

348310066

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

И Ф В Э 82-196
ОМВТ

Б.С.Волков, П.А.Калинченко, А.А.Майоров
А.В.Самофлов

ЗАМЕЧАНИЯ ОБ АВТОМАТИЗАЦИИ
МАГНИТНО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

2. Применение отклоняющих магнитов
для настройки и контроля оптики пучков

Серпухов 1982

Б.С.Волков, П.А.Калинченко, А.А.Майоров
А.В.Самофлов

**ЗАМЕЧАНИЯ ОБ АВТОМАТИЗАЦИИ
МАГНИТНО-ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**2. Применение отклоняющих магнитов
для настройки и контроля оптики пучков**

Аннотация

Волков Б.С., Калинин П.А., Майоров А.А., Самойлов А.В.

Замечания об автоматизации магнитно-оптических систем. 2. Применение отклоняющих магнитов для настройки и контроля оптики пучков. Серпухов, 1982.

14 стр. с рис. (ИФВЭ ОМВТ 82-196).

Библиогр. 6.

В работе рассмотрен метод настройки и контроля магнитно-оптических систем, на основе измерения центра тяжести пучка. Проведен анализ требований к геометрии размещения используемых детекторов. Приводится ряд характерных примеров. Результаты получены в рамках теории первого порядка.

Abstract

Volkov B.S., Kalinchenko P.A., Mayorov A.A., Samoilov A.V

Remarks on Magnetic-Optical System Automatization. 2. Application of Bending Magnets for Beam Optics Correction and Control. Serpuikhov, 1982.

p. 14. (ИФВЭ 82-196).

Refs. 6.

The method of magnetic-optical system control and correction based on detection of beam centre of gravity, is discussed. The requirements imposed on the detectors and their location in the beam transport system are treated. Some examples are given. All the results have been derived in the framework of the first order theory.

К настоящему времени известны и находят определенное применение различные способы получения требуемой фокусировки пучка в системах, состоящих из того или иного набора квадрупольных линз^{/1/}. В развитие соображений, изложенных в работах^{/2/}, ниже будут обсуждены возможности, возникающие при использовании для проведения необходимых фазовых преобразований отклоняющих магнитов.

1. ОБЩИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ

Предположим, что нам дана некая оптическая система, требуемое состояние которой для частиц с импульсом $p = p_0$ получено расчетно и описывается матрицей Q :

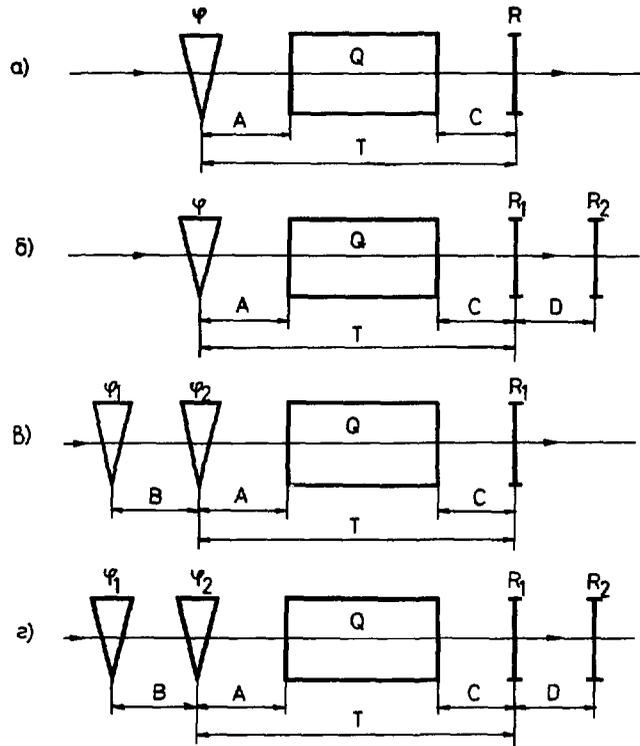
$$Q = \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}; \quad H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}; \quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В дальнейшем, если не будет необходима спецификация H - или V -движения по отдельности, состояние системы будем обозначать матрицей:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}.$$

