

At 8300663

INIS-mf--8959

BOLTZMANN - STOSSTERM UND ENERGIE-
ÜBERTRAGUNG IM STATIONÄREN ZWEIKOMPONENTENPLASMA

DISSERTATION

Zur Erlangung des akademischen Grades
"Doktor der Technischen Wissenschaften"

vorgelegt von

[Lathias]
Johann M. Riedler

Graz, Februar 1982

Diese Arbeit wurde am Institut für Theoretische Physik
an der Technischen Universität in Graz unter der Leitung
von Herrn Professor Dr. E. Ledinegg durchgeführt.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. E. Ledinegg
danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, Herrn Doz.
Dr. Heindler und Herrn Dr. Schürer für viele Ratschlä-
ge und Hinweise. Herrn Dr. Zlöbl danke ich für die Durch-
sicht des Manuskripts.

Der Rektorenkonferenz, die die Mittel zum Druck dieser
Arbeit zur Verfügung gestellt hat, sage ich hiermit
herzlichen Dank.

Ich erkläre hiermit an Eides statt, daß ich die vorliegen-
de Arbeit selbständig durchgeführt habe.

Graz, 17. Februar 1982

Hans Riedler

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG	1
Analytisches Konzept	5
Verlustmechanismen (Teilchenverluste, Strahlungsverluste)	5
Das analytische Konzept	7
Warum Boltzmann - Gleichung?	12
Problemanalyse	12
Fernwechselwirkungen	14
Skizze einer quantenmechanischen Ableitung des Streuquerschnittes	17
TEIL I	23
Inhomogene Boltzmann - Gleichung im Impulsraum	23
Die Stufenfunktionen A und B	28
Erweiterung auf inelastische Streuung und Mehrkomponentensysteme	33
Näherungsverfahren	38
Linearisierung der inhomogenen Boltzmann-Gleichung	39
Reduktion auf ein Zweikomponentensystem	41
Vereinfachungen	44
Berechnung der Terme von Gleichung (35)	45
Phase I	46
Ableitung des Senkterms	48
Ableitung des Kerns	52
Berechnung der Terme von Gleichung (35)	
Phase II	55
A) Der Wirkungsquerschnitt	55
B) Verschiedene Ansätze für die Elektronen- und Ionenverteilungsfunktion	58
Weitere Lösungsvorschläge und Begründung der Ansätze der Ionenverteilung $f_1^{(0)}(p)$	61

Berechnung des Terms $\nu_{11}^r(p)$	65
Bemerkungen zum Teil I	69
TEIL II	73
Erste Näherung zur Berechnung der Teilchen- dichte und der mittleren Energie des Plasmas	73
Energieübertragungsrate zwischen Gasen verschiedener Temperaturen	75
Energieübertragung beim Einzelstoß	75
Energieübertragung bei gegebenen Impulsen und gegebener Stoßrate	77
Einschränkung auf den dominanten Term	92
Kommentar zur Ableitung der Energieübertragungsrate	99
Teilchenverlust	99
Ergebnisse	102
a) Vergleich der Energieübertragungsrate mit der Fusionsleistungsdichte	102
b) Parameterstudie	104
ANHANG A	106
ANHANG B	114
DIAGRAMME	118
LITERATURVERZEICHNIS	121
VERZEICHNIS DER VERWENDETEN ZEICHEN UND SYMBOLE	122

EINLEITUNG

Bis vor wenigen Jahren glaubte die überwiegende Mehrheit der Kernfusionsforscher, daß der gezündete Tokamak der für die spätere kommerzielle Nutzung der Kernfusionsenergie geeignete Reaktortyp wäre.

Bei diesem Reaktorkonzept wird die zur Herstellung der Reaktionsbedingungen notwendige Energie dem Plasma zuerst über Ohmsche Energie eines getriebenen Plasmastroms, dann entweder über hochenergetische Neutralstrahlen oder elektromagnetische Wellen zugeführt. Diese externe Energiezufuhr kann abgebrochen werden, sobald das Plasma zündet, d.h. die Reaktionsenergie selbst zum Aufrechterhalten des Betriebszustandes des Plasmas verwendet wird. In den letzten Jahren wurden zunehmend Zweifel an der Reaktortauglichkeit des Tokamak-Konzeptes laut.

Diese Entwicklung fiel zusammen mit spektakulären Verbesserungen auf dem Gebiet des Spiegelreaktorkonzeptes, das bisher im Schatten der Tokamak-Entwicklung gestanden ist. Im Gegensatz zum (gezündeten) Tokamak ist der Spiegel ein Reaktorkonzept, bei dem während der gesamten Betriebsdauer extern Energie zugeführt werden muß, um die notwendigen Betriebsbedingungen des Plasmas aufrecht zu erhalten. Dies wird überwiegend durch den Einschuß eines kontinuierlichen Neutralteilchenstrahls in das thermalisierte Plasma bewerkstelligt.

Die herkömmlichen Fusionskonzepte, sowohl Tokamak als auch Spiegel und einige andere, wie z.B. der Stellerator, gehen von der Verwendung von Deuterium und Tritium als Fusionsbrennstoff aus. Dieses Brennstoffgemisch ermöglicht bei niedrigeren Temperaturen höhere Leistungsdichten als alle anderen Fusionsbrennstoffe, weist aber auch einschneidende Nachteile auf:

- Tritium ist radioaktiv, diffundiert leicht durch Metalle und stellt damit ein radiologisches Problem dar.

- Tritium kommt in der Natur kaum vor und muß daher erbrütet werden. Dies erfordert eine aufwendige Blankettechnologie, die anspruchsvoller ist als die bei schnellen Spalt-Brutreaktoren (LMFBR, ...).
- Der überwiegende Teil der Energie wird als kinetische Energie von Neutronen frei, diese Energie wird daher nur als thermische Energie verfügbar, was den erreichbaren Wirkungsgrad beschränkt.
- Die freiwerdenden Neutronen können auch zum Brüten von Spaltstoffen verwendet werden. DT-Fusion liefert also sowohl für die Weiterverbreitung von A-, als auch von H-Waffen die notwendigen Materialien, Tritium und Plutonium.
- Man erreicht den Break-Even (Fusionsleistungsdichte ist gleich den Verlusten) umso leichter, je größer das Verhältnis vom Volumen zur Oberfläche ist. Das bedeutet, daß ein derartiger Reaktor möglichst groß sein soll. Bei den geplanten Tokamaks überschreitet diese Größe schon die finanzielle Kapazität einer Kraftwerksbaufirma.
- Weitere Probleme gibt es beim Design:
So ist beispielsweise die erste Wand starker Neutronenbestrahlung unterworfen, sodaß sie öfters ausgetauscht werden muß. Die supraleitenden Magnete müssen vom Neutronenfluß abgeschirmt werden. Die induktive Aufheizung des Plasmas durch ein sich änderndes Magnetfeld kann auch Wirbelströme im Blanket verursachen, das ja aus metallischem Lithium besteht. Für die Aufheizung durch Neutralteilcheneinschuß benötigt man Einschußkanäle, die wiederum die Magnetfeldkonfiguration stören.

Angesichts dieser technischen, ökologischen und politischen Probleme mit dem konventionellen Brennstoff Deuterium-Tritium, sahen sich viele Forscher veranlaßt, nach alternativen Fusionskonzepten zu suchen, die die Verwendung fortgeschrittener Fusionsbrenn-

stoffe erlauben. Dabei versteht man unter fortgeschrittener Brennstoffen mitunter auch die "reine" DD-Fusion, deren hauptsächlichlicher Vorteil in der Vermeidung des Tritiumbrütens liegt, die aber darüber hinaus die meisten Nachteile der DT-Fusion aufweist. Neuerdings verwendet man den Begriff der fortgeschrittenen Fusionsbrennstoffe nur mehr für solche, bei denen weder die Ausgangsprodukte noch die Endprodukte radioaktiv sind und bei denen Neutronen nur marginal auftreten (z.B. $p + B^{11} \rightarrow 3 He^4$).

Bei der im Frühjahr 1978 vom Institut für Theoretische Physik veranstalteten, und bei der im Frühjahr 1980 mitveranstalteten ersten und zweiten internationalen Tagung über "Neuartige nukleare Energiekonzepte" wurde über eine Reihe derartiger Fusionskonzepte diskutiert,¹⁾ welche sich zum Teil schon im Versuchsstadium befinden und erfolgversprechende Aspekte aufweisen.

Hier ist ein Verfahren - das Migma-Konzept von Dr. MAGLICH, Fusion Energy Corporation, Princeton, USA - bei welchen quasi-monoenergetische Teilchen hoher Energie in einem relativ kleinen Reaktionsgefäß (Migmazelle) zur Fusion gebracht werden sollen, besonders in den Vordergrund getreten. Maglich setzt ein besonderes Ordnungsprinzip der Teilchen, welches durch ein nichthomogenes Magnetfeld erreicht werden soll, voraus. Das Prinzip einer nicht-thermonuklearen Fusion ist an sich außerordentlich verlockend, da hier die reale Möglichkeit besteht, Fusionsreaktionen mit fortgeschrittenen Brennstoffen zu realisieren.

Damit stehen derzeit drei Fusionskonzepttypen im Vordergrund der Fusionsforschung: Reaktoren, die gezündete (Tokamak ...) oder getriebene (Spiegel ...) DT-Plasmen einschließen und Reaktorkonzepte, die die Verwendung schwererer Ionen (fort-

1) Atomkernenergie 32 (1) 1-84 (1978)
Atomkernenergie 32 (2) 85-152 (1978)
Karl Thiemig Verlag, München

geschrittene Brennstoffe) in getriebenen Plasmen ermöglichen (Migma ...).

In allen Fällen ist die Frage von Bedeutung, wie ein mono-energetischer Teilchenstrahl mit einem (thermalisierten oder nicht-thermalisierten) Plasma wechselwirkt: Beim gezündeten Plasma in der Aufheizphase, beim getriebenen Plasma während der gesamten Brenndauer. Dabei treten Fragen der Energieübertragung auf, die insbesondere für getriebene Reaktorkonzepte von fundamentaler Bedeutung sind. Besonders gegen nicht-thermonukleare Hochenergiefusionskonzepte werden darüber hinaus prinzipielle physikalische Bedenken erhoben, welche allerdings bis jetzt durch quantitative Rechnungen nicht abgedeckt sind.

In Anbetracht der Wichtigkeit einer getriebenen Fusion mit den angeführten Eigenschaften ist es daher von Interesse, die bisher nicht quantifizierten oder sehr unvollständig quantifizierten Bedenken einer exakten Prüfung zu unterziehen. Die Erarbeitung eindeutiger Ergebnisse, welche sowohl positiv als auch negativ sein können, also die prinzipielle Möglichkeit einer nicht-thermonuklearen Fusion oder die Unmöglichkeit einer solchen sicherstellt, wäre auf jeden Fall für die Weiterentwicklung der Fusionsreaktoren von Bedeutung.

Die vorliegende Arbeit verfolgt im Sinn der obigen Ausführungen die Zielsetzung, Fusionskonzepte, bei welchen die Energie durch Einschub monoenergetischer Teilchen hoher Energie zugeführt wird (driven system), quantitativ zu untersuchen. Als analytisches Hilfsmittel wird dabei die Boltzmannsche Transportgleichung herangezogen; insbesondere wird die Transportgleichung auf Nichtgleichgewichtszustände erweitert und die Energieübertragungsrates eines monoenergetischen Ionenstroms auf ein Boltzmann-verteiltes Ionen- oder Elektronengas berechnet.

ANALYTISCHES KONZEPT

Prinzipiell gibt es zwei Klassen von physikalischen Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit durch Kernfusion Energie erzeugt werden kann:

- a) die Verluste dürfen den Energiegewinn nicht übersteigen
- b) die Fusionsanordnung muß stabil sein, d.h. eine kleine (virtuelle) Änderung vom Gleichgewichtszustand des Plasmas soll "von selbst" wieder in die Ausgangslage zurückkehren.

Weiters gibt es ökologische und wirtschaftliche Kriterien, beispielsweise die Verfügbarkeit gewisser Materialien für den Bau und den Betrieb eines derartigen Reaktors und eine minimale Leistungsdichte.

Von den in a) und b) erwähnten physikalischen Kriterien wollen wir uns auf die Untersuchung von Verlustmechanismen beschränken, u.z. insbesondere von Teilchen- und Strahlungsverlusten.

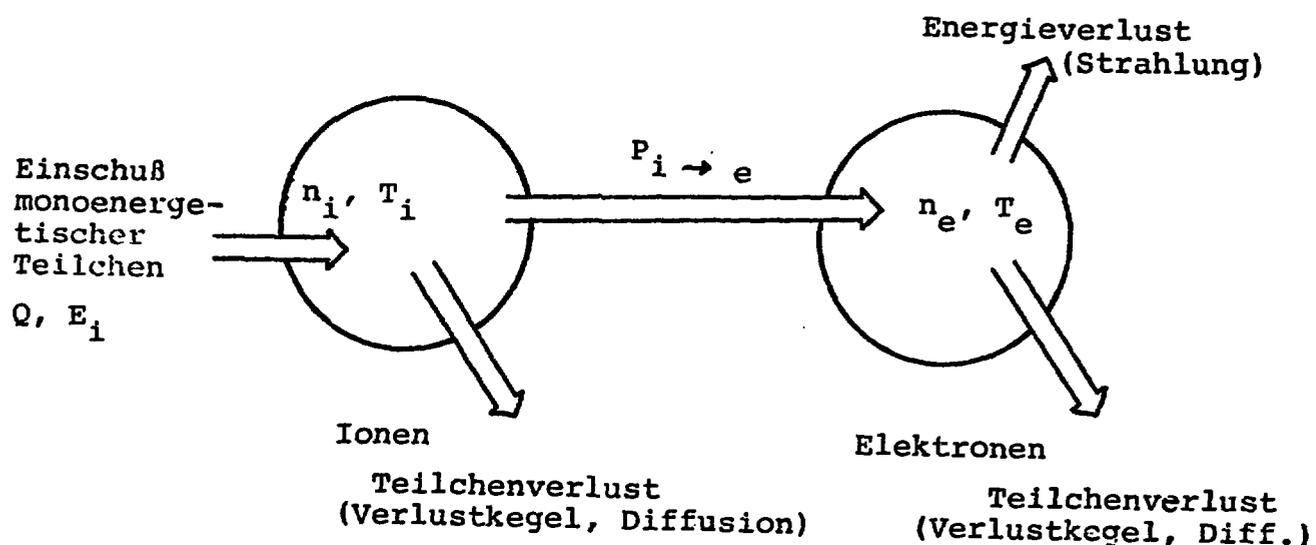
Verlustmechanismen

- a) Teilchenverluste: Ihre Ursache ist die elastische Streuung der geladenen Teilchen untereinander. Die Teilchen können entweder durch wiederholte Stöße an die Wand diffundieren oder - dies gilt im speziellen für Spiegelmaschinen - so gestreut werden, daß sie ungefähr parallel zu den Magnetfeldlinien fliegen und durch das Magnetfeld nicht mehr eingefangen werden.
- b) Strahlungsverluste: Jede beschleunigte elektrische Ladung strahlt Energie ab. Die Elektronen als Teilchen mit der kleinsten Masse (im Vergleich zu den Ionen) sind am meisten den Bewegungsänderungen unterworfen, sei es durch äußere elektrische und magnetische Felder, sei es durch die Felder der Ionen. Man unterscheidet zwischen Synchrotron-

und Bremsstrahlungsverlusten. Beide Verlustmechanismen entziehen hauptsächlich den Elektronen Energie, sodaß die mittlere Energie der Elektronen wesentlich niedriger sein wird als die mittlere Energie der Ionen. Wir setzen nämlich voraus, daß dem Plasma Energie durch den Einschub monoenergetischer Ionen dauernd zugeführt wird.

Vorgegeben: Q, E_i, n_i, n_e, T_e

Gesucht: T_i



Eine zentrale Frage, die hier gestellt werden muß, ist folgende: Wie groß ist der Energieverlust, den die Ionen durch elastische Stöße mit dem kälteren Elektronengas erfahren? - Die Elektronentemperatur T_e , die Einschub- bzw. Verlustrate Q und die Teilchendichte der Ionen n_i sowie der Elektronen n_e seien gegebene äußere Parameter. Es ist also festzustellen, ob die mittlere Energie der Plasma-Ionen $3/2kT_i$ wesentlich kleiner ausfällt als die kinetische Energie der Strahl-Ionen oder nicht:

$$\text{Fall (A)} \quad 3/2kT_i \approx E_i$$

$$\text{Fall (B)} \quad 3/2kT_i \ll E_i$$

Im Fall (A) hat man bei großen Elektronentemperaturen mit starken Strahlungsverlusten zu rechnen; im Fall (B) besteht die Gefahr, daß die dem Plasma zugeführte Leistungsdichte QE_i die Fusionsleistung übersteigt. Es wird Gegenstand weiterführender Arbeiten sein, festzustellen, welcher der beiden Bereiche der geeignetere ist oder ob man einen Zwischenbereich wählen muß.

Wir beschränken uns im Rahmen dieser Arbeit darauf, die sich einstellende Temperatur der Ionen zu berechnen, wobei alle anderen Größen als gegeben angenommen sind. Es herrsche Quasineutralität (d.h. $n_e = n_i$) und Quasistationarität (Einschußrate = Verlustrate). Um die Gleichgewichtstermperatur T_i genauer berechnen zu können, muß man die Ionenverlustrate kennen. Um diese Frage sinnvoll zu behandeln, müßte man die Boltzmann- oder Fokker-Planck-Gleichung lösen, aber dafür gibt es im Rahmen der analytischen Methoden keine Lösungstheorie.

Wir können aber den Energieverlust des Ionengases ans Elektrogenas ($P_{i \rightarrow e}$) mit der Fusionsleistungsdichte (P_{fus}) vergleichen und so ein notwendiges Kriterium für den "Break even" (in bezug auf die Elektronentemperatur) angeben.

$$\frac{P_{i \rightarrow e}}{P_{fusion}} \geq 1$$

Sollte ein Break-even erreicht werden, dann darf obiger Ausdruck die Schranke 1 nicht überschreiten.

Das analytische Konzept

Es wird ein elektrisch neutrales Plasma, bestehend aus Ionen und Elektronen angenommen, welches sich in einem stationären

Zustand befindet. Die konstante Teilchenzahl bzw. die Stationarität wird durch einen entsprechenden Teilchenzugang und damit auch Energiezuführung, sowie durch einen Teilchenabgang durch den Verlustkegel erreicht. Die Energieabfuhr entsteht durch den Energiefransfer von Ionen auf die Elektronen durch Coulombsche Wechselwirkung, sowie durch Mitführung der kinetischen Energie derjenigen Teilchen, die im Verlustkegel das Plasma verlassen. Die Elektronen geben ihrerseits Energie durch Bremsstrahlung und durch Zyklotronstrahlung ab. Die Ionen besitzen im betrachteten Energiebereich (größenordnungsmäßig bis zu einigen MeV) praktisch keine Energieverluste durch Abstrahlung.

Ein reines Ionengas (Elektronendichte ist Null) würde, wenn keine Teilchenverluste vorliegen, seinen Energieinhalt konservieren und der Fusionsprozeß würde einen positiven Wirkungsgrad besitzen, auch wenn das Verhältnis von Streuquerschnitt zu Fusionsquerschnitt noch so schlecht ist. Da in einem realen Plasma (Elektronendichte ungleich Null) bei bestimmten Betriebsbedingungen der Energietransfer durch Coulombstreuung von Ionen auf Elektronen nicht sehr groß ist, besteht also die Möglichkeit, daß für das betrachtete Plasma der unter (B) angeführte Betriebszustand erreichbar ist.

Den analytischen Ausgangspunkt der vorliegenden Untersuchungen bildet die Boltzmann-Gleichung. Zum Unterscheid von den reaktorphysikalischen Anwendungen der Transportgleichung besitzen auch die Targetteilchen vor dem Stoß wesentlich von Null verschiedene Impulse. Darüberhinaus gehen in den Stoßterm der Boltzmann-Gleichung nicht nur die gesuchte Dichteverteilung der "stoßenden Teilchen", sondern auch jene der "gestoßenen Teilchen" in multiplikativer Form ein. Sind die stoßenden und gestoßenen Teilchensorten identisch, erhält man eine nichtlineare Integralgleichung zweiter Art. Werden

außer den Ionen auch noch die Elektronen berücksichtigt, so hat man es dann mit einem Zweikomponentensystem zu tun, welches analytisch einem gekoppelten System zweier inhomogener Integralgleichungen zweiter Art mit Randbedingung entspricht. Der inhomogene Teil beschreibt die Teilchenquelle, die Randbedingung die Teilchensenke unseres Plasmas.

Da dieses System kaum auflösbar erscheint, waren eine Reihe von Vereinfachungen notwendig. Zum ersten wurde eine Reduktion auf nur eine Integralgleichung (für den Ionenanteil) durchgeführt, wobei die Verteilungsdichte der Elektronen als eingepreßt angenommen wurde. Weiters schien es zweckmäßig, die verbleibende Boltzmann-Gleichung für das Ionengas zu linearisieren. Es wäre aber sinnvoll gewesen, bereits hier mit Hilfe der Delta-Distribution über die inneren Variablen, von den die Verteilungsfunktion nicht abhängt zu integrieren. Dieses Verfahren wurde aber erst später bei der Berechnung der Energieübertragungsrate entwickelt. Es ist zu erwarten, daß wir auch bei der Boltzmann-Gleichung eine übersichtlichere Darstellung gewonnen hätten! Die zielführendere Vorgangsweise wäre also gewesen, zuerst über die inneren Variablen zu integrieren und dann zu linearisieren.

Die Linearisierung erfordert allerdings die Kenntnis einer Testfunktion nahe der tatsächlichen Lösungsfunktion. Mit dieser Methode läßt sich nur dann eine Verteilungsfunktion berechnen, wenn sich der Zustand des Plasmas in der Nähe des thermodynamischen Gleichgewichts befindet, denn für solche Fälle kann man als Testfunktion die Maxwell-Boltzmann-Verteilung wählen. Die Verteilung hat nun zwei freie Parameter: die Teilchendichte und die Temperatur. Wie kommt man nun auf diese beiden Parameter? Wir setzen zwei Gleichungen an: eine Teilchenbilanzgleichung und eine Energiebilanzgleichung.

In die Teilchenbilanzgleichung gehen Quell- und Verlustterm ein. Es scheint gewagt, als nullte Näherung eine (isotrope) Verteilungsfunktion für die Ionen anzusetzen. Diese Befürchtung hat sich dann auch als berechtigt herausgestellt: Selbst bei infinitesimalem Verlustkegel stößt man auf Divergenzen, die damit zusammenhängen, daß die Nullte Näherung der Verteilungsdichte eben unrealistisch nahe bei der Gleichgewichtsverteilung gewählt wurde!

Für die Energiebilanzgleichung benötigt man einerseits die Ergebnisse der Teilchenbilanzgleichung (um die mitgeführte Energie der verlorenen Teilchen zu berechnen), andererseits die Verlustleistung, die von den Ionen durch elastische Streuung auf die Elektronen übergeht. - Die so erhaltene Energieübertragungsrate stimmt mit der Literatur überein - ein weiteres Kriterium dafür, daß der Boltzmann-Stoßterm in der Plasmaphysik anwendbar ist.

Bei der Ableitung dieser Gleichung wurde eine Handhabung der Delta-Distribution und der Heavisideschen Stufendistribution entwickelt, mit der man komplizierte Integrationen auf einfache Weise behandeln kann. So etwa steht man bei der Ableitung der Energieübertragungsrate vor dem Problem, daß man entweder auf Labor- oder Schwerpunktsimpulse transformieren muß. Im Laborsystem sind die Verteilungsfunktionen einfach, im Schwerpunktssystem ist der Wirkungsquerschnitt eine einfache Funktion. Mit Hilfe der Delta-Distribution läßt sich die Integration im jeweils geeigneten Koordinatensystem behandeln und aufintegrieren - im Laufe unserer Rechnungen erhalten wir nie kompliziertere Funktionen als Potenzen und den Logarithmus - und es ist zu erwarten, daß wir, hätten wir diesen Formalismus auch bei der Boltzmann-Gleichung angewandt, auch dort eine übersichtlichere Darstellung gewonnen hätten.

Eine quantitative Untersuchung wird durch einen Vergleich der Fusionsleistungsdichte mit der Energieübertragungsdichte gegeben. Es stellt sich heraus, daß eine zu starke Unterkühlung des Elektronengases (aufgrund von Strahlungsverlusten) die kritische Grenze für den Break-even bald übersteigt. Eine Arbeitstemperatur von $T_e = T_i/10$ dürfte kaum in Frage kommen.

WARUM BOLTZMANN - GLEICHUNG ?

=====

Um die in der Einleitung gestellte Frage zu beantworten, ist es notwendig, ein adäquates mathematisches Modell zu finden, mit welchem der physikalische Sachverhalt beschrieben wird.

Problemanalyse:

Ein Ensemble von Ionen (eine, u.a. mehrere Ionensorten) steht mit dem Elektronengas (und den übrigen Ionensorten) in ständiger elektrostatischer Wechselwirkung. Elektromagnetische Wechselwirkung gewinnt erst im Hochenergiebereich, $v \approx c$, an Bedeutung. Der Zustand des Plasmas sei quasi-stationär, d.h. das Plasma verliert dauernd Teilchen, aber es werden auch dauernd Teilchen eingeschossen, sodaß die mittlere Dichte des Plasmas konstant bleibt. Der Einfachheit halber wollen wir ein Punktmodell betrachten: Der Einfluß des Diffusionsterms und der äußeren Felder sei vernachlässigbar; wir stellen lediglich einen Verlustkegel in Rechnung, in welchem gewisse Eigenschaften des äußeren Feldes eingehen ($\alpha = \arcsin \sqrt{B_0/B_{\max}}$ = Verlustwinkel). Sobald das Teilchen durch einen elastischen Stoß in die Verlustzone kommt, gelangt es auf eine Bahn, die ins Unendliche führt und es entweicht dem Plasmabereich.

Von besonderem Interesse ist somit der Streuprozeß, um zu ergründen, wieviele Ionen pro Zeiteinheit auf die Verlustbahnen geraten. Genau so wichtig ist es auch, zu wissen, wie die einzelnen Teilchensorten ihre Energie untereinander austauschen. Gerade die Elektronen sind es ja, die dem Plasma durch Abstrahlungsverluste dauernd Energie entziehen.

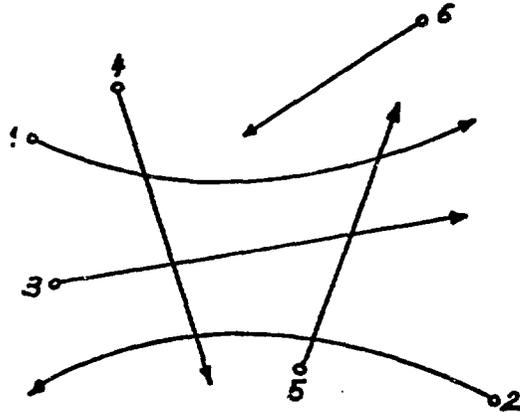
Bekanntlich ist in der klassischen Physik das Dreikörperproblem nicht gelöst, geschweige denn das Mehrkörperproblem. Wir müssen Näherungsannahmen treffen, und hier stößt man auf zwei prinzipielle Schwierigkeiten:

- a) Da das Coulomb-Potential unendliche Reichweite hat, ist sein totaler Wirkungsquerschnitt unendlich. Das gilt auch bei quantenmechanischer Rechnung. Das heißt aber, daß immer alle Teilchen mit allen Teilchen wechselwirken - eine Zweiteilchennäherung ist also unzulässig. Die beiden Teilchen bewegen sich so, als ob kein drittes Teilchen die Bahn der beiden betrachteten beeinflusse. Das kommt auch dadurch zum Ausdruck, daß man sowohl bei der Boltzmann - als auch bei der Fokker-Planck-Gleichung eine obere Schranke des Stoßparameters der stoßenden Teilchen braucht, damit man keine divergierenden Terme erhält. Man rechnet bei der Boltzmann-Gleichung so, als ob die Streuungen jedes Teilchens mit jedem hintereinander ausgeführt werden.

- b) Bei einigen Gleichungen vom Fokker-Planck-Typ braucht man auch noch eine untere Schranke des Stoßparameters. Hier wird nämlich angenommen, daß sich ein Teilchen unter dem Einfluß aller anderen bewegt. Es gibt aber keine Rückwirkung des einen Testteilchens auf irgendein anderes Feldteilchen; alle Feldteilchen bewegen sich - im Gegensatz zur Boltzmann-Gleichung - auf einer geraden Bahn. Daher können sich die stoßenden Teilchen nicht beliebig nahe kommen; man schneidet bei der 90-Grad-Streuung ab (Streuungen > 90 Grad werden vernachlässigt). Im Gegensatz zur Boltzmann-Gleichung steht hier das Testteilchen in ständiger - gleichzeitiger - Wechselwirkung mit den anderen Teilchen.

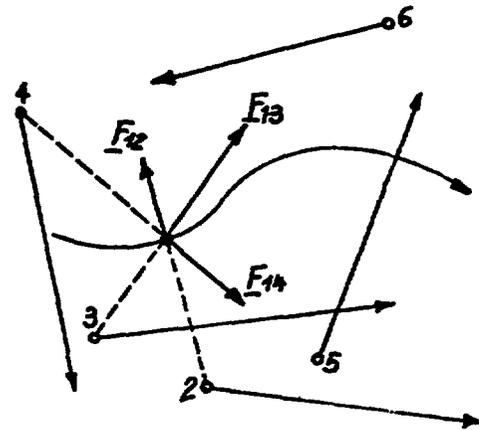
Um den Sachverhalt zu veranschaulichen, zwei Skizzen:

Boltzmann-Gleichung



Die beiden Teilchen bewegen sich im gegenseitigen Einfluß - unabhängig vom Einfluß der übrigen Teilchen, und der übrigen Teilchen untereinander.

Fokker-Planck-Gleichung



Das Teilchen bewegt sich im Potential aller anderen - unabhängig von der Rückwirkung dieses Teilchens auf die anderen, und der übrigen Teilchen untereinander.

