psi}^2} \right|_{\hat{\psi}=0} \geq 0 \quad (10-5)$$

porém o parâmetro de massa da teoria renormalizada é dado por

$$m^2 \delta_{ab} = \left. \frac{\partial^2 V^0(\hat{\psi}^2)}{\partial \hat{\psi}_a \partial \hat{\psi}_b} \right|_{\hat{\psi}=0} = 2 \delta_{ab} \left. \frac{\partial V^0(\hat{\psi}^2)}{\partial \hat{\psi}^2} \right|_{\hat{\psi}=0} \quad (10-6)$$

substituindo-se em (10-5) teremos

$$\left. \frac{\partial \overline{V}^\beta(\hat{\psi}^2)}{\partial \hat{\psi}^2} \right|_{\hat{\psi}=0} \geq - \frac{m^2}{2} \quad (10-7)$$

definimos portanto a temperatura crítica como

$$\left. \frac{d \overline{V\beta_c(\hat{\psi}^2)}}{d \hat{\psi}^2} \right|_{\hat{\psi}=0} = - \frac{m^2}{2} \quad (10-8)$$

Para a teoria que iremos examinar a seguir teremos apenas uma temperatura crítica β_c onde para $T [1/\beta] < T_c [1/\beta_c]$ a simetria estará quebrada, ou seja, teremos um mínimo para $\hat{\psi} \neq 0$ e para $T > T_c$ a simetria será restaurada e o único mínimo do potencial ocorrerá em $\hat{\psi} = 0$

b. Potencial efetivo dependente da temperatura na aproximação de "1 Loop"

Seja o potencial da Lagrangeana (10-1)

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (10-9)$$

conforme vimos anteriormente a teoria dependente da temperatura só será alterada, através das condições dadas por (9-3), Portanto, o propagador (para o tempo imaginário) dos bosons escalares livres será dado por

$$D_{\beta}(k) = \frac{i}{k^2 - m^2} = \frac{-i}{(4\pi^2 m^2 / \beta^2) + k^2 + m^2} \quad (10-10)$$

Considerando agora nossa Lagrangeana com interação quadrática, podemos escrever os termos quadráticos da ação com a Lagrangeana "deslocada" (vide procedimento no apêndice B)

$$\int d^4x \mathcal{L}_0(\hat{\psi}, \psi(x)) = \int d^4x d^4y \frac{i}{2} \psi(x) i D^{-1}\{\hat{\psi}; x-y\} \psi(y) \quad (10-11)$$

onde

$$i D^{-1}\{\hat{\psi}, k\} = k^2 - M^2 \quad (10-12)$$

e

$$M^2 = m^2 + \frac{1}{2} \lambda \hat{\psi}^2 \quad (10-13)$$

como vimos no apêndice B o potencial efetivo será dado por (eq.

(B-6))

$$V_1(\hat{\psi}^2) = \frac{-i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln i D^{-1}\{\hat{\psi}, k\} \quad (10-14)$$

realizando-se as transformações (9-3) temos

$$\begin{aligned} V_1^B(\hat{\psi}^2) &= \frac{i}{2\beta} \sum_m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln(k^2 - m^2 - \frac{1}{2} \lambda \hat{\psi}^2) \\ &= \frac{i}{2\beta} \sum_m \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln\left(-\frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} - E_m^2\right) \end{aligned} \quad (10-15)$$

onde

$$\bar{E}_m^2 = k^2 + m^2 + \frac{1}{2} \lambda \hat{\phi}^2 \quad (10-16)$$

A soma sobre m diverge, porém pode ser calculada após as seguintes operações, seja

$$V(\bar{E}) = \sum_m \ln \left(\frac{4\pi^2 m^2}{\beta^2} + \bar{E}^2 \right) \quad (10-17)$$

derivando-se com relação a \bar{E} , temos

$$\frac{\partial V(\bar{E})}{\partial \bar{E}} = \sum_m \frac{2\bar{E}}{4\pi^2 m^2 / \beta^2 + \bar{E}^2} \quad (10-18)$$

usando-se a relação

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{y}{y^2 + m^2} = -\frac{1}{2y} + \frac{1}{2} \pi \coth \pi y \quad (10-19)$$

pode-se verificar que

$$\frac{\partial V(\bar{E})}{\partial \bar{E}} = 2\beta \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \bar{E}} - 1} \right) \quad (10-20)$$

integrando-se chegamos a

$$V(\bar{E}) = 2\beta \left[\frac{\bar{E}}{2} + \frac{1}{\beta} \ln (1 - e^{-\beta \bar{E}}) \right] + \text{termos independentes de } \bar{E} \quad (10-21)$$

portanto o potencial será dado por

$$V_1^\beta(\hat{\varphi}^2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{E_M}{2} + \frac{1}{\beta} \ln(1 - e^{-\beta E_M}) \right] \quad (10-22)$$

$$= V_1^0(\hat{\varphi}^2) + \bar{V}_1^\beta(\hat{\varphi}^2)$$

onde $V_1^0(\hat{\varphi}^2)$ é a parte do potencial a temperatura zero

$$V_1^0(\hat{\varphi}^2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{E_M}{2} \quad (10-23)$$

e $\bar{V}_1^\beta(\hat{\varphi}^2)$ a parte dependente da temperatura que pode ser escrita como

$$\bar{V}_1^\beta(\hat{\varphi}^2) = \frac{1}{2\pi^2 \beta^4} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left[1 - e^{-(x^2 + \beta^2 M^2)^{1/2}} \right] \quad (10-24)$$

o qual para $\beta \rightarrow \infty$ ($T \rightarrow 0$) é claramente nulo.

É interessante notar que $V_1^0(\hat{\varphi}^2)$ é exatamente o potencial calculado sobre o espaço quadridimensional, ou seja

$$V_1^0(\hat{\varphi}^2) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln \left[-k_0^2 + k^2 + M^2 - i\epsilon \right] \quad (10-25)$$

isto, porque, a integração na componente temporal a menos de uma constante infinita*, nos dá uma constante que pode ser absorvida na renormalização, ou seja

* Estes infinitos serão eliminados pelos contra-termos apropriados, que poderão ser ajustados para absorver a constante em (10-26)

$$-\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_0}{2\pi} \operatorname{Im}(-k_0^2 + E^2 - i\epsilon) = \frac{1}{2} E \quad (10-26)$$

o que é interessante notar, nisto é que todo o comportamento crítico da teoria está descrito em uma teoria tridimensional fato este, que será relevante em discussões que faremos adiante.

O problema que agora temos por frente é a resolução da integral em $\bar{V}_1^\beta(\hat{\varphi}^2)$, o primeiro fato a observar é que ela será finita, assim sendo os únicos contra-termos necessários na teoria são os de temperatura zero; o segundo ponto é crucial e está ligado ao fato que queremos utilizar o resultado da integral para determinarmos a temperatura crítica. Porém a temperatura crítica é determinada por $\bar{V}_1^\beta(\hat{\varphi}^2)$ em $\hat{\varphi} = 0$ e para valores pequenos de $\hat{\varphi}$, $M^2 = m^2 + \frac{1}{2} \lambda \hat{\varphi}^2$ é negativo e \bar{V}_1^β torna-se complexo (devemos lembrar que $m^2 < 0$) isto levará a uma temperatura crítica complexa. O que está ocorrendo é que as contribuições de ordens maiores, não podem mais ser desprezadas se desejarmos um cálculo preciso de β_c .

Para podermos obter um resultado para nosso potencial vamos assumir que βM é suficientemente pequeno para que possa servir de parâmetro de expansão*, desta forma, após expandirmos

$\bar{V}_1^\beta(\hat{\varphi}^2)$ em potências de βM temos como solução

* isto é equivalente a expandir o potencial para grandes temperaturas $\beta \rightarrow 0$

$$\overline{V}_1^B(\hat{\varphi}^2) = -\frac{\pi^2}{90\beta^4} + \frac{M^2}{24\beta^2} - \frac{1}{12\pi} \frac{M^3}{\beta} \quad (10-27)$$

$$- \frac{1}{64\pi^2} M^4 \ln(M^2\beta^2) + \frac{c}{64\pi^2} M^4 + O(M^6\beta^2)$$

onde
$$c = \frac{3}{2} + 2 \ln 4\pi - 2\gamma_E \approx 5.4!$$

e
$$M^2 = m^2 + \frac{1}{2} \lambda \hat{\varphi}^2 \quad (10-28)$$

a dedução da expressão acima pode ser vista no Apêndice C.

Utilizando-nos dos dois primeiros termos da expansão (10-27) (que são suficientes para determinarmos β_c sem que este seja complexo) podemos determinar a temperatura crítica, que de acordo com a definição (10-8) será

$$\frac{1}{\beta_c^2} = -\frac{24 m^2}{\lambda} \quad (10-29)$$

Colocando isto de uma forma mais simples, podemos definir a massa dependente da temperatura $M^2(\beta)$, que será o coeficiente do termo quadrático em $\hat{\varphi}^2$ no potencial efetivo, e determinar a temperatura crítica como uma solução de $M^2(\beta_c) = 0$.

Como citamos anteriormente temos problemas de divergências infravermelhas na expansão do potencial efetivo quando nos

aproximamos da temperatura crítica, Kirzhnits e Linde⁽⁴⁴⁾ fazem uma análise do comportamento dos termos de maior ordem na expansão em número de "loops" do potencial efetivo e verificam que estes não poderão ser desprezados em uma região delimitada por

$$|T - T_c| / T_c \leq \lambda \quad (10-30)$$

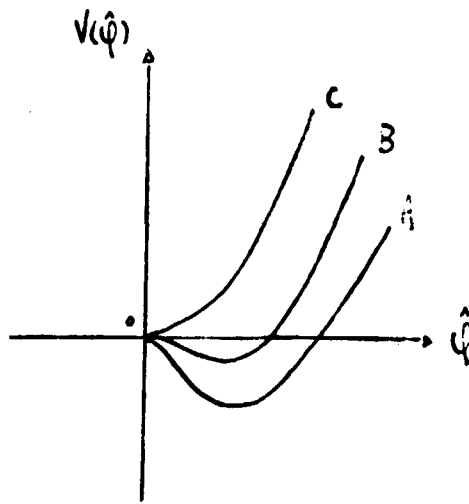
isto se reflete basicamente na expansão da integral ao nível de 1 "Loop" (como é realizada no Apêndice C) no sentido do quanto é realmente boa a expansão em βM (M/T)

É interessante, para verificar-se a importância dos termos de maior ordem, um estudo do cálculo realizado por Dolan e Jackiw⁽⁴²⁾ ao nível de dois "Loops" para o mesmo modelo de bosons escalares com simetria $O(N)$ discutido acima, bem como o resultado de cálculos de gráficos de maior importância no limite de N grande (são retidos os gráficos de maior importância na expansão $1/N$), estes cálculos não serão estudados aqui em virtude de sua tediosa elaboração. Sendo que na prática o cálculo de diagramas ao nível de "1 Loop" já é suficiente (na maioria dos casos) para os estudos de transição de fase.

Voltando ao nosso exemplo podemos escrever o potencial efetivo como

$$V(\hat{\phi}, T) = \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4!} \hat{\phi}^4 - \frac{\pi^2}{90} T^4 + \frac{1}{24} \left(m^2 + \frac{\lambda}{3} \hat{\phi}^2 \right) T^2 \quad (10-31)$$

onde estamos tomando apenas os dois primeiros termos em $\bar{V}_i^B(\hat{\varphi}^2)$ e não estamos considerando as contribuições ao nível de "1 Loop" da parte independente da temperatura (que será proporcional a $\lambda^2 \hat{\varphi}^4$ ou $\hat{\varphi}^2/M^2$, e portanto de menor ordem). Elaborando um gráfico deste potencial a várias temperaturas obteremos



$$A \Rightarrow T = 0$$

$$B \Rightarrow 0 < T < T_c$$

$$C \Rightarrow T > T_c$$

Devemos lembrar que o potencial efetivo possui o mesmo significado que o potencial termodinâmico, a partir do qual, podemos derivar as densidades de entropia e energia. Lembrando também que todas estas quantidades apresentarão derivadas descontínuas na temperatura crítica. Podemos verificar isto através da discontinuidade no calor específico.

$$\Delta C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{T=T_c+\epsilon} - \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{T=T_c-\epsilon} \quad (10-32)$$

(onde U é a densidade de energia $\{U\} = V(\phi_{min}) - T \frac{\partial V(\phi_{min})}{\partial T}$)

ΔC_v é calculado nas proximidades da discontinuidade

$$\Delta C_v = T_c \left[\frac{\partial^2 V_{eff}(\phi_{min})}{\partial T^2} \right]_{T=T_c-\epsilon}$$

Infelizmente estes conceitos não são de muita utilidade para o estudo da transição de fase. Nas próximas secções estudaremos as transições de fase de forma mais detalhada.

11. Transição de fase em um modelo $O(N)$ com dois vetores de bosons de Higgs.

Nesta secção iremos estudar a restauração da simetria devido a temperatura no modelo cuja quebra de simetria e potencial efetivo, foram discutidos respectivamente nos apêndices A e B.

A Lagrangeana do modelo é dada pela eq. (7.4) ou (A.3) e o potencial efetivo a temperatura zero foi calculado no apêndice B. O procedimento para o cálculo do potencial a temperatura finita foi bem detalhado na secção anterior. Portanto, apenas colocaremos aqui o resultado final, o qual foi elaborado para o caso de mínimo dos campos na condição perpendicular (vide apêndices A e B)

$$\begin{aligned}
 V(\eta, \chi, T) = & -\frac{1}{2} m_1^2 \chi^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \eta^2 + \frac{1}{4} f_1 \chi^4 + \frac{1}{4} f_2 \eta^4 + \frac{1}{2} f_3 \chi^2 \eta^2 \\
 & + \frac{1}{2} f_4 (\chi \cdot \eta)^2 + \frac{1}{32 \pi^2} \left[\frac{3}{2} (N-2) (g^4 \eta^4 \ln \frac{\eta^2}{M^2} + g^4 \chi^4 \ln \frac{\chi^2}{M^2}) \right. \\
 & + \frac{3}{2} g^4 (\chi^2 + \eta^2)^2 \ln \frac{\chi^2 + \eta^2}{M^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} M_i^4(\chi, \eta) \ln \frac{M_i^2(\chi, \eta)}{M^2} \\
 & + \frac{(N-2)}{2} (-m_1^2 + f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2)^2 \ln \frac{-m_1^2 + f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2}{M^2} \\
 & \left. + \frac{(N-2)}{2} (-m_2^2 + f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2)^2 \ln \frac{-m_2^2 + f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2}{M^2} \right] \quad (11-1) \\
 & - \frac{\pi^2}{10 \beta^4} \left(\frac{8}{9} N - 1 \right) + \frac{1}{34} T^2 \left[3(N-1) g^2 (m_1^2 + \chi^2) + \sum_{i=1}^4 M_i^2(\chi, \eta) \right. \\
 & \left. + (N-2) (-m_1^2 + f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2) + (N-2) (-m_2^2 + f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2) \right]
 \end{aligned}$$

onde consideramos apenas os dois primeiros termos na expansão de $\sqrt{V_1^\beta}$. M_i^2 é dado no apêndice B.

Inicialmente estabeleceremos a estrutura de fases à temperatura zero, assim, a partir do apêndice A, sem se considerar a solução trivial onde não temos quebra de simetria (em $T=0$), as fases são as seguintes

	<u>Fase</u>	condição de estabilidade da fase
a)	$O(N-1)$	$f_3 > \frac{m_1^2}{m_2^2} f_2 \quad , \quad f_4 > 0$
b)	$O(N-1)$	$f_3 > \frac{m_2^2}{m_1^2} f_2 \quad , \quad f_4 > 0$

$$c) \quad O(N-2) \quad - (f_1 f_2)^{1/2} < f_3 < f_1 \frac{m_2^2}{m_1^2} + f_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} ; f_4 > 0$$

$$d) \quad O(N-1) \quad - (f_1 f_2)^{1/2} < f_3 + f_4 < f_1 \frac{m_2^2}{m_1^2} + f_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} ; f_4 < 0$$

Como dissemos acima nosso potencial foi calculado para a condição c). Onde as direções dos campos χ e η no mínimo são perpendiculares entre si. Temos portanto uma quebra hierárquica de simetrias. Ou seja; as simetrias serão restauradas na seguinte ordem (se $\langle \chi(T=0) \rangle \gg \langle \eta(T=0) \rangle$)

$$O(N-2) \xrightarrow{T_{c\eta}} O(N-1) \xrightarrow{T_{c\chi}} O(N)$$

—————→ T

Onde as temperaturas críticas são determinadas de acordo com (10-8) e obtemos

$$T_{c\chi}^2 = \frac{12 m_1^2}{[3(N-1)g^2 + (N+2)f_1 + Nf_3 + f_4]} \quad (11-2)$$

$$T_{c\eta}^2 = \frac{12 m_2^2}{[3(N-1)g^2 + (N+2)f_2 + Nf_3 + f_4]} \quad (11-3)$$

Desta forma, pensando no caminho inverso ao colocado acima ($O(N-2) \rightarrow O(N-1) \rightarrow O(N)$), se imaginarmos que no início do Universo tivéssemos uma simetria de interações $O(N)$ poderia ser por ex. o grupo de simetria de grande unificação, ou um sistema para explicar a violação de CP]. Se resfriássemos a temperatura do Universo ao

atingirmos $T_{c\chi}$ a simetria $O(N)$ seria quebrada para $O(N-1)$, continuando o resfriamento ao atingirmos $T_{c\eta}$ passaríamos a fase $O(N-2)$.