При выбранном $p = p_0$ матричные элементы Q_{ik} являются функциями градиентов квадрупольных линз, их эффективных длин и геометрии размещения линз. В процессе расчета (проектирования) матриц (1) проводится та или иная вариация упомянутых параметров. Будучи расставленной в полученной геометрии и включенной в расчетный режим $G_i = G_{i0}$ ($i = 1, 2, \dots, n$ — количество квадрупольных линз), система по ряду технических ограничений (конечная точность магнитных и калибровочных измерений, электро-механические допуски и т.п.) реализует, вообще говоря, некую иную матрицу $Q^* \neq Q$, что отражается на пространственных и угловых размерах пучка, а также его импульсном составе (если необходимо проводить импульсный анализ). Требуется определить алгоритм и аппаратуру для перевода системы из состояния Q^* в состояние Q за конечное количество итераций. В отличие от задачи проектирования эта задача (настройка) связана лишь с вариацией градиентов квадрупольных линз (так как тип квадрупольных линз выбран и они уже расставлены в расчетной геометрии).

Известно, что когда система описывается линейными дифференциальными уравнениями второго порядка, то ее общее решение является суперпозицией двух независимых частных решений. Будем получать эти частные решения при помощи либо имеющихся в системе отклоняющих магнитов, либо при помощи специально введенных. Рассмотрим несколько случаев.



1. Один магнит, один детектор (рис. 1а)

На этом рисунке: Q - система, которую необходимо настроить; ϕ - настроенный магнит; R - детектор, позволяющий определить координату центра тяжести пучка с некоторой погрешностью ΔR ; A - матрица, описывающая оптику от центра поворота пучка в магните ϕ до начала настраиваемой системы Q ; C - матрица от конца Q до детектора R ; A и C предполагаются известными; T - кумулятивная матрица, описывающая оптику от центра поворота пучка в магните ϕ до детектора R , равная

$$T = CQA. \quad (2)$$

Матричные элементы Q_{ik} связаны с матричными элементами T_{ik} следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & C_{11} & A_{21} & C_{11} & A_{11} & C_{12} & A_{21} & C_{12} \\ A_{12} & C_{11} & A_{22} & C_{11} & A_{12} & C_{12} & A_{22} & C_{12} \\ A_{11} & C_{21} & A_{21} & C_{21} & A_{11} & C_{22} & A_{21} & C_{22} \\ A_{12} & C_{21} & A_{22} & C_{21} & A_{12} & C_{22} & A_{22} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{21} \\ Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{21} \\ T_{22} \end{bmatrix} \quad (3)$$

или $\vec{S}\vec{Q} = \vec{T}$; $\text{DETS} = 1$.

Если $A = \begin{bmatrix} 1 & A \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $C = \begin{bmatrix} 1 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ - свободные промежутки соответствующей длины, то

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & C & 0 \\ A & 1 & AC & C \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Когда

$$A = C = 0, \quad (5)$$

то $S = I$ (I - единичная матрица) и

$$\vec{Q} = \vec{T}. \quad (6)$$

На практике в общем случае из условий (5) может быть выполнено лишь условие $C = 0$. Тогда

$$S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{11} & A_{21} \\ 0 & 0 & A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

При выключенном магните центр тяжести пучка находится в положении R_0 . Если отклонить весь пучок на некоторый угол ϕ , то он займет положение R :

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{12} \cdot \phi \\ T_{22} \cdot \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ \phi_1 \end{bmatrix},$$

откуда

$$\frac{\partial R}{\partial \phi} = T_{12} = \gamma. \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует, что при некоторых требованиях на оптику A ($A_{21} = 0$ и $A_{11} \neq 0$) один магнит и один детектор позволяют найти один элемент матрицы Q :

$$Q_{12} = \frac{T_{12}}{A_{11}}.$$

2. Один магнит, 2 детектора (рис. 16)

На этом рисунке все обозначения те же, что и на рис. 1а, кроме D -матрицы, описывающей оптику между детекторами R_1 и R_2 и предполагаемой известной.