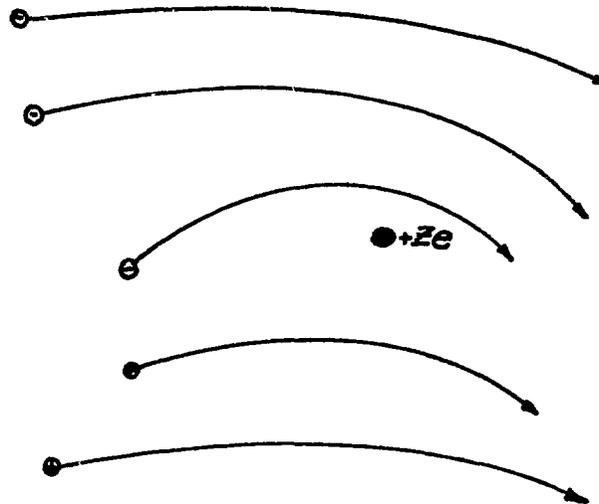
Fernwechselwirkungen

Warum muß man bei beiden Theorien für den Stoßparameter b eine obere Schranke einführen? Wie groß muß die obere Schranke gewählt werden? Was bedeutet sie physikalisch?

Wie aus den oberen beiden Skizzen zu entnehmen ist, nehmen beide Theorien an, daß sich jeweils zwei (ein) Teilchen im Einfluß des jeweiligen anderen (vieler anderer) bewegen. Die übrigen Teilchen aber wechselwirken unter-

einander gar nicht, und sie bewegen sich ungestört aneinander vorbei.

Wollte man sich dieser Tatsache annehmen, dann müßte man etwa die Dreiteilchenstreuung, Vierteilchenstreuung etc. einführen. Man kann aber die kollektiven Effekte auch durch die Thermodynamik berücksichtigen.



In der Umgebung einer positiven Ladung halten sich bevorzugt Elektronen auf, während positive Ladungen eher abgestoßen werden. Im zeitlichen Mittel bildet sich eine negative Ladungswolke in der Umgebung der positiven Ladung aus - in der Umgebung des Elektrons eine positive - und das hat (wieder im zeitlichen Mittel) eine Abschirmung des Potentials zur Folge.

Ein Teilchen, das aus dem Unendlichen auf diese betrachtete Ladung zufliegt, "spürt" also nicht die positive Ladung Ze allein, sondern auch die der Elektronen, die sich zeitweilig in ihrer Umgebung aufhalten.

Mathematisch ausgedrückt heißt das folgendes:

Statt mit dem Coulomb-Potential $v^C(r) = \frac{Ze}{r}$ hat man mit dem abgeschirmten Coulomb-Potential zu rechnen:

$$v^D(r) = \frac{Z_i e}{r} \exp(-r/\lambda_D)$$

λ_D ist der berühmte Debye Radius:

$$\lambda_D = \sqrt{kT/4\pi n_e e^2 (1+Z_i)}$$

$v^D(r)$ erhält man aus der Debye-Hückel-Theorie mit Hilfe der Barometrischen Höhenformel, angewandt auf die Nahumgebung einer Ladung im Plasma, in Kombination mit der Poisson-Gleichung. Man verwendet diejenige Lösung der Poisson-Gleichung, die für $r \rightarrow 0$ in das Coulomb-Potential übergeht.

Plausibilitätserklärung für den Debye-Radius (λ_D):

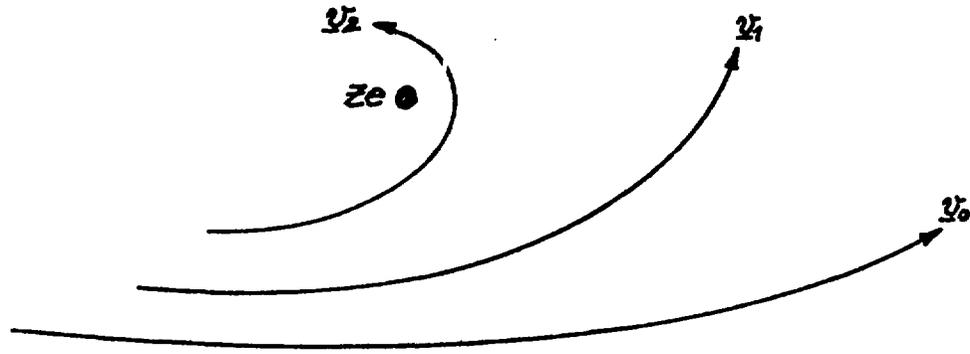
Daß er für wachsendes Z_i kleiner wird, ist evident. Ebenso klar ist auch, daß er bei größerer Elektrodendichte kleiner wird - weil eben mehr Elektronen besser abschirmen als weniger.

Etwas weniger einsichtig zu sein scheint, warum er mit wachsender Temperatur steigt.

Dazu folgende Skizze:

Elektronenbahnen bei konstantem Stoßparameter, verschiedenen Geschwindigkeiten

$$v_0 \gg v_1 \gg v_2$$



Langsame Elektronen kommen den Ionen am nächsten! Daher ist bei niedrigen Temperaturen λ_D kleiner.

Wir sehen, daß bei der Interpretation des Debye-Potentials die Bahnen der (übrigen) Teilchen durchaus nicht geradlinig gedeutet werden dürfen. Weil also - entsprechend der Anziehung und Abstoßung der Ladungen - die Teilchen gekrümmte Bahnen ausführen, erhalten wir für eine ruhende Ladung im Plasma (oder für das Ruhesystem einer bewegten Ladung) ein abgeschirmtes Coulomb-Potential! Die Abschirmung berücksichtigt also die Wechselwirkung der übrigen Teilchen untereinander!

Wie sieht nun der Wirkungsquerschnitt für dieses abgeschirmte Potential aus?

In der Boltzmann-Gleichung benötigen wir den partiellen Streuquerschnitt.

Skizze einer quantenmechanischen Ableitung des Streuquerschnitts (Bornsche Näherung)

Ausgehend von der Schrödinger-Gleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + V(\underline{r}) \right] \psi(\underline{r}) = E \psi(\underline{r})$$

$$\text{oder } [\nabla^2 + k^2] \psi(\underline{r}) = \frac{2\mu V(\underline{r})}{\hbar^2} \psi(\underline{r}) \quad (*)$$

$$k^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$$

kann man mit Hilfe der Green'schen Funktion

$$[\nabla^2 + k^2] G(\underline{r}, \underline{r}') = \delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

obige Gleichung in folgender Weise umschreiben

$$\psi_a(\underline{r}) = \varphi_a(\underline{r}) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\underline{r}, \underline{r}') V(\underline{r}') \psi_a(\underline{r}') d^3 \underline{r}'$$

$\varphi_a(\underline{r})$ sei eine Lösung von (*) ohne die rechte Seite (Anfangsbedingung = Zustand des Systems vor dem Stoß).

Kann man die Wechselwirkung $V(\underline{r})$ als kleine Störung sehen, dann wird obige Gleichung nach der Methode der sukzessiven Approximation gelöst. Bricht man nach dem ersten Glied ab, dann hat man die erste Born'sche Näherung.

$$\psi_a(\underline{r}) = \varphi_a(\underline{r}) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \int G(\underline{r}, \underline{r}') V(\underline{r}') \varphi_a(\underline{r}') d^3 \underline{r}'$$

$$\psi_a(\underline{r}') \rightarrow \varphi_a(\underline{r}')$$

Multiplikation mit $\varphi_b^*(\underline{r})$ (ebenfalls Eigenfunktion von (*): ohne die rechte Seite; Zustandsvektor des Systems nach der Streuung) und Integration liefert die Streuamplitude A_{ba}

$$A_{ba} = \langle \varphi_b | \psi_a \rangle$$

$$A_{ba} = \delta_{ab} - \frac{2\mu}{\hbar^2} \iint \psi_b^*(\underline{r}) G(\underline{r}, \underline{r}') V(\underline{r}') \psi_a(\underline{r}') d^3 \underline{r}' d^3 \underline{r}$$

$$= \delta_{ab} - \frac{2\mu}{\hbar^2} \langle \psi_b | \tilde{V} | \psi_a \rangle$$

Wählt man für $V(\underline{r})$ das abgeschirmte Coulomb-Potential

$$V(\underline{r}) = \frac{e_1 e_2}{r} e^{-r/\tau_0}$$

für $G(\underline{r}, \underline{r}')$ die Greensche Funktion des Helmholtz-Operators

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

dann folgt für die Streuamplitude wegen

$$\psi_a(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(k_a, \underline{r})} \quad ; \quad \psi_b(\underline{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i(k_b, \underline{r})}$$

$$A_{ba} = \langle k_b | \tilde{V} | k_a \rangle = \frac{4\pi e_1^2 e_2^2}{|k_b - k_a|^2 + 1/\tau_0^2}$$

Das Quadrat der Streuamplitude ist gleich dem differentiellen Wirkungsquerschnitt (siehe Davydow) und wir erhalten:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left\{ \frac{2\mu e_1 e_2}{4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\hbar^2}{\tau_0^2}} \right\}^2 = \frac{(e_1 e_2)^2}{2\mu v^2} \frac{1}{[\sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \theta_0^2(v)]^2}$$

Setzt man $\tau_0 = \lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi n_e e^2 (1 + \epsilon_i)}}$

dann hat man für Θ_0 :

$$\Theta_0^{qm}(v) = \frac{\hbar}{\mu \lambda_0 v}$$

v ... Relativgeschwindigkeit
bei quantenmechanischer
Rechnung

Bei klassischer Rechnung erhält man für Θ_0 :

$$\Theta_0^{kl}(v) = \frac{2e_1 e_2}{\mu \lambda_0 v^2}$$

(Kammash, S. 89)

Die quantenmechanische und die klassische Rechnung liefern hier (im Gegensatz zum Rutherford'schen Streuquerschnitt) verschiedene Resultate. Für $\lambda_D \rightarrow \infty$ gehen beide $\Theta_0(v)$ gegen Null; der Wirkungsquerschnitt geht über in den Rutherford'schen Streuquerschnitt.

Für $v \rightarrow 0$ überwiegt der klassische Abschirmwinkel:

$$\Theta_0^{kl}(v) = \frac{2e_1 e_2}{\mu \lambda_0 v^2} > \frac{\hbar}{\mu \lambda_0 v} = \Theta_0^{qm}(v)$$

für $v \rightarrow \infty$ ist es umgekehrt.

Welcher Abschirmwinkel ist für die Hochenergiefusion zu wählen?

Durch Gleichsetzung von $\Theta_0^{kl}(v)$ und $\Theta_0^{qm}(v)$ läßt sich die Grenzgeschwindigkeit v_0 bestimmen, oberhalb der der quantenmechanische Abschirmwinkel bestimmend wird.

Die Grenze liegt bei:

$$v_0 = 2e_1 e_2 / \hbar = 2Z_1 Z_2 \alpha c$$

$$\Theta_0(v) = \begin{cases} \frac{2e_1 e_2}{\mu \lambda_0 v^2} & ; \quad v < \frac{2e_1 e_2}{\hbar} \\ \frac{\hbar}{\mu \lambda_0 v} & ; \quad v > \frac{2e_1 e_2}{\hbar} \end{cases}$$

Für die Hochenergiefusion ($kT_e \approx 60 \text{ keV}$) relevante mittlere Geschwindigkeiten liegen bei $0.5 c$. Folglich ist der quantenmechanische Abschirmwinkel zu wählen.

Welcher Stoßterm soll nun benützt werden, der Boltzmann-Stoßterm oder der Fokker-Planck-Stoßterm?

Ein Vergleich der beiden Terme mag als Kriterium herangezogen werden, welchen Stoßterm man aus praktischen Gründen wählen soll:

Boltzmann-Stoßterm

Fokker-Planck-Stoßterm

(siehe: Cap)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{stop}}^B = \int |u_2 - u_1| \{ f(x_1, u_1, t) f(x_2, u_2, t) - f(x_1, u_1, t) f(x_2, u_2, t) \} \sigma du_2$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{stop}}^{FP} = -\frac{\partial}{\partial u_i} \left(f \frac{\Delta u_i}{T} \right) + \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \left(\frac{1}{2} f \frac{\Delta u_i \Delta u_j}{T} \right)$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(f \frac{\Delta u}{T} \right) = \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial u} (E f) + \frac{e}{m^2} \frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{1}{T} \int_0^T dt' \frac{\partial}{\partial x_j} E_i(x_0 + u_0 t', t') \int_0^T dt'' E_j(x_0 + u_0 t'', t'') \right\rangle f(u)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \left(\frac{1}{2} f \frac{\Delta u_i \Delta u_j}{T} \right) &= \\ &= \frac{e^2}{m} \frac{\partial}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial u_j} \left\langle \frac{1}{T} \int_0^T dt' E_i(x_0 + u_0 t', t') \cdot \int_0^T dt'' E_j(x_0 + u_0 t'', t'') \right\rangle f(u) \end{aligned}$$

Es läßt sich zeigen, daß man die Boltzmann-Gleichung durch Entwicklung von $u'_i = u_i + \Delta u_i$ nach den Δu_i

u_i Geschwindigkeit des Teilchens nach dem Stoß
 Δu_i Geschwindigkeitsänderung

in eine Gleichung vom Fokker-Planck-Typ überführen kann (Montgomery - Tidmann, Kapitel 2). Man muß allerdings einen geeigneten "Abschneidewinkel" einführen, um endliche Resultate zu erhalten.

Die erhaltenen Entwicklungskoeffizienten stimmen überein mit der Gleichung von Rosenbluth, Mac Donald und Judd¹⁾. Weitere Übereinstimmung mit: Gasirowitz, Neumann, Ridell²⁾, Kaufmann³⁾.

Die Boltzmann-Gleichung für weitreichende Coulomb-Kräfte läßt sich auch direkt aus der Liouville-Gleichung mit Hilfe der BBGKY-Abstiegsmethode ableiten. Das Abbrechen der Integralgleichungshierarchie (=Dreiteilchenstreuung) geschieht lediglich durch eine unbewiesene Annahme (Montgomery - Tidman, Kapitel 4):

Da man zeigen kann, daß die Zweiteilchenstreuungen von der Ordnung g sind ($g = 1/\lambda_D^3 n \approx 10^{-3}$, n = Teilchendichte) nimmt man an, daß die Dreiteilchenstreuungen von höherer als erster Ordnung in g sind.

Wir übernehmen diese Annahmen und stellen für ein Mehrkomponentenplasma (= verschiedene Ionensorten, Elektronen) eine Boltzmann-Gleichung des Nichtgleichgewichtszustandes auf (quasi-stationär).

-
- 1) M. Rosenbluth, W.M. Mac Donald, and D.L. Judd, Phys. Rev., 107, 1 (1957)
 - 2) S. Gasirowicz, M. Neumann, and R.J. Ridell, Jr., Phys. Rev., 101, 922 (1956)
 - 3) A.N. Kaufmann, "La théorie des gas neutres et ionises", ed C. De Witt and J.F. Detoeuf, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960

TEIL I

Inhomogene Boltzmann-Gleichung im Impulsraum

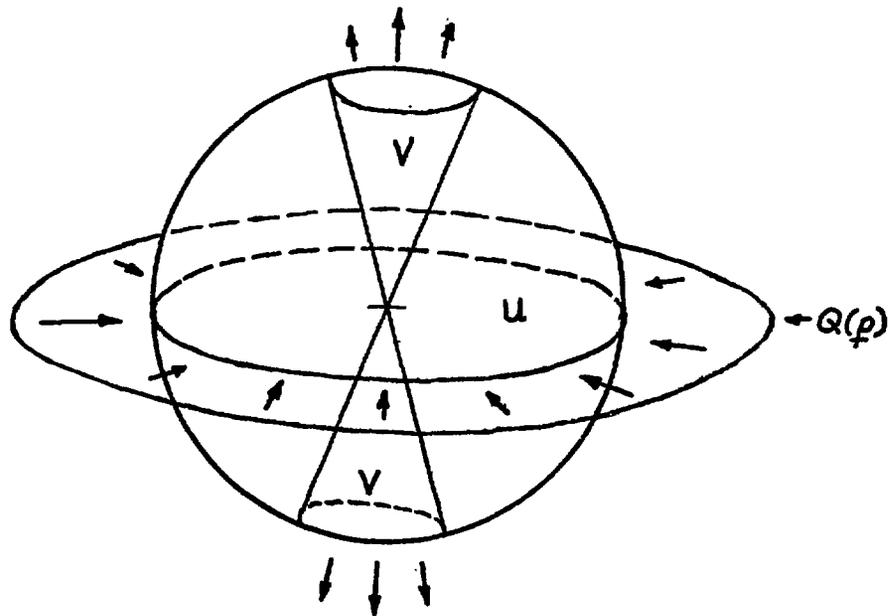
Der erste Teil hat das Ziel, eine Gleichung aufzustellen, mit der die Impulsverteilungsfunktion $f(p)$ eines ein- oder mehrkomponentigen Teilchenensembles bestimmt werden soll.

Wir stellen die Gleichung zunächst für ein Einkomponentensystem auf, dessen Teilchen

- a) durch die Quelle der Stärke $Q(p)$ eingeschossen werden
- b) untereinander mit dem Wirkungsquerschnitt σ wechselwirken (elastische Streuung; Dreiteilchenstöße werden vernachlässigt)
- c) in der Verlustzone V verschwinden

Später werden wir die Gleichung auf mehrere Komponenten und auf inelastische Stöße (z.B. Bremsstrahlung) erweitern.

Wir verwenden dieses Modell zur Berechnung der Verteilungsdichte in Spiegelmaschinen:



$Q(p)$ Einschuss entlang des Äquators (axiale Symmetrie für eine eventuelle Vereinfachung der Rechnung)

- U derjenige Bereich des Impulsraumes, in welchem elastische Streuungen stattfinden
- V die - im allgemeinen nicht unbedingt kegelförmige - Verlustzone. Sobald sich ein Teilchen in der Verlustzone des (ortsfesten) Impulsraumes befindet, gilt es für das Plasma als verloren. Es muß gelten:

$$U = R^3 \setminus V \quad (1)$$

Bei thermischen Plasmen ist die Verlustzone ein Doppelkegel, dessen halber Scheitelwinkel durch die Alfven-Relation bestimmt ist:

$$\sin \Theta_k = \sqrt{\frac{B_0}{B_{max}}} \quad (2)$$

Bei hochenergetischen Plasmen (Migma) ist nach Berechnungen der Fusion Energy Corporation¹⁾ (FEC) der Verlustwinkel kleiner als der durch obige Formel angegebene.

Doch jetzt zur eigentlichen Ableitung:

Im Gegensatz zur Boltzmann-Gleichung, wie sie überall in den Lehrbüchern zu finden ist, handelt es sich hier um keinen Gleichgewichtszustand, da dauern Teilchen ins Plasma eingeschossen werden und dem Plasma verlorengehen. Wir müssen die Boltzmann-Gleichung also dahingehend abändern, daß wir einen Quell- und einen Senkterm einführen. Andererseits werden wir auch eine Vereinfachung treffen: Da uns im be-

1) Atomkernenergie 32(2) 100 - 120,
B. Maglich, High-energy fusion: A quest for a simple, small and environmentally acceptable colliding-beam fusion power source.

sonderen die Impulsverteilung interessiert, nehmen wir eine homogene Ortsverteilung an. Die Ortsvariablen treten in dieser Gleichung nicht mehr auf. Physikalisch läßt sich dies dadurch rechtfertigen, daß wir die Impulsverteilung im Mittelpunkt des Plasmas (oder in einer Umgebung des Mittelpunktes) berechnen.

Die Boltzmann-Gleichung¹⁾ lautet, wenn das betrachtete System im Gleichgewicht ist:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial r} - \left(\frac{\partial}{\partial r} \varphi_a \right) \frac{\partial}{\partial p} \right] f(r, p, t) = \int d^3 p' \int d\Omega \frac{p - \bar{p}}{m} \sigma(\Omega) [f(r, p', t) f(r, \bar{p}', t) - f(r, p, t) f(r, \bar{p}, t)] \quad (3)$$

Die Transportgleichung eines Systems im Nichtgleichgewichtszustand hat die Form:

$$\frac{\partial f(p)}{\partial t} = 0 = Q(p) + \int P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}') \{ A f(p') f(\bar{p}') - B f(p) f(\bar{p}) \} d^3 p' d^3 \bar{p}' d^3 \bar{p} \quad (4)$$

In dieser Gleichung wurden Homogenität ($d/dr = 0$) und Stationarität ($d/dt = 0$) vorausgesetzt. A und B sind Stufenfunktionen der Impulsvariablen $p, \bar{p}; p', \bar{p}'$, die später näher bestimmt werden sollen.

1) Siehe etwa: Montgomery / Tidman

Beschreibung der einzelnen Terme:

$Q(p) \dots\dots$

(äußerer) Quellterm = die Anzahl der pro Zeiteinheit ins Impulsintervall $(p, p+dp)$ durch eine äußere Quelle eingeschossenen Teilchen.

$$\int PA f(p') f(\bar{p}') d^3p \dots\dots$$

Boltzmann-Quellterm: die Anzahl der aus dem gesamten Plasma ins Impulsintervall $(p, p+dp)$ hineingestreuerten Teilchen

$$\int PB f(p) f(\bar{p}) d^3p \dots\dots$$

Boltzmann-Senkterm: die Anzahl der aus dem Impulsintervall $(p, p+dp)$ hinausgestreuten Teilchen

$P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}')$

Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit bei der Targetteilchendichte 1 und der Testteilchendichte 1 (= 1 Teilchen pro cm^3)

P läßt sich durch den Wirkungsquerschnitt der Impulse vor und nach dem Stoß ausdrücken:

$$P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}') = v_{\text{rel}} \sigma(E_{\text{rel}}, \cos \theta) = \left(\frac{p}{m_1} - \frac{\bar{p}}{m_2} \right) \tilde{\sigma}(p, \bar{p}; p', \bar{p}') \quad (5)$$

$$v_{\text{rel}} = \left(\frac{p}{m_1} - \frac{\bar{p}}{m_2} \right)$$

... Relativgeschwindigkeit im CM-System (Schwerpunktsystem)

$$\cos \theta = \frac{\left(\frac{p}{m_1} - \frac{\bar{p}}{m_2} \right) \cdot \left(\frac{p'}{m_1} - \frac{\bar{p}'}{m_2} \right)}{\left| \frac{p}{m_1} - \frac{\bar{p}}{m_2} \right| \left| \frac{p'}{m_1} - \frac{\bar{p}'}{m_2} \right|}$$

... Kosinus des Streuwinkels im CM; bei einer Komponente ist $m_1 = m_2$.

Im Anhang A wird erläutert, wie P durch den Wirkungsquerschnitt σ dargestellt wird und wie σ , das in der Literatur in Schwer-

punktskoordinaten gegeben ist, in Laborkoordinaten ausgedrückt wird.

Da in unserem speziellen Beispiel (elastische Streuung) der Impuls- und Energieerhaltungssatz gelten, sind die Anfangsimpulse mit den Endimpulsen vertauschbar und wir schreiben:

$$P(\underline{p}, \underline{\bar{p}} \rightarrow \underline{p}', \underline{\bar{p}}') = P(\underline{p}', \underline{\bar{p}}' \rightarrow \underline{p}, \underline{\bar{p}}) = P(\underline{p}, \underline{\bar{p}} \leftrightarrow \underline{p}', \underline{\bar{p}}') \quad (6)$$

Anfangsimpulse Endimpulse

Die Variablen in P an erster und dritter Stelle bezeichnen die Impulse der Testteilchen, die an zweiter und vierter Stelle die Impulse der Targetteilchen:

Unterstrichene Buchstaben symbolisieren Impuls v e k t o r e n.



$f(\underline{p})$ ist die zu berechnende Impulsverteilungsfunktion. Sie ist auf die Teilchendichte normiert:

$$\int f(\underline{p}) d^3p = n \quad (7)$$

$f(\underline{p}) d\underline{p}$ ist somit die Anzahl der Teilchen pro Volumseinheit im Impulsintervall $(\underline{p}, \underline{p}+d\underline{p})$.

Nun können wir die Anzahl \tilde{W} der Stöße pro Sekunde und cm^3 angeben, wenn die Stoßpartner des Plasmas vor dem Stoß die Impulse $(\underline{p}, \underline{\bar{p}})$ mit den Impulsverteilungen $f(\underline{p})$ und $f(\underline{\bar{p}})$ und nach dem Stoß die Impulse $(\underline{p}', \underline{\bar{p}}')$ haben:

$$W(\underline{p}, \underline{\bar{p}} \rightarrow \underline{p}', \underline{\bar{p}}') = P(\underline{p}, \underline{\bar{p}} \rightarrow \underline{p}', \underline{\bar{p}}') f(\underline{p}) f(\underline{\bar{p}}) \quad (8)$$

Durch Integration über alle möglichen Endimpulse (p' , \bar{p}') und über alle Anfangsimpulse der Targetteilchen (\bar{p}) und durch Multiplikation mit dp erhalten wir die Anzahl der aus dem Impulsintervall (p , $p+dp$) hinausgestreuten Teilchen, bezogen auf die Zeit- und Volumseinheit.

Dieser Term hat eine große Ähnlichkeit mit dem Boltzmann-Senkterm in Gleichung (4); es fehlt nur noch der Faktor B. Mit den Faktoren A und B soll nun berücksichtigt werden, daß auch Teilchen aus dem Plasma verschwinden!

Die Stufenfunktionen A und B

In Gleichung 1 haben wir den dreidimensionalen Impulsraum R^3 in zwei Teilmengen aufgeteilt: U und V. U ist derjenige Bereich, in dem Streuungen stattfinden, während in V keine Streuungen stattfinden. Das heißt, daß aus V keine Teilchen zurückgestreut werden sollen. Wir definieren daher eine Stufenfunktion, die "Rückkehrwahrscheinlichkeit".

$$\eta(p) = \begin{cases} 0 & \text{in V} \\ 1 & \text{in U} \end{cases} \quad (9)$$

Mit Hilfe dieser Rückkehrwahrscheinlichkeit drücken wir die Stufenfunktion A im Boltzmann-Quellterm und die Stufenfunktion B im Boltzmann-Senkterm aus (Vgl. Glg. 4), wobei in den folgenden Tabellen für A und B: "1" bedeutet: Streuung findet statt; "0" bedeutet: Streuung findet nicht statt.

Da die Stufenfunktion B leichter abzuleiten ist, wollen wir sie zuerst ableiten:

Funktion B (Senkterm): $B = \eta(p) \eta(\bar{p})$:10)

		Endimpulse aus:				
		u	u	v	v	
Anfangsimpulse	p	p'	u	v	u	v
	\bar{p}	\bar{p}'	u	v	u	v
	u	u	1	1	1	1
	u	v	0	0	0	0
	v	u	0	0	0	0
v	v	0	0	0	0	

Die Stöße werden nur dann als Beitrag zur Stoßrate gezählt, wenn sich beide Stoßpartner vor dem Stoß im Reaktionsbereich U des Impulsraumes befinden. Sobald sich eines der Teilchen in der Verlustzone V befindet, ist es ja im Plasma nicht mehr vorhanden und der Stoß findet nicht statt.

Der Boltzmann-Senkterm liefert einen negativen Beitrag zur Teilchenbilanz $df(p)/dt$ im dreidimensionalen Impulsintervall $(p, p+dp)$. Aus den Bedingungen der Quasistationarität (Gleichung 4) muß folgen, daß er sich mit den beiden übrigen Quelltermen aufhebt.

Die beiden übrigen Terme müssen gerade soviel Teilchen "liefern", wie der Boltzmann-Senkterm "schlucken" kann. Auf eine Tabelle für die Stufenfunktion A angewandt heißt das, daß sie mehr Nullen enthalten muß als die Tabelle für B. Wo müssen aber diese Nullen stehen?

Die Antwort lautet: Für p aus V muß A Null sein (siehe 4). Wäre $A = 1$ für gewisse p aus V, dann gäbe es in V eine Quelle,

die aber wegen des $B(p)$ -Faktors, der den Senkterm annulliert, nicht mehr aufgehoben würde. df/dt wäre für diese p aus V größer als Null.

Die Funktion A im Boltzmann-Quellterm lautet also:

		Endimpulse aus:				
		p	u	u	v	v
		\bar{p}	u	v	u	v
Anfangsimpulse	p'	\bar{p}'				
	u	u	1	1	0	0
	u	v	0	0	0	0
	v	u	0	0	0	0
	v	v	0	0	0	0

$$A = \eta(p) \eta(p') \eta(\bar{p}') \quad (11)$$

Durch Einsetzen der gefundenen Funktionen A und B in (4) erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{\partial f(p)}{\partial t} = 0 = Q(p) + \int P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}') \{ \eta(p) \eta(p') \eta(\bar{p}') f(p') f(\bar{p}') - \eta(p) \eta(\bar{p}) f(p) f(\bar{p}) \} d\bar{p}'^3 d\bar{p}^3 d\bar{p} \quad (12)$$

Indem wir folgende Definition geben, läßt sich auch ein Senkterm abspalten:

$$\text{Def.: } \tau(p) = 1 - \eta(p) \quad \text{Entweichwahrscheinlichkeit} \quad (13)$$

$$\frac{\partial f(p)}{\partial t} = 0 = Q(p) - \tau(p) \cdot$$

$$\int P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}') \eta(p) \eta(\bar{p}') f(p') f(\bar{p}') d\bar{p}'^3 d\bar{p}^3 d\bar{p} + \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int P(p\bar{p} \rightarrow p'\bar{p}') \{ \eta(p')\eta(\bar{p}')f(p')f(\bar{p}') - \\
 & \quad - \eta(p)\eta(\bar{p})f(p)f(\bar{p}) \} d^3p
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Durch Integration über den gesamten Impulsbereich p erhalten wir die Gesamtteilchenbilanz (Zahl der eingeschossenen Teilchen aller Impulse = Zahl aller verlorenen Teilchen):

$$\begin{aligned}
 \int Q(p) d^3p &= \int P(p\bar{p} \rightarrow p'\bar{p}') \eta(p')\eta(\bar{p}')f(p')f(\bar{p}') d^{12}p \\
 &= \int_V d^3p \int_{U^2} d^3p' d^3\bar{p}' \int_R d^3\bar{p} f(p')f(\bar{p}') P(p\bar{p} \rightarrow p'\bar{p}')
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Die Zahl der verlorenen Teilchen pro Zeiteinheit und Volumeneinheit ist jene Teilchenstoßrate, deren Anfangsimpulse beider Reaktionspartner in U liegen; der Endimpuls des Targeilchens kann irgendwo im R^3 liegen, während der Endimpuls des Testteilchens nur in der Verlustzone V liegen darf.