Na realidade podemos adotar o procedimento de Kirzhnits e Linde⁽⁴⁴⁾ e encarar $T_{c\chi}^2$ e $T_{c\eta}^2$ não como temperaturas críticas, mas sim, como temperaturas limites da região de metaestabilidade separando as fases ordenada e desordenada (isto porque quanto mais desejarmos nos aproximar da temperatura crítica, mais termos de ordens superiores deverão ser levados em conta). De agora em diante referir-nos-emos as temperaturas acima [(11-2) e (11-3)] como $T_{1\chi}^2$ e $T_{1\eta}^2$.

Para estabelecer a região de metaestabilidade podemos acrescentar ao potencial termos da ordem M^3/β . Para fazer isto sem precisar acrescentar os outros termos na ordem de "1 Loop" (ou "2 Loops"), devemos nos certificar que a expansão em M/T é realmente boa na região em que estamos interessados. Isto pode ser verificado através do critério de Ginsburg. Definindo a temperatura de Ginsburg: $f_i T_G = 4\pi M_i(T_G)$ onde f_i é a maior constante de acoplamento da teoria e $M_i(T_G)$ a maior massa dentre todos os bosons escalares.

Portanto, na fase ordenada nossa aproximação não será perturbada por flutuações, desde que, estejamos em uma região de temperatura T , na qual $M(T) < T \leq T_G$. Ou seja, "as massas da teoria devem ser menores que T , onde T pode tomar valores até T_1 , o limite da região de metaestabilidade". Em outras pala

vras; a relação acima indica o quão boa é a expansão do potencial efetivo, em uma série de potências do parâmetro de ordem $[\chi(T), (\eta(T))]$.

Acrescentando-se os termos da ordem M^3/β ao potencial efetivo temos:

$$\begin{aligned}
 V'(\eta, \chi, T) = & V(\eta, \chi, T) - \frac{T}{12\pi} \left[3(N-2) g^3 (\eta^3 + \chi^3) \right. \\
 & + 3g^3 (\chi^2 + \eta^2)^{3/2} + \sum_{i=1}^4 M_i^3(\chi, \eta) + (N-2) (-m_1^2 + f_1 \chi^2 + f_2 \eta^2)^{3/2} \\
 & \left. + (N-2) (-m_2^2 + f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2)^{3/2} \right] \quad (11-4)
 \end{aligned}$$

onde $V(\eta, \chi, T)$ é dado por (11-1).

As massas dependentes da temperatura são dadas por:

$$m_1^2(T) = \frac{3(N-1)g^2 + (N+2)f_1 + Nf_3 + f_4}{12} (T^2 - T_{1,\chi}^2) \quad (11-5)$$

$$m_2^2(T) = \frac{3(N-1)g^2 + (N+2)f_2 + Nf_3 + f_4}{12} (T^2 - T_{1,\eta}^2) \quad (11-6)$$

Para obtermos os parâmetros de ordem, devemos resolver simultaneamente $\partial V'(\eta, \chi, T)/\partial \eta = 0$ e $\partial V'(\eta, \chi, T)/\partial \chi = 0$. Após algum cálculo verifica-se que, este problema não tem uma solução

simples, além do fato, que se desejarmos $\langle \chi (i=0) \rangle \gg \langle \eta (T=0) \rangle$ teremos presente o problema de hierarquias^{(21)*}. Em particular iremos nos interessar especificamente na primeira transição de fase. Assim consideraremos que a hierarquia de transições é possível, e, estudaremos isoladamente a transição de fase na primeira quebra de simetria. Portanto, a partir de $\partial V / \partial \chi |_{\eta=0} = 0$ obtém-se

$$\chi_{1,2} (T) = \frac{T}{24 \pi f_1} [9g^3(N-1)] \pm \frac{1}{2} \left[\frac{1}{f_1^2} \left(\frac{T}{12\pi} \right)^2 (9g^3(N-1))^2 - \frac{T^2 (3(N-1)g^2 + (N+2)f_1 + Nf_3 + f_4) - 12 m_1^2}{3 f_1} \right]^{1/2} \quad (11-7)$$

A presença do termo cúbico leva a existência de uma discontinuidade no parâmetro de ordem, indicando aparentemente que temos uma transição de fase de 1ª ordem.

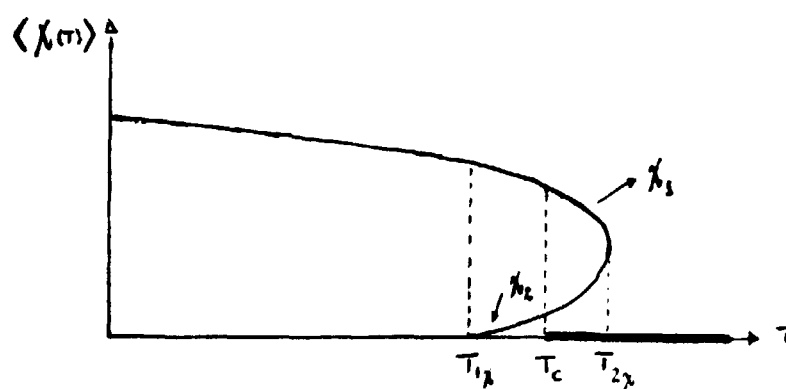
Podemos agora determinar o outro limite da região de retaestabilidade (veja que $T_{1\chi}$ é uma das soluções da equação (11-7) a outra será $T_{2\chi}$) que será dado por:

$$T_{2\chi}^2 = T_{1\chi}^2 \left[1 - \frac{3(9g^3(N-1))^2}{72\pi^2 f_1 (3(N-1)g^2 + (N+2)f_1 + Nf_3 + f_4)} \right]^{-1} \quad (11-8)$$

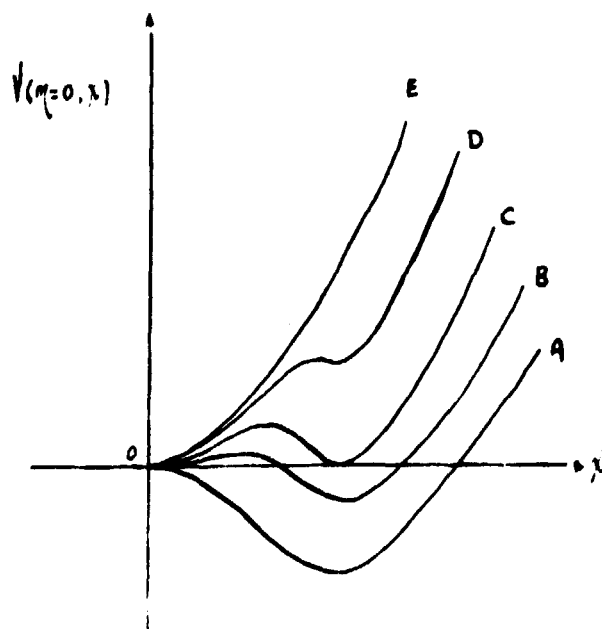
Apenas com relação ao campo χ , podemos verificar que

* Vide secção 6b.

para $T < T_{1\chi}$ temos uma solução para $\chi \Rightarrow \langle \chi \rangle \neq 0$ e para $T > T_{2\chi}$ temos $\langle \chi \rangle = 0$. No entanto, no intervalo $T_{1\chi} < T_c < T_{2\chi}$ temos três soluções possíveis que serão: dois mínimos em $\langle \chi \rangle = \chi_1(T)$ e $\langle \chi \rangle = 0$, e um máximo em $\langle \chi \rangle = \chi_2(T)$, isto pode ser visualizado em um gráfico para o parâmetro de ordem



Traçando-se um perfil do potencial para diferentes temperaturas (devemos lembrar que estamos tratando o campo χ isoladamente) teremos



- A $0 < T < T_{1\chi}$
- B $T_{1\chi} < T < T_c$
- C $T = T_c$
- D $T_c < T < T_{2\chi}$
- E $T > T_{2\chi}$

Onde uma aproximação para a temperatura crítica será obtida através de

$$V'(\eta_1, \chi_1(\tau_c), \tau_c) = V'(\eta_1, 0, \tau_c) \quad (11-9)$$

Novamente lembramos aqui, o fato de estarmos trabalhando apenas com o campo χ . Portanto, a análise acima não é realística para o modelo em questão, devido a existência do campo η . Foi forçada a análise, para mantermos a consistência com os cálculos já elaborados dentro deste modelo. Um cálculo com menos aproximações, realizado no modelo de Higgs abeliano, portanto, bem mais fácil para se trabalhar, pode ser visto no trabalho de Kirzhnits e Linde⁽⁴⁴⁾. Todo este estudo foi repetido por Iliopoulos e Papanicolaou⁽⁴⁵⁾, para o caso em que a simetria é quebrada através das correções radiativas.

Faz-se necessário lembrar aqui, um "approach" diferente ao problema que resolvemos, conforme foi elaborado por Mohapatra e Senjanovic⁽⁴⁶⁾. Eles estabeleceram os limites de estabilidade de cada fase a temperatura zero. Depois via grupo de renormalização dependente da temperatura verificaram como estes limites variam, determinando o ponto de cada transição de fase.

12. Análise do tipo da transição de fase

Como iremos ver mais adiante a análise do tipo de transição de fase, ou seja, a determinação se a mesma é de primeira

ou segunda ordem é de extrema importância principalmente no que se refere a evolução do Universo.

Basicamente uma transição de fase de primeira ordem, ocorrerá quando tivermos um grande salto no parâmetro de ordem na temperatura crítica. Enquanto a transição de fase de segunda ordem será caracterizada por uma evolução do parâmetro de ordem à temperatura crítica. Na verdade isto não é muito realístico dada a nossa limitação na determinação da temperatura crítica.

Conforme vimos na secção anterior, o modelo $O(N)$ apresenta características de possuir uma transição de fase de primeira ordem, dada a discontinuidade em seu parâmetro de ordem (vide gráfico à pág. 61). Linde e Kirzhnits⁽⁴⁴⁾ propuseram a quantidade

$$\Delta = \frac{T_2 - T_1}{T_1} \quad (12-1)$$

para medir o quanto a transição de fase é de primeira ordem forte ou fraca. T_2 e T_1 são os limites da região de metaestabilidade dados pelas eq. (11-2) e (11-8). Se $\Delta \ll 1$ a transição será de primeira ordem fraca, se $\Delta \gg 1$ será de primeira ordem forte.

Para o modelo $O(N)$ discutido na secção anterior podemos estudar a transição de fase do campo χ , determinando Δ que será dado por:

$$\Delta = \left[1 - \frac{3 (4 g^3 (N-1))^2}{72 \pi^2 (3(N-1)g^2 + (N+2)f_1 + Nf_3 + f_4)} \right]^{-1/2} \quad (12-2)$$

Devemos lembrar que em nossos cálculos estamos desprezando termos com constantes de acoplamentos dos bosons escalares ($\propto f_i^2$) cujas potências sejam maiores que a unidade, ou seja estamos considerando $g^2 > f_i$.

A partir da equação (12-2) pode-se verificar que $\Delta \approx O(10^{-2})$ para N até $O(15)$ com N , para $N=20$ temos $\Delta \approx O(10^{-1})$. (Os valores das constantes de acoplamento utilizadas para obtermos os resultados acima, são aqueles estimados para o modelo $SU(5)$ ⁽³¹⁾. Pois no caso estamos tratando o modelo $O(N)$ como o sistema de Higgs para um modelo unificado de brinquedo, isto não chega a ser correto, devido as diferentes cargas não abelianas (op. de Casimir), nas representações dos bosons de Higgs de $SU(5)$, mas serve para uma análise grosseira).

Concluimos portanto que a transição de fase é de 1ª ordem. Sendo fraca para um pequeno grupo de simetria e forte, quando aumentamos N . Isto é uma influência do aumento do número de partículas⁽⁴⁷⁾. O nosso resultado é correto, para temperaturas fora da região de metaestabilidade. O tratamento feito acima pode ser refinado, considerando-se que, o comportamento crítico pode ser isolado em uma teoria efetiva em tres dimensões resultante do modo de frequência zero⁽⁴⁸⁾.

Como foi visto na secção 10.* todo o comportamento crítico realmente se reduz ao comportamento da teoria no espaço do trimomentum. Isso foi demonstrado por Ginsparg⁽⁴⁸⁾, que utilizou-se do fato para comparar as transições em teorias de gauge com o comportamento previsto experimentalmente em estado sólido; bem como, previsões da mecânica estatística para supercondutores.

Iremos reproduzir em poucas palavras o trabalho de Ginsparg. Cujá idéia básica, está em isolar o comportamento crítico em uma teoria de três dimensões, analisando as equações do grupo de renormalização obtidas através da expansão ϵ ⁽⁴⁹⁾. Nota-se que, teorias assintoticamente livres, as quais não possuem um ponto fixo estável (que não seja o trivial) na expansão ϵ do grupo de renormalização, apresentam transições de fase de primeira ordem fraca. Caso contrário estas teorias apresentarão transições de fase de segunda ordem. Com isso resumimos todo o resultado do trabalho. Entretanto alguns pontos merecem um maior esclarecimento.

Inicialmente podemos discutir o que queremos dizer com um ponto fixo estável. Para uma discussão sobre os trabalhos a respeito citamos os artigos da ref. (50) e em particular, a revisão elaborada por Politzer⁽⁵⁰⁾ (Phys.Rep.). O problema básico consiste na análise da função β do grupo de renormalização, que é uma indicadora do comportamento assintótico da teoria, sendo que, os pontos fixos são aqueles no qual a função β se anula e indicam a convergência das funções de Green da teoria (as teorias não-abelianas

* Obs. o que vimos na secção 10. não garante a suposição de Ginsparg (ou melhor, garante apenas para a parte independente de T)

com poucos ou nenhum boson escalar, por ex.: QCD, possuem um ponto fixo estável ultravioleta na origem⁽⁵⁰⁾). Um estudo da função β para um grande número de teorias foi elaborado por Eichten, Cheng e Li⁽⁵⁰⁾, de onde retiraremos alguns resultados referentes ao nosso modelo $O(N)$.

Um segundo ponto, mais importante, no trabalho de Ginsparg, é o fato que o leva a afirmar que uma teoria assintoticamente livre com um ponto fixo estável na expansão ϵ possui uma transição de fase de primeira ordem fraca. Não existe uma prova rigorosa para este fato, isso decorre apenas da analogia com o estudo experimental da transição de fase de certos elementos, que sendo de primeira ordem fraca, foram identificadas teoricamente como tal, através do grupo de renormalização⁽⁵¹⁾.