Соответствующие кумулятивные матрицы равны

$$\begin{aligned} K(\bar{1}) &= T, \\ K(\bar{2}) &= DT. \end{aligned} \quad (9)$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_1}{\partial \phi} &= T_{12} = \gamma_1, \\ \frac{\partial R_2}{\partial \phi} &= (DT)_{12} = \gamma_2 \end{aligned} \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} T_{12} &= Y_1, \\ T_{22} &= \frac{1}{D_{12}}(y_2 - y_1). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) следует, что оптика между R_1 и R_2 должна быть такова, чтобы $D_{12} \neq 0$.

Так же, как и в предыдущем случае, если $C = I$ и $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, получаем

$$Q_{12} = \frac{T_{12}}{A_{11}} = \frac{y_1}{A_{11}}; \quad Q_{22} = \frac{T_{22}}{A_{11} D_{12}} = \frac{1}{A_{11} D_{12}}(y_2 - y_1). \quad (12)$$

То есть использование одного магнита и любого ($n \geq 2$) количества детекторов позволяет при некоторых требованиях на оптику A и C определить элементы Q_{12} и Q_{22} матрицы Q .

3. 2 магнита, 1 детектор (рис. 1в)

На этом рисунке все обозначения – те же, что и на рис. 1а, б, кроме B -матрицы, описывающей оптику между центрами поворота пучка в магнитах ϕ_1 и ϕ_2 ; B предполагается известной.

Соответствующие кумулятивные матрицы равны

$$\begin{aligned} K(1, \bar{1}) &= TB, \\ K(2, \bar{1}) &= T \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \phi_1} = (TB)_{12} = T_{11} B_{12} + T_{12} B_{22} = y_{11},$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \phi_2} = T_{12} = y_{12}. \quad (14)$$

В индексах $\{y_{ik}\}$ первый индекс – номер детектора, второй индекс – номер магнита в порядке его расположения вдоль по пучку. Из (7) следует, что, если $A_{11} \neq 0$ и $A_{21} = 0$, то мы можем, используя (14), определить элементы Q_{11} и Q_{12} матрицы Q . То есть использование одного детектора и любого ($m \geq 2$) количества магнитов позволяет при некоторых требованиях к оптике A и C определить элементы Q_{11} и Q_{12} матрицы Q .

Решение полной оптической задачи, т.е. независимое определение всех четырех элементов матрицы Q требует, как минимум, двух настроечных магнитов и двух детекторов (рис. 1г). Проанализируем подробнее этот случай. Соответствующие кумулятивные матрицы равны

$$\begin{aligned} K(1, \bar{1}) &= CQAB = TB, \\ K(2, \bar{1}) &= CQA = T, \\ K(1, \bar{2}) &= DCQAB = DTB, \\ K(2, \bar{2}) &= DCQA = DT. \end{aligned} \quad (15)$$

Определение соответствующих частных производных дает нам следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial \phi_1} = (TB)_{12} = \gamma_{11} \\ \frac{\partial R_1}{\partial \phi_2} = T_{12} = \gamma_{12} \\ \frac{\partial R_2}{\partial \phi_1} = (DTB)_{12} = \gamma_{21} \\ \frac{\partial R_2}{\partial \phi_2} = (DT)_{12} = \gamma_{22} \end{cases} \quad (16)$$

или

$$U \vec{T} = \vec{\gamma}, \quad (17)$$

где

$$U = \begin{bmatrix} B_{12} & B_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ B_{12} D_{11} & B_{22} D_{11} & B_{12} D_{12} & B_{22} D_{12} \\ 0 & D_{11} & 0 & D_{12} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Здесь B_{ik} и D_{ik} — соответствующие элементы матриц B и D . Система (17) имеет решение, когда $\det U = B_{12}^2 D_{12}^2 \neq 0$. Из (17) также следует вывод

$$T_{11} T_{12} - T_{12} T_{21} = \frac{\gamma_{11} \gamma_{22} - \gamma_{12} \gamma_{21}}{B_{12} D_{12}} = 1. \quad (19)$$

Соотношение (19) означает, что перед тем как приступить к настройке оптики, нужно убедиться, что показания любой пары детекторов, участвующих в измерениях, удовлетворяют (19) с необходимой точностью.