Es wurde damit eine Gleichung abgeleitet, die nur die Teilchenstöße beschreibt, nicht aber die Ortsverteilung und den Einfluß des äußeren Feldes.

Es gehen in die Gleichung jedoch Eigenschaften des makroskopischen magnetischen und elektrischen Feldes ein:

Sobald ein Teilchen in den Verlustkegel gestreut wird, gilt es nach unserer Annahme für das Plasma als verloren. Im realen Fall legt es noch einige Zentimeter innerhalb des Plasmas zurück, wo es immer noch eine Chance hat, auf

eine gebundene Bahn zurückgestreut zu werden. Die Annahme

$$\eta(p) = 0, \text{ für } p \in V \quad (9)$$

bedeutet, daß es mit Sicherheit verlorenght, sobald es die Grenzen des Verlustkegels überschreitet. Andererseits bedeutet die Annahme

$$\eta(p) = 1, \text{ für } p \in U \quad (9)$$

daß ein Teilchen, das den Zentrumsbereich auf einer gebundenen Bahn verläßt (U-Raum), mit Sicherheit wieder in den Zentrumsbereich zurückkommt.

Es ist zu erwarten, daß diese Annahmen weitgehend zutreffen. In der Migmamaschine variiert die Teilchendichte im radialen Bereich um einen Faktor von 10^{-2} bis 10^{-3} . Da die Streuwahrscheinlichkeit proportional zu n^2 ist, finden im Randbereich 10^{-4} bis 10^{-6} mal weniger Streuungen statt als im Zentrum.

Sollte sich durch Rechnungen oder Messungen herausstellen, daß die Annahmen für $\eta(p)$ als Stufenfunktion nicht zutreffen, dann kann man statt dessen eine beliebige Funktion

$$0 \leq \eta(p) \leq 1 \quad (16)$$

einsetzen, die natürlich physikalisch begründet sein muß. Solange man aber mit der Stufenfunktion rechnet, ist auch eine andere mathematische Formulierung praktikabel: Wie aus der Gleichung (12) ersichtlich ist, ist $\eta(p)$ immer mit $f(p)$ multiplikativ verknüpft. Das heißt

$$\eta(p) f(p) = \begin{cases} f(p), & \text{für } p \in U \\ 0, & \text{für } p \in V \end{cases} \quad (17)$$

Somit kann man die Boltzmann-Gleichung für Nichtgleichgewichtszustände (12) auch anders schreiben:

$$0 = Q(p) + \int_{R^3} d^3\bar{p} \iint_{U^2} d^3p' d^3\bar{p}' P(p', \bar{p}' \leftrightarrow p, \bar{p}) f(p') f(\bar{p}') - \int_{U} d^3\bar{p} \iint_{R^6} d^3p' d^3\bar{p}' P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}') f(p) f(\bar{p}') \quad (18)$$

Die η -Funktionen der Variablen p' , \bar{p}' und \bar{p} werden hier durch die Integrationsmengen ausgedrückt. Um auch die η -Funktion der Variablen p zu berücksichtigen, müssen wir noch zusätzlich fordern:

- a) $f(p)$ ist nur auf $p \in U$ definiert
- b) $f(p) = 0$ an der Grenze zwischen U und V (Randbedingung).

Wesentlich allgemeiner ist natürlich die Schreibweise mit den η -Faktoren, da man damit auch kontinuierliche η -Funktionen betrachten kann.

Erweiterung auf inelastische Streuung und Mehrkomponentensysteme

Bei der elastischen Streuung gilt Inversions - Invarianz, d.h. die Teilchenbahnen des Zweiteilchenstoßes können auch in umgekehrter Richtung durchlaufen werden.

$$P(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') = P(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p}) =: P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}') \quad (6)$$

Dies trifft nicht zu, wenn Bremsstrahlung auftritt. Wie kann man unelastische Streuungen berücksichtigen? - Unter der Annahme, daß praktisch keine Reabsorption auftritt, integrieren wir die Übergangswahrscheinlichkeit der Bremsstrahlung über die nicht interessierenden Impulse des Photons¹⁾:

$$P_{Br}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') = \int \tilde{P}_{Br}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}'; k) d^3k \quad (19)$$

Hier gilt aber:

$$\frac{p^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}^2}{2m_2} \geq \frac{p'^2}{2m_1} + \frac{\bar{p}'^2}{2m_2}$$

der Energiesatz zwischen den beiden geladenen Teilchen ist nicht erfüllt, da die verbleibende Energie vom Photon weggetragen wird. Hier gilt der Pfeil nur in eine Richtung; Inversions- Invarianz ist nicht gegeben.

Natürlich muß das auch in die Boltzmann-Gleichung eingehen. Es sei P wieder eine Übergangswahrscheinlichkeit, aber die Inversions- Invarianz gelte nicht. Dann lautet die Boltzmann-Gleichung:

$$0 = Q(p) + \int_{R^3} d^3\bar{p} \int_{u^2} d^3p' d^3\bar{p}' P(\bar{p}', p' \rightarrow \bar{p}, p) f(p') f(\bar{p}') - \int_{u^2} d^3\bar{p} \int_{R^3} d^3p' d^3\bar{p}' P(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') f(p) f(\bar{p}) \quad (20)$$

1) Der Wirkungsquerschnitt wird gegeben bei:
 H.A. Bethe und W. Heitler, Proc.Roy.Soc., London, A146, 83(1934); oder
 Heitler, Quantum Theory of Radiation, Third Ed., Oxford, 1954; oder
 G. Källen, Quantum Electrodynamics, Springer Verlag, 1972

oder in der η -Schreibweise:

$$0 = Q(p) + \int \int \int d^3\bar{p} d^3p' d^3\bar{p}' \{ P(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p}) \eta(p') f(p') \eta(\bar{p}') f(\bar{p}') \eta(p) - \\ - P(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') \eta(p) f(p) \eta(\bar{p}) f(\bar{p}') \} \quad (21)$$

Wir werden die Verallgemeinerung auf inelastische Streuungen jedoch nicht verwenden. Sie sei hier nur der Vollständigkeit halber angegeben.

Um mit Gleichungen für mehrere Teilchensorten (Komponenten) bequem operieren zu können, bedienen wir uns einer abgekürzten Schreibweise. Wir schreiben die Funktionen ohne Argument $(p, p'; \bar{p}, \bar{p}')$ und versehen dafür die Funktionssymbole mit dem Apostroph bzw. mit dem Querstrich. Um die Komponenten (Teilchensorte) zu bezeichnen, versehen wir die Funktionssymbole noch mit Indizes.

Beispiele:

$$\bar{f}_i = f_i(\bar{p}) \quad \dots \text{Verteilungsfunktion der } i\text{-ten Komponente im Argument } \bar{p}$$

$$\eta'_j = \eta_j(p') \quad \dots \text{Rückkehrwahrscheinlichkeit der } j\text{-ten Komponente im Argument } p'$$

Die Schreibweise der Übergangswahrscheinlichkeit kann ebenfalls abgekürzt werden. P_{ij} wird mit zwei Indizes versehen, wobei der erste die Komponente des Testteilchens, der zweite die Komponente des Targetteilchens bedeutet.

$$P_{ij}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p}) = P_{i\bar{j}} \quad (22a)$$

$$P_{ij}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') = P_{i\bar{j}} \quad (22b)$$

Wie aus obigen Gleichungen zu ersehen ist, kürzen wir hier ab, indem die Indizes mit Zusatzzeichen versehen werden.

Das Neunfachintegral wird so abgekürzt:

$$d^3 p' d^3 \bar{p}' d^3 \bar{p} = d^9 p \quad (23)$$

Die Gleichung für n Komponenten lautet daher:

$$0 = Q_i + \eta_i \sum_{j=1}^n \int d^9 p \{ P_{i\bar{j}} \eta'_j \bar{p}'_j - P_{i\bar{j}} \eta_j \bar{p}_j \} \quad (24)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Bei Inversions- Invarianz gilt wieder:

$$P_{i\bar{j}} = P_{i\bar{j}'}$$

Gleichgewichtssystem (24) beschreibt nun die Impulsverteilungen eines Plasmas, bestehend aus n verschiedenen Teilchensorten. Es berücksichtigt Quellen und Senken im Impulsraum; wir haben tatsächlich eine Gleichung für den Nichtgleichgewichtszustand. Es werden ausschließlich Zweierstöße betrachtet, was trotz der weitreichenden Coulomb-Kräfte statthaft ist (Begründung im Teil: Warum Boltzmann-Gleichung?). Das Gleichungssystem (24) ist so allgemein, daß es auch Stoßmechanismen zuläßt, bei denen die Inversions- Invarianz verletzt ist. Dies ist vor allem bei inelastischen Streuungen von Elektronen mit anderen Teilchenarten von Nutzen, da wegen

des Auftretens der Bremsstrahlung besagte Inversions-Invarianz nicht gilt; bei Strahlungen der Elektronen untereinander wird die Bremsstrahlung erst wirksam, sobald sie sich mit relativistisch hohen Geschwindigkeiten gegeneinander bewegen; auch das wird noch von der Gleichung erfaßt: In der Übergangswahrscheinlichkeit stecken keinerlei Annahmen über eine Beschränkung auf niedrige Geschwindigkeiten! Somit ist es auch eine Verallgemeinerung der Gleichung auf Stöße mit Photonen möglich, etwa eine Bilanzgleichung der Synchrotronstrahlungsdichte.

Hier offenbart sich allerdings die Grenze dieses Modells: Wir betrachteten bisher keine Stöße, bei denen Teilchen vernichtet oder erzeugt wurden. Gerade das ist bei der Synchrotronstrahlung der Fall (übrigens auch bei Kernreaktionen oder "Schalen"-Reaktionen, sprich: Ionisation, Umladung, Rekombination etc.)

Das Gleichungssystem läßt sich aber auch auf solche Fälle erweitern.

Ortsteil: Bisher wurde ein Punktmodell (keine Ortsabhängigkeit) betrachtet. Bei Berücksichtigung des Ortsteils der Boltzmann-Gleichung kommt im Stoßterm nur die Ortsabhängigkeit der η -Funktionen dazu.

Wir kehren zurück zum Gleichgewichtssystem (24) und überlegen uns ein Lösungsverfahren. Es gibt im Rahmen der analytischen Methoden kein Verfahren, ein derartiges Gleichungssystem exakt zu lösen, denn man hat es hier mit einem nichtlinearen Integralgleichungssystem (oder einer nichtlinearen Integralgleichung bei Restriktion auf eine Komponente) zu tun. Diskretisiert man die Integralgleichung, indem man die Integrale in Summen und die Variablen in Indizes umschreibt, so erhält man folgende Gleichung:

$$0 = Q_l + \sum_{i,j,k} P_{li,jk} (\phi_i \phi_j - \phi_j \phi_k)$$

Durch Umbenennung der Indizes und Einschleiben des Kronecker-Symbols erhält man:

gesucht: $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$

$$0 = Q_l + \sum_{j,k} \left(\sum_{i,m} \delta_{ij} P_{jk,mi} - \sum_i P_{li,jk} \right) \phi_j \phi_k$$

oder:

$$0 = Q_l - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n A_{l,jk} \phi_j \phi_k \quad l=1,2,\dots,n$$

Wie man sieht, ist auch der diskretisierte Fall praktisch nicht lösbar. Wir müssen also ein Näherungsverfahren suchen, mit dessen Hilfe die Verteilungsfunktionen näherungsweise berechnet werden sollen.

Näherungsverfahren:

Für Plasmen im thermodynamischen Gleichgewicht ist die Verteilungsfunktion bekannt: die Boltzmannverteilung. Wenn wir uns auf Plasmen nahe dem thermodynamischen Gleichgewicht befinden, können wir Gleichungssystem (24) näherungsweise linearisieren.

Linearisierung der inhomogenen Boltzmann-Gleichung

Die Funktionen $f_i(p)$ seien näherungsweise bekannt, sodaß wir ansetzen können:

$$f_i(p) = f_i^{(0)}(p) (1 + \mathcal{Y}_i(p)) \quad (25)$$

Wir verwenden für die $\mathcal{Y}_i(p)$ wieder die abgekürzte Schreibweise:

$$\mathcal{Y}_i(p) = \mathcal{Y}_i ; \quad \mathcal{Y}_i(\bar{p}) = \bar{\mathcal{Y}}_i \quad \text{u.s.f.}$$

Einsetzen in die Mehrkomponenten-Boltzmann-Gleichung:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = 0 = Q_i + \sum_{j=1}^n \int d^3p \left\{ \eta_i P_{i\bar{j}} \eta'_i \bar{\eta}'_j f_i^{(0)} \bar{f}_j^{(0)} (1 + \mathcal{Y}'_i)(1 + \bar{\mathcal{Y}}'_j) - \right. \quad (26)$$

$$\left. - P_{i\bar{j}} \eta_i \bar{\eta}_j f_i^{(0)} \bar{f}_j^{(0)} (1 + \mathcal{Y}_i)(1 + \bar{\mathcal{Y}}_j) \right\}$$

Die vier Faktoren in obiger Gleichung fassen wir zusammen:

$$P_{i\bar{j}'} \eta'_i \bar{\eta}'_j f_i^{(0)} \bar{f}_j^{(0)} =: W_{i\bar{j}'} = W_{ij}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p}) \quad (27)$$

$$P_{i\bar{j}} \eta_i \bar{\eta}_j f_i^{(0)} \bar{f}_j^{(0)} =: W_{i\bar{j}} = W_{ij}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}')$$

Ab nun wird \mathcal{Y}^2 vernachlässigt:

$$0 = Q_i + \sum_{j=1}^n \int d^9 p \left\{ \eta_i W_{i, \bar{j}'} (1 + \mathcal{Y}_i' \bar{\mathcal{Y}}_j') - \right. \\ \left. - W_{i, \bar{j}} (1 + \mathcal{Y}_i + \bar{\mathcal{Y}}_j) \right\} \quad (28)$$

Dieses Gleichungssystem soll auf ein lineares Integralgleichungssystem folgender Form gebracht werden (gesucht: $\mathcal{Y}_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, n$):

$$\mathcal{Y}_i(p) = v_i(p) \mathcal{Y}_i(p) - \sum_{j=1}^n \int K_{ij}(p, p') \mathcal{Y}_j(p') dp'$$

wobei die Funktionen f_i , v_i und K_{ij} im folgenden berechnet werden.

Dies wird bewerkstelligt durch Umbenennung der Integrationsvariablen in denjenigen Termen, wo das Argument \bar{p} oder \bar{p}' in der \mathcal{Y} -Funktion auftritt. Dort vertauschen wir \bar{p} mit p' bzw. \bar{p}' mit p :

$$-Q_i = \sum_{j=1}^n \int d^9 p \left\{ \eta_i (W_{i, \bar{j}'} + W_{i, \bar{j}'} \mathcal{Y}_i' + W_{i, \bar{j}'} \mathcal{Y}_j') - \right. \\ \left. - (W_{i, \bar{j}} + W_{i, \bar{j}} \mathcal{Y}_i + W_{i, \bar{j}} \mathcal{Y}_j') \right\} \quad (29)$$

Zusammenfassung der Terme in Koeffizienten von $\phi_i(p)$ und Absolutglieder:

$$Q_i - \sum_{j=1}^n \int (W_{i, \bar{j}} - \eta_i W_{i, \bar{j}'}) d^9 p = \mathcal{Y}_i \sum_{j=1}^n \int d^9 p W_{i, \bar{j}} - \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^n \int \eta_i W_{i\bar{j}'} \varphi_j' d^9 p + \\
 & + \sum_{j=1}^n \int [W_{ij'} - \eta_i W_{i\bar{j}'}] \varphi_j' d^9 p
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

mit

$$W_{i\bar{j}} = \eta_i \bar{\eta}_j \bar{f}_i \bar{f}_j P_{i\bar{j}}
 \tag{31}$$

$$W_{i\bar{j}'} = \eta_i \bar{\eta}_j' \bar{f}_i' \bar{f}_j' P_{i\bar{j}'}$$

oder

$$W_{ij} = W_{ij}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}')
 \tag{31'}$$

$$W_{i\bar{j}'} = W_{ij}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p})$$

Hiermit haben wir ein lineares Integralgleichungssystem zur Bestimmung der Verbesserungsfunktionen

$$\varphi_1(p), \varphi_2(p), \dots, \varphi_n(p)$$

Reduktion der Gleichung (30) auf ein Zweikomponentensystem

Wir möchten uns im folgenden auf zwei Teilchensorten (Ionen = Index 1, Elektronen = Index 2) beschränken. Dadurch wird Gleichung (30) auf ein System von zwei Integralgleichungen reduziert.

$$\begin{aligned}
 Q_1(p) &= \int [W_{11}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') - \eta_1(p) W_{11}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p})] d^3 p' d^3 \bar{p}' d^3 \bar{p} - \\
 &- \int [W_{12}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') + W_{12}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p})] d^3 p' d^3 \bar{p}' d^3 \bar{p} = \\
 &= \eta_1(p) \int [W_{11}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') + W_{12}(p', \bar{p}' \rightarrow p', \bar{p}')] d^3 p' d^3 \bar{p}' d^3 \bar{p} - \\
 &- \eta_1(p) \int [W_{11}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p}) + W_{12}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p})] d^3 \bar{p} d^3 \bar{p}' \eta_1(p') d^3 p' + \\
 &+ \int [W_{11}(p, \bar{p} \rightarrow p, \bar{p}) - \eta_1(p) W_{11}(p, \bar{p} \rightarrow p, \bar{p})] d^3 \bar{p} d^3 \bar{p}' \eta_1(p) d^3 p + \\
 &+ \int [W_{12}(p, \bar{p} \rightarrow p, \bar{p}') - \eta_1(p) W_{12}(p, \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p})] d^3 \bar{p} d^3 \bar{p}' \eta_2(p) d^3 p'
 \end{aligned} \tag{32}$$

Die zweite Gleichung erhält man durch Vertauschen der Indizes 1 und 2.

Wir fassen ähnliche Terme zusammen und definieren die Größen S_{ν} und K durch:

$$\int [W_{11}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') - \eta_1(p) W_{11}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p})] d^3 p' d^3 \bar{p}' d^3 \bar{p} =: S_{11}(p) \tag{33a}$$

$$\int [W_{12}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') - \eta_1(p) W_{12}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p})] d^3 p' d^3 \bar{p}' d^3 \bar{p} =: S_{12}(p) \tag{33a'}$$

$$\int W_{11}(p\bar{p} \rightarrow p'\bar{p}') d^3p' d^3\bar{p}' d^3\bar{p} = \nu_{11}(p) \quad (33b)$$

$$\int [W_{12}(p\bar{p} \rightarrow p'\bar{p}') d^3p' d^3\bar{p}' d^3\bar{p} = \nu_{12}(p) \quad (33b')$$

$$\int \left\{ \eta_1(p) [W_{11}(p'\bar{p}' \rightarrow p\bar{p}) + W_{12}(p'\bar{p}' \rightarrow p\bar{p}) + W_{11}(\bar{p}'p' \rightarrow p\bar{p})] - \right. \quad (33c)$$

$$\left. - W_{11}(p\bar{p}' \rightarrow \bar{p}, \bar{p}') \right\} d^3\bar{p} d^3\bar{p}' =: K_{11}(p, p')$$

$$- \int [W_{12}(p\bar{p}' \rightarrow \bar{p}, \bar{p}') - \eta_1(p) W_{12}(p'\bar{p}' \rightarrow p\bar{p})] d^3\bar{p} d^3\bar{p}' =: K_{12}(p, p') \quad (33c')$$

Mit dieser Definition lautet Gleichung (32):

$$Q_1(p) - S_{11}(p) - S_{12}(p) = [\nu_{11}(p) + \nu_{12}(p)] \mathcal{Y}_1(p) - \quad (34a)$$

$$- \int K_{11}(p, p') \mathcal{Y}_1(p') d^3p' - \int K_{12}(p, p') \mathcal{Y}_2(p') d^3p'$$

Zweite Gleichung durch Vertauschung der Indizes:

$$Q_2(p) - S_{21}(p) - S_{22}(p) = [\nu_{21}(p) + \nu_{22}(p)] \mathcal{Y}_2(p) - \quad (34b)$$

$$- \int K_{21}(p, p') \mathcal{Y}_1(p') d^3p' - \int K_{22}(p, p') \mathcal{Y}_2(p') d^3p'$$

Auch dieses System bedarf noch einiger Vereinfachungen, vor allem wollen wir statt einem System von Integralgleichungen eine einzige.

Vereinfachungen:

a) Wir nehmen den Teilchenverlust isotrop an, was bedeutet, daß auch $f(p)$ isotrop wird; wir haben also keine Winkelabhängigkeit. Darüberhinaus sei der Teilchenverlust gleichförmig bei jeder Geschwindigkeit. η ist dann keine Funktion mehr, sondern eine Konstante:

$$\eta = \text{const.} \quad 0 < \eta < 1$$

b) Wir nehmen die Elektronenverteilungsdichte als eingepreßt an. Das Gleichungssystem für die Ionen- und Elektronenverteilungsfunktion reduziert sich dabei auf nur eine Gleichung.

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir statt dem Gleichungssystem (34) die Integralgleichung

$$\begin{aligned} Q_1(p) - S_{11}(p) - S_{12}(p) &= \\ &= [\nu_{11}(p) + \nu_{12}(p)] g_1(p) - \int K_{11}(p, p') g_1(p') dp' \end{aligned} \quad (35)$$

Mit Hilfe von Gleichung (35) läßt sich eine Verbesserungsfunktion $\phi(p)$ der passend gewählten Näherung der Ionenverteilungsfunktion $f^{(0)}(p)$ berechnen. Wir erhalten als erste Näherung für die Ionenverteilung:

$$f(p) = f^{(0)}(p) (1 + \phi(p)) \quad (36)$$

Wir haben dabei vorausgesetzt, daß

$$|\varphi(p)| < \varepsilon \ll 1 \quad (37)$$

damit $\varphi^2(p)$ vernachlässigt werden kann.

$Q_1(p)$ ist der Quellterm, S_{11} und S_{12} sind Senkterme. Die \mathcal{V} -Terme und der Kern $K_{11}(p, p')$ beschreiben die Impulsänderungen der Ionen, verursacht durch Stöße der Ionen untereinander und Stöße der Ionen mit Elektronen. Da wir die Verteilungsdichte der Elektronen als gegeben und ihre mittlere Energie kleiner annehmen als die der Ionen, wird der Stoß eines Ions mit einem Elektron im allgemeinen eine Verzögerung des Ions zur Folge haben. Der Kern unserer Integralgleichung (35) wird also auch einen Bremssterm enthalten!

Alle Terme der Gleichung (35), mit Ausnahme des Quellterms $Q_1(p)$ enthalten die Funktion $f^{(0)}(p)$, unseren Ansatz für die Verteilungsdichte der Ionen. Wir müssen also eine passende Funktion $f^{(0)}(p)$ wählen, die der Forderung

$$|\varphi(p)| \ll 1 \quad (37)$$

nachkommt. Im Anschluß an Phase 1 (Berechnung der Terme von Gleichung (35)) werden einige Ansätze für $f^{(0)}(p)$ diskutiert.

Berechnung der Terme von Gleichung (35)

Die Berechnung der Terme von Gleichung (35) wird in zwei Phasen durchgeführt: Zuerst wird unter Verwendung der Deltafunktionen über möglichst viele Variablen integriert,

ohne daß man für den Wirkungsquerschnitt und für die Verteilungsfunktionen eine bestimmte Funktion einsetzt und wir schreiben allgemein σ , f_1 , f_2 . Es wird der Reihenfolge nach $\nu_{12}(p)$, $S_{12}(p)$ berechnet; S_{12} kann als Differenz zweier Terme dargestellt werden:

$$S_{12}(p) = A(p) - B(p) \quad . \quad (38)$$

Wir werden sehen, daß $A(p) = \nu_{12}(p)$ ist, sodaß nur $B(p)$ berechnet werden muß.

Die Terme $\nu_{11}(p)$ und $S_{11}(p)$ folgen durch den Übergang $2 \rightarrow 1$. Der Kern läßt sich als Summe von vier Summanden darstellen, die wir wie folgt bezeichnen:

$$K_{11}(p, p') = I - IIa - IIb - K_{11}^{\text{brems}} \quad (39)$$

Die Terme IIa und IIb folgen durch Übergang $2 \rightarrow 1$ unmittelbar aus K_{11}^{brems} , der die eingeprägte zweite (Elektronen-) Komponente enthält. Term I muß getrennt berechnet werden.

In der zweiten Phase werden explizite Ausdrücke des Wirkungsquerschnitts und der Verteilungsfunktion eingesetzt. Explizite Funktionen werden exemplarisch nur für den Term $\nu_{11}(p)$ berechnet.

Berechnung der Terme von Gleichung (35), Phase 1

Der Term $\nu_{12}(p)$:

$$\nu_{12}(p) = \int W_{12} d^3p = \quad (40)$$

$$= \eta_1 \eta_2 f_1(p) \int P_{12}(p\bar{p} \rightarrow p'\bar{p}') f_2(\bar{p}) d^3p' d^3\bar{p}' d^3\bar{p} =$$

$$= \eta_1 \eta_2 f_1(\rho) \int \frac{1}{\mu^2} \delta\left(\frac{\mu}{2}\left(\frac{\mathbf{p}}{m_1} - \frac{\bar{\mathbf{p}}}{m_2}\right), \frac{(\frac{\mathbf{p}}{m_1} - \frac{\bar{\mathbf{p}}}{m_2}) \cdot \mathbf{q}'}{|\frac{\mathbf{p}}{m_1} - \frac{\bar{\mathbf{p}}}{m_2}|} q'\right) d^3 \bar{\mathbf{p}} d^3 \mathbf{q}' d^3 \mathbf{p}' \quad (40)$$

$$\delta\left(\frac{1}{2\mu} q'^2 - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\mathbf{p}}{m_1} - \frac{\bar{\mathbf{p}}}{m_2}\right)^2\right) \delta(\mathbf{p} + \bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}') f_2(\bar{\mathbf{p}}) d^3 \bar{\mathbf{p}} d^3 \mathbf{q}' d^3 \mathbf{p}'$$

Wir verwenden wieder (siehe Anhang, A):

$$\delta\left(\frac{1}{2\mu} q'^2 - \frac{\mu}{2}\left(\frac{\mathbf{p}}{m_1} - \frac{\bar{\mathbf{p}}}{m_2}\right)^2\right) = \frac{1}{|\frac{\mathbf{p}}{m_1} - \frac{\bar{\mathbf{p}}}{m_2}|} \delta(q' - \mu \left|\frac{\mathbf{p}}{m_1} - \frac{\bar{\mathbf{p}}}{m_2}\right|)$$

Wir integrieren über $d^3 \mathbf{p}'$ und $d^3 \mathbf{q}'$ und erhalten:

$$V_{12}(\rho) = \eta_1 \eta_2 f_1(\rho) \int \frac{|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}|}{m_1 m_2} \delta^{\text{tot}}\left(\frac{\mu}{2}\left(\frac{\mathbf{p}}{m_1} - \frac{\bar{\mathbf{p}}}{m_2}\right)^2\right) f_2(\bar{\mathbf{p}}) d^3 \bar{\mathbf{p}} \quad (41)$$

Restriktion auf den Term V_{11} durch den Übergang $2 \rightarrow 1$:

$$V_{11}(\rho) = \eta_1^2 f_1(\rho) \int \frac{|\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}}|}{2\mu} \delta^{\text{tot}}\left(\frac{1}{2\mu}(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})^2\right) f_1(\bar{\mathbf{p}}) d^3 \bar{\mathbf{p}} \quad (42)$$

Wir unterscheiden hier zwischen $f(\mathbf{p})$ und $f(\rho)$:

$$f(\rho) = \int f(\mathbf{p}) d\Omega = 4\pi f(\rho) \quad (43)$$

Ableitung der Senkterme $S_{11}(p)$ und $S_{12}(p)$

Wir beschränken uns auf die Ableitung von S_{12} , da S_{11} durch Übergang von 2 auf 1 folgt.

$$S_{12}(p) = \int [\underbrace{W_{12}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}')}_{\textcircled{A}} - \underbrace{\eta_1(p) W_{12}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p})}_{\textcircled{B}}] d^9 p \quad (44)$$

$$d^9 p = d^3 p' d^3 \bar{p}' d^3 \bar{p} \quad (23)$$

Ableitung des Terms A:

$$\textcircled{A} = \nu_{12}(p) \quad \text{siehe (36)}$$

Es gelten die Symmetrierelationen

$$W_{12}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') = W_{12}(p', \bar{p}' \rightarrow p, \bar{p}) \quad (45)$$

wenn als nullte Näherung von f die Maxwell-Verteilung verwendet wird:

$$f(p) = \frac{1}{(2m\pi k T)^{3/2}} e^{-\frac{p^2}{2m k T}}$$

Dann gilt nämlich bei Anwendung des Energiesatzes:

$$f(p) f(\bar{p}) = f(p') f(\bar{p}') \quad (46)$$

(siehe Großmann I)

Bei allgemeineren Ansätzen für die Funktion f ist jedoch nicht zu erwarten, daß die Symmetrierelation (45) gilt, wenn sie auch für P_{12} erfüllt sein mag.

Nun gibt es zwei Auswege:

- a) Bestimmung der Funktionenklasse, für die (46) noch erfüllt ist und Wahl einer Näherungsfunktion aus dieser Funktionenklasse
- b) Wir berechnen den Summanden (B) für beliebige Näherungsfunktionen f_1, f_2 und lassen die Symmetrierelation (45) bzw. (46) fallen.

Da (b) einen allgemeineren Lösungsansatz zuläßt, habe ich mich für (b) entschieden.