Podemos exemplificar o que dissemos acima com um exemplo simples, seja a Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\psi})^2 + \frac{m^2}{2} (\vec{\psi})^2 + \frac{\lambda}{4!} (\vec{\psi}^2)^2 \quad (12-3)$$

aonde $\vec{\psi}$ é um vetor com N -componentes. Consideremos também as equações do grupo de renormalização, que nos dão a evolução das constantes de acoplamento em um espaço de $4-\epsilon$ dimensões

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \beta_\lambda(g^2, \lambda, \epsilon) = \epsilon \lambda - \beta_\lambda(g^2, \lambda) \quad (12-4)$$

$$\frac{dq^2}{dt} = \beta_g(q^2, \lambda, \epsilon) = \epsilon q^2 - \beta_g(q^2, \lambda) \quad (12-5)$$

aonde $\beta_g(q^2, \lambda)$ e $\beta_\lambda(q^2, \lambda)$ são as funções β no espaço de quatro dimensões. Um ponto fixo é um ponto (q^{*2}, λ^{*2}) tal que

$$\beta(q^{*2}, \lambda^{*2}, \epsilon) = \beta_\lambda(q^{*2}, \lambda^{*2}, \epsilon) \equiv 0 \quad (12-6)$$

Desta forma aplicando estas idéias a Lagrangeana (12.3)

temos

$$\beta(\lambda, \epsilon) = \epsilon \lambda - \frac{1}{8\pi^2} \frac{N+8}{6} \lambda^2 + O(\lambda^3) \quad (12-7)$$

(as funções β em 4 dimensões que iremos apresentar podem ser obtidas do artigo de Cheng, Eichten e Li⁽⁵⁰⁾). Eq. (12.7) apresenta um ponto fixo para β em

$$\lambda^* = (8\pi^2) \frac{6}{N+8} \epsilon \quad (12-8)$$

portanto a transição de fase neste modelo é de segunda ordem.

Podemos elaborar o mesmo cálculo para o modelo $O(N)$ com dois vetores, que foi estudado nas secções anteriores. Os possíveis pontos fixos poderão ser obtidos a partir das soluções de

$$\epsilon q^2 - \frac{b_0 q^4}{8\pi^2} = 0 \quad (12-9a)$$

os de Ginsparg⁽⁴⁸⁾ que elaborou o mesmo cálculo para este modelo no limite de m -vetores de bosons de Higgs ao invés de apenas dois vetores ($\vec{\eta}$ e $\vec{\chi}$). Portanto a transição de fase será de primeira ordem fraca.

Recentemente Linde⁽⁴⁷⁾ fez uma crítica à forma de determinação do tipo de transição de fase através do estudo da quantidade de Δ (vide Eq. (12.1)) proposto por ele e Kirzhnits⁽⁴⁴⁾, bem como ao estudo da função β no espaço de $4-\epsilon$ dimensões⁽⁴⁸⁾. Quanto ao estudo dos pontos fixos estáveis, Linde afirma que o mesmo não é adequado para o estudo de transições de fase de primeira ordem forte, o que nos parece bastante razoável, já que muito pouco se conhece sobre transições de fase de primeira ordem forte. Também pelo fato que o formalismo descrito por Ginsparg, foi aplicado em mecânica estatística apenas para transições de fase de primeira ordem fraca. Quanto a análise do "Loop de histerese" (Δ), Linde nota que esta não é uma quantidade suficiente para determinar o tipo da transição de fase. É necessário também, uma análise da diferença entre os valores do parâmetro de ordem a temperatura zero e nas proximidades da temperatura crítica, podemos verificar na figura a seguir, que é possível obter-se o mesmo valor Δ com diferentes comportamentos do parâmetro de ordem (valor esperado do vácuo J) onde J_c pode ser muito maior ou da ordem de $J_0 [J(T=0)]$ e mais ou menos próximos de $J=0$ ($T > T_{c2}$). Com isto estamos novamente querendo nos referir ao tamanho do salto no parâmetro de ordem

$$\epsilon f_1 - \frac{1}{16\pi^2} \left[2(N+2)f_1^2 + 2Nf_3^2 + 4f_3f_4 + 4f_4^2 - 3(N-1)f_1g^2 + \frac{3}{8}(N-1)g^4 \right] = 0 \quad (12-9b)$$

$$\epsilon f_2 - \frac{1}{16\pi^2} \left[2(N+2)f_2^2 + 2Nf_3^2 + 4f_3f_4 + 4f_4^2 - 3(N-1)f_2g^2 + \frac{3}{8}(N-1)g^4 \right] = 0 \quad (12-9c)$$

$$\epsilon f_3 - \frac{1}{16\pi^2} \left[2(N+2)(f_1+f_2)f_3 + 2(f_1+f_2)f_4 + 4f_3^2 + 2f_4^2 - 3(N-1)f_3g^2 + \frac{3}{8}g^4 \right] = 0 \quad (12-9d)$$

$$\epsilon f_4 - \frac{1}{16\pi^2} \left[4(f_1+f_2)f_4 + 8f_3f_4 + (N+2)f_4^2 - 3(N-1)f_4g^2 + \frac{3}{8}(N-1)g^4 \right] = 0 \quad (12-9e)$$

onde na primeira equação temos

$$b_0 = \left[\frac{11}{3} C_2(g) - \frac{1}{6} C_2(S) \right] \quad (12-10)$$

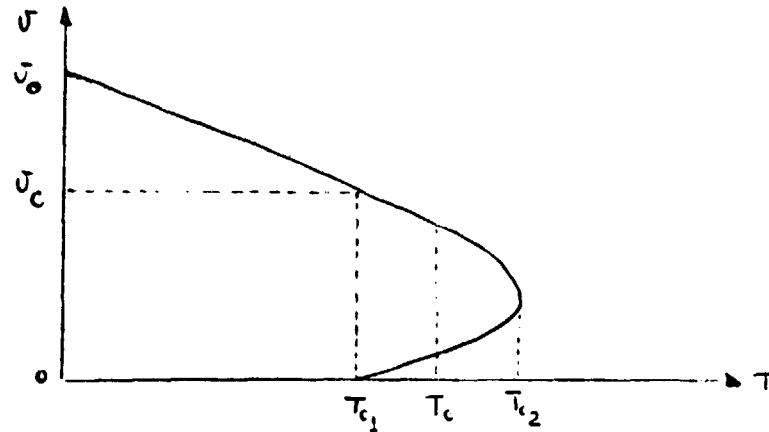
tomando-se os valores dos operadores de Casimir temos

$$b_0 = 2 \left[\frac{11}{3} (N-2) - \frac{1}{6} \right] \quad (12-11)$$

portanto de (12.9a) temos

$$g^2 = - \frac{8\pi^2}{b_0} \epsilon$$

Em nosso caso ($N > 3$) não há um ponto fixo estável para $\beta_2(g^2, f_i, \epsilon)$ (com exceção do trivial $g^2 = 0$). As outras equações podem ser resolvidas aproximadamente, verificando-se que elas não apresentam pontos fixos estáveis, (podem existir soluções porém estas não serão realísticas). Nosso resultados estão de acordo com



Assim se $J_c = V(T_c = T_{c1}) = 0$ ou $J_c \ll J_0 = V(T=0)$ a transição de fase será de segunda ordem ou de primeira ordem fraca. No entanto se o salto em V para $T = T_{c1}$ for grande, tal que $J_c \approx J_0$, a transição de fase será de primeira ordem.

A análise do tipo da transição de fase em teorias de grande unificação, dado seus aspectos correlacionados a Cosmologia, vem sendo bastante estudada ultimamente. Iremos relatar algumas de suas conseqüências em secções posteriores. Entre alguns trabalhos neste sentido podemos citar o de Linde⁽⁴⁷⁾. Onde é estudado o tipo de transição de fase para qualquer modelo grande-unificado (predizendo uma transição de fase de 1ª ordem para qualquer T.G.U.), e os trabalhos de Vayonakis e Daniel⁽⁵²⁾ e Daniel⁽⁵²⁾ que referem-se ao modelo SU(5) em particular. Os cálculos nestes trabalhos seguem basicamente, as linhas desta secção, como também das anteriores.

13. Comportamento da violação de CP "soft" a altas temperaturas

Na secção 8. discutimos como podemos introduzir a viola

ção de CP em uma Teoria de Gauge através do mecanismo de Higgs (o que denominamos de violação de CP "soft"). Como vimos até agora, o efeito da temperatura é modificar o potencial de Higgs de forma a restaurar a simetria. Portanto, podemos esperar que a violação de CP para um dado potencial vigore até uma dada temperatura acima da qual esta simetria não será mais quebrada. Sob estes aspectos não teríamos muito a acrescentar sobre o funcionamento deste mecanismo, além do que foi dito nas secções anteriores. Porém, como veremos a seguir, teremos situações, nas quais o nosso interesse será que a quebra da simetria CP não seja restaurada. Ou então que isto ocorra somente a altíssimas temperaturas.

Um dos problemas da Cosmologia está no fato que: supondo-se que no início do Universo existisse um equilíbrio entre matéria e antimatéria, como poderia ser atingido o estágio atual, onde observa-se a predominância da matéria. Este problema encontrou uma possível solução, na co-existência de interações descritas pela grande unificação (cuja importância estará na violação do número bariônico), e pela violação de CP, combinadas a uma não existência de equilíbrio termodinâmico, isto nas escalas de energia de grande unificação ($\sim 0(10^{14} \text{ GeV})$). Portanto, para que exista um mecanismo através do qual, suprima-se a antimatéria em favor da matéria, deveremos ter um sistema de Higgs o qual não tenha a simetria CP restaurada, ou então, que ela seja restaurada apenas para temperaturas maiores que 10^{15} GeV .

Iremos apenas destacar alguns dos modelos nos quais a simetria CP, não será restaurada ou apenas restaurada a altíssimas temperaturas. Este tema foi extensivamente abordado por Mohapatra e Senjanovic^(46,53) em uma série de artigos (a ref. (53) contém uma bibliografia sobre os demais trabalhos), baseados principalmente em modelos simples descritos por Weinberg⁽⁴⁰⁾ e por Linde⁽⁸⁾, nos quais ocorre a persistência da quebra de simetria.

13a. Um modelo com persistência de simetria a altas temperaturas

Apresentaremos um dos muitos modelos devidos a Mohapatra e Senjanovic⁽⁵³⁾ no qual são determinados limites para as constantes de acoplamento de forma a não ocorrer a restauração de simetria a altas temperaturas.

Seja o potencial

$$\begin{aligned} V(\phi_1, \phi_2) = & -\mu_1^2 \phi_1^* \phi_1 - \mu_2^2 \phi_2^* \phi_2 + \lambda (\phi_1^* \phi_1)^2 \\ & + \lambda_2 (\phi_2^* \phi_2)^2 + 2\lambda_3 (\phi_1^* \phi_1)(\phi_2^* \phi_2) \quad (13-1) \\ & + \lambda_4 [(\phi_1^* \phi_2)(\phi_1^* \phi_2) + hc] \end{aligned}$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são dois campos escalares carregados e o potencial é invariante por uma simetria U(1).

Os valores esperados do vácuo do potencial a temperatura zero serão indicados por $\langle \phi_1 \rangle = v_1/\sqrt{2}$ e $\langle \phi_2 \rangle = v_2/\sqrt{2}$, sendo que as condições de extremos serão:

$$\mu_1^2 = \lambda_1 v_1^2 + (\lambda_3 + \lambda_4) v_2^2 \quad (13-2)$$

$$\mu_2^2 = \lambda_2 v_2^2 + (\lambda_3 + \lambda_4) v_1^2$$

as condições de positividade da matriz de massa dos bosons escalares são dadas por:

$$\lambda_4 < 0, \quad \lambda_1 \lambda_2 > (\lambda_3 + \lambda_4)^2 \quad (13-3)$$

O potencial dependente da temperatura ao nível de "1 Loop", calculado conforme vimos nas secções anteriores, tem a seguinte forma

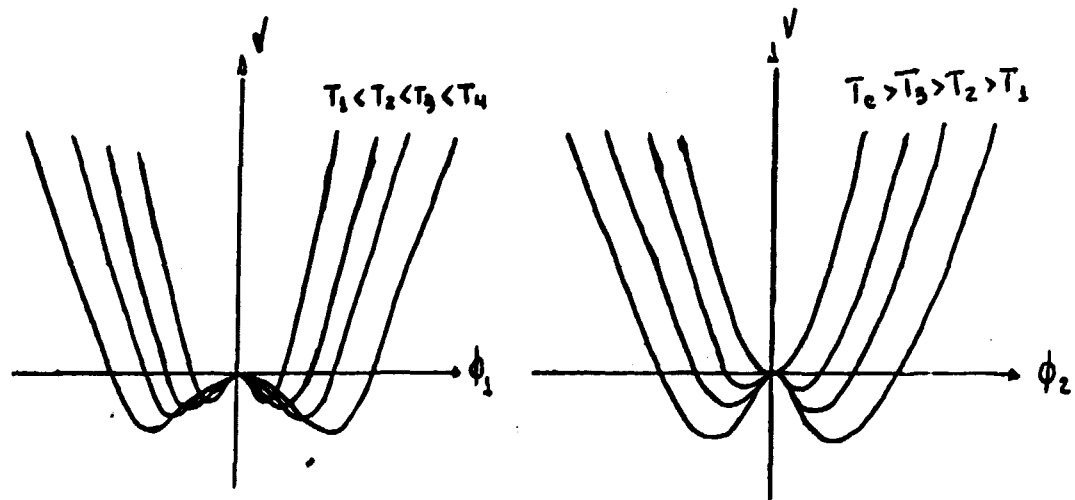
$$\begin{aligned} V_1(T) = & \frac{T^2}{3} \left(\lambda_1 + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{3g^2}{8} \right) \phi_1^* \phi_1 \\ & + \frac{T^2}{3} \left(\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{3g^2}{8} \right) \phi_2^* \phi_2 \end{aligned} \quad (13-4)$$

Como vimos anteriormente, estes são os termos que irão cancelar o efeito dos termos quadráticos que quebram a simetria. No entanto, se algum dos termos entre parenteses for negativo ao invés de restaurarmos a simetria estaremos quebrando-a mais ainda. Neste caso se tomarmos $\lambda_3 < 0$ (com $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ para que o potencial seja limitado por baixo para grandes valores de ϕ) então para

$$\lambda_1 + \frac{3}{8} g^2 < \frac{1}{2} |\lambda_3| \quad (13-5)$$

o coeficiente do termo em $\phi_1^* \phi_1$ será negativo; reforçando assim, a quebra de simetria em ϕ_1 . Para manter as outras condições λ_2 deverá ser grande (mas da ordem de g^2)

Como resultado verifica-se que a simetria manter-se-á quebrada a qualquer temperatura. Estudando-se os mínimos verifica-se que na temperatura zero tem-se $J_1 \gg J_2$ com as condições acima, e também que não é possível obter os dois valores $\langle \phi_i \rangle \neq 0$ a altas temperaturas. Pode-se colocar estes resultados em gráficos que ilustrarão claramente a situação obtida.



Mohapatra e Senjanovic⁽⁵³⁾ determinaram uma série de modelos cuja simetria não é restaurada a altas temperaturas. São casos mais complexos do modelo acima, o qual acreditamos, por si, já

é suficiente para ilustrar o problema.

13b. Um modelo com restauração de simetria a altíssimas temperaturas.

Ao invés de elaborarmos um modelo no qual a simetria CP permanece quebrada a qualquer temperatura, pode-se procurar um esquema no qual a simetria é restaurada somente a muito altas energias (da ordem de 10^{15} GeV). Um modelo deste tipo foi elaborado também por Mohapatra e Senjanovic⁽⁴⁶⁾, tratando-se por coincidência do modelo O(N) com dois vetores de Higgs já tão discutido nas seções anteriores. Não iremos nos detalhar muito neste caso, pois com o que vimos até aqui o trabalho em questão pode ser facilmente estudado. Neste modelo um dos valores esperados do vácuo é da ordem de 10^2 GeV, ao passo que o outro é $O(10^{15}$ GeV). A análise das transições é idêntica a do item 13a. onde as condições sobre as constantes de acoplamento, são obtidas através do estudo do grupo de renormalização em função da temperatura.

14. Restauração da simetria pela ação de campos eletromagnéticos

A analogia entre a quebra espontânea de simetria e a supercondutividade pode ser ampliada em todos os seus aspectos. Por exemplo: sabe-se, que um campo magnético externo destrói a supercondutividade, portanto, podemos esperar algum efeito de campos

eletromagnéticos sobre a quebra espontânea de simetria.

De uma forma genérica podemos pensar que as partículas carregadas da teoria irão interagir com o campo magnético, dando novas contribuições ao potencial efetivo, cujo resultado como veremos, será produzir um efeito semelhante ao da variação do sistema com a temperatura.

Existem poucos trabalhos a respeito do efeito de campos eletromagnéticos sobre a quebra de simetria. Discutiremos o trabalho que talvez seja o mais importante entre estes, que foi elaborado por Salam e Strathdee⁽⁵⁴⁾. Onde é determinado o potencial efetivo, considerando o efeito dos campos eletromagnéticos e é realizada uma aplicação dos resultados ao modelo de violação de CP descrito na secção 8.