Если квадрупольных линз между магнитами и детекторами нет, то $B = \begin{bmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 1 & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, где B и D — соответствующие расстояния. Тогда матрица U упрощается:

$$U = \begin{bmatrix} B & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 1 & BD & D \\ 0 & 1 & 1 & D \end{bmatrix}. \quad (20)$$

*) Строго говоря, матрица B в такой записи может быть представлена лишь приближенно, так как эквивалентная матрица магнита, приведенная к центру поворота, имеет вид^{2/}:

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \phi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где ϕ — угол поворота;

$$\gamma = \begin{vmatrix} \frac{1}{\phi}(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}) & (a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})/\phi & 0 \\ \phi a_{21}/a_{23} & \phi a_{22}/a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\beta = \begin{vmatrix} \phi/a_{23} & a_{13}/\phi & 0 \\ 0 & a_{23}/\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Используя (3) и (17), получаем основное уравнение для определения элементов матрицы Q :

$$US\vec{Q} = \vec{y} + \Delta\vec{y}. \quad (21)$$

Здесь

$$\vec{Q} = [Q_{11}, Q_{12}, Q_{21}, Q_{22}]^T; \quad \vec{y} = [y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}]^T;$$

$$\Delta\vec{y} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]^T = \left[\frac{\Delta R_1}{\phi_1}, \frac{\Delta R_1}{\phi_2}, \frac{\Delta R_2}{\phi_1}, \frac{\Delta R_2}{\phi_2} \right]^T;$$

$\{\Delta R_i\}$ - точность, с которой i -ый детектор измеряет координату центра тяжести пучка.

Из (21) имеем

$$\vec{Q} = S^{-1}U^{-1}\vec{y} \quad (22)$$

при дисперсиях матричных элементов

$$D(Q_{ik}) = M_{ii}^{-1}; \quad (23)$$

M_{ii}^{-1} - диагональный элемент матрицы, обратной матрице

$$M = S^T U^T \sigma^{-2} U S; \quad (24)$$

матрица $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Если все $\sigma_i = \sigma$, то (24) можно переписать в виде

$$M = \sigma^{-2} S^T U^T U S. \quad (25)$$

В простейшем случае, когда $S=I$ и U дается соотношением (20), из (25) получаем

$$M = \sigma^{-2} \begin{vmatrix} 2B^2 & 2B & B^2D & BD \\ 2B & 4 & BD & 2D \\ B^2D & BD & B^2D^2 & BD^2 \\ BD & 2D & BD^2 & 2D^2 \end{vmatrix}; \quad M^{-1} = \sigma^2 \begin{vmatrix} 2/B^2 & -1/B & -2/B^2D & 1/BD \\ -1/B & 1 & 1/BD & -1/D \\ -2/B^2D & 1/BD & 4/B^2D^2 & -2/BD^2 \\ 1/BD & -1/D & -2/BD^2 & 2/D^2 \end{vmatrix} \quad (26)$$

Матрица (25) устойчива, так как все факторы корреляции $\chi_{11}^2 = M_{11}^{-1} M_{11}^{-1} = 4$ и

$$\sigma(Q_{11}) = \sqrt{2}\sigma/B; \quad \sigma(Q_{12}) = \sigma; \quad \sigma(Q_{21}) = 2\sigma/BD; \quad \sigma(Q_{22}) = \sqrt{2}\sigma/B$$

(численный пример: $B=D=5$ м; $\Delta R_1 = \Delta R = \pm 0,1$ мм; $\phi = 5$ мрад).

$$\sigma(Q_{11}) = \pm 0,0056; \quad \sigma(Q_{21}) = \pm 0,02 \text{ м}; \quad \sigma(Q_{21}) = \pm 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1};$$

$$\sigma(Q_{22}) = \pm 0,0056.$$

Для уменьшения дисперсий необходимо стремиться к как можно большим значениям матричных элементов B_{12} и D_{12} , размещать детекторы так, чтобы один из них был бы в конце настраиваемой системы Q (матрица $S=I$), а также привлекать, если обстоятельства позволяют, большее количество детекторов и магнитов для получения системы уравнений (16). В этом случае матрица U из квадратной превратится в прямоугольную с количеством строк > 4 , и системы (17) и (21) необходимо будет решать методом наименьших квадратов (МНК). В заключение этого раздела следует отметить, что из справедливости (19) вытекает справедливость

$$Q_{11}^* Q_{22}^* - Q_{12}^* Q_{21}^* = 1, \quad (27)$$

где $\{Q_{ik}^*\}$ - значения матричных элементов $\{Q_{ik}\}$, полученные из решения (22). Точность, с которой выполняется (27), зависит от дисперсий $D(Q_{ik})$.

2. АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ПОПРАВОК К ГРАДИЕНТАМ КВАДРУПОЛЕЙ

Методика, описанная в предыдущем разделе, позволяет определить реализовавшуюся кумулятивную матрицу системы Q в H - и V -плоскостях независимо. В общем случае, как уже говорилось, $H^* \neq H$, $V^* \neq V$, где H и V - требуемые фазовые преобразования в соответствующих плоскостях. Пользуясь МНК, можно найти те значения градиентов G_i^* и их дисперсий, которые ответственны за реализацию матриц H^* и V^* . Для этого нужно минимизировать функционал

$$\chi^2 = \chi_H^2 + \chi_V^2 = \sum W_H (H - H^*)^2 + \sum W_V (V - V^*)^2, \quad (28)$$

где весовые матрицы W_H и W_V недиагональны и даются выражением (24) для H - и V -плоскостей, соответственно; H^* , V^* - измеренные значения матричных элементов; H , V - их теоретическое представление. Элементы в χ_H^2 и χ_V^2 записываются в порядке, согласованном с матрицами W_H и W_V . Так как независимых матричных элементов в каждой плоскости только три, то минимизация (28) позволяет одновременно найти значения градиентов G_i^* лишь в тех системах, где количество квадруполей $n \leq 6$. Зная расчетные значения градиентов G_i , которые ответственны за реализацию требуемых матриц H и V , мы определяем искомые поправки:

$$\Delta \vec{G}_i = \vec{G}_p - \vec{G}^*. \quad (29)$$

Перевод системы Q из состояния H^*, V^* в состояние H, V осуществляется, таким образом, в одну итерацию.

Если настраиваемая система состоит из квадруполей, количество которых $n > 6$, то ее следует разделить на секции с количеством квадруполей в каждой ≤ 6 , ориентируясь на оптическую и практическую специфику системы. Важно также то обстоятельство, что, если настраиваемая секция содержит < 3 линз, то определение градиентов G_i^* может быть произведено по измерениям только в одной плоскости (минимизация либо χ_H^2 , либо χ_V^2 из (28)).

В некоторых случаях одноплоскостные измерения могут быть применены и к системам, состоящим из линз, количество которых $n > 3$. Рассмотрим, например, квартет. Его можно настроить по измерениям в одной плоскости, зафиксировав значение градиента в одной из линз (если есть основания полагать, что это значение правильно), либо разделить на две дублетные секции и настраивать каждый дублет отдельно и т.п. В том случае, когда что-нибудь подобное осуществить не удастся, необходимо привлекать информацию об измерениях в другой плоскости. Здесь также возможны различные решения: позволяет ли специфика оптической задачи ограничиться использованием одного магнита и одного детектора или требуется более расширенный набор, вплоть до полного.

Некоторые математические аспекты решения задачи (28) требуют, на наш взгляд, дополнительного обсуждения прежде всего с точки зрения корректности этой задачи, т.е. удовлетворение этой задачей следующих условий:

1. решение (28) существует - неизвестный нам набор градиентов G_i^* реализовал измеренные нами матрицы H и V^* ;
2. решение единственно - решение может быть не единственным ввиду нелинейности задачи (28);
3. решение устойчиво - численное исследование многочисленных оптических схем показывает, что решение задачи (28) не всегда устойчиво (велики факторы корреляции). Преодолеть эту трудность можно методами, развитыми Тихоновым и др.^{4/}.