Ableitung des Terms (B):

$$\begin{aligned} \textcircled{B} &= \eta_1^2 \eta_2 \int P_{12}(p, \bar{p} \rightarrow p', \bar{p}') f_1(p') f_2(\bar{p}') d^3 p' d^3 \bar{p}' d^3 \bar{p} = \\ &= \eta_1^2 \eta_2 \int \frac{1}{\mu^2} \delta \left\{ \frac{\mu}{2} \left(\frac{\bar{p}'}{m_2} - \frac{p'}{m_1} \right)^2, \frac{\bar{p}}{m_2} - \frac{p}{m_1} \right\} \cdot \end{aligned} \quad (47)$$

$$\delta \left(p + \bar{p} - p' - \bar{p}' \right) \delta \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\bar{p}}{m_2} - \frac{p}{m_1} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\bar{p}'}{m_2} - \frac{p'}{m_1} \right)^2 \right).$$

$$f_1(p') f_2(\bar{p}') d^3 p' d^3 \bar{p}' d^3 \bar{p}$$

Nach Integration über $d^3 \bar{p}$ geht $\bar{p}/m_2 - p/m_1$ über in:

$$\frac{\bar{p}}{m_2} - \frac{p}{m_1} = \frac{1}{m_2} (p' + \bar{p}' - p) - \frac{p}{m_1} = \frac{p' + \bar{p}'}{m_2} - \frac{p}{\mu} \quad (48)$$

Damit wird

$$\textcircled{B} = \eta_1^2 \eta_2 \int \frac{1}{\mu^2} \mathcal{G} \left\{ \frac{\mu}{2} \left(\frac{\bar{p}'}{m_2} - \frac{p'}{m_1} \right)^2, \frac{\left(\frac{\bar{p}'}{m_2} - \frac{p'}{m_1}, \frac{p'+\bar{p}'}{m_2} - \frac{p}{\mu} \right)}{\left| \frac{\bar{p}'}{m_2} - \frac{p'}{m_1} \right| \left| \frac{p'+\bar{p}'}{m_2} - \frac{p}{\mu} \right|} \right\}.$$

$$\delta \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{\bar{p}'}{m_2} - \frac{p'}{m_1} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \left(\frac{p'+\bar{p}'}{m_2} - \frac{p}{\mu} \right)^2 \right) \phi_1(p') \phi_1(\bar{p}') d^3 p' d^3 \bar{p}'$$

Substitution:

$$p' + \bar{p}' = \underline{P}' \qquad p' = -q' + \frac{\mu}{m_2} \underline{P}'$$

$$\mu \left(\frac{\bar{p}'}{m_2} - \frac{p'}{m_1} \right) = q' \qquad p' = q' + \frac{\mu}{m_1} \underline{P}'$$

ergibt:

$$\textcircled{B} = \eta_1^2 \eta_2 \int \frac{1}{\mu^2} \mathcal{G} \left\{ \frac{q'^2}{2\mu}, \frac{\left(q', \frac{P}{m_2} - \frac{p}{\mu} \right)}{q' \left| \frac{P}{m_2} - \frac{p}{\mu} \right|} \right\} \delta \left(\frac{q'^2}{2\mu} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{P'}{m_2} - \frac{p}{\mu} \right)^2 \right).$$

$$\phi_1 \left(-q' + \frac{\mu}{m_2} \underline{P}' \right) \phi_2 \left(q' + \frac{\mu}{m_1} \underline{P}' \right) d^3 q' d^3 \underline{P}'$$

Substitution:

$$\frac{P'}{m_2} - \frac{p}{\mu} = \underline{v}$$

$$\underline{P}' = m_2 \underline{v} + \frac{m_2}{\mu} p$$

$$d^3 \underline{P}' = m_2^3 d^3 \underline{v}$$

Damit

$$\textcircled{B} = \eta_1^2 \eta_2 \frac{1}{\mu^2} m_2^3 \int d^3 \underline{v} \int d^3 q' \delta \left\{ \frac{q'^2}{2\mu}, \frac{(q' \cdot \underline{v})}{q' v} \right\} \delta \left(\frac{q'^2}{2\mu} - \frac{\mu}{2} v^2 \right) \cdot$$

$$f_1(\mu \underline{v} - q' + p) f_2 \left(q' + \frac{m_2}{m_1} (\mu \underline{v} + p) \right)$$

Wir wählen das q' -System so, daß seine z -Achse parallel zu v ist:

$$\underline{q}' = q' \begin{pmatrix} \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ \cos \vartheta' \end{pmatrix} \quad \underline{\Omega}' = \begin{pmatrix} \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ \cos \vartheta' \end{pmatrix}$$

Damit

$$\textcircled{B} = \eta_1^2 \eta_2 \frac{m_2^3}{\mu^2} \int d^3 \underline{v} \int q'^2 dq' \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \delta \left\{ \frac{q'^2}{2\mu}, \cos \vartheta' \right\} \cdot$$

$$\frac{\mu}{q'} \delta(q' - \mu v) f_1(-q' + \mu \underline{v} + p) f_2 \left(q' + \frac{m_2}{m_1} (\mu \underline{v} + p) \right)$$

$$= \eta_1^2 \eta_2 m_2^3 \int d^3 \underline{v} \int v^2 \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \delta \left\{ \frac{\mu}{2} v^2, \cos \vartheta' \right\} \cdot$$

$$\frac{1}{v} f_1 \left\{ -\mu v \underline{\Omega}' + \mu \underline{v} + p \right\} f_2 \left(\mu v \underline{\Omega}' + \frac{m_2}{m_1} (\mu \underline{v} + p) \right) \cdot$$

Mit Hilfe der Gleichung (38) (es gilt: $S_{12}(p) = \mathcal{V}_{12}(p) - B_{12}(p)$) können wir das Ergebnis für S_{12} schon hinschreiben:

$$S_{12}(p) = \eta_1 \eta_2 \phi_1(p) \int \left| \frac{p}{m_1} - \frac{\bar{p}}{m_2} \right| \sigma^{tot} \left(\frac{\mu}{2} \left(\frac{p}{m_1} - \frac{\bar{p}}{m_2} \right)^2 \right) \phi_2(\bar{p}) d^3 \bar{p} -$$

$$- \eta_1^2 \eta_2 m_2^3 \int d^3 v \int v \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \sigma \left\{ \frac{\mu}{2} v^2, \cos \vartheta' \right\}. \quad (49)$$

$$\phi_1 \left\{ -\mu v \underline{\Omega}' + \mu \underline{v} + p \right\} \phi_2 \left\{ \mu v \underline{\Omega}' + \frac{m_2}{m_1} (\mu \underline{v} + p) \right\} d\Omega(p)$$

Restriktion auf den Term S_{11} durch den Übergang $2 \rightarrow 1$:

$$S_{11}(p) = \eta_1^2 \phi_1(p) \int \frac{|p - \bar{p}|}{2\mu} \sigma^{tot} \left(\frac{1}{2\mu} (p - \bar{p})^2 \right) \phi_1(\bar{p}) d^3 \bar{p} -$$

$$- \eta_1^3 m_1^3 \int d^3 v \int v \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi' \sigma \left\{ \frac{\mu}{2} v^2, \cos \vartheta' \right\}. \quad (50)$$

$$\phi_1 \left\{ \mu v \underline{\Omega} + \mu \underline{v} + p \right\} \phi_1 \left\{ -\mu v \underline{\Omega} + \mu \underline{v} + p \right\}$$

Ableitung des Kerns

Wie aus (39) ersichtlich, hat der Kern $K_{11}(p, p')$ folgende Form:

$$K_{11}(p, p') = \int \left\{ \eta_1(p) \left[W_{11}(p' \bar{p}' \rightarrow p \bar{p}) + W_{11}(\bar{p}' p' \rightarrow p \bar{p}) \right] - \right.$$

$$- W_{11}(pp' \rightarrow \bar{p}\bar{p}') \} d^3\bar{p} d^3\bar{p}' + \eta_1(p) \int W_{12}(p\bar{p}' \rightarrow p\bar{p}) d^3\bar{p} d^3\bar{p}'$$

W_{12} enthält den Wirkungsquerschnitt für Reaktionen verschiedenartiger Teilchen (Elektronen, Ionen). Dieser Term liefert Aussagen über die Bremsung der Ionen. Obwohl wir zwar hier die Bremsstrahlung vernachlässigen, stellt die Funktion W_{12} , die lediglich den elastischen Streuquerschnitt von Elektronen und Ionen enthält, einen Bremsterm dar. Wir setzen nämlich die Elektronenverteilungsfunktion etwas niederenergetischer an (Begründung dafür siehe 55). Das heißt aber, daß das kalte Elektronengas dem heißen Ionengas dauernd Wärme entzieht, die dem Ionengas die konstante Ionenquelle nachgeliefert werden muß.

Alle anderen Terme (I, IIa, IIb) berücksichtigen nur Stöße der Ionen untereinander. Da diese Stöße - von den vernachlässigbar seltenen Kernreaktionen abgesehen - vorwiegend elastisch sind (keine Bremsstrahlung¹⁾), tragen sie auch nichts zu einer Verminderung der kinetischen Ionentemperatur bei.

Wir kürzen also ab:

$$K_{11}(p, p') = K_{11}^{el}(p, p') + K_{11}^{brems}(p, p') \quad (51)$$

K_{11}^{el} zerfällt in zwei Summanden, I, IIa und II b:

$$K_{11}^{el}(pp') = -\eta_1^2 f_1(p) f_1(p') \int P_{11}(pp' \rightarrow \bar{p}\bar{p}') d^3\bar{p} d^3\bar{p}' + \quad (52)$$

I

1) Rose Clark / Plasma and Controlled Fusion

$$+ \eta_1^3 f_1(p) \int [P_{11}(p\bar{p}' \rightarrow p\bar{p}) + P_{11}(\bar{p}'p' \rightarrow \bar{p}p)] f_1(p') d^3\bar{p} d^3\bar{p}'$$

II a

II b

$$I = \frac{-\eta_1^2}{4\mu} f_1(p) f_1(p') \int |p-p'| \sigma^{tot} \left(\frac{1}{8\mu} |p-p'| \right) \sin\vartheta d\vartheta \quad (53a)$$

Mit einem ähnlichen Rechenaufwand wie für $S_{11}(p)$ und $S_{12}(p)$ erhält man für $K_{11}(p, p')$:

$$K_{11}^{brems}(p, p') = \frac{\eta_1^2 \eta_2}{16} f_1(p) \left(\frac{m_2}{\mu} \right)^3 \int \frac{|p-p'|}{\mu} \cdot \sigma \left\{ \frac{|p-p'|^2}{8\mu \cos^2\vartheta}, \text{sign}(\cos\vartheta')(1-2\cos\vartheta') \right\} \frac{1}{|\cos^3\vartheta'|} \cdot \quad (53b)$$

$$f_2 \left\{ \frac{m_2}{2\mu} |p-p'| \frac{\Omega'}{\cos\vartheta'} + \frac{m_2}{m_1} p' \begin{pmatrix} \sin\vartheta' \\ 0 \\ \cos\vartheta' \end{pmatrix} \right\} \sin\vartheta' d\vartheta' dy' \sin\vartheta d\vartheta$$

$$\vartheta = \vartheta(p, p')$$

$$\text{II a)} = \eta_1 \int W_{11} d^3\bar{p} d^3\bar{p}' = \eta_1^3 f_1(p) \int \frac{|p-p'|}{2\mu} \cdot$$

$$\sigma \left\{ \frac{|p-p'|^2}{8\mu \cos^2\vartheta'}, \text{sign}(\cos\vartheta')(1-2\cos\vartheta') \right\} \cdot \quad (53c)$$

$$f_2 \left\{ |p-p'| \frac{\Omega'}{\cos\vartheta'} + p' \begin{pmatrix} \sin\vartheta' \\ 0 \\ \cos\vartheta' \end{pmatrix} \right\} \sin\vartheta' d\vartheta' dy' \sin\vartheta$$

$$\text{II b)} = \eta_1 \int W_{11} d^3\bar{p}' d^3\bar{p} = \eta_1^3 f_1(p) \int \frac{|p-p'|}{2\mu} \cdot$$

$$\sigma \left\{ \frac{|p-p'|^2}{8\mu \cos^2\vartheta'}, \text{sign}(\cos\vartheta')(2\cos\vartheta' - 1) \right\} \cdot \quad (53d)$$

$$f_1 \left\{ |p-p'| \frac{\Omega'}{\cos\vartheta'} + p' \begin{pmatrix} \sin\vartheta' \\ 0 \\ \cos\vartheta' \end{pmatrix} \right\} \sin\vartheta' d\vartheta' dy' \sin\vartheta$$

Berechnung der Terme von Gleichung (35), Phase 2:

Wir setzen jetzt für den Wirkungsquerschnitt und für die Verteilungsfunktionen f_1 , f_2 explizite Funktionen an.

A) Der Wirkungsquerschnitt^{1) 3)}

Wir nehmen an, die Teilchen seien in folgenden Energiebereichen:

Ionen im Bereich um 600 keV (oder unterhalb)

Elektronen im Bereich um 100 keV

Wir setzen Quasineutralität voraus: $n_1 = n_2$

n_1 ... Ionen pro cm^3

n_2 ... Elektronen pro cm^3

Es ist wünschenswert, daß die Ionen in einem Bereich um 600 keV liegen, weil hier der Fusionswirkungsquerschnitt genügend hoch ist, und der Coulomb-Streuquerschnitt bei hohen Energien sinkt.

Da die Energie der Ionen bei 600 keV weit unter dem relativistischen Bereich liegt, können wir die Bremsstrahlungsverluste der Ionen untereinander vernachlässigen.²⁾

Wir verwenden den in der Plasmaphysik gebräuchlichen Wirkungsquerschnitt³⁾

1) T. Kamash, Fusion Reactor Physics

2) Rose - Clark, Plasmas and Controlled Fusion

3) Siehe: Skizze einer quantenmechanischen Ableitung des Wirkungsquerschnittes; diese Arbeit.

$$\sigma(\theta, v) = \left(\frac{e_1 e_2}{2\mu v^2} \right)^2 \frac{1}{[\sin^2 \theta/2 + 1/4 \theta_0^2(v)]^2}$$

v ... Relativgeschwindigkeit

der sich als erste Bornsche Näherung des Potentials $V(r)$ ergibt:¹⁾

$$V(r) = \frac{e_1 e_2}{r} e^{-\alpha r} = \frac{e_1 e_2}{r} e^{-r/\lambda_0}$$

$$\sigma(\theta, v) = \left(\frac{e_1 e_2}{2\mu v^2} \right)^2 \frac{1}{[\sin^2 \theta/2 + \hbar^2/4\pi \lambda_0^2 v^2 \mu^2]^2} \quad (54)$$

Auch der Wirkungsquerschnitt für die Streuung Ion - Elektron bzw. Elektron - Elektron hat eine ähnliche Form, nur daß eben eine andere reduzierte Masse einzusetzen ist.

Allerdings muß in allen Fällen die Abschirmungskonstante α neu diskutiert werden: Erstens liegen in unserem Fall keine Boltzmann-Verteilungen vor, und zweitens haben das Elektronen- und das Ionengas verschiedene kinetische Temperaturen.

Es ist nicht notwendig, für die Ionen- Elektronen- Wechselwirkung den komplizierten Bremsstrahlungswirkungsquerschnitt zu verwenden, da dieser Energieverlust nur die Elektronenverteilungsdichte beeinflusst, und die haben

1) Siehe: Skizze einer quantenmechanischen Ableitung des Wirkungsquerschnittes; diese Arbeit

wir ja als eingepreßt angenommen. Durch diesen Bremsmechanismus wird aber bevorzugt den Elektronen kinetische Energie entzogen, weil gerade sie wegen ihrer geringen Masse im Einfluß der Ionenfelder große Beschleunigungen erfahren. Jede beschleunigte Ladung strahlt Energie ab. Die Beschleunigung der Ionen durch Elektronenstreuung ist unwesentlich klein, und daher wirkt der Energieverlust durch Bremsstrahlung nur auf Elektronen.

Wir nehmen aber in unserem Modell die Elektronentemperatur von vornherein niedriger an als die Iontemperatur, so, als ob die Temperaturabsenkung der Elektronen infolge des Bremsstrahlungsverlustes schon bekannt wäre.

Dann interessiert uns aber noch die Temperaturabsenkung der Ionen. Bei den meisten Streuungen eines Ions mit einem Elektron, dessen Energie im Mittel kleiner ist als die des Ions, verliert das Ion Energie. Das wird aber vorwiegend durch elastische Streuungen bewirkt, und deswegen verwenden wir hier den elastischen Streuquerschnitt.

Totaler Wirkungsquerschnitt

Wie aus vorigen Ausführungen ersichtlich ist, benötigen wir für die Transportgleichung auch den totalen Wirkungsquerschnitt. Die Integration über den Streuwinkel ist elementar (Übergang auf die Integrationsvariable $y = \sin(\theta/2)$) und daher geben wir nur das Ergebnis an:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}}(v) &= \left(\frac{e_1 e_2}{2\mu v^2}\right)^2 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta d\theta}{[\sin^2\theta/2 + \frac{1}{4}\theta_0^2(v)]^2} \\ &\approx \frac{4\pi}{\theta_0^2(v)} \cdot \left(\frac{e_1 e_2}{\mu v^2}\right)^2 \end{aligned} \quad (54')$$

B) Verschiedene Ansätze für die Elektronen- und Ionenverteilung

Wie im Anschluß an Gleichung (37) erwähnt wurde, benötigen wir für die Testfunktion $f_1^{(0)}(p)$ der Ionendichte einen Ansatz, der es ermöglichen soll, daß die Verbesserungsfunktion $\eta(p)$ möglichst klein wird. Auch für die Elektronen nehmen wir eine (eingeprägte) Verteilungsdichte an.

Die Elektronenverteilungsfunktion

Für die Elektronen prägen wir ~~eine~~ Boltzmann-Verteilung ein:

$$f_2(p) = n_2 \left(\frac{c}{\pi}\right)^{3/2} e^{-c^2 p^2} \quad ; \quad c^2 = \frac{1}{2m_2 k T_2} \quad (55)$$

Zu diesem Ansatz sind wir deswegen berechtigt, weil sich die Elektronen infolge der hohen Geschwindigkeiten am häufigsten stoßen (im Vergleich zu den Ionen) und sich daher sehr schnell eine Boltzmann-Verteilung einstellt.

Die Verteilungsfunktion der Ionen

Das ist gerade die Funktion, die wir bestimmen wollen. Wir setzen an:

$$f_1(p) = f_1^{(0)}(p)(1 + \varphi(p)) \quad (36)$$

$$|\varphi(p)| < \epsilon \ll 1 \quad (37)$$

In diesem speziellen Fall haben wir einen "kleineren" Definitionsbereich (statt R^3 nur R^+ , d.h. die positive reelle Achse). Wir müssen aber $f_1^{(0)}(p)$ so ansetzen, daß $f_1^{(0)}$ schon fast die Lösung ist. Wir werden also in den Ansatz $f_1^{(0)}$ so viele freie Parameter einbauen und sie so bestimmen, daß $\varphi(p)$ für alle p möglichst klein wird.

$\underline{\alpha}_0$ wird also so bestimmt:

$$\varphi_{\min}(p, \underline{\alpha}_0) = \inf_{\underline{\alpha} \in \bar{A}} \left\{ \sup_{p \in R^+} (|\varphi(p, \underline{\alpha})|) \right\} \quad (56)$$

\bar{A} ... Wertebereich der $\underline{\alpha}$

Mögliche Ansätze für $f_1^{(0)}(p, \underline{\alpha})$:

$$(I) \quad f_1^{(0)}(p) = \frac{n_1}{p^2} \delta(p-p_0) \quad (57a)$$

$$(II) \quad f_1^{(0)}(p) = n_1 \alpha \left(\frac{c}{\pi}\right)^{3/2} e^{-cp^2} + \frac{(1-\alpha)n_1}{4\pi p^2} \delta(p-p_1) \quad (57b)$$

$$(III) \quad f_1^{(0)}(p) = \frac{n_1 \alpha (c/\pi)^{3/2} \exp(-c(p-p_c)^2)}{(1+2cp_c^2)(1+\operatorname{erf}(\sqrt{c} p_c)) + 2p_c \sqrt{c/\pi} e^{-cp_c^2}} + \frac{n_1(1-\alpha)}{4\pi p^2} \delta(p-p_2) \quad (57c)$$

$$(IV) f_1^{(0)}(p) = \frac{n_1}{4\pi} \left\{ \alpha A \exp[-a(p-p_a)^2] \theta(p_1-p) + \right. \\ \left. + \alpha B \exp[-b(p-p_b)^2] \theta(p-p_1) + \frac{1-\alpha}{p^2} \delta(p-p_1) \right\} \quad (57d)$$

Die Normierung ist in allen vier Fällen:

$$\int f_1(p) d^3p = n_1 = \int f_1^{(0)}(p) d^3p \quad (7) \quad (58)$$

Im Fall (iv) müssen bei obiger Bedingung (58) die Konstanten A und B folgende Gleichung erfüllen:

$$1 = \frac{A}{4\pi} \left(\frac{V}{a}\right)^{3/2} \left\{ (1 + 2a p_a^2) (\operatorname{erf}((p_1-p_a)\sqrt{a}) + \operatorname{erf}(p_a\sqrt{a})) - \right. \\ \left. - 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} (p_1+p_a) \exp[-(p_1-p_a)^2 a] + 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} p_a \exp[-p_a^2 a] \right\} + \quad (59) \\ + \frac{B}{4\pi} \left(\frac{V}{b}\right)^{3/2} \left\{ (1 + 2b p_b^2) (1 + \operatorname{erf}((p_b-p_1)\sqrt{b})) + 2\sqrt{\frac{b}{\pi}} (p_b+p_1) \exp[-(p_1-p_b)^2 b] \right\}$$

Die Berechnung dieser Bedingung ist etwas umfangreich und wir wollen sie daher übergehen.

Weitere Lösungsvorschläge und Begründung der Ansätze
der Ionenverteilung $f_1^{(0)}(p)$:

Kann man für die Ionenverteilungsdichte $f_1(p)$ eine Lösung finden, ohne daß die Verbesserungsfunktion berechnet werden muß, d.h. ohne daß die Integralgleichung (35) gelöst werden muß? Wie findet man diejenige Testfunktion $f_1^{(0)}(p)$, die $|\varphi(p)|$ zu einem Minimum macht? Diese Testfunktion wäre bereits eine gute Näherung unserer Ionenverteilungsdichte.

Wenn φ frei von Unstetigkeitsstellen und "Knicken" ist, läßt sich φ_{\min} auf elementare Weise durch Differenzieren und Nullsetzen bestimmen.

Es gilt dann:

$$\varphi_{\min}(p, \underline{\alpha}_0) = \underset{\alpha \in \bar{A}}{\text{Min}} \left\{ \underset{p \in R}{\text{Max}} (|\varphi(p, \alpha)|) \right\} \quad (60)$$

\bar{A} ... Wertebereich der α

φ ist ein Funktional der $f_1^{(0)}(p)$; diese Funktion muß also passend gewählt werden, damit $\varphi(p, \vec{\alpha})$ die geforderten Bedingungen erfüllt.

Zunächst beweisen wir, daß $f_1^{(0)}(p)$ an der Stelle $p = p_1$ eine δ -förmige Singularität hat.

Umformung der (nicht-linearen) Ausgangsgleichung (24):

$$0 = Q_1 + \eta_1 \int d^3p (P_{11} \eta_1' f_1' \bar{\eta}_1' \bar{f}_1' - P_{11} f_1 \bar{\eta}_1 \bar{f}_1) + \quad (61)$$

$$+ \eta_1 \int d^3p (P_{11} \eta_1' \bar{p}_1' \bar{\eta}_2' \bar{p}_2' - P_{12} \eta_1 \bar{\eta}_2 \bar{p}_2) \quad (61)$$

Wir haben hier vereinbart: $f_1 = f_1(p)$
 $\bar{f}_1 = f_1(\bar{p})$ usw.

Wir ziehen die Funktion $f_1(p)$, über die nicht integriert wird, aus dem Integral heraus und schreiben den Term auf die andere Seite:

$$\eta_1(p) f_1(p) \int d^3p (P_{11} \bar{\eta}_1 \bar{p}_1 + P_{12} \bar{\eta}_2 \bar{p}_2) = \quad (62)$$

$$= Q_1(p) + \int d^3p (P_{11} \eta_1' \bar{p}_1' \bar{\eta}_1' \bar{p}_1' + P_{12} \eta_1' \bar{p}_1' \bar{\eta}_2' \bar{p}_2')$$

$$\eta_1(p) f_1(p) = \frac{Q_1(p) + \int d^3p (P_{11} \eta_1' \bar{p}_1' \bar{\eta}_1' \bar{p}_1' + P_{12} \eta_1' \bar{p}_1' \bar{\eta}_2' \bar{p}_2')}{\int d^3p (P_{11} \bar{\eta}_1 \bar{p}_1 + P_{12} \bar{\eta}_2 \bar{p}_2)}$$

Durch $\eta_1(p)$ darf nicht dividiert werden, da diese Funktion den Wert Null annehmen kann.

$Q_1(p)dp$ ist die Anzahldichte der Teilchen der Sorte 1 (Ionen), die pro Sekunde in das Impulsintervall $(p, p+dp)$ von einer äußeren Quelle eingeschossen werden. Wir nehmen diese Quelle monoenergetisch an - das bedeutet, $Q(p)$ ist deltaförmig singular.

Im betrachteten Fall ist der Einschubimpuls der Ionen $p = p_1$. An der Stelle $p = p_1$ hat somit $f_1(p)$ ebenfalls eine deltaförmige Singularität, was wir im Ansatz für $f_1^{(0)}(p)$ durch

Zufügen eines additiven Terms berücksichtigen.

Durch Integration über $f_1(p)$ wird die Singularität "geglättet", wir müssen aber noch mit Unstetigkeitsstellen und Unstetigkeiten in den Ableitungen an der Stelle $p = p_1$ rechnen.

Der deltaförmige Term im Ansatz von $f_1(p)$ bewirkt, daß die Funktion $\nu_{11}(p)$ unstetig in den Ableitungen wird, wenn man den Rest der Funktion (ohne den Delta-Term) als stetig und differenzierbar voraussetzt (z.B. die Ansätze (47c) und (d)). Das würde aber eine Unstetigkeit in der ersten Ableitung der Funktion $y(p)$ implizieren, aber gerade das wollen wir ja vermeiden:

$$y(p) = \frac{S_{11}(p) + S_{12}(p) - Q_1(p) + \int K_{11}(pp') (S_{11}(p') + S_{12}(p') - Q_1(p')) dp'}{\nu_{11}(p) + \nu_{12}(p)} \quad (63)$$

$$\frac{d}{dp}(\nu_{11}(p)) \text{ unstetig} \Rightarrow \frac{d}{dp}(y(p)) \text{ unstetig}$$

Die Unstetigkeit der ersten Ableitung von $\nu_{11}(p)$ überträgt sich also auf $y(p)$.

Auf eine ähnliche Weise könnte sich eine Unstetigkeitsstelle die durch die Integration über $Q_1(p')$ involviert wird, ebenfalls auf $y(p)$ übertragen.

Wir fordern also:

$$\lim_{p \rightarrow p_1^+} y(p) = \lim_{p \rightarrow p_1^-} y(p) \quad \dots \quad \text{Stetigkeitsbedingung} \quad (64)$$

$$\lim_{p \rightarrow p_1^+} y'(p) = \lim_{p \rightarrow p_1^-} y'(p) \quad \dots \quad \text{Differenzierbarkeitsbedingung} \quad (65)$$

Diesen Forderungen kann man nachkommen, indem man im Ansatz $f_1^{(0)}(p)$, $p = p_1$, die Unstetigkeitsstellen (und Delta-Singularitäten) so wählt, daß man in der Funktion keine mehr hat. Durch diese Nebenbedingungen wird die Lösungsmannigfaltigkeit von $\mathcal{Y}(p, \underline{x})$ erheblich eingeschränkt.

Weitere Nebenbedingungen, die durch die Normierung folgen:

$$\begin{aligned} n_1 &= \int \mathcal{f}_1(p) d^3p = \int \mathcal{f}_1^{(0)}(p)(1 + \mathcal{Y}(p)) d^3p = \\ &= \int \mathcal{f}_1^{(0)}(p) d^3p + \int \mathcal{Y}(p) \mathcal{f}_1^{(0)}(p) d^3p = n_1 + 0 \end{aligned}$$

$$\int \mathcal{f}_1^{(0)}(p) d^3p = n_1 \quad \text{laut Voraussetzung} \quad (58)$$

$$\int \mathcal{Y}(p) \mathcal{f}_1^{(0)}(p) d^3p = 0 \quad (66)$$

Wir haben gesehen, daß $f_1(p)$ Singularitäten und Unstetigkeitsstellen bei $p = p_1$ hat. Diese Erkenntnis erlaubt uns nur mehr den Ansatz (iv), Gleichung (57d)

$f_1(p)$ ist dann eine Funktion von p und den acht Parametern $n_1, \alpha, A, B, a, b, p_a$ und p_b . Die Parameterwerte folgen aus der Stetigkeits- und Differenzierbarkeitbedingung von \mathcal{Y} , der Normierung (7), der Extremalbedingung (Gleichung 60).

Wie bereits die Zwischenergebnisse (Gleichungen 49, 50, 53a-d) des Abschnittes "Berechnung der Terme von Gleichung 35, Phase 1" zeigen, wird unsere Integralgleichung sehr komplizierte

Terme erhalten. Im folgenden werden wir einen davon berechnen: den Term $\nu_{11}(p)$.