Apesar de ser bastante interessante a forma como Salam e Strathdee⁽⁵⁴⁾ apresentam a dedução do potencial efetivo, o qual leva em conta a presença de um campo eletromagnético; não iremos discuti-la, já que, sob certos aspectos, ela assemelha-se com a que é elaborada para levar em conta os efeitos da temperatura^(42,24)

Considerando-se a existência de um campo magnético dirigido ao longo do eixo Z a energia corresponderá a excitações dadas por

$$\omega(k_z, m) = \sqrt{k_z^2 + M^2 + (2m+1)eH} \quad (14-1)$$

Onde k_z é a projeção do momento ik da partícula de massa M na direção do campo magnético. Pode-se verificar que, as regras de Feynman serão modificadas, através do novo propagador

$$\Delta(k, m) = \frac{1}{k_0^2 - k_z^2 + M^2 + (2m+1)eH} \quad (14-2)$$

onde as integrações temporais corresponderão agora, a uma soma sobre as energias discretas, exatamente como no caso de temperatura finita, e as integrais sobre o tri-momentum serão trocadas por

$$\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \longrightarrow \left(\frac{eH}{2\pi} \right) \left(\frac{dk_z}{2\pi} \right) \quad (14-3)$$

O resultado final para o potencial efetivo ao nível de "1 Loop" na primeira ordem em H^2 terá a forma

$$V_{(1)}(\phi, H) = V_{(1)}(\phi) + H^2 V'_{(1)}(\phi) + \dots \quad (14-4)$$

onde o termo neutro é dado por

$$\hbar V_{(1)}(\phi) = \frac{\hbar}{64\pi^2} \sum_j \sum_m (-1)^{2j} (2j+1) M_{m_j}^4 \ln M_{m_j}^2 \quad (14-5)$$

sendo que M são as massas, m representa as diferentes partículas com spins $j = 0, 1/2, 1$.

A correção magnética é dada por

$$\frac{1}{\hbar} V_{(1)}^{(1)}(\phi) = \frac{e^2 \hbar}{96 \pi^2} \sum_m \left[- \ln M_{m0}^2 - 4 \ln M_{m1/2}^2 + 21 \ln M_{m1}^2 \right] \quad (14-6)$$

onde a soma estende-se sobre as partículas carregadas. (Pode-se verificar que no caso de um referencial em movimento temos $H^2 \rightarrow H^2 - E^2$).

Para o modelo apresentado na secção 8. o espectro de partículas é:

- a) um férmion neutro de massa m
- b) dois bosons escalares carregados de massa

$$M_C^2(\chi, \eta) = (-m_2^2 + f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2) \cos^2 \beta + (-m_1^2 + f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2) \sin^2 \beta - 2f_4 \chi \eta \sin \beta \cos \beta \quad (14-7)$$

- c) dois bosons escalares neutros de massa $M_m(\chi, \eta)$ (resultado da diagonalização da matriz de massa (8.6))
- d) um par de fermions carregados de massa

$$\sqrt{m^2 + \lambda_1^2 \chi^2 + \lambda_2^2 \eta^2} \quad (14-8)$$

- e) um foton
- f) um boson vetorial carregado com massa

$$M_W^2 = e^2 (m_c^2 + \chi^2) \quad (14-9)$$

Os diferentes termos do potencial ao nível de "Loop" serão

$$\begin{aligned}
 V_{(1)} = & \frac{1}{64\pi^2} \left[2 M_c^4 \ln \left(\frac{M_c^2(x,\eta)}{M_c^2(\epsilon,\nu)} \right) \right. \\
 & + T_2 \left\{ M_m^4 \ln \left(\frac{M_m^2(x,\eta)}{M_m^2(\epsilon,\nu)} \right) \right\} + 3 e^4 (x^2 + \eta^2)^2 \ln \left(\frac{x^2 + \eta^2}{\epsilon^2 + \nu^2} \right) \\
 & \left. - 8 (m^2 + \lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 \eta^2)^2 \ln \left(\frac{m^2 + \lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 \eta^2}{m^2 + \lambda_1^2 \epsilon^2 + \lambda_2^2 \nu^2} \right) \right] \quad (14-10)
 \end{aligned}$$

e a correção magnética dada por

$$\begin{aligned}
 H^2 V'_{(1)} = & \frac{e^2 H^2}{96\pi^2} \left[- \ln \left(\frac{M_c^2(x,\eta)}{M_c^2(\epsilon,\nu)} \right) \right. \\
 & \left. - 8 \ln \left(\frac{m^2 + \lambda_1^2 x^2 + \lambda_2^2 \eta^2}{m^2 + \lambda_1^2 \epsilon^2 + \lambda_2^2 \nu^2} \right) + 21 \ln \left(\frac{x^2 + \eta^2}{\epsilon^2 + \nu^2} \right) \right] \quad (14-11)
 \end{aligned}$$

Para determinar o campo crítico H_c (necessário para restaurar a simetria quebrada pelo campo χ) é preciso resolver-se as equações $\partial V / \partial \chi = 0$ e $\partial V / \partial \eta = 0$ sujeitas a condição $\eta = 0$ (já que $\langle \chi \rangle \gg \langle \eta \rangle$). Tem-se portanto

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{\partial M_c^2}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} \left[2 M_c^2(x,0) \left(\ln \frac{M_c^2(x,0)}{M_c^2(e,0)} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} \frac{(e H_c)^2}{M_c^2(x,0)} \right] \quad (14-12)$$

o que nos dá

$$(e H_c)^2 = 3 M_c^4(x,0) \left(2 \ln \frac{M_c^2(x,0)}{M_c^2(e,0)} + 1 \right) \quad (14-13)$$

a partir do que o valor do campo crítico pode ser determinado.

Um dos interesses deste tipo de estudo, seria verificar se o efeito de campos magnéticos no interior de um núcleo seriam capazes de restaurar as simetrias quebradas para $H=0$. Cálculos de Salam e de Linde mostraram que para valores realísticos de massas, o campo magnético nuclear é insuficiente para restaurar quebras de simetria, que sejam da ordem do modelo de Weinberg-Salam. Em sua revisão Linde⁽⁸⁾ especula sobre a possibilidade de restauração de simetria em campos magnéticos menos intensos. Porém, efeitos deste tipo aparentemente terão lugar apenas no início do Universo, sendo que, os pouquíssimos trabalhos a respeito deste tipo de transição reflete a baixa probabilidade de observar-se efeitos desta natureza.

15. Consequências de uma transição de fase de primeira ordem .

"Supercooling". Implicações Cosmológicas.

O relacionamento entre a Cosmologia e as teorias unificadas, vem se tornando cada vez mais estreito. De forma que, os aspectos de transição de fase nos modelos de grande unificação e no modelo de Weinberg-Salam são extremamente relevantes para o estudo do comportamento inicial do Universo. Portanto, mesmo que estes modelos sejam uma primeira aproximação para uma teoria grande unificada mais realística, eles nos dão uma grande quantidade de informações sobre a formação do Universo.

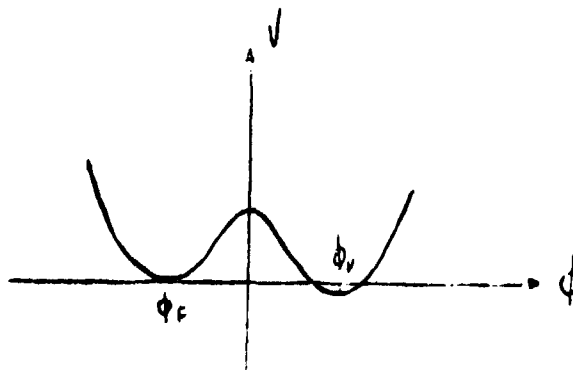
Linde⁽⁴⁷⁾ verificou recentemente, que a transição de fase no modelo SU(5) é de primeira ordem forte, e extrapolou este resultado para qualquer outra teoria de grande unificação, baseado que em teorias com mais partículas mais forte será a transição (vide o comportamento de nosso modelo $O(N)$), também no modelo de Weinberg-Salam quando a quebra de simetria for realizada através do mecanismo de Coleman-Weinberg⁽²⁴⁾ a transição será de primeira ordem forte (neste caso o fato de termos um boson de Higgs leve é primordial, Higgs pesados fazem com que a passagem de uma fase a outra seja mais rápida).

Investigações sobre o efeito de uma transição de fase de primeira ordem forte, no modelo de Weinberg-Salam foram elaborados por Witten⁽⁵⁵⁾ e Steinhardt⁽⁵⁶⁾, no modelo SU(5) temos as análises de Billoire e Tanvakis⁽⁵⁷⁾ e Cook e Mahantha-

ppa⁽⁵⁸⁾. Iremos discutir principalmente alguns aspectos levantados por Witten⁽⁵⁵⁾, que de certa forma foram seguidos nos outros trabalhos.

A transição de fase é produzida através da formação de bolhas preenchidas com matéria na nova fase. Isto é colocado em analogia com as transições de fase observadas experimentalmente em estado sólido, aonde na região de flutuação são criados "germens" do material na nova fase, a partir daí, estes "germens" irão crescendo até o material adquirir a nova fase. Em teorias de gauge serão formadas bolhas, cujas paredes irão expandir com velocidades aproximadamente igual a da luz, de forma, a longo preencher o Universo com a matéria na nova fase.

Em teorias de gauge a formação de bolhas é um processo de tunelamento devido a presença de flutuações quânticas⁽⁵⁹⁾. Basicamente, a transição de fase pode ser vista como a passagem de um dado mínimo de potencial para um outro mais profundo. Este tipo de cálculo (com o potencial não dependente da temperatura) foi estudado por Coleman⁽⁵⁹⁾. O ponto fundamental, uma vez dada uma teoria com um vácuo falso (vide figura) é calcular a

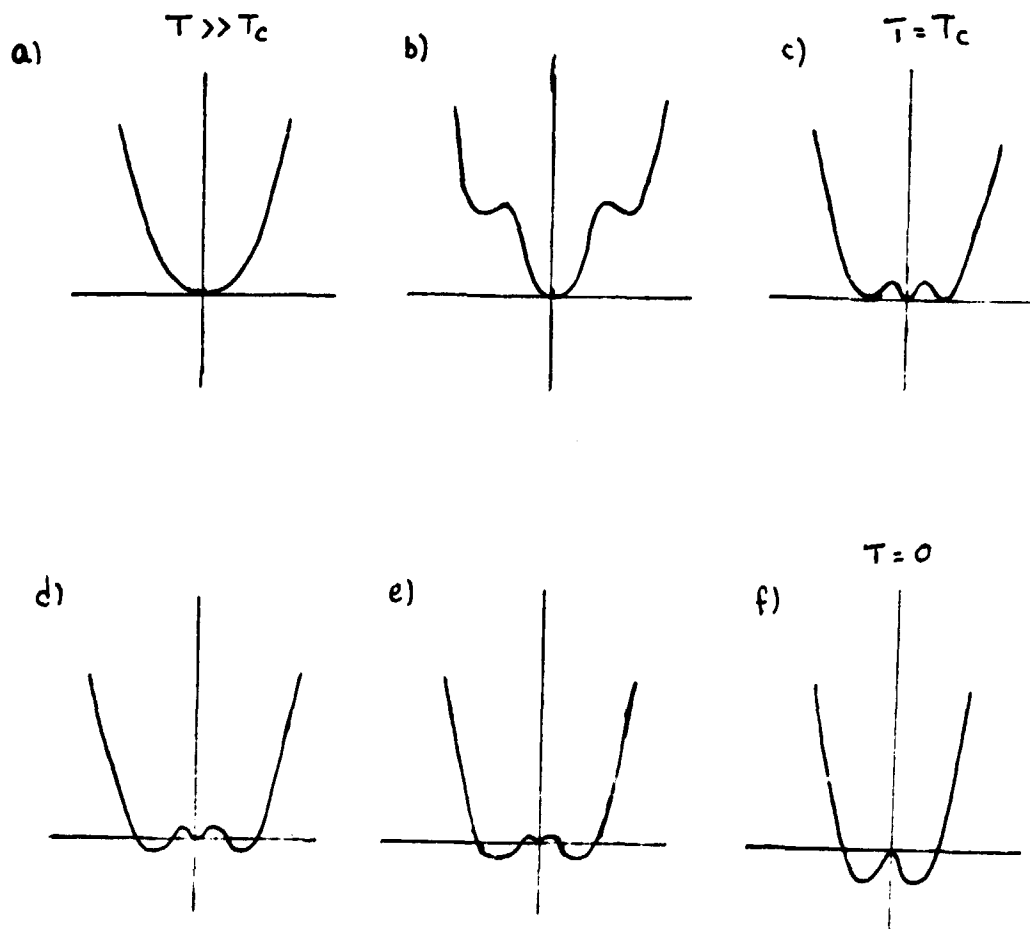


taxa na qual o Universo estando na fase falsa, tunelará para o vácuo verdadeiro. Se a taxa de decaimento for grande então o Universo permanecerá quente (ou melhor, passará para a nova fase ainda a altas temperaturas) quando o vácuo falso decair. No entanto, se a taxa de decaimento for pequena o Universo resfriará no vácuo falso ("supercooling"). Porém ao ocorrer finalmente a transição, toda a energia potencial será liberada na forma de energia cinética gerando o que se pode chamar de um novo "bang" (ou "grand bang" como descrito por Linde⁽⁴⁷⁾).

A discussão que fizemos acima corresponde a uma situação na qual o potencial varia com a temperatura, porém os primeiros cálculos realizados sobre o decaimento do vácuo falso foram elaborados para um potencial constante. Sua generalização para o caso dependente da temperatura, só foi elaborada muito recentemente. Em particular os cálculos de Coleman mostram que a taxa de decaimento do vácuo falso será proporcional a exponencial da ação calculada para a equação de movimento no espaço Euclídeo. Coleman⁽⁵⁹⁾ resolveu o problema aproximadamente. Posteriormente Brezin e Parisi⁽⁶⁰⁾ determinaram um resultado numérico para um potencial da forma $V(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4$, como função de m e λ . Não discutiremos os detalhes deste cálculo que podem ser vistos na revisão de Coleman⁽⁶¹⁾.

Discutiremos a seguir a transição de fase e o "Supercooling" no modelo de Weinberg-Salam realizado por Witten. Sendo que neste trabalho, foi elaborada uma solução para o proble-

ma do tunelamento dependente da temperatura. Inicialmente iremos apresentar "fotos" do potencial que quebra a simetria do modelo de Weinberg-Salam.



Estes gráficos correspondem ao potencial efetivo dependente da temperatura do modelo de Weinberg-Salam. A parte do potencial independente da temperatura é dada por^(24,28,29)

$$V(\phi) = \frac{3e^4}{512\pi^2} \frac{1}{\sin^4\theta_w} \left(2 + \frac{1}{\cos^4\theta_w} \right) \left(\phi^4 \ln \frac{\phi}{\langle\phi\rangle} - \frac{1}{4} \phi^4 \right) \quad (15-1)$$

aonde $\langle \phi \rangle \approx 250 \text{Gev}$. A parte dependente da temperatura corresponde a

$$\bar{F}(\phi, T) = \frac{-\pi^2 T^4}{10} + \frac{e^2 T^2 \phi^2}{32 \sin^2 \theta_w} \left(2 + \frac{1}{\cos^2 \theta_w} \right) + O(\phi^4) \quad (15-2)$$

Verifica-se que o potencial final* apresenta um termo logarítmico ($\ln \phi / \langle \phi \rangle$) que impede a resolução do cálculo da ação e da consequente taxa de decaimento, na forma elaborada por Coleman⁽⁵⁹⁾ ou utilizando os resultados de Brezin e Parisi⁽⁶⁰⁾ no entanto pode-se escrever

$$\begin{aligned} \ln \frac{\phi}{\langle \phi \rangle} &= \ln \left(\frac{e \phi}{2T \sin \theta_w} \right) + \ln \left(\frac{2T \sin \theta_w}{e \langle \phi \rangle} \right) \\ &= \ln \left(\frac{e \phi}{2T \sin \theta_w} \right) + \ln \left(\frac{T}{M_w} \right) \end{aligned} \quad (15-3)$$

já que $M_w = e \langle \phi \rangle / 2 \sin \theta_w$, porém nota-se que a baixas temperaturas o termo $\ln(T/M_w)$ torna-se grande, ao passo que no tempo que o tunelamento é efetivo tem-se $e \phi / T \sim 1$, assim desprezando-se um dos termos chegar-se-á ao potencial final

* O potencial final $V(\phi, T)$, corresponderá a soma da parte independente da temperatura (15.1), mais a parte dependente de T (15.2).

$$V(\phi, T) = \frac{e^2 T^2 \phi^2}{32 \sin^2 \theta_w} \left(2 + \frac{1}{\cos^2 \theta_w} \right) - \frac{3e^4}{512 \pi^2} \frac{1}{\sin^4 \theta_w} \left(2 + \frac{1}{\cos^4 \theta_w} \right) \phi^4 \ln \frac{M_w}{T} \quad (15-4)$$

este potencial pode ser colocado na forma $V = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4$ e o cálculo de Brezin e Parisi⁽⁶⁰⁾ para a ação poderá ser utilizado e o resultado da ação será

$$A = \frac{32 \pi^2 \sin^3 \theta_w}{3e^3} \frac{2 + 1/\cos^2 \theta_w}{2 + 1/\cos^4 \theta_w} \frac{18.847}{\ln M_w/T} \quad (15-5)$$

De posse da ação, Witten calcula a taxa de decaimento do vácuo e verifica que o tunelamento somente torna-se-á efetivo a temperaturas da ordem de 300 eV ! Com este resultado é evidente porque falamos em "supercooling" para transições de fase de primeira ordem forte. O mesmo efeito foi observado para o modelo SU(5) onde existe um resfriamento da ordem de 10^{-15} (57).