Уменьшить роль нелинейностей, кратных корней и неустойчивости позволяет также следующий технический прием. Представим матрицу Q , аналитически описывающую нашу систему, в виде произведения двух матриц.

$$Q = \mu \nu, \quad (30)$$

Тогда матричное уравнение $Q = Q^*$ может быть переписано в следующих формах:

$$\mu = Q^* \nu^{-1}, \quad (31)$$

$$\nu = \mu^{-1} Q^*. \quad (32)$$

При такой переформулировке функционал (28) преобразуется в

$$\chi_1^2 = \sum \tilde{W}_1 (\mu - Q^* \nu^{-1})^2, \quad (33)$$

$$\chi_2^2 = \sum \tilde{W}_2 (\nu - \mu^{-1} Q^*)^2, \quad (34)$$

$$\text{где } \tilde{W}_1 = \tilde{\nu}^T W \tilde{\nu}; \quad \tilde{W}_2 = \tilde{\mu}^2 W \tilde{\mu}; \quad (35)$$

$$\tilde{\nu} = \begin{vmatrix} \nu_{11} & \nu_{21} & 0 & 0 \\ \nu_{12} & \nu_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{11} & \nu_{12} \\ 0 & 0 & \nu_{21} & \nu_{22} \end{vmatrix}; \quad \tilde{\mu} = \begin{vmatrix} \mu_{11} & 0 & \mu_{12} & 0 \\ 0 & \mu_{11} & 0 & \mu_{12} \\ \mu_{21} & 0 & \mu_{22} & 0 \\ 0 & \mu_{21} & 0 & \mu_{22} \end{vmatrix}, \quad (36)$$

где W берется, в соответствии с плоскостью, из (24), а $\det \tilde{\nu} = \det \tilde{\mu} = 1$. Для минимизации χ^2 нужно выбрать то из соотношений (33) и (34), где факторы корреляции меньше. То обстоятельство, что весовые матрицы W являются функциями искомым градиентов $\{G_i\}$ влияет лишь на дисперсии оценок $\{G_i^*\}$ и не влияет на их абсолютные значения. Поэтому минимизацию (33) и (34) можно вести при $W = \bar{W}$, а точное значение W вычислять лишь в точке, где $\chi^2 = \chi_{\min}^2$, т.е. при $\bar{G}_p = \bar{G}^*$.

Преимущество минимизации χ^2 по соотношениям (33) или (34) особенно наглядно иллюстрируется тонколинзовым анализом задачи (28). Рассмотрим, например, дублет

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L_k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L_H \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* \\ Q_{21}^* & Q_{22}^* \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Для случая (28) решаемые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
1 + q_1(L_{12} + L_k) + q_2 L_k + q_1 q_2 L_k L_{12} &= Q_{11}^*, \\
L_H + L_k + L_{12} + q_1 L_H(L_{12} + L_k) + q_2 L_k(L_{12} + L_H) + q_1 q_2 L_H L_k L_{12} + Q_{12}^*, \\
q_1 + q_2 + q_1 q_2 L_{12} &= Q_{21}^*, \\
1 + q_1 L_H + q_2(L_{12} + L_H) + q_1 q_2 L_H L_{12} &= Q_{22}^*.
\end{aligned} \tag{38}$$

Система (38), возникающая из матричного уравнения (37), - нелинейная, по q_1 и q_2 ее матрица производных Λ зависит от искомым величин q_1 и q_2 и имеет вид

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{12} + L_k + q_2 L_k L_{12} & L_k(1 + q_1 L_{12}) \\ L_H(L_{12} + L_k) + q_2 L_H L_k L_{12} & L_k(L_{12} + L_H) + q_1 L_H L_k L_{12} \\ 1 + q_2 L_{12} & 1 + q_1 L_{12} \\ L_H(1 + q_2 L_{12}) & L_{12} + L_H + q_1 L_H L_{12} \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Представим Q в виде (30), "разделим" дублет, например, пополам (центр L_{12}) и напомним уравнения для $\mu = Q^* \nu^{-1}$. Решаемая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}
1 + L_k q_2 &= Q_{11}^*(1 + q_1 L_H) - Q_{12}^*, \\
L_{12}/2 + L_k + q_2 L_k L_{12}/2 &= -Q_{11}^*(L_H + L_{12}/2 + q_1 L_H L_{12}/2) + Q_{12}^*(1 + q_1 L_{12}/2), \\
q_2 &= Q_{21}^*(1 + q_1 L_H) - Q_{22}^* q_1, \\
1 + q_2 L_{12}/2 &= -Q_{21}^*(L_H + L_{12}/2 + q_1 L_H L_{12}/2) + Q_{22}^*(1 + q_1 L_{12}/2).
\end{aligned} \tag{40}$$