Berechnung des Terms $\nu_{11}(p)$:

Wir setzen in Gleichung (42) unsere Näherung des totalen Wirkungsquerschnitts ein (Gleichung 54), sowie Ansatz (iv) unserer Testfunktion $f_1^{(0)}(p)$ der Ionenverteilungsdichte (Gleichung 57). Wir erhalten somit drei Terme:

$$\begin{aligned} \nu_{11}(p) &= \eta_1^2 \xi_1(p) \int \frac{|p-\bar{p}|}{2\mu} \sigma^{\text{tot}} \left(\frac{1}{2\mu} (p-\bar{p})^2 \right) \xi_1(\bar{p}) d\bar{p} = \\ &= \eta_1^2 \xi_1(p) \int \frac{1}{2\mu} \sqrt{p^2 + \bar{p}^2 - 2p\bar{p} \cos \vartheta} \cdot \frac{4\pi}{\theta_0^2 \left(\frac{1}{2\mu} \sqrt{p^2 + \bar{p}^2 - 2p\bar{p} \cos \vartheta} \right)} \cdot \\ &\quad \left(\frac{e_1^2}{\frac{1}{4}(p^2 + \bar{p}^2 - 2p\bar{p} \cos \vartheta)} \right)^2 \left\{ \frac{n_1(1-\alpha)}{4\pi \bar{p}^2} \delta(\bar{p}-p_1) + \right. \\ &\quad \left. + A \exp[-a(p-p_1)^2] + B \exp[-b(p-p_1)^2] \right\} \bar{p}^2 d\bar{p} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \\ &= \nu_{11}^{\text{I}}(p) + \nu_{11}^{\text{II}}(p) + \nu_{11}^{\text{III}}(p) \end{aligned} \quad (67)$$

Die Konstanten A und B genügen der Normierungsbedingung (59). Für $\theta_0(\sigma)$ schreiben wir jetzt:

$$\theta_0(\sigma) = \frac{\hbar}{\mu \lambda_D \sigma} \left(1 + \frac{2e_1 e_2}{\hbar \sigma} \right) \quad (68)$$

In Gleichung (68) geht der klassische Wirkungsquerschnitt ($\sigma \ll 2e_1 e_2 / \hbar$) stetig in den quantenmechanischen über ($\sigma \gg 2e_1 e_2 / \hbar$). Bei der Integration wollen wir uns auf den einfachsten der drei Terme der Gleichung (67) beschränken, was der Wahl des Ansatzes (i), Gleichung (57a) gleichkommt.

$$= \frac{1}{2\mu} \eta_1^2 n_1 (1-\alpha) 4e_1^2 \left(\frac{\mu\lambda_0}{\hbar}\right)^2 f_1(p)$$

$$\int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} dy \frac{\sqrt{p^2 + p_1^2 - 2pp_1 \cos\vartheta}}{\left(\frac{1}{2\mu} \sqrt{p^2 + p_1^2 - 2pp_1 \cos\vartheta} + \frac{2e_1^2}{\hbar}\right)^2} =$$

$$= 16\pi \eta_1^2 (1-\alpha) n_1 \frac{e_1^4}{\mu} \left(\frac{\mu\lambda_0}{\hbar}\right)^2 f_1(p) \frac{1}{\sqrt{p^2 + p_1^2}}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - \frac{2pp_1 x}{p^2 + p_1^2}} dx}{\left(\sqrt{1 - \frac{2pp_1 x}{p^2 + p_1^2}} + \frac{4\mu e_1^2}{\hbar \sqrt{p^2 + p_1^2}}\right)^2}$$

$$\text{Def.:} \quad \frac{2pp_1}{p^2 + p_1^2} = k \quad \frac{4\mu e_1^2}{\hbar \sqrt{p^2 + p_1^2}} = c$$

$$\text{Subst.:} \quad \sqrt{1 - kx} = u \quad du = \frac{-k dx}{2\sqrt{1 - kx}} = -\frac{k}{2u} dx$$

$$dx = -\frac{2}{k} u du$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - kx} dx}{\left(\sqrt{1 - kx} + c\right)^2} = -\frac{2}{k} \int_{\frac{1+u}{1+u}}^{\frac{1+u}{1+u}} \frac{u^2 du}{(u+c)^2} =$$

$$= \frac{2}{k} \left\{ u - 2c \log|u+c| - \frac{c^2}{(u+c)^2} \right\} \frac{1+u}{1-u} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{k} \left\{ \sqrt{1+k} - \sqrt{1-k} - 2\alpha \log \frac{\sqrt{1+k} + c}{\sqrt{1-k} - c} - \frac{c^2}{(\sqrt{1+k} + c)^2} + \frac{c^2}{(\sqrt{1-k} + c)^2} \right\} \\
 &= \frac{p^2 + p_1^2}{pp_1} \left\{ \frac{p + p_1}{\sqrt{p^2 + p_1^2}} - \frac{|p - p_1|}{\sqrt{p^2 + p_1^2}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8\mu e_1^2}{\hbar \sqrt{p^2 + p_1^2}} \log \frac{p + p_1 + \frac{4\mu e_1^2}{\hbar}}{|p - p_1| + \frac{4\mu e_1^2}{\hbar}} - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{4\mu e_1^2}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{p^2 + p_1^2} \left(\frac{p^2 + p_1^2}{(p + p_1 - \frac{4\mu e_1^2}{\hbar})^2} - \frac{p^2 + p_1^2}{(p - p_1 + \frac{4\mu e_1^2}{\hbar})^2} \right) \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{p^2 + p_1^2}}{pp_1} \left\{ p + p_1 - |p - p_1| - \frac{8\mu e_1^2}{\hbar} \log \frac{p + p_1 + \frac{4\mu e_1^2}{\hbar}}{|p - p_1| + \frac{4\mu e_1^2}{\hbar}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{p^2 + p_1^2} \left(\frac{4\mu e_1^2}{\hbar} \right)^2 \frac{(p - p_1)^2 + 2p_0|p - p_1| + p_0^2 - (p + p_1)^2 - 2p_0(p + p_1) - p_0^2}{(p^2 - p_1^2 + p_0|p - p_1| + p_0(p + p_1) + p_0^2)^2} \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{p^2 + p_1^2}}{pp_1} \left\{ p + p_1 - |p - p_1| - \frac{8\mu e_1^2}{\hbar} \log \frac{p + p_1 + \frac{4\mu e_1^2}{\hbar}}{|p - p_1| + \frac{4\mu e_1^2}{\hbar}} - \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{p^2 + p_1^2} \left(\frac{4\mu e_1^2}{\hbar} \right)^2 \begin{cases} \frac{-4p_1(p + p_0)}{((p + p_0)^2 - p_1^2)^2} ; & p > p_1 \\ \frac{-4p(p_0 + p_1)}{((p_1 + p_0)^2 - p^2)^2} ; & p < p_1 \end{cases} \right\} \\
 & p_0 = \frac{4\mu e_1^2}{\hbar} \\
 & \nu_{11}^{(2)}(p) = 16\pi \eta_1^2 (1 - \alpha) n_1 \frac{e_1^4}{\mu} \left(\frac{\mu \lambda_0}{\hbar} \right)^2 \cdot \frac{f_1(p)}{pp_1} \\
 & \left\{ 2p_1 - 2p_0 \log \frac{p + p_1 + p_0}{p - p_1 + p_0} + p_0^2 \sqrt{p^2 + p_1^2} \frac{4p_1(p + p_0)}{(p + p_0)^2 - p_1^2} \right\} ; p > p_1
 \end{aligned}$$

$$\nu_{11}^I(\rho) = 16 \pi \eta_1^2 (1-\alpha) n_1 \frac{e_1^4}{\mu} \left(\frac{\mu \lambda_D}{\hbar} \right)^2 \cdot \frac{f_1(\rho)}{\rho \rho_1}.$$

$$\left\{ 2\rho - 2\rho_0 \log \frac{\rho + \rho_1 + \rho_0}{\rho - \rho_1 + \rho_0} + \rho_0^2 \sqrt{\rho^2 + \rho_1^2} \cdot \frac{4\rho(\rho_0 + \rho_1)}{(\rho_0 + \rho_1)^2 - \rho^2} \right\}; \rho < \rho_1$$

$\nu_{11}^I(\rho)$ (Gl. 67) ist der einfachste Term der Integralgleichung. Der physikalisch und mathematisch sinnvollste Ansatz für $f_1(\rho)$ ist Funktion (iv), Gl. 57. Das ist aber gleichzeitig der komplizierteste: man bedenke, daß einige Terme der Integralgleichung (35) die Integration über $f_1(\rho)$ erfordern (z.B. ν_{11}^{II} und ν_{11}^{III}). Unerwähnt blieb bisher auch die Komplexität des Integralgleichungskerns: er setzt sich aus vier Summanden zusammen, von denen nur $K_{11}^{(I)}(\rho, \rho')$ eine einfache Form hat; die beiden anderen enthalten die Signumsfunktion und ein sehr kompliziertes Argument in der Verteilungsfunktion f_1 (Gleichungen 53b-d). Wir sehen also, daß diese übrigen Terme einen noch höheren Grad der Komplexität aufweisen als die ν -Terme!

Man kann sich an dieser Stelle fragen, ob der Aufwand durch das Ergebnis gerechtfertigt wird: die Annahme eines isotropen und energieunabhängigen Teilchenverlustes (d.h. jedes Teilchen hat bei jeder Geschwindigkeit und Richtung dieselbe Entweichwahrscheinlichkeit) ist eine sehr starke Idealisierung der Realität. Das Modell kann man im Hinblick auf die Bremswirkung des kalten Elektronengases zutreffend sein, aber der Einfluß der Teilchensenke, die bei einem magnetischen Spiegel unvermeidlich ist, hat einen mindestens ebenso großen Anteil am Verhalten des Plasmas wie die Bremsung durch die Elektronen. Wollte man also brauchbare Aussagen machen, müßte man mindestens in einem zweidimensionalen Modell die Wirkung des Verlustkegels berücksichtigen.

Bemerkungen zu Teil I

Warum scheiterte der Lösungsversuch dieses Kapitels? Wurde die Linearisierung zu früh durchgeführt? Ist die Linearisierung überhaupt zielführend? Wir erinnern uns an das komplizierte Argument der Verteilungsfunktion (Gleichung 53b); hier ist bereits auf das Schwerpunkts-System transformiert worden:

$$p \left\{ \frac{m_2}{\mu} \frac{|p-p'|}{2 \cos \vartheta'} \underline{Q}_1 + \frac{m_2}{m_1} p' \begin{pmatrix} \sin \vartheta' \\ 0 \\ \cos \vartheta' \end{pmatrix} \right\}$$

Das Problem liegt darin, daß die Verteilungsfunktionen (relativ) einfache Funktionen der Laborkoordinaten sind, die Übergangswahrscheinlichkeit jedoch sind einfache Funktionen der Schwerpunktskoordinaten. Vor genau demselben Problem stehen wir im nächsten Kapitel. Dort wird mit Hilfe der Deltadistribution eine Transformation ins jeweilige "bequeme" Koordinatensystem erreicht, und genau das könnte man auch hier machen:

Wir nehmen wieder Kugelsymmetrie an. Die Verlustzone sei jetzt:

$$V = \{p \mid p > p_v\}$$

$$\eta(p) = \begin{cases} 0 & \text{für } p > p_v \\ 1 & \text{für } p < p_v \end{cases}$$

Dieser Vorschlag ist besser als eine gleichförmige Verlustzone über den ganzen Impulsraum, entsprechend unserer Annahme ($\eta = \text{const}$, $0 < \eta < 1$), denn hier kann man für den

isotropen Fall genau so die Unstetigkeitseigenschaften der Verlustzone studieren wie beim entsprechenden zweidimensionalen Fall.

Ausgehend von der Boltzmann-Gleichung

$$f(\rho) = 0 \text{ für } \rho \in V, \quad f(\rho) \text{ isotrop, } \rho = |\rho|$$

$$0 = Q(\rho) + \iiint P(\rho \bar{\rho} \rightarrow \rho' \bar{\rho}') \cdot$$

$$\{ f(\rho') f(\bar{\rho}') - f(\rho) f(\bar{\rho}) \} d^3 \rho' d^3 \bar{\rho}' d^3 \bar{\rho}$$

transformieren wir auf das Schwerpunktssystem, wobei wir die Deltafunktion anwenden

$$0 = Q(\rho) + \int \dots \int P(\underline{q}, \underline{P} \leftrightarrow \underline{q}', \underline{P}') \delta(\underline{P} - \underline{p} - \bar{\underline{p}}) \delta(\underline{q} - \frac{1}{2}(\bar{\underline{p}} - \underline{p})) \cdot$$

$$\delta(\underline{P}' - \underline{p}' - \bar{\underline{p}}') \delta(\underline{q}' - \frac{1}{2}(\bar{\underline{p}}' - \underline{p}')) \cdot \{ f(\rho') f(\bar{\rho}') -$$

$$- f(\rho) f(\bar{\rho}) \} d^3 \underline{q} d^3 \underline{p} d^3 \underline{q}' d^3 \underline{p}' d^3 \bar{\underline{p}} d^3 \bar{\underline{p}}'$$

Nach Integration über alle inneren Variablen erhalten wir eine Gleichung der folgenden Form

$$0 = Q(\rho) + \int \int \int_0^{\infty} F(\rho \bar{\rho} \leftrightarrow \rho' \bar{\rho}') \{ f(\rho') f(\bar{\rho}') -$$

$$- f(\rho) f(\bar{\rho}) \} d\rho' d\bar{\rho}' d\bar{\rho}$$

Mit diesem Verfahren erhalten wir nie so komplizierte Argumente wie oben erwähnt; es bleibt immer $f(p)$. Jetzt erst ist es sinnvoll, ein Lösungsverfahren durchzuführen (z.B. Linearisierung oder Polynomansatz).

Dasselbe Verfahren könnte man auch auf zweidimensionale Probleme anwenden, wobei man eine Gleichung folgender Form erhält:

$$0 = Q(p, \vartheta) + \int \dots \int F(p, \vartheta, \bar{p}, \bar{\vartheta} \leftrightarrow p' \vartheta' \bar{p}' \bar{\vartheta}'; \theta_k) \cdot \{ f(p', \vartheta') f(\bar{p}', \bar{\vartheta}') - f(p, \vartheta) f(\bar{p}, \bar{\vartheta}) \} dp' d\vartheta' d\bar{p}' d\bar{\vartheta}' dp d\vartheta$$

mit

$$f(p, \vartheta) = 0 \quad \text{für } \vartheta > \pi - \theta_k \text{ oder } \vartheta < \theta_k$$

θ_k ... Öffnungswinkel des Verlustkegels

oder mit Integrationsgrenzen geschrieben:

$$0 = Q(p, \vartheta) + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dp' d\bar{p}' d\bar{p} \int_{\theta_k}^{\pi - \theta_k} d\vartheta' d\bar{\vartheta}' d\bar{\vartheta} \cdot F(p, \vartheta, \bar{p}, \bar{\vartheta} \leftrightarrow p' \vartheta' \bar{p}' \bar{\vartheta}'; \theta_k) \{ f(p', \vartheta') f(\bar{p}', \bar{\vartheta}') - f(p, \vartheta) f(\bar{p}, \bar{\vartheta}) \} \\ = Q(p, \vartheta) + G[\theta_k; f]$$

G ist eine Funktion von θ_k und ein Funktional von $f(p, \vartheta)$.

Man kann versuchen, für kleine Θ , einen Näherungsausdruck zu finden, indem man nach Θ_k entwickelt und nach dem ersten nicht-verschwindenden Glied abbricht.

$$0 = Q(\rho, \bar{v}) + G(0, f) + \Theta_k G'(0, f) + \frac{1}{2} \Theta_k^2 G''(0, f) + \dots$$

Der Strich (') bedeutet: Ableitung nach Θ_k .

Es gilt: $G(0, f) = 0$, da hier der Verlustkegel "geschlossen" ist; das erste nichtverschwindende Glied dürfte das lineare sein.

$$0 = Q(\rho, \bar{v}) + \Theta_k G'(0, f)$$

oder:

$$0 = Q(\rho, \bar{v}) + \frac{d}{d\Theta_k} \int_0^\infty \int \int dp' d\bar{p}' d\bar{v}' \int_{\Theta_k}^{\pi - \Theta_k} d\bar{v}' d\bar{v}' d\bar{v}'$$

$$\cdot F(\rho, \bar{v}, \bar{v}' \leftrightarrow \rho', \bar{v}', \bar{v}'; \Theta_k) \left\{ f(\rho', \bar{v}') f(\bar{p}', \bar{v}') - f(\rho, \bar{v}) f(\bar{p}, \bar{v}) \right\} \Big|_{\Theta_k=0} \cdot \Theta_k$$

Auch zur Lösung dieser Gleichung dürften ähnliche Methoden zielführend sein, wie sie beim eindimensionalen Fall vorgeschlagen wurden.

Leider waren mir zu dem Zeitpunkt, als ich die komplizierten Terme der Boltzmann-Gleichung erhielt, obige Lösungsansätze nicht bekannt. Die Lösung der Boltzmann-Gleichung wurde fallengelassen und eine einfachere Methode in Angriff genommen, um die Frage nach der Termalisierung zu beantworten (Teil II).

TEIL II

Erste Näherung zur Berechnung der Teilchendichte und der mittleren Energie des Plasmas

Gegeben sei ein monoenergetischer Teilchenstrahl der Quellstärke Q (cm^3/sec) und der Teilchenenergie E_0 (keV)¹⁾. Dieser Strahl heize ein Ionenplasma der Teilchendichte n_i auf, das gleichzeitig von einem eingepprägten Elektronenplasma der Temperatur $T_e < T_i$ gekühlt wird, sodaß das Ionenplasma im stationären Gleichgewicht ist.

Für die Teilchenbilanzgleichung setzen wir an (siehe Gleichung 15, Teil I):

$$Q = \int Q(p) d^3p - \iiint \tau(p') \eta(p) \eta(\bar{p}) \cdot \int_1(p) \int_1(\bar{p}) P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}') d^3p d^3\bar{p}' d^3p' d^3\bar{p} \quad (1)$$

eingeschossener Teilchenstrom $\stackrel{!}{=} \quad$ Teilchenverlustrate

Zu diesem Ansatz kommen wir, wenn wir Gleichung 14, Teil I, über die verbleibende Impulsvariable d^3p integrieren. $\tau(p)$, $\eta(p)$, $\int_1(p)$ usw. seien definiert wie in Teil I.

$Q \dots$ Quellstärke (die pro sec und cm^3 eingeschossenen oder verlorenen Teilchen)

für die Energiebilanzgleichung setzen wir an:

$$E_0 Q = E'_0 Q + \frac{dW_{1,2}}{dt} \quad (2)$$

1) Siehe: Analytisches Konzept, Verlustmechanismen; diese Arbeit

Energiegewinn des Ionenplasmas $\stackrel{!}{=} \text{Energieverlust des Ionenplasmas}$

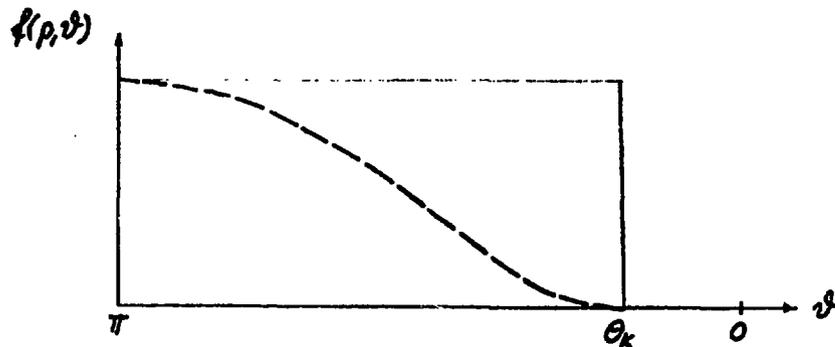
$E_0 Q$... die von den eingeschossenen Teilchen im Plasma
deponierte Leistungsdichte

$E'_0 Q$... die von den verschwindenden Teilchen dem Plasma
entzogene Leistungsdichte

$\frac{dW_{12}}{dt}$... Energieübertragungsrate der Ionen (Teilchensorte
1) auf die Elektronen (Teilchensorte 2)

Gleichung (2) für die Energiebilanz beinhaltet einerseits die Quellstärke Q (bzw. Verluste), andererseits berücksichtigt sie die Energie, die durch elastische Streuungen an das Elektronengas übergeht.

Mit Hilfe von Gleichung (1) kann man die Teilchendichte der Ionen in Abhängigkeit von der Quellstärke und des Verlustkegels berechnen. Dazu muß aber die Abhängigkeit der Verteilungsfunktion vom Winkel bekannt sein, und das läßt sich nur durch Lösung der Gleichung 12, Teil I, bewerkstelligen. Da wir die Verteilungsfunktion nicht kennen, setzen wir folgende Winkelabhängigkeit an:



Dieser Ansatz (Stufenfunktion) ist jedoch ziemlich unrealistisch; die Winkelverteilung dürfte eher die Form der

strichlierten Kurve haben.

Die unrealistische Annahme spiegelte sich auch im Ergebnis wider: Die Teilchenverlustrate als Funktional der Ionenverteilungsdichte und als Funktion des Verlustwinkels divergiert, auch unter Beschränkung auf infinitesimal kleine Verlustwinkel!

Statt mit Hilfe der Gleichung (1) eine Beziehung zwischen Verlustrate, Teilchendichte und Verlustwinkel herzuleiten, wurde eine Parameterstudie durchgeführt, indem man in Gleichung (2) bei angenommener Teilchendichte n die Quellstärke Q variierte. Dazu müssen wir aber die Energieübertragungsrate kennen.

Energieübertragungsrate zwischen Gasen verschiedener Temperaturen

Wir berechnen die Energieübertragungsrate von einem heißen Ionengas auf ein kälteres Elektronengas.

Zuerst wird die Energieübertragung für den Einzelstoß abgeleitet, dann wird mit den Verteilungsfunktionen und der Übergangswahrscheinlichkeit gewichtet und über die Impulse integriert.

Energieübertragung beim Einzelstoß:

Vor dem Stoß:

Relativimpuls:

$$q = \frac{m}{m_2} p_2 - \frac{m}{m_1} p_1 \Leftrightarrow p_1 = -q + \frac{m}{m_2} P$$

Schwerpunktsimpuls:

$$P = p_1 + p_2 \Leftrightarrow p_2 = q + \frac{m}{m_1} P$$

Nach dem Stoß:

$$q' = \frac{\mu}{m_2} p_2' - \frac{\mu}{m_1} p_1' \quad \Leftrightarrow \quad p_1' = -q' + \frac{\mu}{m_2} P'$$

$$P' = p_1' + p_2' \quad \Leftrightarrow \quad q p_2' = q' + \frac{\mu}{m_2} P'$$

Nebenbedingung: $|q| = |q'|$; $\underline{P} = \underline{P}'$

Energie des Ions vor dem Stoß:

$$E_{ion} = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{1}{2m_1} \left(-q + \frac{\mu}{m_2} P \right)^2 = \frac{1}{2m_1} \left(q^2 - 2 \frac{\mu}{m_2} (q, P) + \frac{\mu^2}{m_2^2} P^2 \right)$$

Energie des Ions nach dem Stoß:

$$E'_{ion} = \frac{p_1'^2}{2m_1} = \frac{1}{2m_1} \left(-q' + \frac{\mu}{m_2} P' \right)^2 = \frac{1}{2m_1} \left(q'^2 - 2 \frac{\mu}{m_2} (q', P') + \frac{\mu^2}{m_2^2} P'^2 \right)$$

Energieabgabe (-aufnahme) der Ionen:

$$\Delta E_{ion} = E_{ion} - E'_{ion} = \frac{\mu}{m_1 m_2} \left((q', P) - (q, P) \right) =$$

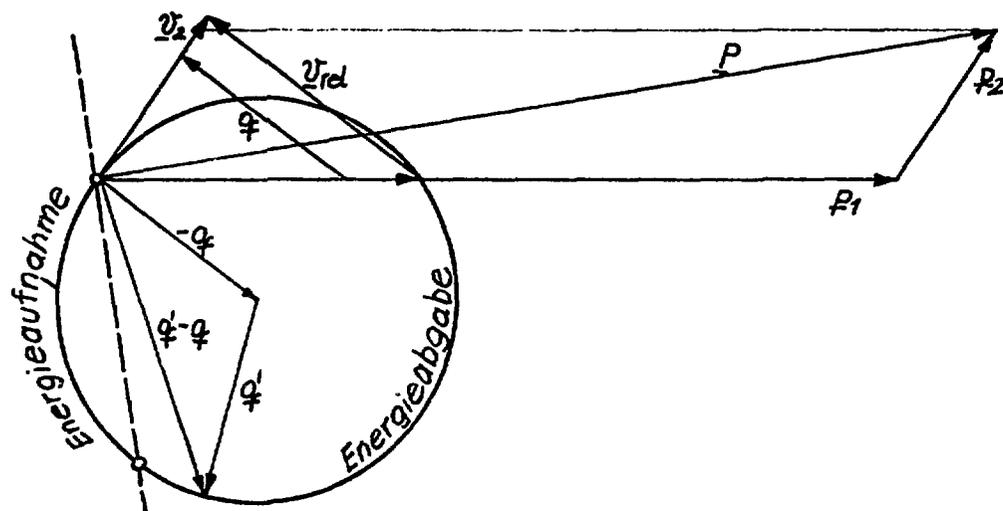
> 0 ; Energieabgabe

$$= \frac{\mu}{m_1 m_2} (q' - q, P) \geq 0$$

(3)

< 0 ; Energieaufnahme

Wann gibt das Ion (Teilchen 1) Energie ab, wann nimmt es Energie auf? - Folgende Skizze veranschaulicht den Stoß der Teilchen 1 und 2:



Wir konstruieren bei gegebenem \underline{p}_1 und \underline{p}_2 , m_1 und m_2 den Vektor des Schwerpunktsimpulses \underline{q} . Da sich der Betrag des Schwerpunktsimpulses durch den Stoß nicht ändert ($q' = q$), können wir die Ortskurve aller möglichen $\underline{q}-\underline{q}'$ zeichnen. (das ist ein Kreis in der $\underline{p}_1-\underline{p}_2$ -Ebene mit dem Mittelpunkt $(-\underline{q})$ und dem Radius q).

Nun diskutieren wir Formel (3):

Die Normale zum Schwerpunktsimpuls \underline{P} teilt die Ortskurve in zwei Teile:

Die Menge aller \underline{q}' , für welche das Teilchen 1 Energie an das Teilchen 2 abgibt, liegt rechts von der Normalen zu \underline{P} , die Punktmenge für die Energieaufnahme liegt links.