Podemos com o que foi visto entender agora o que Linde⁽⁴⁷⁾ disse a respeito de um grande "bang" posterior ao "big bang". Em teorias de grande unificação ocorre um super-resfriamento, sendo que, após a transição realmente efetivar-se toda a energia potencial é convertida em cinética, gerando um grande "bang". Assim nos modelos em que temos uma sequência de transi-

ções de fase poderemos ter uma série de "bangs" o que irá alterar toda a concepção anterior de um Universo calmo após o "big bang".

Antes de encerrarmos esta secção, será interessante verificar um efeito previsto por Witten, que irá apressar o decaimento do vácuo falso na transição de fase no modelo de Weinberg-Salam⁽⁵⁵⁾. Witten verificou que o acoplamento de Yukawa dará uma contribuição ao potencial efetivo, quando o par $q\bar{q}$ adquirir um valor esperado no vácuo, causando a quebra da simetria chiral.

O acoplamento dos quarks aos bosons de Higgs é dado por

$$\mathcal{L}_{\text{YUK}} = + \frac{\phi}{\langle \phi \rangle} \sum_i m_i \bar{q}_i q_i \quad (15-6)$$

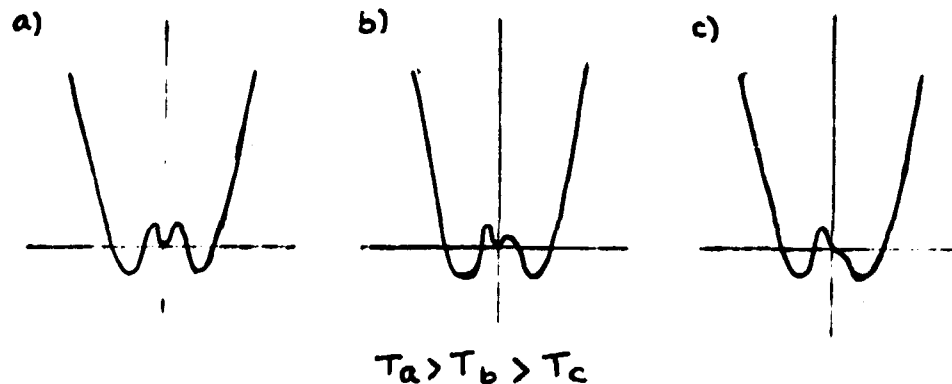
se considerarmos que o valor esperado de $q\bar{q}$ em função da temperatura for dado por $q\bar{q}(T)$, a contribuição do termo acima ao potencial efetivo será

$$\Delta V = - \phi \frac{q\bar{q}(T)}{\langle \phi \rangle} \sum_i m_i \quad (15-7)$$

este termo pode ser colocado na forma⁽⁵⁵⁾

$$\Delta V = - \phi (100 \text{ Mev})^3 \frac{q\bar{q}(T)}{q\bar{q}(0)} \quad (15-8)$$

O efeito desta correção será o de eliminar a barreira de potencial, fazendo com que o falso vácuo decaia a uma temperatura da ordem de 200 Mev. Ou seja, a partir do momento em que $q\bar{q}$ passa a possuir um valor esperado do vácuo diferente de zero; graficamente teremos:



Uma das características deste tipo de transição corresponderá a um aumento da entropia do Universo o que poderá a carregar valores muito baixos para a razão barion/entropia (vide ref. (18)) porém, resolverá o problema da razão monopolos/entropia, cujos aspectos serão discutidos na próxima secção.

16. Supressão de monopolos magnéticos. O problema do termo cosmológico nas equações de evolução do Universo.

O estudo de transições de fase em teorias unificadas tem produzido ultimamente uma verdadeira revolução no estudo da Cosmologia. Sendo que, discutir sobre o assunto é bastante delicado, pois além de sua complexidade natural, estes problemas en

contram-se atualmente em tal fase de evolução que trabalhos e proposições várias tornam-se obsoletas de um instante para o outro. Nesta secção em particular, discutiremos alguns aspectos da supressão de monopolos magnéticos e do problema de uma expansão do Universo dominado por um termo cosmológico.

Monopolos magnéticos aparecem quando uma teoria de gauge não abeliana é quebrada espontaneamente, surgindo na quebra um subgrupo abeliano $U(1)$, não existente inicialmente, portanto em modelos de grande unificação, por ex.: $SU(5)$, onde temos a quebra $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, geramos monopolos magnéticos de grande massa (associados com a quebra de simetria vista acima). Zeldovich e outros⁽⁶²⁾ e posteriormente Preskill⁽⁶²⁾ partindo de cálculos associados a nucleossíntese determinaram um número limite para a razão entre a densidade de monopolos e a densidade de ftons

$$\rho_M = \frac{M_M}{T^3} \ll 10^{-19} \quad (16-1)$$

ao passo que dados em Astrofísica estabelecem um limite aproximado de

$$\rho_M \leq 10^{-25} \quad (16-2)$$

Foram elaboradas várias suposições para explicar a supressão de monopolos magnéticos. Uma delas, elaborada por Bais e Rudaz⁽⁶³⁾, investiga a possibilidade da existência de equilíbrio termodinâmico durante a formação dos monopolos (este é um dos pontos criticados do trabalho, pois não se sabe qual é a termodinâmica de objetos tão complexos como os monopolos). Existindo pois o equilíbrio, a densidade de monopolos segue a equação de Boltzman e teremos

$$n_M = \frac{M_M}{T^3} \approx \exp\left(-\frac{m_M}{T_G}\right) \approx \exp\left[-0(30) \frac{m_H}{m_X}\right] \quad (16-3)$$

aonde M_M , M_H e M_X são respectivamente a massa do monopo-
lo e as massas dos bosons de Higgs e de gauge do modelo SU(5), T_G
é a temperatura de Ginzburg (já definida anteriormente), porém
a supressão só existirá se

$$g^2(M_X) \approx f(M_X) \quad (16-4)$$

aonde g^2 é a constante de acoplamento de gauge e f a dos bo-
sons de Higgs, que darão a escala de m_X e m_H respectivamente.
Uma outra hipótese menos viável é a de Langacker e Pi⁽⁶⁴⁾, aonde

os monopolos seriam gerados em uma quebra de simetria, tal que, o subgrupo $U(1)$ aparecesse ao final, somente a baixas temperaturas. A suposição mais aceita atualmente é a de que os monopolos são suprimidos como decorrência de uma transição de fase de primeira ordem forte.

Guth e Tye⁽⁶⁵⁾ verificaram que na existência de uma transição de fase de 1ª ordem forte ter-se-á um "supercooling". Com o Universo aquecendo-se após a efetivação da transição até uma temperatura T_n (com $T_n \ll T_{crit.}$) na qual seriam formados os monopolos e conseqüentemente em menor quantidade. Cálculos explícitos para a obtenção da densidade de monopolos são trabalhosos e baseiam-se na idéia de Kibble⁽⁶⁶⁾, de que os monopolos são formados no nó, ou melhor, na colisão de domínios de campos de Higgs casualmente separados e que estejam em diferentes fases. Estes domínios são as bolhas formadas na transição de fase. A densidade de monopolos será da ordem do número de bolhas formadas na transição de fase. A densidade de monopolos será da ordem do número de bolhas, cujo cálculo pode ser elaborado após o estudo do tunelamento na forma proposta por Witten (conforme foi visto na secção anterior).

De forma geral, não existe (até o presente momento) um modelo detalhado para explicar a supressão de monopolos. Aparentemente uma transição de fase de primeira ordem forte é suficiente para sua explicação. Porém poderá gerar problemas com relação a razão M_2/M_4 , introduzindo também modificações na

forma de expansão do Universo, acarretando mudanças na razão bárion-antibárion⁽⁶⁷⁾. Ou seja, todos estes aspectos estão entrelaçados e muito trabalho deverá ser realizado até chegarmos a resultados mais realísticos.

Um outro ponto que envolve o problema de restauração de simetria, é o da possibilidade de ter existido um termo cosmológico, que dominou o comportamento das equações de Einstein no início de Universo.

Temos que para qualquer instante do Universo o tensor energia-momento da matéria é conservado e este pode ser dividido em duas partes

$$\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle = \langle T_{\mu\nu} \rangle + g_{\mu\nu} \epsilon(\mathcal{U}) \quad (16-5)$$

sendo que $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ pode ser denominado tensor de substância e $\epsilon(\mathcal{U})$ de densidade de energia do vácuo, o qual pode ser interpretado como uma constante cosmológica.

Se olharmos para uma das equações que governam a expansão do Universo temos

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3} \rho - \frac{k}{R^2} \quad (16-6)$$

onde G_N é a constante de gravitação de Newton, ρ é a densidade de energia e k é um parâmetro de curvatura, que pode ser $\pm 1,0$ conforme o Universo for fechado, aberto ou chato. ρ é considerado como a densidade de energia de radiação, onde a princípio desprezamos um termo cosmológico $\Lambda(\epsilon\omega)$ cujo valor atual é

$$\Lambda_{\text{ATUAL}} \leq 0(10^{-28}) \text{ g/cm}^3 \approx 0(10^{-45}) G_{\text{ev}}^4 \quad (16-7)$$

Sabemos entretanto que houve uma variação em $\epsilon(\nu)$, proporcional a variação do valor esperado do vácuo nas teorias que conhecemos, ou seja

$$\delta\Lambda = \delta\epsilon(\nu) = \delta\langle 0|\nu|0\rangle \approx 0(\lambda) (\langle 0|\phi|0\rangle)^4 \quad (16-8)$$

$$\approx 10^8 G_{\text{ev}}^4$$

para o modelo de Weinberg-Salam

$$\approx 10^{60} G_{\text{ev}}^4$$

para teorias de grande unificação

o que implica que no início do Universo a constante cosmológica a atingiu grandes valores. Em particular a densidade de energia do vácuo pode ter sido maior que a energia de substância, (principalmente na presença de uma transição de fase de primeira ordem) acarretando uma expansão exponencial do Universo (vide ref.(67)).

Ultimamente muito trabalho tem sido dedicado a este problema, alguns citados na ref. (68). Certos resultados podem inclusive eliminar a possibilidade da quebra de simetria no modelo de Weinberg-Salam através do mecanismo de Coleman-Weinberg. Porém, aqui existem aspectos suficientes para muitos trabalhos antes que se chegue a uma solução aceitável.

Podemos citar como interessante e também como uma saída totalmente não convencional, o trabalho de Mohapatra⁽⁶⁹⁾, que para eliminar a variação em $\epsilon(\mathcal{U})$, acrescenta ao potencial efetivo um termo dependente da temperatura (nulo para $T=0$) que anula a todo instante as variações de $\epsilon(\mathcal{U})$. Apesar de carecer de qualquer fundamento físico, pode-se encarar esta estratégia como uma possível solução. Provavelmente estes problemas serão motivos de estudo ainda por muito tempo.

17. Transição de fase em modelos com quebra dinâmica de simetria

Ao discutirmos nas primeiras secções a quebra de simetria de gauge, utilizamos para este fim o mecanismo de Higgs. Porém, esta não é a única forma de implementarmos quebras de simetria (gauge, CP, chiral, etc...). Na realidade a existência dos bosons de Higgs não passa de um mero artefato, para obtermos a geração de massa em teorias de gauge, que inclusive leva

a alguns problemas, quando implementados a quebra de simetria em teorias de grande unificação⁽²¹⁾.

Uma segunda possibilidade de quebrar-se a simetria de gauge (ou CP, ou chiral) é através de um mecanismo dinâmico^(9,70) onde o papel do boson de Higgs será realizado por um estado ligado de fermion-antifermion.. Isto não é totalmente estranho uma vez que os bosons de Higgs estão plagiando a Lagrangeana de Ginzburg-Landau; cujo parâmetro escalar (ψ) (vide eq. (2.1)) foi determinado posteriormente, como sendo um estado eletron-buraco, ou o que é chamado par de Cooper⁽⁷¹⁾. Estes esquemas foram muito estudados à alguns anos atrás⁽⁷⁰⁾, adquirindo importância recentemente em uma nova interpretação, nas que são chamadas teorias de "Technicolor"⁽⁷²⁾. Não iremos entrar em detalhes sobre todos estes aspectos, que pedem por si só um estudo a parte. Não iremos discutir o problema da quebra chiral de simetria e confinamento em teorias não abelianas para as quais temos métodos não perturbativos de análise. Ou então em teorias de gauge numa rede onde não temos um potencial efetivo para análise da transição e a mesma é feita através do comportamento do "Loop" de Wilson⁽⁷³⁾. Apresentaremos apenas a discussão sobre um único modelo que será o de Gross-Nevev⁽⁷⁴⁾, sendo que este modelo apresenta geração dinâmica de massa dos fermions. Ou seja quebra da simetria chiral; formação de um estado ligado escalar

e é assintoticamente livre. Em outras palavras, apresenta muitas das características de modelos não abelianos, como a cromodinâmica quântica.

A Lagrangeana do modelo de Gross-Neveu é dada por uma interação de quatro fermions em duas dimensões (1 espaço-1 tempo)*

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} (i\not{\partial}) \psi + \frac{1}{2} g^2 (\bar{\psi} \psi)^2 \quad (14-1)$$

onde ψ é um campo fermiônico sem massa com N componentes. Pode-se verificar que para N grande g^2 diminui como $1/N$ de forma que podemos definir

$$\lambda = g^2 N \quad (14-2)$$

assim

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi} (i\not{\partial}) \psi + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{N} (\bar{\psi} \psi)^2 \quad (14-3)$$

é possível demonstrar que esta teoria pode ser descrita como

$$\mathcal{L}_\sigma = \bar{\psi} (i\not{\partial}) \psi - \frac{1}{2} \sigma^2 - \left(\frac{\lambda}{N}\right)^{1/2} \bar{\psi} \psi \sigma \quad (14-4)$$

* Vide comentários no Apêndice D a respeito da quebra de simetrias em duas dimensões.

sendo que as duas Lagrangeanas possuem funções de Green idênticas ($\phi_\sigma \Leftrightarrow \phi_\psi$).

