



**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

9-83-554

М.Л.Иовнович, А.Б.Кузнецов,

**Н.Б.Рубин**

**О КОМПЕНСАЦИИ ПОТЕРЬ  
ПРИ СИНХРОТРОННОМ ИЗЛУЧЕНИИ  
ЭЛЕКТРОННОГО КОЛЬЦА,  
ПЕРИОДИЧЕСКИ ДВИЖУЩЕГОСЯ  
В МАГНИТНОМ ПОЛЕ**

При многократном использовании электронное кольцо в течение длительного времени движется в магнитном поле <sup>/1/</sup>. Возникающее при этом синхротронное излучение ультрарелятивистских электронов может заметно влиять на параметры кольца. В циклических ускорителях потери на излучение компенсируются с помощью электромагнитных полей <sup>/2/</sup>. Рассмотрим автофазировку при компенсации потерь на синхротронное излучение кольца. Синхротронное излучение электронов кольца приводит к уменьшению полной энергии, обобщенного азимутального импульса и, следовательно, амплитуды продольных колебаний электронов. Поэтому при многократном использовании кольца необходимо применять два резонатора: в одном из резонаторов создается азимутальное электрическое поле  $E_\theta$ , обеспечивающее сохранение обобщенного импульса, в другом - продольное поле  $E_z$ , обеспечивающее сохранение амплитуды продольных колебаний.

Предположим, как в работе <sup>/1/</sup>, что кольцо совершает колебания в слабонеоднородном магнитном поле  $B_z = B_0 f(z)$ , которое имеет минимум в точке  $z = 0$ , где располагаются резонаторы. Магнитное поле изменяется по закону:  $f = 1 - \frac{z}{h}$  при  $z < 0$ ,  $f = 1 + \frac{z}{h_1}$  при  $z > 0$ .

Для определенности будем рассматривать случай  $h < h_1$ . Противоположный случай соответствует повороту системы координат на  $180^\circ$ . Для слабонеоднородного магнитного поля получены следующие приближенные результаты <sup>/3/</sup>: азимутальная скорость электрона  $w$  пропорциональна  $\sqrt{f}$ , при линейном изменении магнитного поля электрон движется в продольном направлении с постоянным ускорением.

На электрон, кроме силы со стороны магнитного поля, как малые возмущения, действуют радиационная сила и электрические поля резонаторов. Допустим, что электрические поля резонаторов изменяются со временем по одинаковому закону:  $\cos(\omega t + \phi)$  и синфазно. Для продольного движения электрона в резонаторах:

$$\dot{\gamma} = \frac{e}{mc^2} (uE_z + wE_\theta), \quad (\dot{\gamma}u) = \frac{e}{m} E_z, \quad /1/$$

где  $\gamma mc^2$  - полная энергия,  $u$  - продольная скорость электрона. Из системы уравнений <sup>/1/</sup> следует, что

$$\dot{u} = \frac{e}{m\gamma u} [(1 - \beta^2) uE_z - \beta^2 wE_\theta], \quad /2/$$

где  $\beta = \frac{u}{c}$ .

Как видно, изменение продольной скорости, вызванное действием резонаторов, пропорционально  $\gamma^{-1}$ . Рассмотрение продольного движения показывает, что действие радиационной силы, направленной против ультрарелятивистского движения  $\gamma^2$ , в  $\gamma^2$  раз меньше действия резонаторов. Поэтому вкладом радиационной силы в продольное движение электрона можно пренебречь. Уравнение продольного движения электрона вне резонаторов имеет вид:  $\dot{u} = g$  при  $z < 0$ ,  $\dot{u} = -g_1$  при  $z > 0$ , где  $g, g_1$  - постоянные.