Energieübertragungsrate bei gegebenen Impulsen und gegebener Stoßrate:

$$dW_{1 \rightarrow 2} = \Delta E_{1 \rightarrow 2}(\underline{p}, \bar{p}; \underline{p}', \bar{p}') \frac{d}{dt} n(\underline{p}, \bar{p}; \underline{p}', \bar{p}') =$$

$$= \frac{(q' - q, \underline{P})}{m_1 + m_2} \frac{d}{dt} n(\underline{p}, \bar{p}; \underline{p}', \bar{p}') \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} n(\underline{p}, \bar{p}; \underline{p}', \bar{p}') = P(\underline{p}, \bar{p}' \rightarrow \underline{p}', \bar{p}') f_1(\underline{p}) f_2(\bar{p}) d^3 \underline{p} d^3 \bar{p} d^3 \underline{p}' d^3 \bar{p}' \quad (5)$$

$\frac{dn}{dt}$... Zahl der Streuungen pro sec und cm^3 , die vor dem Stoß die Impulse \underline{p}, \bar{p} haben und nach dem Stoß die Impulse \underline{p}', \bar{p}' .

$$\frac{dW_{1-2}}{dt} = \iiint \Delta E_{1-2} P(\underline{p}, \bar{p} \rightarrow \underline{p}', \bar{p}') f_1(\underline{p}) f_2(\bar{p}) d^3 \underline{p} d^3 \bar{p} d^3 \underline{p}' d^3 \bar{p}' \quad (6)$$

Wir erhalten für die Übergangswahrscheinlichkeit (siehe Anhang):

$$P(\underline{q}, \underline{P} \rightarrow \underline{q}', \underline{P}') = \frac{(e_1 e_2)^2}{4q^4} \left[\sin^2 \theta/2 + \frac{1}{4} \theta_0^2 \left(\frac{|q'|}{\mu} \right) \right]^{-2} \quad (7)$$

$$\frac{\mu}{|q|} \delta(|q| - |q'|) \delta(\underline{P} - \underline{P}')$$

Nun stehen wir vor dem Problem, daß $f_1(\underline{p})$ und $f_2(\bar{p})$ Funktionen der Laborimpulse sind, E und P Funktionen der Schwerpunktsimpulse. Wir müssen uns für eins der Systeme entscheiden und wir wählen die Schwerpunktsimpulse.

$$\underline{p} = \underline{q} - \frac{\mu}{m_2} \underline{P} \quad \bar{p} = \underline{q} + \frac{\mu}{m_1} \underline{P}$$

$$\frac{dW_{1+2}}{dt} = \int \dots \int \frac{(\underline{q}' - \underline{q}_1, \underline{P})}{m_1 + m_2} \mu \frac{(e_1 e_2)^2}{4q^4} \left[\sin^2 \theta/2 + \frac{1}{4} \theta_0^2 \left(\frac{|q'|}{\mu} \right) \right]^{-2} \delta(|q| - |q'|) \quad (8)$$

$$\delta(\underline{P} - \underline{P}') f_1\left(\underline{q} - \frac{\mu}{m_2} \underline{P}\right) f_2\left(\underline{q} + \frac{\mu}{m_1} \underline{P}\right) d^3 \underline{q} d^3 \underline{P} d^3 \underline{q}' d^3 \underline{P}'$$

Mit der Deltafunktion können wir aber trotzdem f_1 und f_2 als Funktion der Laborkoordinaten darstellen:

$$f_1\left(\underline{q} - \frac{\mu}{m_2} \underline{P}\right) = \int \delta\left(-\underline{q} + \frac{\mu}{m_2} \underline{P} - \underline{p}\right) f_1(\underline{p}) d^3 p \quad (9a)$$

$$f_2\left(\underline{q} + \frac{\mu}{m_1} \underline{P}\right) = \int \delta\left(\underline{q} + \frac{\mu}{m_1} \underline{P} - \underline{\bar{p}}\right) f_2(\underline{\bar{p}}) d^3 \bar{p} \quad (9b)$$

$$\frac{dW_{1+2}}{dt} = \int \dots \int \frac{(\underline{q}' - \underline{q}, \underline{P})}{m_1 + m_2} \frac{(e e_2)^2}{4} \frac{\mu}{q^5} \left[\sin^2 \theta / 2 + \theta_0^2 \left(\frac{q_1}{\mu} \right) \right]^{-2} \quad (10)$$

$$\delta(|\underline{q}| - |\underline{q}'|) \delta(\underline{P} - \underline{P}') \delta\left(\underline{q} + \frac{\mu}{m_1} \underline{P} - \underline{p}\right) \delta\left(-\underline{q} + \frac{\mu}{m_2} \underline{P} - \underline{\bar{p}}\right)$$

$$f_1(\underline{p}) f_2(\underline{\bar{p}}) d^3 \underline{q} d^3 \underline{P} d^3 \underline{q}' d^3 \underline{P}' d^3 \underline{p} d^3 \underline{\bar{p}}$$

θ Streuwinkel der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem

$$\theta = \angle(\underline{q}, \underline{q}') \quad \cos \theta = \frac{(\underline{q}, \underline{q}')}{|\underline{q}| |\underline{q}'|}$$

$f_1(\underline{p})$ und $f_2(\underline{p})$ sind normiert auf:

$$\left. \begin{aligned} \int f_1(\underline{p}) d^3 p &= n_1 \\ \int f_2(\underline{\bar{p}}) d^3 \bar{p} &= n_2 \end{aligned} \right\} \text{Teilchendichte} \quad (10')$$

f_1 und f_2 seien kugelsymmetrisch: $f_1(|\underline{p}|), f_2(|\underline{\bar{p}}|)$

$$f_1(\underline{p}) = \int_0^\infty f_1(p^*) \delta(p^* - |\underline{p}|) dp^* \quad (11a)$$

$$f_2(\underline{\bar{p}}) = \int_0^\infty f_2(\bar{p}^*) \delta(\bar{p}^* - |\underline{\bar{p}}|) d\bar{p}^* \quad (11b)$$

f_1 und f_2 seien beliebige Verteilungsfunktionen.
Später setzen wir:

$$f_1(p^x) = \frac{n_1}{4\pi p_0^2} \delta(p^x - p_0) \quad (\text{Ionen}) \quad (12a)$$

$$f_2(\bar{p}^x) = \frac{n_2}{(2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{p_2^2}{2m_2 k T_2}} \quad (\text{Elektronen}) \quad (12b)$$

Integration über \underline{P}' :

$$\frac{dW_{1-2}}{dt} = \frac{(e_1 e_2)^2}{4} \frac{\mu}{m_1 + m_2} \int_0^\infty \int f_1(p_1^x) f_2(p^x) d\bar{p}^x dp^x \int \dots \int (q' - q, \underline{P})$$

$$\frac{1}{q^5} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{(q, q')}{|q||q'|} \right) + \frac{1}{4} \theta_0^2 \left(\frac{q}{\mu} \right) \right]^{-2} \delta(q - q') \delta(p^x - |q + \frac{\mu}{m_2} \underline{P}|)$$

$$\delta(\bar{p}^x - |q + \frac{\mu}{m_1} \underline{P}|) d^3 q d^3 P d^3 q' d^3 P'$$

Koordinatensysteme:

$$q = q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{P} = P \begin{pmatrix} \sin \vartheta \\ 0 \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}; \quad q' = q' \begin{pmatrix} \sin \vartheta' \cos \varphi' \\ \sin \vartheta' \sin \varphi' \\ \cos \vartheta' \end{pmatrix}$$

$$(q' - q, \underline{P}) = (q', \underline{P}) - (q, \underline{P}) =$$

$$= q' P (\sin \vartheta' \cos \varphi' \sin \vartheta + \cos \vartheta' \cos \vartheta) - q P \cos \vartheta$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{(q', q)}{|q'||q|} \right) = \frac{1}{2} (1 - \cos \vartheta') = \sin^2 \frac{\vartheta'}{2}$$

$$| -q + \frac{\mu}{m_2} P | = \sqrt{q^2 - 2 \frac{\mu}{m_2} q P \cos \vartheta + \left(\frac{\mu}{m_2}\right)^2 P^2}$$

$$| q + \frac{\mu}{m_1} P | = \sqrt{q^2 + 2 \frac{\mu}{m_1} q P \cos \vartheta + \left(\frac{\mu}{m_1}\right)^2 P^2}$$

$$\frac{dW_{12}}{dt} = \frac{(e e_2)^2}{4} \frac{\mu}{m_1 + m_2} \int_0^\infty \int_0^\infty \phi_1(p^x) \phi_2(\bar{p}^x) dp^x d\bar{p}^x$$

(13)

$$\int \dots \int q P (\sin \vartheta \sin \vartheta' \cos \varphi' + \cos \vartheta \cos \vartheta' - \cos \vartheta) \frac{1}{q^5}$$

$$\left[\sin^2 \frac{\vartheta'}{2} + \frac{1}{4} \theta_0^2 \left(\frac{q}{\mu} \right) \right]^{-2} \delta \left(p^x - \sqrt{q^2 - 2 \frac{\mu}{m_2} q P \cos \vartheta + \left(\frac{\mu}{m_2}\right)^2 P^2} \right)$$

$$\delta \left(\bar{p}^x - \sqrt{q^2 + 2 \frac{\mu}{m_1} q P \cos \vartheta + \left(\frac{\mu}{m_1}\right)^2 P^2} \right) 4\pi q^2 dq 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$$

$$P^2 dP q^2 \sin \vartheta' d\vartheta' d\varphi'$$

Integration über φ' und Substitution: $\cos \theta = x$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' = 2\pi ; \int_0^{2\pi} \cos \varphi' d\varphi' = 0 ; m_1 + m_2 = M$$

$$\cos \vartheta = x \Rightarrow x^2 \leq 1 ; 1 - x^2 \geq 0$$

Umformung der Deltafunktionen nach der Formel:

$$\delta(x^2 - x_0^2) = \frac{1}{2|x_0|} (\delta(x - x_0) + \delta(x + x_0))$$

$$x > 0, x_0 > 0$$

$$\delta(x - x_0) = 2|x_0| \delta(x^2 - x_0^2)$$

(14)

$$\frac{dW_{12}}{dt} = 4\pi^3 (e_1 e_2)^2 \mu \int \dots \int f_1(p^x) f_2(\bar{p}^x) \Theta(p^x) \Theta(\bar{p}^x) P^2$$

$$\left[\frac{P}{M} \times (\cos \theta' - 1) \right] \left(\sin^2 \frac{\theta'}{2} + \frac{1}{4} \Theta_0^2 \left(\frac{q}{P} \right) \right)^{-2} \Theta(1-x^2)$$

$$2p^x \delta(p^{x2} - q^2 + 2\frac{\mu}{m_2} q P x - (\frac{\mu}{m_2})^2 P^2) \quad (15)$$

$$2\bar{p}^x \delta(\bar{p}^{x2} - q^2 - 2\frac{\mu}{m_1} q P x - (\frac{\mu}{m_1})^2 P^2) dq dx dP \sin \theta' d\theta' dp^x d\bar{p}^x$$

Was bedeutet $\Theta(1-x^2)$?

$$a) \quad 2\frac{\mu}{m_2} q P x = q^2 + (\frac{\mu}{m_2})^2 P^2 - p^{x2}$$

aus $x^2 \leq 1$ und a) folgt:

$$(q - \frac{\mu}{m_2} P)^2 \leq p^{x2} \leq (q + \frac{\mu}{m_2} P)^2$$

$$b) \quad 2\frac{\mu}{m_1} q P x = q^2 + (\frac{\mu}{m_1})^2 P^2 - \bar{p}^{x2}$$

aus $x^2 \leq 1$ und b) folgt:

$$(q - \frac{\mu}{m_1} P)^2 \leq \bar{p}^{x2} \leq (q + \frac{\mu}{m_1} P)^2$$

Wir schreiben die Deltafunktionen um und setzen ab jetzt:

$$p^x = p$$

$$\bar{p}^x = \bar{p}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \lambda$$

$$\frac{dW_{12}}{dt} = (2\pi)^3 (e_1 e_2)^2 \mu \frac{m_2}{\mu} \int \dots \int p f(p) \bar{p} f(\bar{p}) \theta(p) \theta(\bar{p})$$

$$\frac{P}{q} \left[\frac{P}{M} \frac{q^2 + \frac{P^2}{(1+\lambda)^2} - p^2}{2q \frac{\mu}{m_2} P} (\cos \vartheta' - 1) \right] (\sin^2 \vartheta'/2 + 1/4 \Theta_0^2(\frac{q}{\mu}))^{-2}$$

$$\Theta(p^2 - (q - \frac{P}{1+\lambda})^2) \Theta((q + \frac{P}{1+\lambda})^2 - p^2) \Theta(\bar{p}^2 - (q - \frac{\lambda P}{1+\lambda})^2) \Theta((q + \frac{\lambda P}{1+\lambda})^2 - \bar{p}^2)$$

$$\delta(\bar{p}^2 + \lambda p^2 - (1+\lambda)q^2 - \frac{\lambda P^2}{1+\lambda}) dq dP \sin \vartheta' d\vartheta' dp d\bar{p}$$

Nun gilt:

Wir substituieren: $\sin \vartheta'/2 = y$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos \vartheta' - 1}{(\sin^2 \vartheta'/2 + 1/4 \Theta_0^2(\frac{q}{\mu}))^2} \sin \vartheta' d\vartheta' = \int_0^1 \frac{(-8)y^3 dy}{(y^2 + 1/4 \Theta_0^2(\frac{q}{\mu}))^2} \cong$$

$$\cong 4 \left\{ 2 \ln \Theta_0(\frac{q}{\mu}) - \ln 4 + 1 \right\}$$

$$\frac{dW_{12}}{dt} = (2\pi)^3 (e_1 e_2)^2 \frac{\lambda}{2} \int \dots \int p f(p) \bar{p} f(\bar{p}) \theta(p) \theta(\bar{p})$$

$$\frac{P}{q^2} \left[q^2 + \frac{P^2}{(1+\lambda)^2} - p^2 \right] 4 \left\{ 2 \ln \Theta_0(\frac{q}{\mu}) - \ln 4 + 1 \right\} \Theta(q) \Theta(P)$$

$$\delta(\bar{p}^2 + \lambda p^2 - (1+\lambda)q^2 - \frac{\lambda}{1+\lambda} P^2) \Theta(p^2 - (q - \frac{P}{1+\lambda})^2) \Theta((q + \frac{P}{1+\lambda})^2 - p^2)$$

$$\Theta(\bar{p}^2 - (q - \frac{\lambda P}{1+\lambda})^2) \Theta((q + \frac{\lambda P}{1+\lambda})^2 - \bar{p}^2) dp d\bar{p} dq dP$$

Was passiert, wenn man die Identität der beiden Teilchen vertauscht? Welche Symmetriebeziehung folgt daraus?

- Zunächst bringen wir obiges Integral auf eine symmetrische Schreibweise:

Verwende:

$$\bar{p}^2 + \lambda p^2 - (1+\lambda)q^2 - \frac{\lambda P^2}{1+\lambda} = 0$$

$$\begin{aligned} q^2 + \frac{P^2}{(1+\lambda)^2} - p^2 &= \frac{1}{1-\lambda} \left\{ (1+\lambda)(q^2 - p^2) - \frac{1}{\lambda} \frac{\lambda P^2}{1+\lambda} \right\} \\ &= \frac{1}{1+\lambda} \left\{ \frac{1}{\lambda} (\bar{p}^2 - q^2) - \lambda (p^2 - q^2) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{dW_{12}}{dt} = (2\pi)^3 (e_1 e_2)^2 \frac{2\lambda}{1+\lambda} \int_0^\infty \int_0^\infty dp d\bar{p} p f_1(p) f_2(\bar{p})$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty dP dq \frac{P}{q^2} \left[2 \ln \Theta_0 \left(\frac{q}{\mu} \right) - \ln 4 + 1 \right] \left[\frac{1}{\lambda} (\bar{p}^2 - q^2) - \lambda (p^2 - q^2) \right]$$

$$\delta \left(\bar{p}^2 + \lambda p^2 - (1+\lambda)q^2 - \frac{\lambda P^2}{1+\lambda} \right) \Theta \left(p^2 - \left(q - \frac{P}{1+\lambda} \right)^2 \right)$$

$$\Theta \left(\left(q + \frac{P}{1+\lambda} \right)^2 - p^2 \right) \Theta \left(\bar{p}^2 - \left(q - \frac{\lambda P}{1+\lambda} \right)^2 \right) \Theta \left(\left(q + \frac{\lambda P}{1+\lambda} \right)^2 - \bar{p}^2 \right)$$

$$= (2\pi)^3 (e_1 e_2)^2 \frac{2\lambda}{1+\lambda} \int_0^\infty \int_0^\infty dp d\bar{p} p f_1(p) \bar{p} f_2(\bar{p}) F(\lambda, p, \bar{p})$$

wobei wir die Funktion $F(\lambda, p, \bar{p})$ wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}
 F(\lambda, \rho, \bar{\rho}) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\rho} dP dq \frac{P}{q^2} \left[\frac{1}{\lambda} (\bar{\rho}^2 - q^2) - \lambda (\rho^2 - q^2) \right] \left[2 \ln \Theta\left(\frac{q}{\lambda}\right) - \ln \frac{q}{\lambda} \right] \\
 &\quad \delta\left(\bar{\rho}^2 + \lambda \rho^2 - (1+\lambda)q^2 - \frac{\lambda P^2}{1+\lambda}\right) \Theta\left(\rho^2 - \left(q - \frac{P}{1+\lambda}\right)^2\right) \\
 &\quad \Theta\left(\left(q + \frac{P}{1+\lambda}\right)^2 - \rho^2\right) \Theta\left(\left(q + \frac{\lambda P}{1+\lambda}\right)^2 - \bar{\rho}^2\right) \Theta\left(\bar{\rho}^2 - \left(q - \frac{\lambda P}{1+\lambda}\right)^2\right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Wie man leicht sieht, gilt bei Vertauschung der Teilchen folgende Reziprozitätsbeziehung:

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} F(\lambda, \rho, \bar{\rho}) = - \frac{\frac{1}{\lambda}}{1+\frac{1}{\lambda}} F\left(\frac{1}{\lambda}, \bar{\rho}, \rho\right)$$

Für die weitere Rechnung setzen wir wieder die ursprüngliche Form:

$$\frac{1}{\lambda} (\bar{\rho}^2 - q^2) - \lambda (\rho^2 - q^2) = (1+\lambda) \left[q^2 - \rho^2 + \frac{P^2}{(1+\lambda)^2} \right]$$

Aus den Stufenfunktionen folgen die untenstehenden Integrationsmengen:

$$(I) \quad \left(\sqrt{(1+\lambda)(\bar{\rho}^2 + \lambda \rho^2) - \lambda P^2} + P \right)^2 \geq (1+\lambda)^2 \rho^2$$

$$(II) \quad (1+\lambda)^2 \rho^2 \geq \left(\sqrt{(1+\lambda)(\bar{\rho}^2 + \lambda \rho^2) - \lambda P^2} - P \right)^2$$

$$(III) \quad \left(\sqrt{(1+\lambda)(\bar{\rho}^2 + \lambda \rho^2) - \lambda P^2} + \lambda P \right)^2 \geq (1+\lambda)^2 \bar{\rho}^2$$

$$(IV) \quad (1+\lambda)^2 \bar{\rho}^2 \geq \left(\sqrt{(1+\lambda)(\bar{\rho}^2 + \lambda \rho^2) - \lambda P^2} - P \right)^2$$

Umformung der Ungleichungen:

$$(1) \quad (1+\lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - (P^2 + p^2 + 2P\sqrt{(1+\lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - \lambda P^2}) \geq (1+\lambda)p^2$$

$$2P\sqrt{(1+\lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - \lambda P^2} \geq (1+\lambda)p^2 - (1+\lambda)\bar{p}^2 - (1-\lambda)P^2$$

$$a) \quad (1+\lambda)p^2 - (1+\lambda)\bar{p}^2 - (1-\lambda)P^2 \geq 0$$

$$P^2 \leq \frac{1-\lambda}{1+\lambda} (\bar{p}^2 + p^2)$$

$$0 \geq (1+\lambda)^2 [p^4 + \bar{p}^4 + P^4 - 2p^2\bar{p}^2 - 2p^2P^2 - 2\bar{p}^2P^2]$$

$$P_{1,2}^2 = p^2 + \bar{p}^2 \pm \sqrt{(p^2 + \bar{p}^2) - (p^2 - \bar{p}^2)/4p^2\bar{p}^2} \quad 2p\bar{p} = (p \pm \bar{p})^2$$

$$(p - \bar{p})^2 \leq P^2 \leq (p + \bar{p})^2$$

$$b) \quad (1+\lambda)p^2 - (1+\lambda)\bar{p}^2 - (1-\lambda)P^2 \leq 0$$

$$P^2 \geq \frac{1-\lambda}{1+\lambda} (\bar{p}^2 + p^2)$$

$$\Rightarrow P^2 \leq \frac{1}{\lambda} (1+\lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2)$$

Die Menge (i) ist somit äquivalent mit folgender Punktmenge:

$$(1) \quad (\sqrt{(1+\lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - \lambda P^2} + p)^2 \geq (1+\lambda)p^2$$

$$a) \quad \text{falls} \quad P^2 \leq \frac{1+\lambda}{1-\lambda} (p^2 - \bar{p}^2)$$

$$\Rightarrow (p - \bar{p})^2 \leq P^2 \leq (p + \bar{p})^2$$

$$\begin{aligned} b) \text{ falls } \quad P^2 &\geq \frac{1+\lambda}{1-\lambda} (p^2 - \bar{p}^2) \\ &\Rightarrow P^2 \leq \frac{1}{\lambda} (1+\lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) \end{aligned}$$

Analog folgt für alle anderen Mengen (ii) bis (iv):

$$\begin{aligned} \text{(II) } a) \text{ falls } \quad P^2 &\geq \frac{1+\lambda}{1-\lambda} (p^2 - \bar{p}^2) \\ &\Rightarrow (p - \bar{p})^2 \leq P^2 \leq (p + \bar{p})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ falls } \quad P^2 &\leq \frac{1+\lambda}{1-\lambda} (p^2 - \bar{p}^2) \\ P^2 &\leq \frac{1+\lambda}{\lambda} (\bar{p}^2 + \lambda p^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III) } a) \text{ falls } \quad P^2 &\geq \frac{1+\lambda}{1-\lambda} (p^2 - \bar{p}^2) \\ &\Rightarrow (p - \bar{p})^2 \leq P^2 \leq (p + \bar{p})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ falls } \quad P^2 &\leq \frac{1+\lambda}{1-\lambda} (p^2 - \bar{p}^2) \\ &\Rightarrow P^2 \leq \frac{1+\lambda}{\lambda} (\bar{p}^2 + \lambda p^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(IV) } a) \text{ falls } \quad P^2 &\leq \frac{1+\lambda}{1-\lambda} (p^2 - \bar{p}^2) \\ &\Rightarrow (p - \bar{p})^2 \leq P^2 \leq (p + \bar{p})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ falls } \quad P^2 &\geq \frac{1+\lambda}{1-\lambda} (p^2 - \bar{p}^2) \\ &\Rightarrow P^2 \leq \frac{1+\lambda}{\lambda} (\bar{p}^2 + \lambda p^2) \end{aligned}$$

Entsprechend der Multiplikation der vier Stufenfunktionen müssen die vier Mengen geschnitten werden: (i) (ii) (iii) (iv). Der Durchschnitt dieser vier Mengen definiert die Integrationsmenge. Wie man sieht, ergeben (i) (ii) und (iii) (iv) dieselbe Menge. Wegen $A \cap A = A$ genügt es, (i) (ii) allein zu untersuchen.

Für die Fallunterscheidungen in (i)a bis (ii)b muß untersucht werden, welche der beiden oberen Schranken von P^2 die kleinere ist:

$$(I) a) \quad P^2 \leq (p + \bar{p})^2$$

$$(II) b) \quad P^2 \leq \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2)$$

$$(p + \bar{p})^2 \geq \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2)$$

$$\lambda p^2 + 2\lambda p\bar{p} + \lambda \bar{p}^2 \geq \bar{p}^2 + \lambda \bar{p}^2 + \lambda p^2 + \lambda^2 p^2$$

$$0 \leq (\bar{p} - \lambda p)^2$$

$$(p + \bar{p})^2 \leq \frac{1}{\lambda}(1 + \lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) \quad \forall p \forall \bar{p} \forall (\lambda > 0)$$

$(p + \bar{p})^2$ ist also die Obergrenze für P^2 .

Nach Umformung der Deltafunktion schreiben für F :

$$\delta(\bar{p}^2 + \lambda p^2 - \frac{\lambda p^2}{1 + \lambda} - (1 + \lambda) q^2) = \frac{1}{2 \sqrt{(1 + \lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - \lambda p^2}}$$

$$\delta\left(\frac{1}{1 + \lambda} \sqrt{(1 + \lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - \lambda p^2} - q\right)$$

$$F(\lambda, p, \bar{p}) = \frac{(1 + \lambda)^2}{2} \int_{|\bar{p} - p|}^{\bar{p} + p} P dP \frac{\bar{p}^2 - p^2 + \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} p^2}{[(1 + \lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - \lambda p^2]^{3/2}}$$

$$\left[2 \ln \frac{1}{\mu(1 + \lambda)} \sqrt{(1 + \lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - \lambda p^2} - \ln \frac{4}{e} \right]$$

Für $\Theta_0(v)$ erhielten wir:

$$\Theta_0(v) = \frac{h}{\mu \lambda_D v} \left(1 + \frac{2e_1 e_2}{h v}\right) = \begin{cases} \approx \frac{2e_1 e_2}{\mu \lambda_D v^2}; & \text{falls } v \ll \frac{2e_1 e_2}{h} \\ \approx \frac{h}{\mu \lambda_D v}; & \text{falls } v \gg \frac{2e_1 e_2}{h} \end{cases} \quad (16)$$

Wegen der hohen Temperaturen sind die Relativgeschwindigkeiten vorwiegend im zweiten Bereich (quantenmechanischer Fall).

$$\Theta_0(v) = \frac{h}{\mu \lambda_D v} \quad (16')$$

Wir erhalten nach Einsetzen von $\Theta_0(v)$ in $F(\lambda, p, \bar{p})$:

$$F(\lambda, p, \bar{p}) = \frac{(1+\lambda)^2}{2} \int_{|p-\bar{p}|}^{p+\bar{p}} P dP \frac{\bar{p}^2 - p^2 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} p^2}{[(1+\lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - \lambda P^2]^{3/2}}$$

$$\left[2 \ln \frac{m_2 h}{\mu \lambda_D} - \ln \sqrt{(1+\lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - \lambda P^2} - \ln \frac{4}{e} \right]$$

Substitution:

$$t = \frac{p^2 - (p-\bar{p})^2}{4p\bar{p}}; \quad dt = \frac{P dP}{2p\bar{p}}; \quad p^2 = 4p\bar{p}t + (p-\bar{p})^2$$

$$t \in [0, 1]$$

$$\bar{p}^2 - p^2 + \frac{1-\lambda}{1+\lambda} ((p-\bar{p})^2 + 4p\bar{p}t) = 2 \frac{\bar{p}-p}{1+\lambda} (\bar{p} + \lambda p) + 4 \frac{1-\lambda}{1+\lambda} p\bar{p}t$$

$$(1+\lambda)(\bar{p}^2 + \lambda p^2) - \lambda(p-\bar{p}) - 4\lambda p\bar{p}t = (\bar{p} + \lambda p)^2 \left[1 - \frac{4\lambda p\bar{p}}{(\bar{p} + \lambda p)^2} t \right]$$

$$\bar{p}^2 - (1-\lambda)p\bar{p} - \lambda p^2 = (\bar{p} + \lambda p)(\bar{p} - p)$$

Einsetzen in $F(\lambda, \rho, \bar{\rho})$ ergibt:

$$\begin{aligned}
 F(\lambda, \rho, \bar{\rho}) &= 2\rho\bar{\rho}(1+\lambda) \frac{\bar{\rho}-\rho}{(\bar{\rho}+\lambda\rho)^2} \left\{ 2\left(\frac{1}{2} - \ln 2 + \ln \frac{m_2 h}{\mu \lambda_0} - \ln(\bar{\rho} + \lambda\rho) \right) \right. \\
 &\quad \left. \int_0^1 \frac{dt}{\left(1 - \frac{4\lambda\rho\bar{\rho}}{(\bar{\rho}+\lambda\rho)^2} t\right)^{3/2}} - \int_0^1 \frac{\ln\left(1 - \frac{4\lambda\rho\bar{\rho}}{(\bar{\rho}+\lambda\rho)^2} t\right)}{\left(1 - \frac{4\lambda\rho\bar{\rho}}{(\bar{\rho}+\lambda\rho)^2} t\right)} dt \right\} \\
 &\quad + 4\rho^2\bar{\rho}^2(1-\lambda^2) \frac{1}{(\bar{\rho}+\lambda\rho)^3} \left\{ 2\left(\frac{1}{2} \ln 2 + \ln \frac{m_2 h}{\mu \lambda_0} - \ln(\bar{\rho} + \lambda\rho) \right) \cdot \right. \\
 &\quad \left. \int_0^1 \frac{t dt}{\left(1 - \frac{4\lambda\rho\bar{\rho}}{(\bar{\rho}+\lambda\rho)^2} t\right)^{3/2}} - \int_0^1 \frac{\ln\left(1 - \frac{4\lambda\rho\bar{\rho}}{(\bar{\rho}+\lambda\rho)^2} t\right)}{\left(1 - \frac{4\lambda\rho\bar{\rho}}{(\bar{\rho}+\lambda\rho)^2} t\right)^{3/2}} t dt \right\}
 \end{aligned}$$

Setze: $z = \frac{4\lambda\rho\bar{\rho}}{(\bar{\rho}+\lambda\rho)^2}$

Mit Hilfe der Substitution

$$u = 1 - zt$$

lassen sich die Integrationen elementar ausführen:

$$\int_0^1 (1-zt)^{-3/2} dt = \frac{2}{z} \left(\frac{1}{\sqrt{1-z}} - 1 \right)$$

$$\int_0^1 (1-zt)^{-3/2} \ln(1-zt) dt = \frac{4}{z} \left(\frac{1 + \ln \sqrt{1-z}}{\sqrt{1-z}} - 1 \right)$$

$$\int_0^1 (1-zt)^{-3/2} t dt = \frac{2}{z^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-z}} - 1 \right) + \frac{2}{z^2} (\sqrt{1-z} - 1)$$

$$\int_0^1 (1-zt)^{3/2} \ln(1-zt) t dt = \frac{4}{z^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-z}} - \sqrt{1-z} \right) + \frac{2}{z^2} \ln \sqrt{1-z} \left(\frac{1}{\sqrt{1-z}} + \sqrt{1-z} \right)$$

Rücksubstitution: $z = \frac{4\lambda\rho\bar{\rho}}{(\bar{\rho} + \lambda\rho)^2}$

$$\int_0^1 (1-zt)^{-3/2} dt = \frac{2(\bar{\rho} + \lambda\rho)^2}{4\lambda\rho\bar{\rho}} \left(\frac{\bar{\rho} + \lambda\rho}{|\bar{\rho} - \lambda\rho|} - 1 \right)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{(\bar{\rho} + \lambda\rho)^2}{|\bar{\rho} - \lambda\rho|} & ; \text{ falls } \bar{\rho} > \lambda\rho \\ \frac{1}{\lambda\rho} \frac{(\bar{\rho} + \lambda\rho)^2}{|\bar{\rho} - \lambda\rho|} & ; \text{ falls } \bar{\rho} < \lambda\rho \end{cases}$$

$$\int_0^1 (1-zt)^{-3/2} \ln(1-zt) dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{(\bar{\rho} + \lambda\rho)^3}{\lambda\rho\bar{\rho}|\bar{\rho} - \lambda\rho|} \ln \frac{|\bar{\rho} - \lambda\rho|}{\bar{\rho} + \lambda\rho} + \frac{2(\bar{\rho} + \lambda\rho)^2}{\bar{\rho}|\bar{\rho} - \lambda\rho|} & ; \text{ falls } \bar{\rho} > \lambda\rho \\ \frac{(\bar{\rho} + \lambda\rho)^3}{\lambda\rho\bar{\rho}|\bar{\rho} - \lambda\rho|} \ln \frac{|\bar{\rho} - \lambda\rho|}{\bar{\rho} + \lambda\rho} + \frac{2(\bar{\rho} + \lambda\rho)^2}{\lambda\rho|\bar{\rho} - \lambda\rho|} & ; \text{ falls } \bar{\rho} < \lambda\rho \end{cases}$$

$$\int_0^1 (1-zt)^{-3/2} t dt = \begin{cases} \frac{(\bar{\rho} + \lambda\rho)^3}{2\bar{\rho}^2|\bar{\rho} - \lambda\rho|} & ; \bar{\rho} > \lambda\rho \\ \frac{(\bar{\rho} + \lambda\rho)^3}{2\lambda^2\rho^2|\bar{\rho} - \lambda\rho|} & ; \bar{\rho} < \lambda\rho \end{cases}$$

$$\int_0^1 (1-zt)^{-3/2} \ln(1-zt) t dt =$$

$$= \frac{(\bar{\rho} + \lambda\rho)^3}{2\lambda^2\rho^2\bar{\rho}^2|\bar{\rho} - \lambda\rho|} \left\{ 2\lambda\rho\bar{\rho} + (\bar{\rho}^2 + \lambda\rho^2) \ln \frac{|\bar{\rho} - \lambda\rho|}{\bar{\rho} + \lambda\rho} \right\}$$

Nach einigen elementaren Umrechnungen erhält man für $F(\lambda, \rho, \bar{\rho})$:

$$\bar{\rho} > \lambda\rho :$$

$$F(\lambda, \rho, \bar{\rho}) = 2(1+\lambda) \left\{ \rho \left(-\frac{2}{\lambda} + 1 - \ln 4 + 2 \ln \frac{h(1+\lambda)}{\lambda_D(\bar{\rho} + \lambda\rho)} \right) - \left(\frac{\bar{\rho}}{\lambda^2} + \rho \right) \ln \frac{|\bar{\rho} - \lambda\rho|}{\bar{\rho} + \lambda\rho} \right\} \quad (17)$$

$$\bar{\rho} < \lambda\rho :$$

$$F(\lambda, \rho, \bar{\rho}) = -2(1+\lambda) \left\{ \frac{\bar{\rho}}{\lambda^2} (1 - \ln 4 - 2\lambda + 2 \ln \frac{h(1+\lambda)}{\lambda_D(\bar{\rho} + \lambda\rho)}) - \left(\frac{\bar{\rho}}{\lambda^2} + \rho \right) \ln \frac{|\bar{\rho} - \lambda\rho|}{\bar{\rho} + \lambda\rho} \right\}$$

Wir nennen denjenigen Term, der h enthält, den "dominanten Term". Die Abschätzung, daß die übrigen Terme diesem gegenüber vernachlässigbar sind, ist etwas umfangreich. Wesentlich einsichtiger ist folgende physikalische Überlegung:

Im Kapitel "Skizze einer quantenmechanischen Ableitung des Wirkungsquerschnitts" zeigte sich, daß die Plancksche Konstante in den Abschirmwinkel eingeht:

$$\Theta_0(v) = h/(\mu v \lambda_D) \approx 10^{-4} \ll 1 \quad (18)$$

Im Grenzfall $h \rightarrow 0$ geht der Wirkungsquerschnitt des abgeschirmten Potentials in den Rutherfordschen Streuquerschnitt über, der, wie wir wissen, unendliche Reichweite hat. Auch unsere F -Funktion divergiert bei diesem Grenzübergang. Wir sind damit zur Annahme berechtigt, daß der dominante Term die Kleinwinkelstreuungen beschreibt, und daß er den größten Beitrag liefert, wenn nur h hinreichend klein gewählt wird.