O potencial efetivo para esta teoria, pode ser calculado na expansão $1/N$ cujo termo de primeira ordem será dado pela soma dos seguintes gráficos



temos então

$$V = \frac{1}{2} \sigma_c^2 - N i \sum_{m=1}^{\infty} \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \frac{1}{2m} \frac{(g^2 \sigma_c^2)^m}{k^2} \quad (17-5)$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_c^2 - \frac{\lambda}{4\pi} \sigma_c^2 \left[\ln \Lambda^2 + 1 - \ln (g^2 \sigma_c^2) \right]$$

que pode ser renormalizado com a condição

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \sigma_c^2} \right|_{\sigma_c = \sigma_0} = 1 \quad (17-6)$$

e chega-se a

$$V = \frac{1}{2} \sigma_c^2 + \frac{\lambda}{4\pi} \sigma_c^2 \left[\ln \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_0} \right)^2 - 3 \right] \quad (17-7)$$

pode-se demonstrar que este potencial possui um mínimo para $\sigma_c \neq 0$ Ocorrendo portanto, a quebra de simetria, acarretando em uma mas sa para o férmion dada por

$$M_F = g \sigma_0 \exp \left(- \frac{\tilde{\pi}}{\lambda} \right) \quad (17-8)$$

Da mesma forma que estudamos anteriormente, o poten - cial em questão pode ser deduzido a uma temperatura finita e chegamos a ⁽⁷⁵⁾

$$V(\sigma_c, T) = \frac{1}{2} \sigma_c^2 - 2NT \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int \frac{dk}{2\pi} \left[\ln(k^2 + \omega_m^2 + \frac{\lambda}{N} \sigma_c^2) - \ln(k^2 + \omega_m^2) \right] \quad (17-9)$$

onde $\omega_m = (2m+1)\pi T$. E da mesma forma que em problemas anterio res, podemos determinar a temperatura na qual a simetria será restaurada, que é dada por

$$T_{crit} = \frac{1}{\tilde{\pi}} \left(\frac{\lambda}{N} \right)^{1/2} \sigma_0 \exp \left(1 - \frac{\tilde{\pi}}{\lambda} + \delta_E \right) \quad (17-10)$$

Conclui-se portanto que existe uma temperatura T_{crit} na qual a simetria chiral é restabelecida. Cálculos recentes in dicam que a transição de fase é de segunda ordem ⁽⁷⁶⁾.

Muito pouco se conhece a respeito de modelos onde a quebra de simetria é realizada dinamicamente. Cálculos em duas dimensões como nos modelos de Schwinger, Gross-Neveu, CP^{N-1} , QCD_2 , não garantem a extrapolação para quatro dimensões. Alguns cálculos indicam a existência de fases confinantes e não-confinantes, conforme a temperatura, porém o problema ainda está longe de sua resolução.

O estudo da quebra e restauração de simetria em teorias de gauge ainda está longe de ser totalmente entendido, não sabemos ainda se a quebra de simetria de gauge é realizada através dos bosons de Higgs ou dinamicamente. Se a quebra de simetria for realizada através do mecanismo de Higgs, então estamos engatinhando ainda, no entendimento de suas implicações cosmológicas. Porém se a quebra de simetria for dinâmica estamos em uma situação pior ainda, mudando drasticamente nossa concepção do início do Universo. De qualquer maneira não resta dúvida que muito deverá ser discutido e estudado, para chegarmos mesmo a uma idéia grosseira dos primeiros instantes do Universo.

APÊNDICE A

Quebra de simetria em $O(N)$ através de dois vetores de bosons de Higgs.

O grupo $O(N)$ é caracterizado por $N(N-1)/2$ geradores e a cada um desses irá corresponder um boson de gauge W_{ij}^{μ} , que se transforma da forma

$$W_{ij}^{\mu} \rightarrow W_{ij}^{\mu} + \epsilon_{ik} W_{kj}^{\mu} + \epsilon_{jk} W_{ik}^{\mu} \quad (A-1)$$

$$W_{ij}^{\mu} = -W_{ji}^{\mu}$$

onde $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$ são parâmetros infinitesimais que caracterizam rotações infinitesimais em $O(N)$. Os campos W_{ij}^{μ} se transformam sob transformações de gauge de segunda espécie da seguinte forma

$$W_{ij}^{\mu} \rightarrow W_{ij}^{\mu} + \delta W_{ij}^{\mu}$$

$$\delta W_{ij}^{\mu} = \frac{1}{g} \partial^{\mu} \epsilon_{ij} + \epsilon_{ik} W_{kj}^{\mu} + \epsilon_{jk} W_{ik}^{\mu} \quad (A-2)$$

A Lagrangeana de $O(N)$ com dois N -vetores (χ e η) se rá dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{ij}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{ij} + \frac{1}{2} (D^{\mu} \eta D_{\mu} \eta) + \frac{1}{2} (D^{\mu} \chi D_{\mu} \chi) + \frac{1}{2} m^2 \chi^2 \quad (A-3)$$

$$+ \frac{1}{2} m_2^2 \eta^2 - \frac{1}{4} f_1 (\chi^2)^2 - \frac{1}{4} f_2 (\eta^2)^2 - \frac{1}{2} f_3 \chi^2 \eta^2 - \frac{1}{2} f_4 (\chi \cdot \eta)^2$$

(por simplicidade suprimimos o simbolo de vetor em χ e η) onde

$$F_{ij}^{\mu\nu} = \partial^\mu W_{ij}^\nu - \partial^\nu W_{ij}^\mu + g (W_{ik}^\mu W_{kj}^\nu - W_{ik}^\nu W_{kj}^\mu) \quad (A-4)$$

e

$$D^\mu \phi_i = \partial^\mu \phi_i - g W_{ij}^\mu \phi_j \quad (\phi_i = \chi_i, \eta_i) \quad (A-5)$$

e as variações de χ e η são dadas por

$$\delta \chi_i = \epsilon_{ij} \chi_j, \quad \delta \eta_j = \epsilon_{ij} \eta_j \quad (A-6)$$

as derivadas do potencial são dadas por

$$\frac{\partial V}{\partial \chi_i} = (-m_1^2 + f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2) \chi_i + f_4 (\chi \cdot \eta) \eta_i \quad (A-7a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta_i} = (-m_2^2 + f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2) \eta_i + f_4 (\chi \cdot \eta) \chi_i \quad (A-7b)$$

Estudando-se o potencial, verifica-se que f_1 e f_2 devem ser maiores que zero, para que o potencial seja limitado por baixo, e também que se $f_4 > 0$ o mínimo deverá ocorrer com os campos perpendiculares entre si. Se $f_4 < 0$ o mínimo deverá ocorrer com os campos paralelos, desta forma nossas soluções serão:

a) campos perpendiculares,

$$1) \quad \chi^2 = 0 \quad , \quad \eta^2 = \frac{m_2^2}{f_2} \quad (A-8a)$$

$$2) \quad \chi^2 = \frac{4m_1^2}{f_1} \quad , \quad \eta^2 = 0 \quad (A-8b)$$

$$3) \quad \chi^2 = \frac{m_1^2 f_2 - m_2^2 f_3}{f_1 f_2 - f_3^2} \quad , \quad \eta^2 = \frac{m_2^2 f_1 - m_1^2 f_3}{f_1 f_2 - f_3^2} \quad (A-8c)$$

b) campos paralelos, $\vec{\eta} = a \vec{\chi}$

$$\chi^2 = \frac{m_1^2 f_2 - (f_3 + f_4) m_2^2}{f_1 f_2 - (f_3 + f_4)^2} \quad , \quad \eta^2 = \frac{m_2^2 f_1 - (f_3 + f_4) m_1^2}{f_1 f_2 - (f_3 + f_4)^2} \quad (A-8d)$$

pode-se verificar que o valor do potencial nos extremos é dado por

$$V_{\text{ext}}(\chi^2, \eta^2) = -\frac{1}{4} (m_1^2 \chi_{\text{ext}}^2 + m_2^2 \eta_{\text{ext}}^2) \quad (A-9)$$

A condição de positividade da massa dos bosons de Higgs (segundo (A-8c) e (A-8d)) nos dão (quando $m_1^2 > m_2^2$)

$$-(f_1 f_2)^{1/2} < f_3 < f_3 \frac{m_2^2}{m_1^2} \quad \text{para a solução} \quad (A-8c) \quad (\chi \perp \eta)$$

$$-(f_1 f_2)^{1/2} < f_3 + f_4 < f_3 \frac{m_2^2}{m_1^2} \quad \text{para a solução} \quad (A-8d) \quad (\chi \parallel \eta)$$

Portanto, no caso que os campos forem perpendiculares a quebra poderá ser para $O(N-1)$ ou $O(N-2)$ (vide resultado de Li⁽¹⁵⁾ para k -vetores); e para o caso de campos paralelos a quebra será para $O(N-1)$. Para que isto fique claro vamos calcular, a seguir, a matriz de massa dos bosons de gauge.

Consideremos o caso em que os campos são perpendiculares no mínimo cuja solução seja dada por (A-8c) definindo-se o campo deslocado (como realizado nas secções 3. e 4.) tem-se

$$\eta'_i = \eta_i - \mathcal{V}_i \quad e \quad \chi'_i = \chi_i - \epsilon_i \quad (A-10)$$

onde

$$\epsilon_i = \delta_{Ni} \epsilon \quad e \quad \mathcal{V}_i = \delta_{i,N-1} \mathcal{V} \quad (A-11)$$

onde ϵ e \mathcal{V} ao nível de árvore são dados por (A-8c) com isto o termo de massa dos bosons de Gauge pode ser obtido da Lagrangeana, e sua forma será

$$\int d^4x \mathcal{L}_W \propto \frac{1}{2} g^2 \left\{ \mathcal{V}^2 W_{i,N-1}^\mu W_{\mu i,N-1} + \epsilon^2 W_{i,N}^\mu W_{\mu i,N} \right\} \quad (A-12)$$

Os bosons de gauge podem ser definidos como

$$W_{ij}^\mu = \zeta_{ij}^a \sqrt{a} \sqrt{a}^\mu \quad (A-13)$$

Verifica-se que sobrou uma simetria $O(N-2)$ correspondente ao número de bosons sem massa*. As outras possibilidades de quebra e suas matrizes de massa são mais simples do que esta e facilmente dedutíveis.

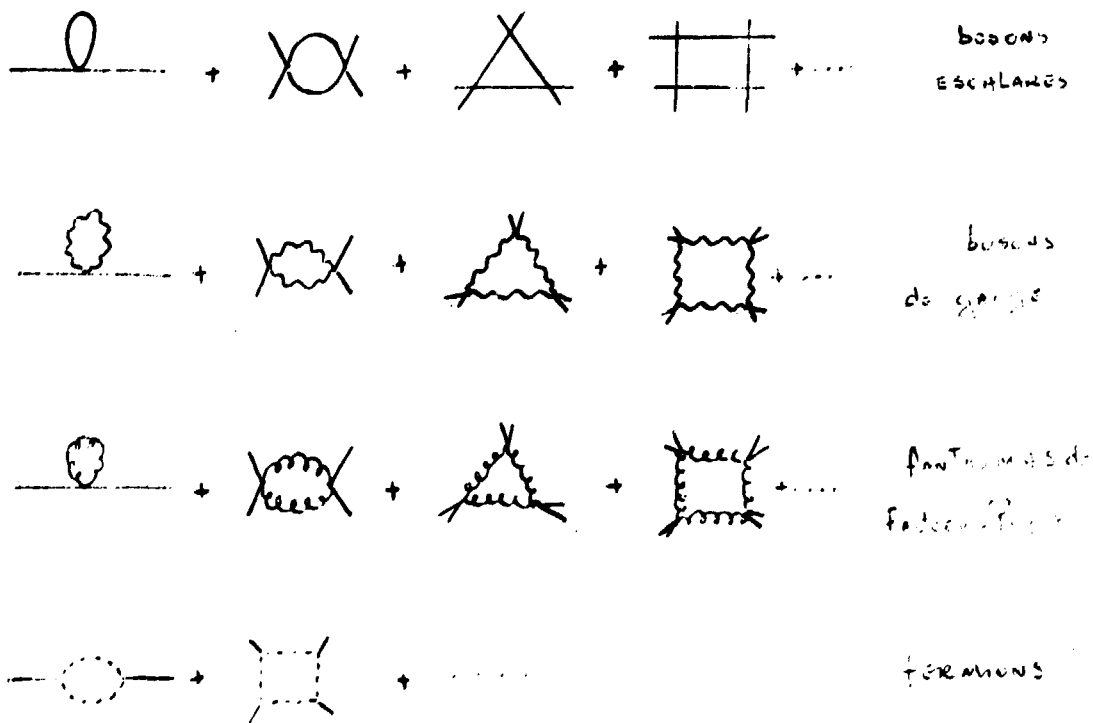
* o número de geradores de $O(N-2)$ é igual a $(N-2)(N-3)/2$, que por sua vez, é igual ao número de bosons inicialmente sem massa, menos os que ganharam massa $\Rightarrow \frac{N(N-1)}{2} - [(N-1) + (N-2)]$

APÊNDICE B

Cálculo das correções radiativas do potencial efetivo em teorias de gauge.

Na secção 7. discutimos sobre o efeito das correções radiativas ao potencial de Higgs. Dissemos também que as correções na ordem mais baixa, correspondem a soma dos gráficos de 1 "Loop", que é dada por (7.2) para uma teoria $\lambda\phi^4$. De forma geral isto pode ser estendido para uma teoria de gauge, onde o potencial efetivo terá como contribuição, na ordem de "1 Loop", gráficos contendo bósons escalares, bósons de gauge, fantasmas de Fadeev-Popov e férmions que estejam contidos na teoria.

Assim devemos realizar a soma dos seguintes gráficos



assim em uma teoria de gauge obtemos quatro integrais do tipo da que aparece em (7.2).

Podemos poupar o trabalho de construir a série de gráficos e elaborar a soma se seguirmos o formalismo funcional elaborado por Jackiw⁽²⁴⁾; que partindo do funcional gerador dos gráficos de Feynman chega a uma expressão para o potencial efetivo. A dedução desta expressão para o caso de uma teoria de gauge é extremamente longa. Nós iremos apenas dar os resultados e aplicá-los à teoria com simetria de gauge $O(N)$ descrita por (7.4). A dedução do potencial efetivo poderá ser vista no artigo de Jackiw⁽²⁴⁾ e Jackiw e Dolan⁽²⁴⁾.

Seja a Lagrangeana mais geral possível (contendo interações renormalizáveis) com bosons de gauge (A^μ), bosons escalares (ϕ) e os fantasmas de Fadeev-Popov (ψ) (no caso de termos fermions o tratamento será análogo aos fantasmas).

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, A^\mu, \psi^*, \psi) \quad (B-1)$$

Define-se um novo campo ϕ_a dado por

$$\phi_a \rightarrow \phi'_a - \hat{\phi}_a \quad (B-2)$$

onde $\hat{\phi}_a$ é um campo constante, com esta definição a Lagrangeana será função de

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\hat{\phi}_a; \phi_a, A^\mu, \psi^*, \psi) \quad (B-3)$$

e a ação poderá ser escrita como

$$\begin{aligned}
 \bar{I}(\hat{\phi}_a; \phi_a, A^\mu, \psi^\dagger, \psi) &= \int d^4x \int_0^1 d\tau (\hat{\phi}_a; \phi_a, A^\mu, \psi^\dagger, \psi) \\
 &= \int d^4x d^4y \left[\frac{i}{2} \phi_a(x) : \mathcal{D}_{ab}^{-1}(\hat{\phi}; x-y) \phi_b(y) + \right. \\
 &\quad + \frac{i}{2} A^\mu(x) : \Delta_{\mu\nu}^{-1}(\hat{\phi}; x-y) A^\nu(y) + A^\mu(x) M_{\mu\alpha}(\hat{\phi}; x-y) \phi(y) \\
 &\quad \left. + \psi^\dagger(x) : S^{-1}(\hat{\phi}; x-y) \psi(y) \right] \tag{B-4}
 \end{aligned}$$

Devemos observar os seguintes pontos: a) não estamos acrescentando à ação a parte da Lagrangeana de interação, que só irá contribuir para ordens maiores (dois "Loops" ou mais) b) conforme afirmado no item anterior, a ação acima só contém termos quadráticos nos campos, onde $\mathcal{D}^{-1}, \Delta^{-1}, M, S^{-1}$ são propagadores da teoria com o "Shift" (correspondente a nossa redefinição do campo).

Com estas definições o potencial efetivo ao nível de "1 Loop" será dado por

$$V(\hat{\phi}) = V_0(\hat{\phi}) + V_1(\hat{\phi}) \tag{B-5}$$

onde

$$\begin{aligned}
 V_1(\hat{\phi}) &= i\hbar \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Im} [iS^{-1}(\hat{\phi}; k)] \\
 &- \frac{i\hbar}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Im} \det [i\Delta_{\mu\nu}^{-1}(\hat{\phi}; k)] \quad (B-6) \\
 &- \frac{i\hbar}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Im} \det [iD_{ab}^{-1}(\hat{\phi}; k) + iN_{ab}(\hat{\phi}; k)]
 \end{aligned}$$

onde os Im correspondem ao resultado da soma que aparece no cálculo de Coleman e Weinberg (vide eq. (7.2)), e onde $N_{ab}(\hat{\phi}; k)$ é dado por

$$N_{ab}(\hat{\phi}; k) = M_a^\mu(\hat{\phi}; k) \Delta_{\mu\nu}(\hat{\phi}; k) M_b^\nu(\hat{\phi}; -k) \quad (B-7)$$

Utilizando-se desta expressão iremos determinar o potencial efetivo na ordem de "1 Loop", para o modelo $O(N)$ com dois vetores de bosons de Higgs, discutido nas secções 5., 7. e 8..