Система (40) - линейная по q_1 и q_2 ; ее матрица производных Λ не зависит от искомым величин q_1 и q_2 :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{12}^* - Q_{11}^* L_H & L_k \\ Q_{11}^* L_H L_{12}/2 - Q_{12}^* L_{12}/2 & L_k L_{12}/2 \\ Q_{22}^* - Q_{21}^* L_H & 1 \\ L_{12}(Q_{21}^* L_H - Q_{22}^*)/2 & L_{12}/2 \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Изложенный метод "разделения" матрицы Q на две части может быть полезным и в задачах проектирования в том случае, если нам а priori известны все матричные элементы искомой оптической системы. Правда, здесь всплывает вопрос о существовании решения: не все фазовые преобразования могут быть реализованы данным набором квадруполей (см., например^{/5/}). Следует также отметить, что наиболее популярная программа TRANSPORT^{/6/} пока не приспособлена к решению задач типа (33) или (34).

3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Обсужденный в разделе 2 алгоритм проходит в том и только том случае, если выполняется соотношение (19).

Рассмотрим причины, по которым это соотношение может не выполняться. Производная $\partial R/\partial \phi$ в терминах показаний цифровых вольтметров $N_R = \eta R$ и $N_\phi = \xi \phi$ (N_R - показание ЦВ, производящего обработку показаний детекторов; N_ϕ - показание ЦВ, производящего обработку показаний приборов, меряющих поле в настроенных магнитах) имеют вид

$$\frac{\partial N_R}{\partial N_\phi} = \eta \frac{\partial R}{\partial N_\phi} = \eta \cdot \xi \frac{\partial R}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial B} \cdot \frac{\partial B}{\partial I} \cdot \frac{\partial I}{\partial N_\phi} = \frac{\eta}{\delta} k_{12}; \quad k_{12} = y_{1k}, \quad (42)$$

где k_{12} - соответствующий элемент одной из кумулятивных матриц (15), η и δ отражают точность всей калибровочной цепочки между истинными величинами y_{ik} и их измеренными значениями $y_{ik}^* = (\eta_i / \delta_k) y_{ik}$, вообще говоря $\eta_i / \delta_k \neq 1$. В тех случаях, когда нет возможности определить η_i и δ_k из калибровочных измерений, их можно найти из измерений непосредственно на пучке, используя те магниты и те детекторы, которые участвуют в настройке оптики. Экспериментально, например, получено

$$\frac{y_{11}^* y_{22}^* - y_{12}^* y_{21}^*}{B_{12} D_{12}} = \xi \neq 1 \quad (43)$$

и отличие ξ от 1 значимо.

Величину (43) можно переписать через истинные величины y_{ik} следующим образом:

$$\frac{(\frac{\eta_1}{\delta_1} y_{11}) (\frac{\eta_2}{\delta_2} y_{22}) - (\frac{\eta_1}{\delta_2} y_{12}) (\frac{\eta_2}{\delta_1} y_{21})}{B_{12} D_{12}} = \frac{\eta_1 \eta_2}{\delta_1 \delta_2} \frac{(y_{11} y_{22} - y_{12} y_{21})}{B_{12} D_{12}}. \quad (44)$$

Если кумулятивные матрицы K из системы уравнений (15) нам известны (например, свободные промежутки заданной длины $L(k, \bar{i})$), то из равенств

$$\begin{aligned} K_{12}(1, \bar{1}) &= y'_{11} = \frac{\eta_1}{\delta_1} y_{11} = \frac{\eta_1}{\delta_1} L(1, \bar{1}), \\ K_{12}(2, \bar{1}) &= y'_{12} = \frac{\eta_1}{\delta_2} y_{12} = \frac{\eta_1}{\delta_2} L(2, \bar{1}), \\ K_{12}(1, \bar{2}) &= y'_{21} = \frac{\eta_2}{\delta_1} y_{21} = \frac{\eta_2}{\delta_1} L(1, \bar{2}), \\ K_{12}(2, \bar{2}) &= y'_{22} = \frac{\eta_2}{\delta_2} y_{22} = \frac{\eta_2}{\delta_2} L(2, \bar{2}) \end{aligned} \quad (45)$$