Nun ist die Plancksche Konstante in unserem Fall tatsächlich sehr klein (d.h.: klein gegenüber $\mu v \lambda_D$). Das heißt aber, daß die übrigen Terme, in denen h nicht vorkommt, vernachlässigt werden können.

Transformation auf Geschwindigkeiten:

$$v = p/m_1 \quad \bar{v} = \bar{p}/m_2$$

$$\frac{dW_{12}}{dt} \cong (2\pi)^3 (e_1 e_2)^2 g \int_0^{\infty} v f_1(m_1 v) \bar{v} f_2(m_2 \bar{v}) dv d\bar{v}$$

$$(m_1 m_2)^2 \begin{cases} m_2 v \ln \frac{h}{\lambda_D \mu (\bar{v} + v)} & \bar{v} > v \\ m_1 \bar{v} \ln \frac{h}{\lambda_D \mu (\bar{v} + v)} & \bar{v} < v \end{cases}$$

$$\frac{dW_{12}}{dt} = (2\pi)^3 (e_1 e_2)^2 g (m_1 m_2)^2 \int_0^{\infty} f_1(m_1 v) dv$$

$$\left\{ m_1 v \int_0^v f_2(m_2 \bar{v}) \bar{v}^2 \ln \frac{h}{\lambda_D \mu (\bar{v} + v)} d\bar{v} + m_2 v^2 \int_v^{\infty} f_2(m_2 \bar{v}) \bar{v} \ln \frac{h}{\lambda_D \mu (\bar{v} + v)} d\bar{v} \right\}$$

Da die Elektronen eine sehr große Stoßrate haben, setzen wir eine Boltzmann-Verteilung an:

$$f_2(m_2 \bar{v}) = \frac{n_2}{(2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{m_2 \bar{v}^2}{2kT_2}}$$

Def.: $\beta = \frac{m_2}{2kT_2}$; $\alpha = \frac{m_2 v^2}{2kT_2} \ll 1$

a) Berechnung des Integrals (Integrationsbereich: $0 \leq \bar{v} \leq v$) mit der Substitution $\bar{v} = v\xi$:

$$\begin{aligned} & \frac{n_2 m_1 v}{(2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \int_0^v \bar{v}^2 \ln \frac{h}{\lambda_D \mu (\bar{v} + v)} e^{-\beta \bar{v}^2} d\bar{v} = \\ & = \frac{n_2 m_1 v^4}{(2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \int_0^1 \left[\ln \frac{h}{\lambda_D \mu v} - \ln(1+\xi) \right] \xi^2 e^{-\alpha \xi^2} d\xi \end{aligned}$$

Berechnung des Integrals unter Berücksichtigung, daß $\ln(1+\xi) \approx \ln 2$ ist.

$$\int_0^1 \xi^2 e^{-\alpha \xi^2} d\xi = -\frac{d}{d\alpha} \int_0^1 e^{-\alpha \xi^2} d\xi$$

Substitution: $\xi^2 \alpha = u^2$; $\xi = \frac{u}{\sqrt{\alpha}}$; $\xi \in [0, \sqrt{\alpha}]$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\alpha} \int_0^{\sqrt{\alpha}} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{\alpha}} &= \frac{1}{2\alpha^{3/2}} \int_0^{\sqrt{\alpha}} e^{-u^2} du - \frac{1}{2\alpha} e^{-(\sqrt{\alpha})^2} \\ &= \frac{1}{2\alpha^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \phi(\sqrt{\alpha}) - \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha} \end{aligned} \quad (19)$$

mit $\alpha = m_2 v^2 / (2kT_2) = (m_2/m_1) \cdot (m_1 v^2) / (2kT_2) \ll 1$ (20)

Dies ist der (fast) exakte Wert des Integrals über $d\bar{v}$ im Bereich $\bar{v} \leq v$; die einzige Näherung war: $\ln(1+\bar{v}/v) \approx \ln 2 \ll \ln(\lambda_D \mu v/h)$. Da für alle interessierenden Fälle $\alpha \ll 1$ ist, können wir nochmals nähern (durch Reihenentwicklung):

$$\int_0^1 \xi^2 e^{-\alpha \xi^2} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}} \phi(\sqrt{\alpha}) - \frac{e^{-\alpha}}{2\alpha} \approx \frac{1}{3} - \frac{\alpha}{5} \approx \frac{1}{3} \quad (21)$$

Das gesuchte Integral mit den Vorfaktoren:

$$\begin{aligned} \frac{n_2 m_1 \bar{v}}{(2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \int_0^v \ln \frac{h}{\lambda_D \mu (\bar{v} + v)} e^{-\frac{m_2 \bar{v}^2}{2kT_2}} \bar{v}^2 d\bar{v} &\approx \\ &\approx \frac{n_2 m_1 \bar{v}^4}{(2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \cdot \ln \frac{h}{\lambda_D \mu \bar{v}} \cdot \frac{1}{3} \quad |\alpha| \ll 1 \end{aligned}$$

b) Integration über den Bereich $\bar{v} \geq v$:

Subst.: $\frac{m_2 \bar{v}^2}{2kT_2} = t ; dt = \frac{m_2}{2kT_2} 2\bar{v} d\bar{v}$

$$\frac{n_2 m_2 v^2}{(2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \int_v^\infty \ln \frac{h}{\lambda_D \mu (\bar{v} + v)} e^{-\frac{m_2 \bar{v}^2}{2kT_2}} \bar{v} d\bar{v} =$$

$$\frac{n_2 m_2 v^4}{2\alpha (2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \left\{ \ln \frac{h}{\lambda_D \mu \sqrt{\frac{2kT_2}{m_2}}} \int_\alpha^\infty e^{-t} dt - \frac{1}{2} \int_\alpha^\infty \ln t e^{-t} dt \right\} =$$

nicht dominant

Wir näherten auf eine ähnliche Weise wie im Fall a).

$$\approx \frac{n_2 m_2 v^4}{(2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \ln \frac{h}{\lambda_D \mu} \sqrt{\frac{m_2}{2kT_2}} \cdot \frac{e^{-\alpha}}{2\alpha} \quad (22)$$

Näherung für kleine α liefert: $\alpha = \frac{m_2 m_1 v^2}{m_1 2kT_2} \ll 1$

$$\approx \frac{n_2 m_2 v^4}{(2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \frac{m_1 2kT_2}{m_2 2m_1 v^2} \ln \frac{h}{\lambda_D \mu} \sqrt{\frac{m_2}{2kT_2}} \quad (23)$$

Die Verteilungsfunktion der Ionen nehmen wir monoenergetisch an:

$$\frac{dW_{12}}{dt} = 8(2\pi)^3 (e_1 e_2)^2 (m_1 m_2)^2 \int_0^\infty v^4 \frac{n_1}{4\pi m_1^2 v^2} \frac{1}{m_1} \delta(v-v_0) \cdot$$

$$\ln \frac{h}{\lambda_D \mu} \sqrt{\frac{m_2}{2kT_2}} \cdot \frac{n_2}{(2\pi m_2 k T_2)^{3/2}} \cdot \frac{m_1}{3} \left\{ \frac{m_2 3kT_2}{m_1 \lambda E_1} - 1 \right\}$$

wobei

$$v = v_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{2} v_0^2 = \frac{m_1}{2} v^2 = E_1$$

und wir für die Energieübertragungsrate erhalten:

$$\frac{dW_{12}}{dt} = 4(2\pi)^{1/2} (e_1 e_2)^2 \frac{m_2}{m_1} \frac{n_1 n_2}{(m_2 k T_2)^{3/2}} \left[1 - \frac{E_1}{3/2 k T_2} \right] \ln \frac{h}{\lambda_0 \mu} \sqrt{\frac{m_2}{k T_2}} \quad (24)$$

in Übereinstimmung mit Glasstone - Lovberg (4.61).

Kommentar zur Ableitung der Energieübertragungsrate

Gleichung (24) gibt die Leistungsdichte an, die von einem monoenergetischen Gas der Teilchensorte 1 (hier Ionen) auf ein Boltzmann-verteiltes Gas der Teilchensorte 2 (hier Elektronen) übergeht.

n_1, n_2	Teilchendichten
m_1, m_2	Massen der Teilchen der ersten und zweiten Komponente
E_1	Energie der (monoenergetischen) Teilchen der ersten Komponente
T_2	Temperatur der zweiten Komponente
	reduzierte Masse
h	Plancksche Konstante
D	Debye-Radius

Wie aus der Ableitung (siehe: 16 , 16') ersichtlich ist, gilt Formel (24) für hohe, aber nicht relativistisch hohe Temperaturen. Die Geschwindigkeit der Elektronen liege im Bereich:

$$2Z_1Z_2\alpha c < v_{el} \leq c/2$$

wobei α die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante bedeutet, c die Lichtgeschwindigkeit.

Eine weitere Näherung ist die Beschränkung auf Kleinwinkelstreuungen. Eine Begründung dieser Vorgangsweise wurde in Anschluß an Gleichung (17) gegeben, ab der wir uns auf die

sogenannten "dominanten Terme" beschränken.

Eine grobe Näherung scheint der Übergang von Gleichung (19) auf Gleichung (21) zu sein, in welchem wir die transzendente Funktion (19) in eine Laurentreihe entwickelten und nach dem ersten nichtverschwindenden Glied abbrachen. - Wir erhielten die Konstante 1/3, Gleichung (21). Diese Näherung ist aber gerechtfertigt. Betrachten wir Gleichung (21):

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1} \frac{m_1 v^2}{2kT_2}$$

$m_1 v^2 / 2$	kinetische Energie der Ionen
$3 k T_2 / 2$	mittlere kinetische Energie der Elektronen
$m_2 / m_1 \geq 1/1836$	Verhältnis der Elektronenmasse zur Ionenmasse

Selbst wenn das Verhältnis von Ionenenergie zu Elektronenenergie sehr groß ist, etwa 10 : 1, bleibt α trotzdem sehr klein wegen des großen Massenverhältnisses der Ionen zu den Elektronen. Es gilt tatsächlich:

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1} \frac{m_1 v^2}{2kT_2} \ll 1$$

und wir dürfen die komplizierte transzendente Funktion durch die Konstante 1/3 ersetzen. Dasselbe gilt für die Näherung von (22) auf (23).

Erwähnenswert ist noch der Übergang von (13) auf (15). Gleichung (14) ermöglicht uns die Elimination der Wurzel im

Argument der Deltafunktion. Wenn wir die Verteilungsfunktion $f_1(p)$ und $f_2(p)$ nicht durch die Gleichungen 9a,b bzw. 11a,b dargestellt hätten, wären die Wurzeln bei der Gleichung (13) im Argument der Verteilungsfunktionen. Mit der Deltafunktion gelang uns nun eine einfache Umformung, die uns eine weitere analytische Behandlung des Problems ermöglichte.

Teilchenverlust:

Gleichung (1) gibt den Teilchenverlust (bzw. Teilcheneinschußrate) als Funktional der Verteilungsfunktion und des Verlustwinkels an. Sie stellt einen Zusammenhang her zwischen Teilchenverlust und den Parametern der Verteilungsfunktion: mittlere Temperatur und Dichte. In Verbindung mit Gleichung (2) können diese beiden unbekannt Parameter der Ionenverteilung als Funktion des Verlustkegelwinkels, der Einschubleistung und der Elektronentemperatur berechnet werden.

Es soll nun kurz beschrieben werden, welche Schwierigkeiten bei Gleichung (1) auftreten:

$$Q = \int \dots \int \tau(p') \eta(p) \eta(\bar{p}) f(p) f(\bar{p}) \cdot$$

$$P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}') d^3p d^3\bar{p} d^3p' d^3\bar{p}'$$

wobei $P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}')$

... Übergangswahrscheinlichkeit,
Definition siehe Anhang A

$$\eta(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \theta_k \leq \psi \leq \pi - \theta_k \\ 0 & \text{sonst (Rückkehrwahrscheinlichkeit)} \end{cases}$$

Hier ist ψ der Winkel, den der Impulsvektor des Ions mit der z-Achse des Ortsraums einschließt; θ_k ist der Öffnungswinkel des Verlustkegels.

Wir definieren (siehe auch Teil I):

$$\tau(p) = 1 - \eta(p) \quad \text{Entweichwahrscheinlichkeit}$$

$f(p)$ wird isotrop angenommen; die Verteilung über dem Absolutbetrag p wird offengelassen, analog zur Ableitung von dW_{12}/dt . Nach einigen Umformungen erhält man:

$$Q = \frac{8\pi^2}{\cos^2\theta_k} e^4 \mu \int_0^\infty \int_0^\infty p f(p) \bar{p} f(\bar{p}) dp d\bar{p} \\ \iint \theta[a^2 - 4p^2 \sin^2\theta_k] \theta[a^2 - 4\bar{p}^2 \sin^2\theta_k] \\ \theta\left[\cos\psi' - \frac{a^2 + b^2 - c^2 \sin^2\theta_k}{2ab \cos^2\theta_k}\right] d\psi' \sin\vartheta' d\vartheta' dq$$

mit

$$a = \sqrt{2(p^2 + \bar{p}^2) - 4q^2 - \frac{1}{4q^2}(p^2 - \bar{p}^2)}$$

$$b = 2q \sin\vartheta'$$

$$c^2 = 4(p^2 \cos^2\vartheta'/2 + \bar{p}^2 \sin^2\vartheta'/2)$$

Die Integration über ψ' läßt sich ohne viel Aufwand durch-

führen. Dann allerdings treten Schwierigkeiten auf: Die Arcusfunktion enthält ein sehr kompliziertes Argument! Für $\theta_k = 0$ allerdings reduziert sich die Integrationsmenge zu einer Nullmenge, und es ist zu erwarten, daß im Limes kleiner Verlustwinkel der Ausdruck einfacher wird. Vorerst transformieren wir auf dimensionslose Variablen:

$$y = \frac{1}{4q^2} (p^2 + \bar{p}^2) \quad x = \frac{1}{4q^2} (p^2 - \bar{p}^2)$$

und substituieren:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta'$$

Dann hat das innerste Integral folgende Form:

$$K(x, y, \theta_k) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{1}{2}(1 - \sin \vartheta) + \frac{1}{4} \theta_0^2 \left(\frac{q}{\mu} \right) \right]^{-2} \\ \theta \left[|x + \sin \vartheta| \sin \theta_k - \sqrt{2y - 1 - x^2} - \cos \vartheta / \cos \theta_k \right] \\ \arccos \left\{ \frac{2y - 1 - x^2 + \cos \vartheta - 2(y + x \sin \vartheta) \sin^2 \theta_k}{2 \cos \vartheta \sqrt{2y - 1 - x^2} \cos^2 \theta_k} \right\} \cos \vartheta d\vartheta$$

Es wird versucht, $K(x, y; \theta_k)$ in eine Potenzreihe zu entwickeln:

$$K(x, y, \theta_k) = a_0(x, y) + a_1(x, y) \theta_k + a_2(x, y) \theta_k^2 + \dots$$

Nun kann gezeigt werden, daß a_0 und a_1 verschwinden, a_2 je-

doch divergiert. Es ist durchaus nicht überraschend, daß diese Schwierigkeit auftritt, weil ja auch die Annahme einer homogenen Verteilungsfunktion und der un stetige Übergang des Produkts $\eta(p)f(p)$ auf Null bei $\psi = \theta_k$ den physikalischen Tatsachen sicher nicht entspricht. Die Frage nach der Verlustrate ist daher nur zu beantworten, wenn man die Boltzmann-Gleichung (Teil I, Gleichung 18) exakt löst.

Ergebnisse:

a) Vergleich der Energieübertragungsrate

Wir vergleichen die Energieübertragungsrate vom Ionengas auf das Elektronengas mit der Fusionsleistungsdichte der (D,D)-Reaktion (einfache Reaktion und semi-katalysierte Reaktion). Ist der Quotient

$$\frac{dW_{ie}}{dt} : P_{fusion}$$

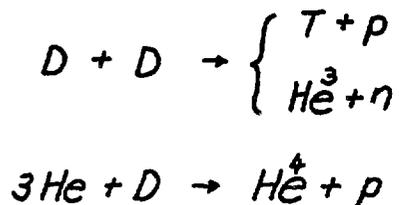
größer als 1, dann haben wir einen Energiekonsumenten; der Wirkungsgrad ist mit Sicherheit negativ. Ist der Quotient sehr viel kleiner als 1, dann besteht die Möglichkeit, daß man mit dieser Maschine großtechnisch Energie bereitstellen kann!

Bei den hier diskutierten Fusionsprozessen zeigte sich, daß bei einer Elektronentemperatur, die bei einem Zehntel der Iontemperatur liegt, sicher kein positiver Wirkungsgrad erzielt werden kann. Lediglich bei der ^3He -semi-katalysierten (D-D)-Reaktion erhalten wir bei $T_e = 100 \text{ keV}$

und $T_i = 1000$ keV ein Verhältnis von

$$\frac{dW_{i,e}}{dt} : P_{fusion} \approx 0.72 < 1$$

Beim semi-katalysierten Prozeß wurden folgende Annahmen gemacht: Ein Boltzmann-verteiltes Gas der Temperatur T_i übertrage auf ein Elektronengas der Temperatur T_e Energie durch elastische Streuungen. Gleichzeitig finden Fusionsreaktionen statt:



Es wird angenommen, daß das 3He zu 100% die Folgereaktion (27) ausführt, während Tritium keine Reaktionen ausführen soll. Ein derartiger Prozeß ist vom energetischen Standpunkt erstrebenswert, da die $D, ^3He$ Reaktion nur geladene Teilchen als Endprodukte hat, deren kinetische Energie man durch elektromagnetische Systeme mit einem hohen Wirkungsgrad umformen kann. Die Annahme ist auch einigermaßen realistisch; wegen der unterschiedlichen spezifischen Ladungen des Tritiums und des Helium 3 hat das Tritium einen größeren Bahnradius, sodaß es den Potentialwall der Magnetfeldlinien leichter überschreiten kann als ein 3He -Kern.

Es wurde weiters angenommen, daß der 3He -Kern gleich nach seinem Entstehen die besagte Folgereaktion ausführt, sodaß er keine Zeit mehr hat, seine Energie an Elektronen abzugeben. Die obere Schranke des Leistungsverhältnisses (25) stellt Diagramm 1 dar, in welchem angenommen wurde, daß

nach der (D,D)-Reaktion keinerlei Folgereaktionen stattfinden.

b) Parameterstudie

Gleichung (2) wurde in einer Parameterstudie diskutiert. Für die Einschußenergien wählten wir die Werte 300 und 600 keV. Dann wurden die Temperatur ($T_e \leq 2E_i/3$) und die Quellstärke Q variiert. Um einen Anhaltspunkt für die Größe der Quellstärke zu bekommen, setzen wir Fusionsleistung und Einschußleistung gleich:

$$E_i Q \leq n^2 \langle \sigma v \rangle E_{fus} = P_{fus}$$

Wir erhalten:

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= 2.96 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} \text{ sec}^{-1} \\ &\approx 0.474 \text{ } \mu\text{A cm}^{-3} \end{aligned} \right\} \text{ bei } E_0 = 600 \text{ keV}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{max} &= 3.92 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} \text{ sec}^{-1} \\ &\approx 0.626 \text{ } \mu\text{A cm}^{-3} \end{aligned} \right\} \text{ bei } E_0 = 300 \text{ keV}$$

Will man einen positiven Wirkungsgrad erhalten, ohne die Energie der ausströmenden Ionen zu nutzen, dann darf die injizierte Leistung die gewonnene Fusionsleistung nicht überschreiten, d.h. $Q \leq Q_{max}$.

Wir stellen nun Gleichung (2) als explizite Funktion der Ionentemperatur (kT_i) dar:

$$kT_i = \frac{E_0 Q + A/\sqrt{kT_e}}{3/2 Q + A(kT_e)^{3/2}}$$

mit $A = 1.26 \cdot 10^{16} \text{ keV/cm}^3 \text{sec}$

Dabei bedeuten:

E_0	Energie des eingeschossenen Ions
kT_e	Elektronentemperatur
kT_i	Ionentemperatur
Q	Quellstärke (Teilchen pro cm^3 und sec)

In der Konstante A stecken folgende Annahmen:

$n_i = 10^{14} \text{ cm}^{-3}$	Teilchendichte der Ionen
$n_i = n_e$	Quasineutralität
$Z_i = 1$	} Deutrongas
$m_i = 2$	

Ein Blick auf Gleichung (28) bzw. auf Diagramm (3) und (4) zeigt, daß die Elektronentemperatur ungefähr gleich der Ionentemperatur ist:

$$kT_i \approx kT_e$$

Das heißt: Wenn die durch den Verlustkegel verschwindenden Ionen weniger Energie abtransportieren sollen als das Plasma Fusionsenergie erzeugt, dann stehen die Ionen mit den Elektronen (fast) im thermodynamischen Gleichgewicht.

ANHANG A

Ableitung der Reaktionswahrscheinlichkeit pro Test- und
Targetteilchendichte

Wir wollen die Reaktionswahrscheinlichkeit $P(p, \bar{p} \leftrightarrow p', \bar{p}')$ als Funktion der Impulse im Laborsystem durch den Wirkungsquerschnitt $\sigma(E_{rel}, \cos \theta)$, einer Funktion der Impulse im Schwerpunktssystem, ausdrücken.

Reaktionswahrscheinlichkeit für die elastische Streuung an einem unendlich schweren Teilchen:

$$W = j n_2 \sigma = n_1 v_1 n_2 \sigma$$

j	Anzahl der einfallenden Teilchen der Teilchensorte 1 pro cm^2 und sec (Teilchenstrom)
n_2	Anzahl der Targetteilchen (Teilchensorte 2) pro cm^3
σ	effektive Reaktionsfläche pro Teilchen
n_2	effektive Gesamtfläche pro cm^3
n_1	Testteilchendichte (Teilchensorte 1)
v_1	Geschwindigkeit der Testteilchen
W	Anzahl der Reaktionsakte pro cm^3 und sec.

Wir lassen jetzt die einschränkende Voraussetzung, das zweite Teilchen habe unendliche Masse, fallen. Dann wird in den Formeln die Geschwindigkeit v_1 durch die Relativgeschwindigkeit ersetzt, weiters die Masse des Testteilchens durch die reduzierte Masse:

$$W = n_1 n_2 v_{rel} \sigma$$

$$v_{rel} = v_2 - v_1 = \frac{p_2}{m_2} - \frac{p_1}{m_1} \dots\dots \text{Relativgeschwindigkeit}$$

(siehe Anhang B)

Dividiert man W durch $n_1 n_2$, so erhält man die Reaktionswahrscheinlichkeit pro Test- und Targetteilchendichte:

$$P = \frac{W}{n_1 n_2} = v_{rel} \sigma$$

oder ausführlicher:

$$P(v_{rel}, \cos \theta) = v_{rel} \sigma(v_{rel}, \cos \theta)$$

Wir bringen jetzt die Reaktionswahrscheinlichkeit pro Teilchendichte aufs Laborsystem. Da wir den elastischen Stoß im Auge haben, müssen der Energie- und Impulserhaltungssatz gelten. Da es sich um Stöße in ein bestimmtes Raumwinkelelement handelt, muß das Raumwinkelelement (des Relativimpulses nach dem Stoß) mittransformiert werden.

Transformation des Raumwinkelements:

Definition:

$$q = \frac{\bar{p}}{m_2} - \frac{p}{m_1} \dots \text{Relativimpuls vor dem Stoß}$$

$$q' = \frac{\bar{p}'}{m_2} - \frac{p'}{m_1} \dots \text{Relativimpuls nach dem Stoß}$$

Energie- und Impulssatz müssen erfüllt sein:

$$E_{rel} = \frac{\mu}{2} (\bar{p}/m_2 - p/m_1)^2 = \frac{\mu}{2} (\bar{p}'/m_2 - p'/m_1)^2 = E'_{rel}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \dots \text{reduzierte Masse}$$

E_{rel} Relativenergie vor dem Stoß

E'_{rel} Relativenergie nach dem Stoß

$$\underline{P} = \underline{p} + \underline{\bar{p}} = \underline{p}' + \underline{\bar{p}'} = \underline{P}'$$

\underline{P} Gesamtimpuls vor dem Stoß

\underline{P}' Gesamtimpuls nach dem Stoß

Bemerkung: Die Impulse p , \bar{p} , p' , \bar{p}' haben bei der Aufstellung der Transportgleichung aufgrund ihrer Stellung im Argument von P die Bedeutung "vor dem Stoß" bzw. "nach dem Stoß". Später (auf Seite 40) werden die Variablen umbenannt.

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

Raumwinkelelement des Impulses nach dem Stoß

Wir wählen dasjenige Koordinatensystem von q' , in welchem q die z-Achse darstellt.

$$d^3q' = q'^2 dq' \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$dq' \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{1}{q'^2} d^3q'$$

$$|q'| = |q| \quad \text{wegen Energieerhaltungssatz}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta d\theta d\varphi \delta(|q_i| - |q_f|) d|q_f| &= \frac{1}{q^2} d^3 q' \delta(|q_f| - |q_i|) = \\ &= \frac{2}{|q_f|} d^3 q' \delta(q^2 - q'^2) = \frac{1}{\mu |q_f|} d^3 q' \delta\left(\frac{1}{2\mu} (q^2 - q'^2)\right) \end{aligned}$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen

$$\delta(q^2 - q_0^2) = \frac{1}{2q_0} [\delta(q - q_0) + \delta(q + q_0)]$$

In unserem Fall wird über $q > 0$ integriert, sodaß der zweite Summand immer Null ist.