A Lagrangeana completa será dada por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4} F_{ij}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{ij} + \frac{1}{2} (D^\mu \eta D_\mu \eta) + \frac{1}{2} (D^\mu \chi D_\mu \chi) \\
 &+ \frac{1}{2} m_1^2 \chi^2 + \frac{1}{2} m_2^2 \eta^2 - \frac{1}{4} f_1 (\chi^2)^2 - \frac{1}{4} f_2 (\eta^2)^2 - \frac{1}{2} f_3 \chi^2 \eta^2 \\
 &- \frac{1}{2} f_4 (\chi \cdot \eta)^2 - \frac{1}{2} [c_{ij}]^2 + \psi^* \frac{\delta C_{ij}}{\delta \epsilon_{jlm}} \psi \quad (B-8)
 \end{aligned}$$

onde $F_{ij}^{\mu\nu}$ e D^{μ} estão definidos por (7.4) e (A.5) com a variação dos campos de gauge W_{ij}^{μ} dada por

$$\delta W_{ij}^{\mu} = \frac{1}{g} \partial^{\mu} \epsilon_{ij} + \epsilon_{ik} W_{kj}^{\mu} + \epsilon_{jk} W_{ik}^{\mu} \quad (\text{B-9})$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= -\epsilon_{ji} & , & & W_{ij}^{\mu} &= -W_{ji}^{\mu} \\ \delta \chi_i &= \epsilon_{ij} \chi_j & , & & \delta \eta_i &= \epsilon_{ij} \eta_j \end{aligned}$$

o termo $-\frac{1}{2} [C_{ij}]^2$ corresponde ao termo que quebra o gauge⁽⁷⁷⁾ e será dado no gauge R_{ξ} ⁽⁷⁷⁾

$$\mathcal{L}_{\text{QG}} = -\frac{1}{2} [C_{ij}]^2 = -\frac{1}{2} \left[\xi^{1/2} \partial_{\mu} W_{ij}^{\mu} - \xi^{-1/2} g (\eta_i \bar{\nu}_j + \chi_i \epsilon_j) \right]^2 \quad (\text{B-10})$$

onde $\bar{\nu}_j$ e ϵ_j correspondem aos "shifts" dado aos campos

$$\eta'_i = \eta_i - \bar{\nu}_i \quad , \quad \chi'_i = \chi_i - \epsilon_i \quad (\text{B-11})$$

Como pretendemos determinar o potencial para o caso em que a simetria for quebrada de $O(N)$ para $O(N-2)$ iremos tomar o mínimo na condição de campos perpendiculares (vide Apêndice A)

$$\epsilon_i = \delta_{Ni} \epsilon \quad \quad \bar{\nu}_i = \delta_{i,N-1} \bar{\nu} \quad (\text{B-12})$$

onde ϵ e \mathcal{J} ao nível de árvore são dados por (A.8c).

O ultimo termo na Lagrangeana (B-8) corresponde ao termo dos fantasmas de Fadeev-Popov, já com o "shift" do campo realizado eles contribuirão na Lagrangeana com a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{FP} = & \xi^{1/2} \left\{ \frac{i}{g} \Psi_{ij}^* \partial^\mu \partial_\mu \Psi_{ij} + \Psi_{ij}^* \partial_\mu W_{mj}^M \Psi_{im} \right. \\ & + \Psi_{ij}^* \partial_\mu W_{im}^M \Psi_{im} - \xi^{-1} g (\Psi_{in-2}^* \sigma_{nm} \Psi_{im} \\ & \left. + \Psi_{in}^* \epsilon \chi_{nm} \Psi_{im}) \right\} - \xi^{-1/2} g \left\{ \Psi_{in-2}^* \Psi_{in-2} \sigma^2 + \Psi_{in}^* \Psi_{in} \epsilon^2 \right\} \end{aligned} \quad (B-13)$$

Realizando-se o "shift" em todos os termos de bosons escalares da Lagrangeana, isolando os termos quadráticos nos campos e determinando a transformada de Fourier dos propagadores estaremos aptos a calcular o potencial efetivo.

Por exemplo, para os bosons de gauge teremos o seguinte termo de propagador

$$-\frac{1}{2} W_a^\mu \left[(-k^2 + M_{ab}^2) g_{\mu\nu} + (1-\xi) k_\mu k_\nu \right] W_b^\nu \quad (B-14)$$

onde

$$M_{ab}^2 = g^2 \sum_{i=1}^n \tau_{in}^a \tau_{in}^b \epsilon^2 + g^2 \sum_{i=1}^n \tau_{in-1}^a \tau_{in-1}^b \sigma^2 \quad (B-15)$$

(o cálculo da matriz de massa foi realizado no Apêndice A), onde a matriz de massa aparece na forma diagonal, portanto, para cada boson com sua respectiva massa (temos $(N-1) + (N-2)$ bosons massivos) teremos que calcular uma integral do tipo

$$\int d^4k \ln \det [A g_{\mu\nu} + B k_\mu k_\nu] \quad (B-16)$$

pode-se verificar que para um espaço de dimensão m temos

$$\det [A g_{\mu\nu} + B k_\mu k_\nu] = [A^{m-1} (A + B k^2)] \quad (B-17)$$

assim nossas integrais serão:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\Lambda^2} d^4k \ln [A^3 (A + B k^2)] \\ &= \pi^2 \int_0^{\Lambda^2} dk^2 k^2 \ln [A^3 (A + B k^2)] \quad (B-18) \end{aligned}$$

que podem ser integradas utilizando-se um "cut-off".

Teremos algum trabalho quando formos determinar a matriz de massa dos bosons escalares.

Para os bosons escalares verificaremos que temos $(N-2)$ bosons χ com massa $m_\chi^2 = -m_1^2 + \epsilon^2 f_1 + v^2 f_3$ e $(N-2)$ bosons η com massa $m_\eta^2 = -m_2^2 + v^2 f_2 + \epsilon^2 f_3$ porém os bosons χ_i e η_i com $i = 1, \dots, N$ possuem uma matriz de massa não diagonal

$$\begin{pmatrix} m_2^2 & \eta_{2-3} \chi_2 \\ \eta_{2-3} \chi_2 & \chi_2^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -m_2^2 + 3f_2 v^2 + f_3 \epsilon^2 & 2f_3 \epsilon v \\ 2f_3 \epsilon v & -m_1^2 + 3f_1 \epsilon^2 + f_3 v^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{2-3} \eta_{2-3} & \chi_{2-3} \eta_{2-3}^2 \\ \chi_{2-3} \eta_{2-3} & \eta_{2-3}^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -m_1^2 + f_3 \epsilon^2 + (f_3 + f_4) v^2 & f_4 \epsilon v \\ f_4 \epsilon v & -m_2^2 + f_2 v^2 + (f_3 + f_4) \epsilon^2 \end{pmatrix}$$

podemos diagonalizar estas matrices e teremos

$$\begin{aligned} M_1^2(x, \eta) &= (-m_2^2 + 3f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2) \cos^2 \alpha + (-m_1^2 + 3f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2) \sin^2 \alpha \\ &\quad - 4f_3 \eta \chi \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (\text{B-19a})$$

$$\begin{aligned} M_2^2(x, \eta) &= (-m_2^2 + 3f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2) \sin^2 \alpha + (-m_1^2 + 3f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2) \cos^2 \alpha \\ &\quad + 4f_3 \eta \chi \sin \alpha \cos \alpha \end{aligned} \quad (\text{B-19b})$$

$$\begin{aligned} M_3^2(x, \eta) &= (-m_2^2 + f_1 \chi^2 + (f_3 + f_4) \eta^2) \cos^2 \beta + (-m_1^2 + f_2 \eta^2 + (f_3 + f_4) \chi^2) \sin^2 \beta \\ &\quad - 2f_4 \chi \eta \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \quad (\text{B-19c})$$

$$\begin{aligned} M_4^2(x, \eta) &= (-m_1^2 + f_1 \chi^2 + (f_3 + f_4) \eta^2) \sin^2 \beta + (-m_2^2 + f_2 \eta^2 + (f_3 + f_4) \chi^2) \cos^2 \beta \\ &\quad + 2f_4 \chi \eta \sin \beta \cos \beta \end{aligned} \quad (\text{B-19d})$$

aonde
$$f_0 \approx \frac{4 f_3 \epsilon \sigma}{(m_2^2 - m_1^2) + \epsilon^2 (3 f_3 - f_3) - \sigma^2 (3 f_2 - f_3)} \quad (B-20)$$

e
$$f_1 \approx \frac{2 f_4 \epsilon \sigma}{(m_1^2 - m_2^2) + (f_3 + f_4)(\epsilon^2 - \sigma^2) + f_2 \sigma^2 - f_3 \epsilon^2} \quad (B-21)$$

Após um longo trabalho, calculamos os termos do potencial efetivo ao nível de "1 Loop". Os resultados estarão em função do "cut-off" que desaparecerão após a renormalização da massa e das constantes de acoplamento (condições de renormalização: $\partial^2 V / \partial \eta^2 |_{\eta^2 = \chi^2 = 0} = -m_1^2$, $\partial^2 V / \partial \chi^2 |_{\eta^2 = \chi^2 = 0} = -m_2^2$, $\frac{1}{6} \partial^4 V / \partial \chi^4 |_{\chi^2 = \eta^2 = 0} = f_1$, etc...) o resultado final será (a menos de termos sem significado físico que sempre podem ser eliminados por uma condição de renormalização apropriada)

$$\begin{aligned} V_1(\eta, \chi) = & -\frac{1}{2} m_1^2 \chi^2 - \frac{1}{2} m_2^2 \eta^2 + \frac{1}{4} f_1 \chi^4 + \frac{1}{4} f_2 \eta^4 + \frac{1}{2} f_3 \chi^2 \eta^2 \\ & + \frac{1}{2} f_4 (\chi \cdot \eta)^2 + \frac{1}{32 \pi^2} \left[\frac{3}{2} (d-2) \left(g^4 \eta^4 \ln \frac{\eta^2}{M^2} + g^4 \chi^4 \ln \frac{\chi^2}{M^2} \right) \right. \\ & + \frac{3}{2} g^4 (\chi^2 + \eta^2)^2 \ln \frac{\chi^2 + \eta^2}{M^2} + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} M_i^4(\chi, \eta) \ln \frac{M_i^2(\chi, \eta)}{M^2} \\ & + \frac{(d-2)}{2} (-m_1^2 + f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2)^2 \ln \frac{-m_1^2 + f_1 \chi^2 + f_3 \eta^2}{M^2} \\ & \left. + \frac{(d-2)}{2} (-m_2^2 + f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2)^2 \ln \frac{-m_2^2 + f_2 \eta^2 + f_3 \chi^2}{M^2} \right] \end{aligned} \quad (B-22)$$

No cálculo acima adotamos o gauge de Landau ($\xi \rightarrow 1$) e M^2 é o ponto de renormalização. Os dois últimos termos, correspondem a contribuições de campos não físicos, que só desapareceriam no gauge unitário.

De forma geral o procedimento será idêntico para qualquer outra teoria de gauge. Para a teoria em questão $[O(N)]$, no caso de campos paralelos no mínimo, mudaríamos a forma do "shift" e conseqüentemente o espectro de massas.

Obs. importante: em nossos cálculos do potencial efetivo χ e \mathcal{M} que aparecem no resultado final, não correspondem ao campo dinâmico ϕ e \mathcal{M} da Lagrangeana original. Mas sim, a uma solução de valor constante do campo, ou seja, a utilidade deste resultado está apenas na determinação do mínimo do potencial. Alguns autores diferenciam explicitamente os símbolos dos campos da Lagrangeana e os do resultado do potencial (por exemplo $\phi \rightarrow \phi_0(\phi)$ e $\hat{\phi} \rightarrow V(\hat{\phi})$). Não fizemos isto por simplicidade, porém é sem dúvida o que deveria ter sido feito, se desejássemos que nosso resultado estivesse formalmente correto.

APÊNDICE C

Expansão do termo dependente da temperatura no potencial efetivo ao nível de "1 Loop" (Eq.10.24).

Temos que resolver a integral

$$\overline{V}_1^{\beta}(\hat{\varphi}^2) = \frac{1}{2\pi^2 \beta^4} \int_0^{\infty} dx x^2 \ln [1 - \exp(-(x^2 + \alpha^2)^{1/2})] \quad (C-1)$$

onde $\alpha^2 = \beta^2 M^2$. A expansão desta integral torna-se necessária, em virtude dos problemas de divergência infravermelha que surgem nas proximidades da temperatura crítica que é exatamente o ponto no qual estamos interessados.

Com uma simples expansão em série de Mac Laurin (esta será uma expansão para altas temperaturas, $\beta \rightarrow 0$ em função de α^2)

$$\begin{aligned} \overline{V}_1^{\beta}(\hat{\varphi}^2) \Big|_{\alpha^2=0} &= \frac{1}{2\pi^2 \beta^4} \int_0^{\infty} dx x^2 \ln(1 - e^{-x}) \\ &= -\frac{\pi^2}{40 \beta^4} \end{aligned} \quad (C-2)$$

que é o primeiro termo em (10.27).

O segundo termo será proporcional a

$$\frac{\partial \overline{V}_1^{\beta}(\hat{\varphi}^2)}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{4\pi^2 \beta^4} \int_0^{\infty} dx \frac{x^2}{(x^2 + \alpha^2)^{1/2}} \frac{1}{\exp((x^2 + \alpha^2)^{1/2}) - 1} \quad (C-3)$$

assim

$$\left. \frac{\partial \bar{V}_i^\beta(\vec{\varphi}^2)}{\partial a^2} \right|_{a^2=0} = \frac{1}{4\pi^2 \beta^4} \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x - 1} \quad (C-4)$$

$$= \frac{1}{24 \beta^4}$$

correspondente ao segundo termo em (10.27).

Quanto aos outros termos estes são de dedução mais trabalhosa, seja

$$\frac{\partial^2 \bar{V}_i^\beta(\vec{\varphi}^2)}{\partial a^4} = \frac{1}{4\pi^2 \beta^4} \int_0^\infty dx x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \left\{ \frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2} [\exp((x^2+a^2)^{1/2}) - 1]} \right\}$$

$$= \frac{-1}{8\pi^2 \beta^4} \int_0^\infty dx \frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2} [\exp((x^2+a^2)^{1/2}) - 1]} \quad (C-5)$$

é conveniente estudar esta integral mais detalhadamente, seja

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^{1/2}} \frac{1}{\exp[(x^2+a^2)^{1/2}] - 1} \quad (C-6)$$

consideremos agora a integral regularizada

$$I_\epsilon(a) = \int_0^\infty \frac{dx x^{-\epsilon}}{(x^2+a^2)^{1/2}} \frac{1}{\exp[(x^2+a^2)^{1/2}] - 1} \quad (C-7)$$

com $\epsilon < 1$. Fazendo-se uso das expansões utilizadas para deduzir a parte do potencial dependente da temperatura (vide Eq. (10.17) a (10.19)) pode-se representar $\bar{I}_\epsilon(\alpha)$ por

$$\bar{I}_\epsilon(\alpha) = \bar{I}_\epsilon^{(1)}(\alpha) + \bar{I}_\epsilon^{(2)}(\alpha) \quad (C-8)$$

aonde

$$\bar{I}_\epsilon^{(1)}(\alpha) = \int_0^\infty dx \, x^{-\epsilon} \sum_m \frac{1}{x^2 + \alpha^2 + 4\pi^2 m^2} \quad (C-9)$$

com $m = 0, \pm 1, \dots$

$$\bar{I}_\epsilon^{(2)}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dx \, x^{-\epsilon} \frac{1}{(x^2 + \alpha^2)^{1/2}} \quad (C-10)$$

O problema agora é calcular as integrais acima e obter sua soma no ponto regular $\epsilon = 0$