можно определить все четыре неизвестных коэффициента η_i и δ_k именно в тех комбинациях, в которых они входят в (44), и, зная эти комбинации, определить истинные значения производных y_{ik} :

$$y_{ik} = y_{ik}^* \frac{L(k, i)}{y'_{ik}}. \quad (46)$$

2. Утверждение раздела 2, что алгоритм нахождения $\vec{G} = \vec{G}^* - \Delta \vec{G}$ сходится в одну итерацию, справедливо лишь в случае следующего соотношения между истинным значением градиента \vec{G}^* и его приборным представлением $\vec{G}_{\text{приб}}$:

$$\vec{G}^* = k_1 \vec{G}_{\text{приб}}; \quad k = \text{const} \quad \text{и неизвестно.} \quad (47)$$

Построим итерационный процесс нахождения \vec{G}_1^* через показания "приб." следующим образом:

$$G_{\text{приб.}_{i+1}} = G_{\text{приб.}_i} G_p / G_i^* = G_{\text{приб.}_i} \cdot l_i. \quad (48)$$

Пусть в (47) $K = 2000$; $G_{\text{приб}} = 1$; $G_p = 1000$.

Из табл. 1 виден ход итераций

Таблица 1

№ итерации	$G_{\text{приб}}$	G^*	$l = \frac{G_p}{G^*}$
0	1	2000	0,5
1	0,5	1000	1
2	0,5	1000	1

Пусть вместо соотношения (47) приборная функция имеет вид

$$G^* = k G_{\text{приб}} F(G_{\text{приб}}) = k \Phi(G_{\text{приб}}), \quad (49)$$

т. е. нелинейна. Если соответствие (49) однозначно, то итерационный процесс (48) также будет сходящимся.

Таблица 2 иллюстрирует ход итераций для приборной функции

$$G^* = 1000 G_{\text{приб}} (1 + G_{\text{приб}}); \quad G_p = 1000.$$

Таблица 2

№ итерации	$G_{\text{приб}}$	G^*	$l = G_p / G^*$
0	1	2000	6/2
1	1/2	750	4/3
2	2/3	1111	9/10
3	3/5	960	24/25

и т. д.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанная методика настройки оптики пучков может быть применена во всех тех случаях, где есть некоторый запас по апертурам. Ее чувствительность объясняется тем, что центр поворота пучка в магните — принципиально точечный объект. Полезными достоинствами этой методики является нетребовательность к калибровочным и градуировочным измерениям; кроме того, определение координаты центра поворота пучка в настроечном магните может быть проведено неконтактными детекторами, что особенно важно в тех условиях, когда введение вещества в пучок недопустимо по радиационным и прочим условиям. Также следует добавить, что зачастую функции настроечных магнитов могут выполнять магниты и детекторы, используемые для коррекции направления пучка.

ЛИТЕРАТУРА

1. P.Lazeyras CERN Rep. Int/D. Ph. II/Beam 67-2, 1967; Nucl. Justr., 1975, 126, 1; 1970, 87, 221.
2. Б.С.Волков и др. Препринт ИФВЭ 78-108, Серпухов, 1978; препринт ИФВЭ 79-102, Серпухов, 1979.
3. А.А.Майоров и др. Препринт ИФВЭ 82-143, Серпухов, 1982.
4. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1979.
5. E.Regenstreif. CERN, 67-6, 1967.
6. K.L.Brown et al., CERN 73-16, 1973.

Рукопись поступила в издательскую группу
20 сентября 1982 года.



Цена 16 коп.

Индекс 3624

Б.С.Волков и др.

Замечания об автоматизации магнитно-оптических систем. 2. Применение отклоняющих магнитов для настройки и контроля оптики пучков.

Редактор Н.П.Ярба. Технический редактор Л.П.Тимкина.
Корректор Т.Д.Галкина.

Подписано к печати 26.11.82. Т-22304. Формат 70х100/16.
Офсетная печать. Индекс 3624. Цена 16 коп.
Заказ 2225. 1,07 уч.-изд.л. Тираж 230.

Институт физики высоких энергий, 142284, Серпухов,
Московской обл.