Setze:

$$q = \frac{\mu}{2} (\bar{p}/m_2 - p/m_1) \quad q' = \frac{\mu}{2} (\bar{p}'/m_2 - p'/m_1)$$

$$\underline{P} = p + \bar{p} \quad \underline{P}' = p' + \bar{p}'$$

Multiplikation der Gleichung mit $\delta(\underline{P} - \underline{P}') d^3 \underline{P}'$

$$\begin{aligned} \sin \theta d\theta d\varphi \delta(|q_f| - |q_i|) d|q_f| \delta(\underline{P} - \underline{P}') d^3 \underline{P}' &= \\ = \frac{1}{\mu |q_f|} d^3 q' \delta\left(\frac{1}{2\mu} (q^2 - q'^2)\right) \delta(\underline{P} - \underline{P}') d^3 \underline{P}' &= \\ = \frac{1}{\mu^2 |\bar{p}/m_2 - p/m_1|} \delta\left(\frac{q^2}{2\mu} - \frac{\mu}{2} \left(\frac{\bar{p}}{m_2} - \frac{p}{m_1}\right)^2\right) \delta(\underline{P} - p' - \bar{p}') d^3 p' d^3 \bar{p}' \end{aligned}$$

wegen $\frac{\partial(P, q')}{\partial(p, \bar{p}')} = 1$

Multiplikation mit $v_{rel} = |\underline{v} - \underline{v}'|$

$$v_{rel} d\Omega \delta(|q'| - |q|) d|q'| \delta(\underline{P}' - \underline{P}) d\underline{P}' =$$

$$= \frac{1}{\mu^2} \delta(E_{rel} - E'_{rel}) \delta(\underline{p} + \bar{\underline{p}} - \underline{p}' - \bar{\underline{p}}') d^3 p' d^3 \bar{p}'$$

$$v_{rel} d\Omega = \frac{1}{\mu^2} \int_B \delta(E_{rel} - E'_{rel}) \delta(\underline{p} + \bar{\underline{p}} - \underline{p}' - \bar{\underline{p}}') d^3 p' d^3 \bar{p}'$$

Multiplikation mit σ :

$$v_{rel} \sigma(v_{rel}, \cos \theta) d\Omega = P(v_{rel}, \cos \theta) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{\mu^2} \int_B \sigma(v_{rel}, \cos \theta) \delta(E_{rel} - E'_{rel}) \delta(\underline{p} + \bar{\underline{p}} - \underline{p}' - \bar{\underline{p}}') d^3 p' d^3 \bar{p}'$$

$$= \int P(\underline{p}\bar{\underline{p}} \leftrightarrow \underline{p}'\bar{\underline{p}}') d^3 p' d^3 \bar{p}'$$

$$P(\underline{p}\bar{\underline{p}} \leftrightarrow \underline{p}'\bar{\underline{p}}') = \frac{1}{\mu^2} \sigma(v_{rel}(\underline{p}\bar{\underline{p}})) \cos \theta(\underline{p}\bar{\underline{p}}, \underline{p}'\bar{\underline{p}}') \delta(E_{rel} - E'_{rel}) \cdot$$

$$\delta(\underline{p} + \bar{\underline{p}} - \underline{p}' - \bar{\underline{p}}')$$

Nun wird der Wirkungsquerschnitt für das abgeschirmte Coulomb-Potential eingesetzt:

Es gilt: (siehe Kammash, S 89)

$$\sigma(v, \theta) = \left(\frac{e_1 e_2}{2\mu v^2} \right)^2 \frac{1}{[\sin^2 \theta/2 + 1/4 \theta_0^2(v)]^2}$$

v Relativgeschwindigkeit

θ Streuwinkel im Relativsystem

$\theta_0(v)$ Abschirmwinkel (s. Kammash, S 89)

Da wir den Wirkungsquerschnitt als Funktion der Relativkoordinaten gegeben haben, berechnen wir die Übergangswahrscheinlichkeit als Funktion der Relativkoordinaten:

$$P(\underline{q}, \underline{P} \rightarrow \underline{q}', \underline{P}')$$

\underline{q} Relativimpuls } vor dem
 \underline{P} Schwerpunktsimpuls } Stoß

\underline{q}' Relativimpuls } nach dem
 \underline{P}' Schwerpunktsimpuls } Stoß

Es gilt:

$$P(\underline{p}, \underline{P} \rightarrow \underline{p}', \underline{P}') d^3 \underline{p} d^3 \underline{P} d^3 \underline{p}' d^3 \underline{P}' = P(\underline{q}, \underline{P} \rightarrow \underline{q}', \underline{P}') d^3 \underline{q} d^3 \underline{P} d^3 \underline{q}' d^3 \underline{P}'$$

wegen: $\partial(\underline{q}, \underline{P}) / \partial(\underline{p}, \underline{P}) = 1$, siehe Anhang B

$$P(p\bar{p} \rightarrow p'\bar{p}') d^3p \dots d^3\bar{p}' = \frac{1}{\mu^2} \sigma(v_{rel}(p, \bar{p}), \theta(p, \bar{p}; p', \bar{p}')) \cdot$$

$$\delta(E_{rel}(p\bar{p}) - E'_{rel}(p'\bar{p}')) \delta(p + \bar{p} - p' - \bar{p}') d^3p \dots d^3\bar{p}' =$$

$$= \frac{1}{\mu^2} \sigma\left(\frac{|q|}{\mu}, \theta\right) \delta\left(\frac{q^2}{2\mu} - \frac{q'^2}{2\mu}\right) \delta(\underline{p} - \underline{p}') d^3q \dots d^3p' =$$

$$= P(q, \underline{p}, q', \underline{p}') d^3q d^3p d^3q' d^3p'$$

$$\sigma(v, \theta) = \sigma\left(\frac{|q|}{\mu}, \theta\right) = \left(\frac{e_1 e_2}{2\mu \frac{|q|^2}{\mu}}\right)^2 \frac{1}{[\sin^2 \theta/2 + \frac{1}{4} \theta_0^2 \left(\frac{|q|}{\mu}\right)]^2} =$$

$$= \frac{(e_1 e_2)^2}{4q^4} \frac{\mu^2}{[\sin^2 \theta/2 + \frac{1}{4} \theta_0^2 \left(\frac{|q|}{\mu}\right)]^2}$$

$$P(q, \underline{p}; q', \underline{p}') = \frac{1}{\mu^2} \sigma\left(\frac{|q|}{\mu}, \theta\right) \delta\left(\frac{q^2}{2\mu} - \frac{q'^2}{2\mu}\right) \delta(\underline{p} - \underline{p}')$$

$$= \frac{(e_1 e_2)^2}{4q^4} [\sin^2 \theta/2 + \frac{1}{4} \theta_0^2 \left(\frac{|q|}{\mu}\right)]^{-2} \delta\left(\frac{q^2}{2\mu} - \frac{q'^2}{2\mu}\right) \delta(\underline{p} - \underline{p}')$$

Verwende:

$$\delta\left(\frac{q^2}{2\mu} - \frac{q'^2}{2\mu}\right) = 2\mu \delta(q^2 - q'^2)$$

$$= \frac{\mu}{q} (\delta(q + q') + \delta(q - q'))$$

$$= \frac{\mu}{q} \delta(q - q')$$

$$P(q, \underline{P}; q', \underline{P}') =$$

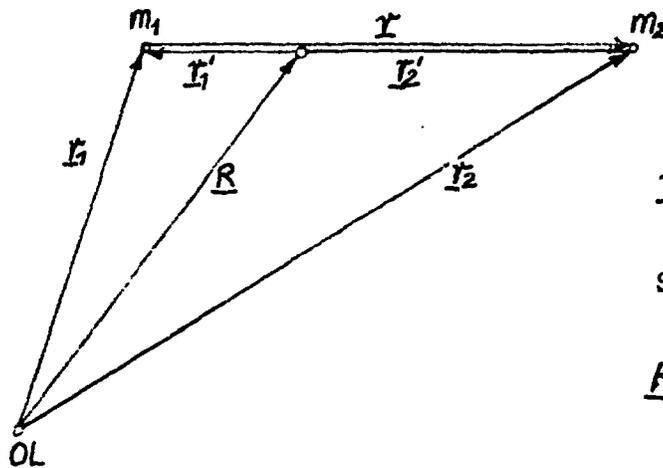
$$\frac{(e_1 e_2)^2}{4q^4} \left[\sin^2 \theta/2 + \frac{1}{4} \theta_0^2 \left(\frac{|q|}{\mu} \right) \right]^{-2} \frac{\mu}{q} \delta(q - q') \delta(\underline{P} - \underline{P}')$$

(Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit
im CM-System bei elastischer Streuung im ab-
geschirmten Coulomb-Potential)

$$\theta = \chi(q, q') \dots \text{Streuwinkel im CM-System}$$

ANHANG B

Transformation auf Relativkoordinaten und -impulse,
Funktionaldeterminante



Relativkoordinate:

$$\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \quad \text{Relativkoordinate}$$

Schwerpunktskoordinate:

$$\underline{R} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2)$$

Ortskoordinaten: $\underline{r}_1 ; \underline{r}_2$

Lagrangefunktion in Ortskoordinaten:

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\underline{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\underline{r}}_2^2 - V(\underline{r}_2 - \underline{r}_1)$$

Umrechnung von Orts- in Relativkoordinaten und umgekehrt:

$$(m_1 + m_2) \underline{R} = m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2$$

$$\underline{r} = -\underline{r}_1 + \underline{r}_2 \quad | \cdot m_1 \quad | \cdot (-m_2)$$

$$\underline{r}_1 = \underline{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \underline{r}$$

$$\underline{r}_2 = \underline{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \underline{r}$$

Def.: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$\dot{\underline{r}}_1 = \underline{\dot{R}} - \frac{\mu}{m_1} \dot{\underline{r}}$$

Ableitung nach der Zeit

$$\dot{\underline{r}}_2 = \underline{\dot{R}} + \frac{\mu}{m_2} \dot{\underline{r}}$$

In die Lagrangefunktion eingesetzt erhält man:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2} (\underline{\dot{R}} - \frac{\mu}{m_1} \dot{\underline{r}})^2 + \frac{m_2}{2} (\underline{\dot{R}} + \frac{\mu}{m_2} \dot{\underline{r}})^2 - V(\underline{r}) \\ &= \frac{m_1+m_2}{2} \underline{\dot{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\underline{r}}^2 - V(\underline{r}) \end{aligned}$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\underline{r}}} = \mu \dot{\underline{r}}$$

$$\underline{P} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{R}}} = (m_1+m_2) \underline{\dot{R}}$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= m_1 \dot{\underline{r}}_1 \\ p_2 &= m_2 \dot{\underline{r}}_2 \end{aligned} \right\}$$

Umrechnung der Geschwindigkeiten in Impulse:

$$(m_1+m_2) \underline{\dot{R}} = m_1 \dot{\underline{r}}_1 + m_2 \dot{\underline{r}}_2 \quad \Rightarrow \quad \underline{P} = p_1 + p_2$$

$$\mu \dot{\underline{r}} = -\mu \dot{\underline{r}}_1 + \mu \dot{\underline{r}}_2 = -\frac{\mu}{m_1} m_1 \dot{\underline{r}}_1 + \frac{\mu}{m_2} m_2 \dot{\underline{r}}_2$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\mu}{m_2} p_2 - \frac{\mu}{m_1} p_1$$

Spezialfall:

$$m_1 = m_2 = m$$

$$Q = \frac{1}{2} (p_2 - p_1)$$

Ableitung der Funktionaldeterminante:

$$\underline{P} = p_1 + p_2 \quad | \cdot \frac{\mu}{m_1} \quad | (-\frac{\mu}{m_2})$$

$$q = -\frac{\mu}{m_1} p_1 + \frac{\mu}{m_2} p_2$$

$$\Rightarrow p_1 = -q + \frac{\mu}{m_2} P$$

$$p_2 = q + \frac{\mu}{m_1} P$$

$$\frac{\partial P}{\partial p_1} = I ; \quad \frac{\partial P}{\partial p_2} = I ; \quad \frac{\partial q}{\partial p_1} = -\frac{\mu}{m_1} I ; \quad \frac{\partial q}{\partial p_2} = \frac{\mu}{m_2} I$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} I & I \\ -\frac{\mu}{m_1} I & \frac{\mu}{m_2} I \end{pmatrix} = \mu^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m_1} & 0 & 0 & \frac{1}{m_2} \end{array} \right| \cdot \frac{1}{m_1} \Bigg] + \frac{1}{m_1} \Bigg] + \frac{1}{m_1} \Bigg] =$$

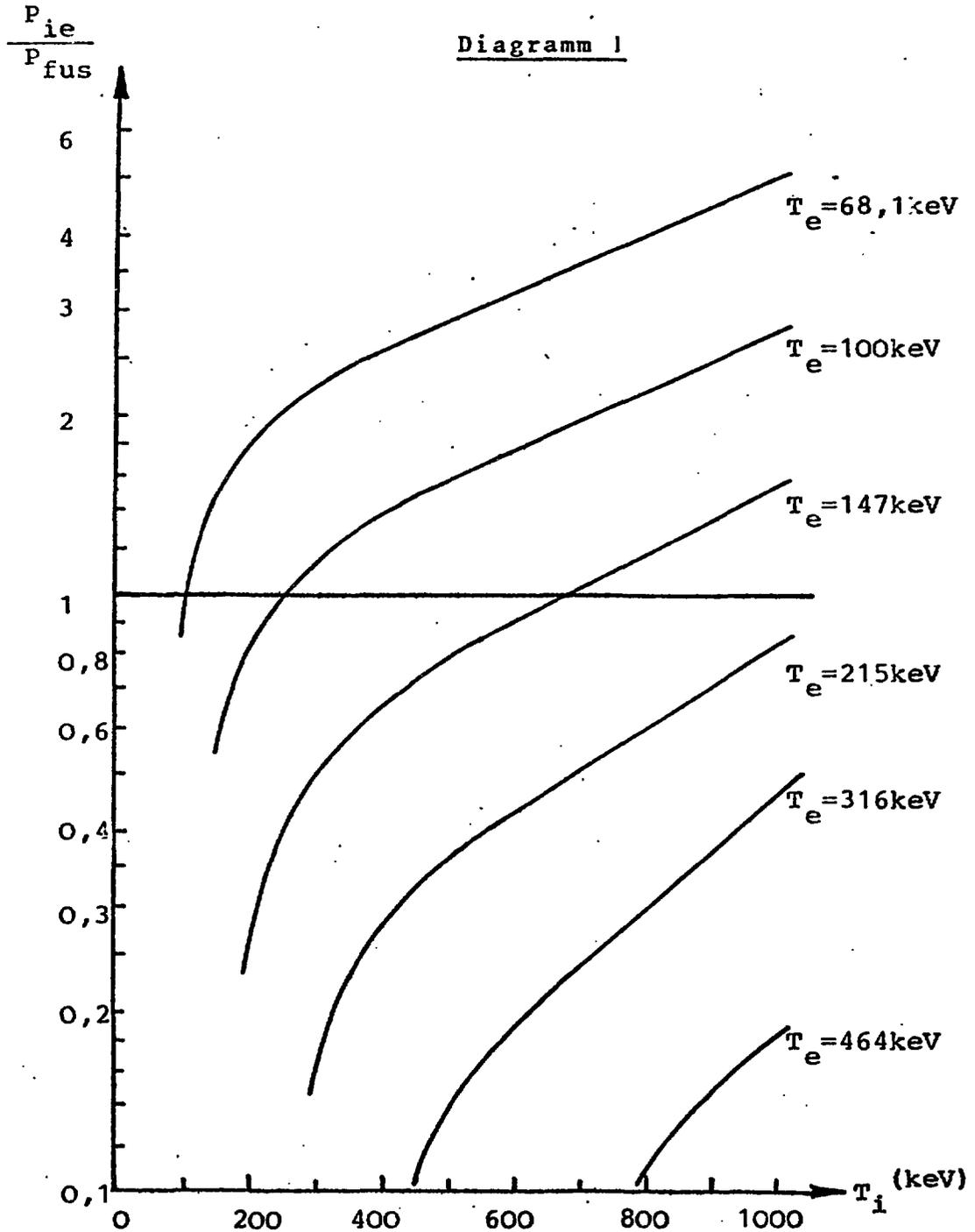
Der Wert einer Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile das Vielfache einer anderen Zeile addiert.

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\dots) = \frac{1}{\mu^3}$$

$$\frac{\partial(\underline{p}, \underline{q})}{\partial(\underline{p}_1, \underline{p}_2)} = \det \begin{bmatrix} I & I \\ \frac{1}{m_1} I & \frac{1}{m_2} I \end{bmatrix} = 1$$

Verhältnis der Energieübertragungsrate
(Ionen-Elektronen) zur Fusionsleistung
(D-D-Reaktion)



Verhältnis der Energieübertragungsrate
(Ionen-Elektronen) zur Fusionsleistung
(He³-semi-katalysierte D-D-Reaktion).

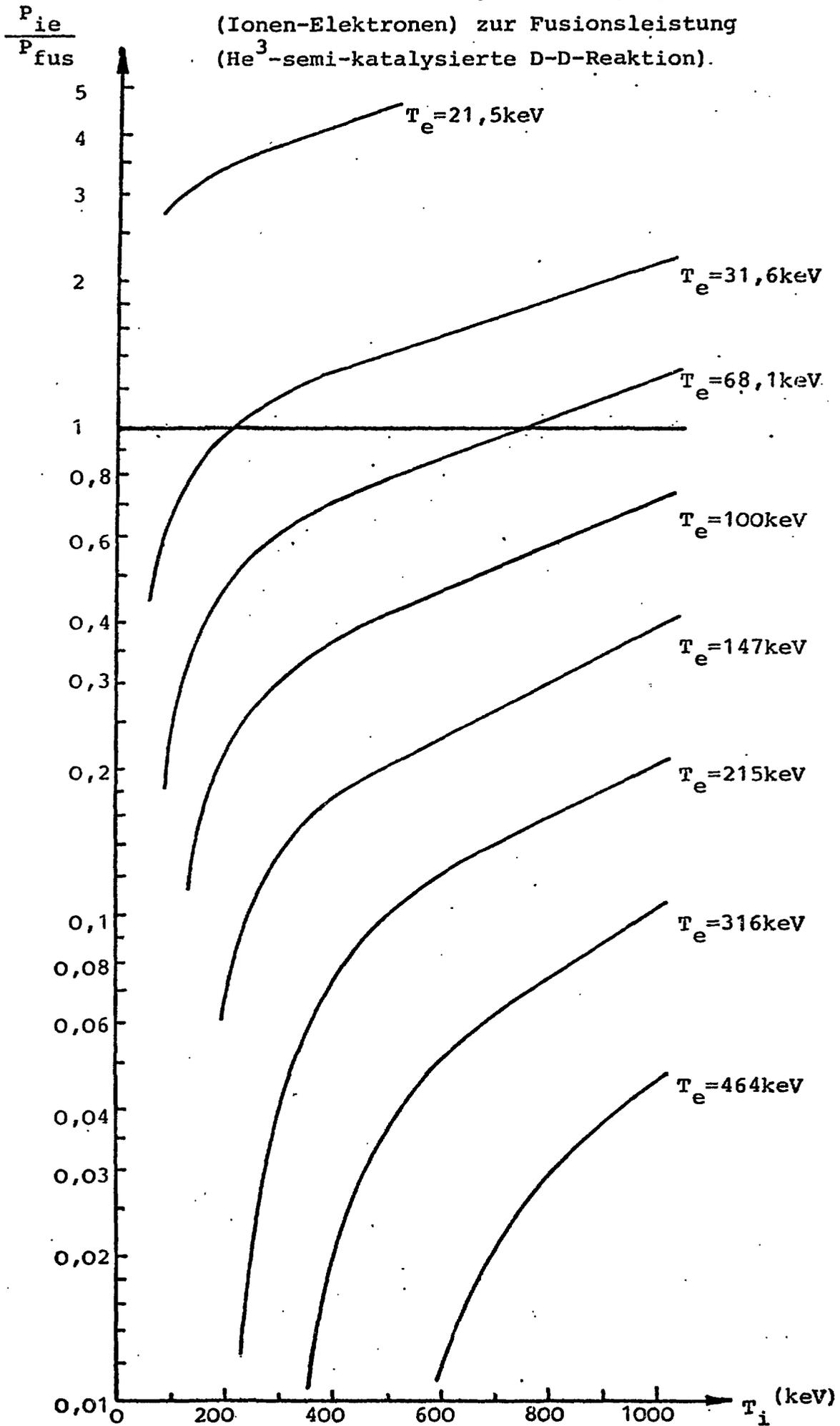


Diagramm 3

$E_0 = 300 \text{keV}$ (Einschußenergie der Ionen)

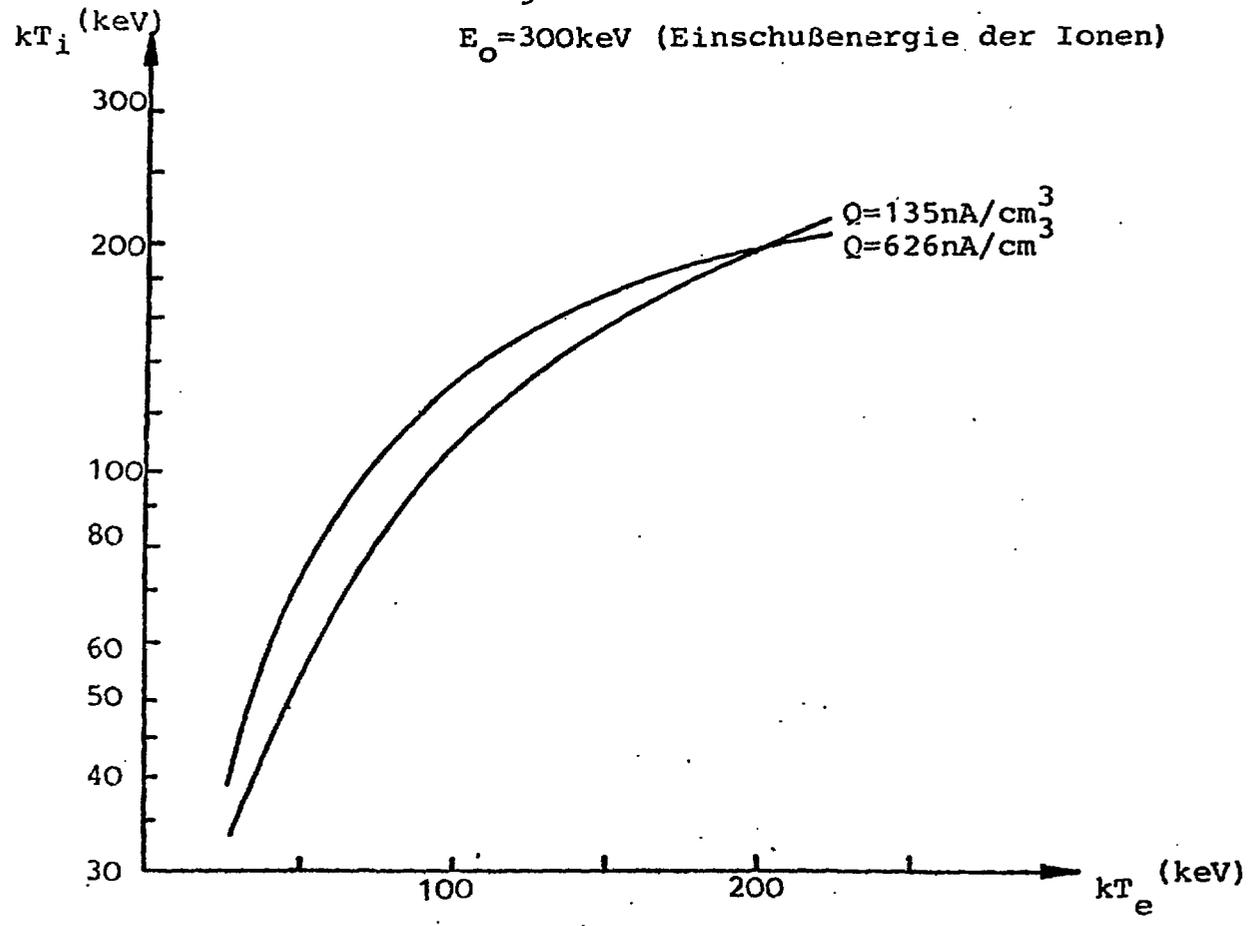
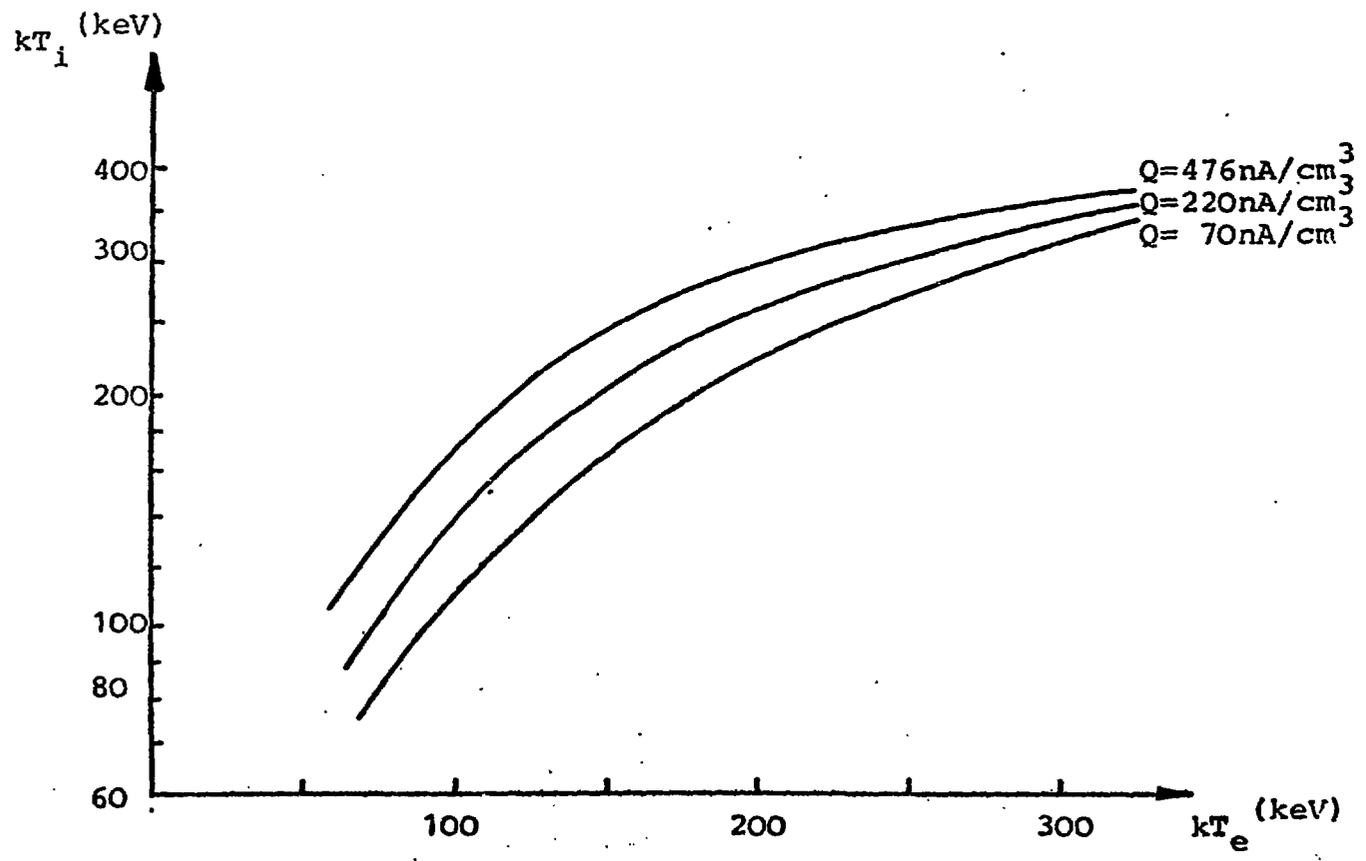


Diagramm 4

$E_0 = 600 \text{keV}$ (Einschußenergie der Ionen)



LITERATURVERZEICHNIS

Dawydow / Quantenmechanik

VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Berlin 1972

Kammash / Fusion Reactor Physics, Principles and Technology

ann arbor science Publishers inc.,

Michigan 1976

Cap / Einführung in die Plasmaphysik,

Akademie-Verlag, Berlin

Pergamon-Press, Oxford

Vieweg & Sohn,

braunschweig 1970

Rose - Clark / Plasmas and Controlled Fusion

MIT-Press, Massachusetts

John Wiley & Sons, Inc.,

New York - London 1961

Großmann / Funktionalanalysis

Akademische Verlagsgesellschaft,

Frankfurt a.M., 1972

Montgomery - Tidman / Plasma Kinetic Theory

Mac Grawhill, Inc.,

New York, San Francisco, Toronto, London 1964

Glasstone - Lovberg / Kontrollierte thermonukleare Reaktionen

Karl Thieme KG,

München 1964

Verzeichnis der verwendeten Zeichen und Symbole

Q	Quellstärke (= Zahl der eingeschossenen Teilchen pro cm^3 und Sekunde)
E_i, E_o	Energie eines eingeschossenen Ions
n_i, n_1	Teilchendichte der Ionen
T_i, T_1	Temperatur der Ionen
n_e, n_2	Teilchendichte der Elektronen
T_e, T_2	Temperatur der Elektronen
k	Boltzmann - Konstante
$P_{12} = dW_{12}/dt$	Energieübertragungsrate
P_{fus}	Fusionsleistungsdichte
B_o	Magnetfeld im Zentrum eines Spiegelreaktors
B_{max}	Maximales Magnetfeld in der Symmetrieachse eines Spiegels

b Stoßparameter (die kleinste Entfernung, die zwei sich begegnende Teilchen hätten, wenn sie nicht wechselwirkten)

e Elementarladung

Z_i, Z Kernladungszahl

r Radius (Kugelkoordinaten)

λ_D Debye - Länge

Auf den Seiten 17 bis 20 werden ausschließlich die in der Quantenmechanik verwendeten Standardzeichen verwendet.

θ_o^{qu} quantenmechanischer Abschirmwinkel

θ_o^{kl} klassischer Abschirmwinkel

g Plasmaparameter

$Q(p)$ Verteilungsfunktion der Quellstärke

σ Wirkungsquerschnitt

V Verlustzone oder -kegel

U	Komplementärmenge zu V
$\underline{p}, \underline{q}' \dots$	Unterstrichene Zeichen symbolisieren Vektoren
$p, q' \dots$	Nicht unterstrichene symbolisieren Skalare oder Absolutbeträge von Vektoren
$\underline{p}, \bar{\underline{p}}$	Impulse vor dem Stoß
$\underline{p}', \bar{\underline{p}}'$	Impulse nach dem Stoß
$P(\underline{p}, \bar{\underline{p}} \rightarrow \underline{p}', \bar{\underline{p}}')$	Reaktionswahrscheinlichkeit (Streuwahrscheinlichkeit) zweier Teilchen, die vor dem Stoß die Impulse \underline{p} und $\bar{\underline{p}}$, nach dem Stoß \underline{p}' und $\bar{\underline{p}}'$ haben sollen.
$f(\underline{p})$	Verteilungsfunktion
n	Teilchendichte, Normierungskonstante der Verteilungsfunktion
$W(\underline{p}, \bar{\underline{p}} \rightarrow \underline{p}', \bar{\underline{p}}')$	Anzahl der Stöße pro Sekunde und cm^3 ; $W = P \cdot f(\underline{p}) \cdot f(\bar{\underline{p}})$
$\eta(\underline{p})$	Rückkehrwahrscheinlichkeit. Wenn $\eta(\underline{p}) = 0$ ist, befindet sich das Teilchen (Impuls \underline{p}) in der Verlustzone.

$f_i^{(0)}(p)$	Ansatz der Verteilungsfunktion der i-ten Komponente
$\phi_i(p)$	zu berechnende Verbesserungsfunktion, für die bei geeigneter Wahl von $f^{(0)}$ gelten soll: $ \phi_i(p) < \epsilon \ll 1$
$S_{11}(p)$	Senkterm der linearisierten Integralgleichung
$v_{11}(p)$	Koeffizientenfunktion von $\phi(p)$ der linearisierten Integralgleichung
$K_{11}(p)$	Kern der Integralgleichung
$\sigma_{\text{tot}}(p)$	totaler Wirkungsquerschnitt des abgeschirmten Coulomb - Potentials
q	Relativimpuls
P	Schwerpunktsimpuls
q', p'	Relativ- und Schwerpunktsimpuls nach dem Stoß
$m_1 (m_2)$	Masse eines Teilchens der ersten (zweiten) Komponente
μ	reduzierte Masse

p^*, \bar{p}^* ebenfalls Impuls des Target- bzw. Testteilchens

$\lambda = m_2/m_1$ Massenverhältnis (hier: Elektronenmasse zu Ionenmasse)

$F(\lambda, p, \bar{p})$ Hilfsfunktion, die definiert wird, um die Schreibweise zu vereinfachen. Sie ist proportional zur Energieübertragungsrate zweier monoenergetischer Verteilungen

v Geschwindigkeit der Ionen

\bar{v} Geschwindigkeit der Elektronen

$\alpha = m_2 v^2 / (2kT_2) = (m_2/m_1) \cdot (m_1 v^2) / (2kT_2)$