A primeira integral pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} \bar{I}_\epsilon^{(1)}(\alpha) &= \sum_m \frac{1}{(\alpha^2 + 4\pi^2 m^2)^{(1+\epsilon)/2}} \int_0^\infty dx \frac{x^{-\epsilon}}{1+x^2} \\ &= \left[\frac{1}{\alpha^{1+\epsilon}} + 2 \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(\alpha^2 + 4\pi^2 m^2)^{(1+\epsilon)/2}} \right] \frac{\frac{1}{2} \pi}{\cos \frac{1}{2} \pi \epsilon} \quad (C-11) \\ &= \left[\frac{1}{\alpha^{1+\epsilon}} + 2 \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(2\pi m)^{1+\epsilon}} + 2 \sum_{m=1}^\infty \frac{1}{(2\pi m)^{1+\epsilon}} \left(\frac{1}{(1 + \alpha^2/4\pi^2 m^2)^{(1+\epsilon)/2}} - 1 \right) \right] \frac{\frac{1}{2} \pi}{\cos \frac{1}{2} \pi \epsilon} \end{aligned}$$

Verifica-se que estas somas possuem um limite quando

$\epsilon \rightarrow 0$ tal que

$$I_{\epsilon}^{(1)}(a) = \frac{\sqrt{a}}{2a} + \pi^{-\epsilon} a^{-1-\epsilon} \zeta(1+\epsilon) + \tilde{I}(a) + O(\epsilon) \quad (C-12)$$

com

$$\tilde{I}(a) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\left(1 + \frac{a^2}{4\pi^2 m^2} \right)^{-1/2} - 1 \right] = O(a^2) \quad (C-13)$$

e $\zeta(1+\epsilon)$ é a função zeta de Riemann dada por

$$\zeta(1+\epsilon) = - \frac{2^{\epsilon} \pi^{1+\epsilon} \zeta(-\epsilon)}{\sin \frac{1}{2} \pi \epsilon \Gamma(1+\epsilon)} = 2^{\epsilon} \pi^{\epsilon} \left[\frac{1}{\epsilon} - \ln 2\pi + \gamma + O(\epsilon) \right]$$

onde $\gamma = 0.577\dots$ Finalmente podemos escrever

$$I_{\epsilon}^{(1)}(a) = \frac{1}{2\epsilon} + \frac{\sqrt{a}}{2a} + \frac{1}{2} (\gamma - \ln 2\pi) + \tilde{I}(a) + O(\epsilon) \quad (C-14)$$

quanto a $I_{\epsilon}^{(2)}(a)$ temos

$$\begin{aligned} I_{\epsilon}^{(2)}(a) &= - \frac{1}{2} a^{-\epsilon} \int_0^{\infty} dx \frac{x^{-\epsilon}}{(1+x^2)^{1/2}} \\ &= - \frac{1}{2} a^{-\epsilon} B\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\epsilon, \frac{1}{2}\epsilon\right) \\ &= - \frac{1}{2\epsilon} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} a + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (C-15)$$

desde que

$$I_{\epsilon}(a) = I_{\epsilon}^{(1)}(a) + I_{\epsilon}^{(2)}(a)$$

e com $\epsilon \rightarrow 0$ teremos

$$\bar{I}(a) = \frac{\pi}{2a} + \frac{1}{2} \ln \frac{a}{4\pi} + \frac{1}{2} \hat{\nu} + \tilde{I}(a) \quad (C-16)$$

e finalmente

$$\frac{\delta^2 \bar{V}_1^{\beta}(\hat{\phi}^2)}{\delta a^4} = \frac{-1}{8\pi^2 \beta^4} \bar{I}(a)$$

de onde deduzimos os demais termos de (10.27).

Apêndice D

Quebra de simetria em duas dimensões ?

Deve-se tomar um certo cuidado ao falar-se em quebra de simetria em duas dimensões, já que nesta situação não é possível a formação de um boson de Goldstone, conforme teorema demonstrado por Coleman⁽⁷⁸⁾.

Neste apêndice não iremos discutir os problemas que ocorrem em duas dimensões, queremos apenas ressaltar que os aspectos da quebra e restauração de simetrias em duas dimensões ainda não estão completamente entendidos e sem dúvida a discussão ingênua da secção 17. está aquém e muito do que se tem feito atualmente, tanto no modelo de Gross-Neveu como em modelos bidimensionais em geral.

Uma discussão sobre a validade do potencial efetivo e a expansão $1/N$ em modelos bidimensionais foi realizada por Witten⁽⁷⁹⁾. De modo geral o estudo das fases em duas dimensões é realizado à la Kosterlitz e Thouless⁽⁸⁰⁾ examinando a função de correlação a grandes distâncias.

Existem muitos trabalhos recentes sobre a termodinâmica de modelos bidimensionais, entre os quais podemos citar os de Love⁽⁸¹⁾ Takada e Misawa⁽⁸²⁾ e Dittrich e Englert⁽⁸³⁾.

Com relação ao modelo de Gross-Neveu que foi discutido na secção 17. é interessante ressaltar o trabalho de Davis e Kasdan⁽⁸⁴⁾, onde a existência de estados "intermediários", é sugerida como responsável pela evasão ao teorema de Coleman.

Agradecimentos

Aos Drs. Ruben Aldrovandi, Ariovaldo Ferraz de Camargo e Bruto M. Pimentel Escobar, pelas discussões e paciente leitura da monografia.

Aos Drs. Carlos O. Escobar, Gil C. Marques e Ronald C. Shellard pelas discussões a respeito de muitos dos tópicos aqui apresentados e de assuntos correlatos.

A Comissão de Pós-Graduação do Instituto de Física Teórica pela oportunidade da elaboração deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

- (1) E.S.Abers e B.W.Lee, Phys.Rep.9C(1973)1.
- (2) J.C.Pati e A.Salam, Phys. Rev. D8(1973)1240
H.Georgi e S.L.Glashow, Phys.Rev.Lett. 32(1975)438
H.Fritsch e P.Minkowski, Ann.Phys.N.Y. 93(1975)193.
- (3) P.W.Higgs, Phys.Lett, 12(1964)132
F.Englert e R.Brout, Phys.Rev.Lett. 13(1964)321
G.Guralnik, C.Hagen e T.Kibble, Phys.Rev.Lett. 13(1964)585
P.W.Higgs, Phys.Rev. 145(1966)1156
T.Kibble Phys.Rev.155(1967)1554.
- (4) L.D.Landau, Phys.Zurm.Soviet Union 11(1937)26,545.
- (5) D.A.Kirzhnits e A.D.Linde, Phys.Lett. 42B(1972)471.
D.A.Kirzhnits, Zh.Eksp.Teor.Fiz.Pis.Red. 15(1972)745
(JETP Lett. 15(1972)529).
- (6) C.Itzykson e J.B.Zuber, "Quantum field Theory" MacGraw-Hill
(1980).
- (7) J.C.Taylor, "Gauge Theories of Weak Interactions" Cambridge
University Press (1974).
- (8) A.D.Linde, Rep.Prog.Phys. 42(1979)389.
- (9) Y.Nambu e G.Jona-Lasinio, Phys.Rev.122(1961)345.
- (10) J.Goldstone, Nuovo Cimento, 19(1961)154
- (11) J.Goldstone, A.Salam e S.Weinberg, Phys.Rev. 127(1962)965
D.Kastler, D.W.Robinson e J.A.Swieca, Comm. Math.Phys.
2(1966)108.
- (12) S.Coleman, "Properties of the Fundamental Interactions" Pro-
ceedings of the 1971 International Summer School "Ettore Ma-
jorana". ed.A.Zichichi.
- (13) S.Weinberg, Phys.Rev. D7(1973)1068.
- (14) S.Weinberg, Phys.Rev. Lett. 19(1967)1264
A.Salam, "Elementary Particle Theory" ed. N.Svartholm, Esto-
colmo (1969).

- (15) L.F.Li, Phys. Rev. D9(1974)1723
- (16) F.Buccella, H.Ruegg e C.A.Savoy, Nucl.Phys. B169(1980)68
H.Ruegg, Phys.Rev. D22(1980)2040
- (17) F.Buccella, H.Ruegg e C.A.Savoy, preprint SLAC-PUB 2499(1980)
- (18) P.Langacker, "Grand Unified Theories and Proton Decay"
SLAC-PUB-2544(1980).
- (19) A.J.Buras, J.Ellis, M.K.Gaillard e D.V.Nanopoulos Nucl.Phys.
B135(1978)66.
- (20) M.Magg e Q.Shafi, Z.Physik C, Particles and Fields 4(1980)63
- (21) E.Gildener, Phys.Rev. D14(1976)1667; Phys. Lett. 92B(1980)111
A.A.Natale e R.C.Sheffield, preprint IFT P 06/81
- (22) J.Schwinger, Proc.Natl.Acad.Sci.US 37(1951)452
- (23) G.Jona-Lasinio, Nuovo Cimento, 34(1964)1790.
- (24) S.Coleman e E.Weinberg, Phys.Rev. D7(1973)1888
S.Weinberg, Phys.Rev. D7(1973)2887.
R.Jackiw, Phys.Rev. D9(1974)1686
L.Dolan e R.Jackiw, Phys.Rev. D9(1974)2904
J.Iliopoulos, C.Itzykson e A.Martin, Rev.of Mod.Phys. 47
(1975)165.
- (25) G.'tHooft e M.Veltman, "Diagrammar" em "Particle Interactions
at Very High Energies" Plenum Press (1973).
- (26) P.Cvitanovic, B.Lautrup e R.B.Pearson, Phys.Rev. D18(1978)1939
- (27) E.Gildener, Phys.Rev. D13(1976)1025
- (28) E.Gildener e S.Weinberg, Phys.Rev.D13(1976)3333
- (29) S.Weinberg, Phys.Rev.Lett. 36(1976)294
A.D.Linde, Zh.Eksp.Teor.Fis.Pis.Red. 23(1976)73, (JETP Lett.
23(1976)64).
- (30) G.Barbiellini et.al., preprint DESY 79/27
- (31) J.Ellis, M.K.Gaillard, A.Peterman e S.Sachrajda, Nucl.Phys.
B164(1980)253.
- (32) M.Kobayashi e K.Maskawa, Prog.Theor.Phys. 49(1973)652.

- (33) T.D.Lee, Phys.Rev.D8(1973)1226
- (34) H.Georgi e S.L.Glashow, Phys.Rev.Lett. 28(1972)1494
- (35) T.D.Lee, Phys.Rep. 9C(1973)143
- (36) T.Matsubara, Prog.Theoret.Phys. 14(1955)351
- (37) A.A.Abrikosov, L.P.Gorkov e I.A.Dzyaloshinski, Sov.Phys.
JETP 9(1959)636.
E.S.Fradkin, Sov.Phys.JETP 9(1959)912
P.C.Martin e J.Schwinger, Phys.Rev. 115(1959)1342
- (38) A.L.Fetter e J.D.Walecka, "Quantum Theory of Many-Particle
Systems" MacGraw Hill (1971)
A.A.A. Abrikosov, L.P.Gorkov e I.E.Dzyaloshinski "Methods
of Quantum Field Theory in Statistical Physics" Dover Pub.
(1963).
- (39) C.W.Bernard, Phys.Rev. D9(1974)3312
- (40) S.Weinberg, Phys.Rev. D9(1974) 3357
- (41) H.Hato e T.Kugo, Phys.Rev. D21(1980)3333
- (42) L.Dolan e R.Jackiw, Phys.Rev. D9(1974)3321
- (43) S.Weinberg, Phys.Rev.Lett 37(1976)657
- (44) D.A.Kirzhnits e A.D.Linde, Ann. Phys.NY 101(1976)195.
- (45) J.Iliopoulos e N.Papanicolau, Nucl.Phys.B111(1976)209
- (46) R.N.Mohapatra e G.Senjanovic, Phys.Lett. 89B(1979)57
R.N.Mohapatra e G.Senjanovic, BNL preprint 26380(1979)
- (47) A.D.Linde, Phys.Lett. 99B(1981)391.
- (48) P.Ginsparg, Nucl.Phys. B170 [FS1] (1980)388.
- (49) K.G.Wilson e M.E.Fisher, Phys.Rev. Lett. 28(1972)240
K.G.Wilson e J.Kogut, Phys.Rep. 12C(1974)75
- (50) D.Gross e F.Wilczek, Phys.Rev.Lett. 26(1973)1343
H.D.Politzer, Phys.Rev.Lett. 26(1973)1346
D.Gross e F.Wilczek, Phys.Rev. D8(1973)3633
T.P.Cheng, E.Eichten e L.F.Li, Phys.Rev. D9(1974)2259
H.D.Politzer, Phys.Rep. 14C(1974)129

- (51) B.I.Halperin, T.C.Lubensky e S.K.Ma, Phys.Rev.Lett.32(1974) 292.
- (52) M.Daniel e C.E.Vayonakis, Nucl.Phys. B180 [FS2] (1981)301
M.Daniel, Phys. Lett. 98B(1981)371
- (53) R.N.Mohapatra e G.Senjanovic, Phys.Rev.D20(1979)3390
- (54) A.Salam e J.Strathdee, Nucl.Phys. B90(1975)203
- (55) E.Witten, Nucl.Phys. B177(1981)477
- (56) P.J.Steinhardt, Nucl.Phys. B179(1981)492
- (57) A.Billoire e K.Tamvakis, preprint CERN-TH 3019(1981)
- (58) G.P.Cook e K.T.Mahanthappa, COLORADO preprint 27(1980)
- (59) S.Coleman, Phys.Rev. D15(1977)2929 (este artigo contém as referências anteriores)
C.G.Callan e S.Coleman, Phys.Rev.D16(1977)1762
- (60) E.Brezin e G.Parisi, J.Stat.Phys. 19(1978)269
- (61) S.Coleman, "The uses of instantons" nas "Lectures at the International school of subnuclear physics, Ettore Majorana" (1977) ed.A.Zichichi.
- (62) Y.B.Zeldovich e M.Y.Khlopov, Phys.Lett. 79B(1978)239
J.P.Preskill, Phys.Rev.Lett. 43(1979)1365.
- (63) F.A.Bais e E.S.Rudaz, Nucl.Phys. B170(1980) [FS1] 507
- (64) P.Lancacker e Pi, Phys.Rev.Lett. 45(1980)1.
- (65) A.H.Guth e S-H.H.Tye, Phys.Rev.Lett. 44(1980)631
- (66) T.W.B.Kibble, J.Phys.A.; Math.Gen. 9(1976)1387
- (67) K.Sato, Phys.Lett. 99B(1981)66
K.Sato e Einhorn, Nordita preprint 1981 (monopole production in the very early Universe)
- (68) S.A.Bludeman e M.Ruderman, Phys.Rev.Lett. 38(1977)255.
A.D.Linde, Phys.Lett. 92B(1980)119
M.A.Sher, Univ.Cal. Santa Cruz preprint (1980)
- (69) R.N.Mohapatra, Phys.Rev.D22(1980)2380
- (70) R.Jackiw e K.Johnson, Phys.Rev.D8(1973)2386
J.M.Cornwall e R.E.Norton, Phys.Rev. D8(1973)3338

- (71) L.N.Cooper, Phys.Rev. 104(1956)1189
J.Bardeen, L.N.Cooper e J.R.Schrieffer, Phys.Rev. 108(1957)
1125
- (72) S.Weinberg, Phys.Rev.D13(1976)974, D19(1979)1277
L.Susskind, Phys.Rev. D20(1979)2619
K.D.Lane e M.E.Peskin, Moriond Lectures, Nordita preprint
80/33(1980).
- (73) K.G.Wilson, Phys.Rev. D10(1974)2445
- (74) D.J.Gross e A.Neveu, Phys.Rev.D10(1974)3235
- (75) L.Jacobs, Phys.Rev. D10(1974)3956
B.J.Harrington e A.Yildiz, Phys.Rev. D11(1975)779
R.Dashen, Sh-K.Ma e R.Rajaraman, Phys.Rev. D11(1975)1499
- (76) S.T.Love, "Effects of Finite Temperature on a Dynamically
Broken Symmetry in an asymptotically Free Theory" Purdue
University preprint (1981)
- (77) B.W.Lee, "Methods in Field Theory" (Proceedings of the Les
Houches Summer School 1975) North Holland (1976)
G.Costa e M.Tonin, Revista del Nuovo Cimento 5(1975)29
- (78) S.Coleman, Comm.Math.Phys. 31(1973)259
- (79) E.Witten, Nucl.Phys. B115(1976)111
- (80) J.N.Kosterlitz e D.J.Thouless, J.Phys. C6(1973)1181
- (81) S.T.Love, Phys.Rev. D23(1981)420
- (82) S.Takada e S.Misawa, Prog.Theor.Phys.66(1981)101
- (83) W.Dittrich e B.-G.Englert, Nucl.Phys. B17a(1981)185
- (84) A.C.Davis e S.H.Kasdan, Phys.Lett. 100B(1981)145