Примем момент времени, в который кольцо, двигаясь справа налево, выходит из резонаторов, за начало  $n+1$ -го периода продольного колебания кольца. Полную энергию, продольную скорость электрона и фазу напряжения в этот момент времени обозначим соответственно:  $u_n, -u_n, \phi_n$ . Отметим, что, связывая фазу  $\phi_n$  с направлением движения кольца через резонаторы /справа налево/, мы выбираем направление во всей системе. Найдем изменение энергии, скорости и фазы за период колебания кольца. При первом прохождении резонаторов слева направо энергия изменится на величину

$\Delta u_+ = \frac{e}{mc^2} (W_0 + V_0) \cos \phi_1$  при втором /в противоположном направлении/ - на  $\Delta u_- = \frac{e}{mc^2} (W_0 - V_0) \cos \phi_2$ , где  $W_0, V_0$  - амплитуды напряже-

ния азимутального и продольного полей резонаторов,  $\phi_1, \phi_2$  - соответствующие фазы. При выводе учтено, что  $\int E_{\theta} w dt = W_0 \cos \phi$ ,  $\int E_z u dt = V_0 \cos \phi$  /интегрирование проводится по времени прохождения резонаторов/. Изменение знака при  $V_0$  в выражениях для  $\Delta u_{\pm}$  связано с изменением направления продольной скорости при втором прохождении резонаторов. Величины  $eW_0, eV_0$  будем считать положительными.

Для вычисления потерь на излучение воспользуемся выражением для радиационной силы  $\gamma^2$ . В слабонеоднородном магнитном поле радиационная сила пропорциональна  $\gamma^2 w^2 B_z^2$ . Азимутальная скорость  $w = c(b_n - \gamma_n^{-2})^{1/2} \sqrt{f}$ , где  $b_n = 1 - \beta_n^2, \beta_n = \frac{u_n}{c}$ . Так как предполагается, что продольная энергия много меньше полной, то при вычислении потерь на излучение величиной  $\gamma_n^{-2}$  будем пренебрегать по сравнению с  $b_n$ . Мощность потерь на излучение:

$$\dot{\gamma} = -\nu \gamma_n^2 b_n f^3, \quad \text{где } \nu = \frac{2}{3} \frac{e^4 B_0^2}{m^3 c^5}.$$

Изменение полной энергии, вызванное излучением, пропорционально интегралу  $J = \int_0^T f^3(z) dt$ , где  $T$  - период продольного колебания кольца. С помощью уравнения движения электрона вне резонаторов с уче-

том выражений  $g = \frac{c^2(b_n - \gamma_n^{-2})}{2h}, g_1 = \frac{c^2(b_n - \gamma_n^{-2})}{2h_1}$  найдем зависимость

от времени  $z$  и вычислим интеграл  $\int dt$ :

$$J = \frac{4(h + h_1)}{cb_n^4} \beta_n F(\beta_n^2), \quad \text{где } F(x) = 1 - x + \frac{3}{5}x^2 - \frac{x^3}{7}.$$

Изменение продольной скорости, вызванное действием резонаторов, находится в результате решения уравнения /2/ методом последовательных приближений. В первом приближении получим:

$$\Delta u_{\pm} = \frac{e}{m\gamma_n u_n} [b_n V_0 \mp \beta_n^2 W_0] \cos \phi_{\pm}, \quad /3/$$

где

$$\phi_+ = \phi_1, \quad \phi_- = \phi_2.$$

После первого прохождения резонаторов продольная скорость электрона равна величине  $u_n + \Delta u_+$ , а после второго прохождения - величине  $-(u_n + \Delta u_+) + \Delta u_-$ . Изменение скорости за период колебания кольца равно  $\Delta u_- - \Delta u_+$ . Так как электрон движется вне резонатора

с постоянным ускорением, то время движения слева от резонаторов равно  $\frac{2u_n}{g}$ , справа -  $\frac{2(u_n + \Delta u_+)}{g_1}$ . Изменение фазы за период равно

$2\omega \left( \frac{u_n}{g} + \frac{u_n + \Delta u_+}{g_1} \right)$ . Вычислив таким образом изменение энергии, скорости и фазы за период колебания кольца, найдем следующие рекуррентные соотношения:

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \nu_1 a_+ + \nu_2 a_- - \frac{2\nu_0}{b_n^3} \gamma_n^2 \beta_n F(\beta_n^2), \quad /4/$$

$$\gamma_n \beta_n (\beta_{n+1} - \beta_n) = \nu_2 b_n a_- - \nu_1 \beta_n^2 a_+, \quad /5/$$

$$\phi_{n+1} - \phi_n = \frac{4\omega \beta_n h_0}{c} (b_n - \gamma_n^{-2})^{-1} + \frac{(1-q)}{\gamma_n b_n \beta_n^2} (\nu_2 b_n - \nu_1 \beta_n^2) \cos \phi_{1n}, \quad /6/$$

где

$$\nu_1 = \frac{eW_0}{mc^2}, \quad \nu_2 = \frac{eV_0}{mc^2}, \quad a_{\pm} = \cos \phi_{1n} \pm \cos \phi_{2n}, \quad \phi_{1n} = \phi_n + \frac{4\omega \beta_n h}{cb_n},$$

$$\phi_{2n} = \phi_n + \frac{4\omega \beta_n h_0}{cb_n}, \quad h_0 = h + h_1, \quad \nu_0 = \frac{2\nu h_0}{c}, \quad q = \frac{h}{h_0}.$$

Учет продольной составляющей радиационной силы привел бы к появлению в правой части уравнения /5/ члена порядка  $\nu$ , который в  $\gamma^2$  раз меньше членов, содержащих  $\nu_1$  и  $\nu_2$ . Равновесное движение соответствует следующему решению системы рекуррентных соотношений

ношений:  $\gamma_n = \gamma$ ,  $\beta_n = \beta$  и  $\phi_n = 2\pi n + \phi_0$ , причем  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $\phi_0$  - постоянные. При равновесном движении энергия и скорость электронов в конце каждого периода колебания кольца поддерживаются неизменными. Соотношения /4/, /5/ определяют зависимость амплитуд напряжений от параметров равновесного движения:

$$\nu_1 = \frac{2\nu_0 \gamma^2 \beta F}{b^2 b_+}, \quad \nu_2 = \frac{2\nu_0 \gamma^2 \beta^3 F}{b^3 b_-}, \quad /7/$$

где

$$b = 1 - \beta^2, \quad b_{\pm} = \cos\psi \pm \cos\phi_0, \quad \psi = \phi_0 + \delta, \quad \delta = 2\pi q, \quad F = F(\beta^2),$$

а соотношение /6/ - частоту электрического поля резонаторов.

Так как величины  $b_{\pm}$  положительны ( $\nu_1 > 0, \nu_2 > 0$ ), а  $q < \frac{1}{2}$ , то равновесная фаза ограничена следующей областью значений:

$$\frac{3\pi}{2} - q\pi < \phi_0 < 2\pi - q\pi. \quad /8/$$

Случай  $q = \frac{1}{2}$  /симметричное магнитное поле/ следует исключить

из рассмотрения, т.к. при этом  $\delta = \pi$ ,  $b_{\pm} = 0$ , т.е. резонатор с азимутальным полем дает суммарный нулевой эффект и не компенсирует потери обобщенного импульса. С точки зрения многократного использования кольца /1/ этот случай не представляет интереса. Линеаризуя систему рекуррентных соотношений, найдем, что система уравнений для малых отклонений от равновесных значений:  $\gamma'_n = \gamma_n - \gamma$ ,  $\beta'_n = \beta_n - \beta$ ,  $\phi'_n = \phi_n - 2\pi n - \phi_0$ , имеет вид:

$$\gamma'_n - \gamma'_{n+1} = a_1 \gamma'_n + a_2 \beta'_n + a_3 \phi'_n,$$

$$\beta'_n - \beta'_{n+1} = b_2 \beta'_n + b_3 \phi'_n, \quad /9/$$

$$\phi'_{n+1} - \phi'_n = \tau [-c_1 \gamma'_n + c_2 \beta'_n - c_3 \phi'_n],$$

где  $\tau = \frac{4\omega h_0}{c}$ , а коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$  зависят от равновесных значений. Предположим, что  $\gamma'_n, \beta'_n, \phi'_n$  пропорциональны величине  $\lambda^n$ . Приравняв нулю определитель, полученный с помощью системы уравнений /9/, найдем для определения  $\lambda$  кубическое уравнение:

$$(\lambda - 1) \left\{ \lambda^2 - 2 \left[ 1 - \frac{1}{2} (\tau c_3 + a_1 + b_2) \right] \lambda + 1 - a_1 - b_2 - \tau c_3 + \tau b_3 c_2 \right\} = 0. \quad /10/$$

В уравнении /10/ оставлены величины порядка  $\nu_0 \gamma$ . Приведем выражения для коэффициентов уравнения /10/, которые потребуются

в дальнейшем:

$$a_1 = \frac{4\nu_0 \gamma \beta F}{b^3}, \quad b_3 = \frac{4\nu_0 \gamma \beta^2 F}{db^2} \sin \delta, \quad c_2 = \frac{1 + \beta^2}{b^2}, \quad /11/$$

$$c_3 = (1 - q) \frac{4\nu_0 \gamma \beta^2 F}{db^3} \sin \psi \cos \phi_g,$$

где  $d = \cos^2 \psi - \cos^2 \phi_g > 0$ . Первый корень уравнения /10/  $\lambda=1$  не приводит к неустойчивости, два других корня определяются квадратным уравнением. Так как один из вещественных корней квадратного уравнения больше единицы, устойчивые решения возможны только в случае комплексных корней, у которых  $|\lambda| \leq 1$ . Как следует из решения уравнения /10/, корни уравнения комплексные, т.к.  $\delta < \pi$  и  $c_2 b_3 > 0$ . Квадрат модуля корней:

$$|\lambda|^2 = 1 - \frac{8\nu_0 \gamma \beta F}{b^3} \left[ 1 - \frac{2\pi(1-q)\beta^2}{d} \sin \psi \cos \phi_g \right]. \quad /12/$$

Условие затухания колебаний  $|\lambda|^2 < 1$  можно привести к виду

$$\sin(2\phi_g + \delta) < -\frac{p \sin \delta}{p + 2 \sin \delta}, \quad /13/$$

где

$$p = 2\pi(1-q)\beta^2.$$

Определим величину  $\sin \delta_0 = \frac{\sin \delta}{1 + \frac{\sin \delta}{\pi(1-q)\beta^2}}$ . Неравенство /13/ соответствует следующей области значений равновесной фазы:

$$\frac{3\pi}{2} - q\pi + \frac{\delta_0}{2} < \phi_g < 2\pi - q\pi - \frac{\delta_0}{2}. \quad /14/$$

Сравнение неравенств /8/ и /14/ показывает, что учет устойчивости приводит к сужению области допустимых значений равновесной фазы. Область устойчивости существует при всех значениях  $q < 1/2$ ,

т.к. из определения следует, что величина  $\delta_0$  всегда меньше  $\frac{\pi}{2}$ .

Полученные результаты практически не изменятся, если кольцо будет содержать небольшое количество ионов.

Авторы благодарят Э.А.Перельштейна за полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иовнович М.Л. и др. ОИЯИ, Р9-11686, Дубна, 1978.
2. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. ГИФМЛ, М., 1962.
3. Саранцев В.П., Перельштейн Э.А. Коллективное ускорение ионов электронными кольцами. Атомиздат, М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел  
28 июля 1983 года.

## НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги,  
если они не были заказаны ранее.

ДЗ-11787	Труды III Международной школы по нейтринной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
Д1,2-12036	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12450	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
Д4-80-271	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д2-81-543	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д10,11-81-622	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д17-81-758	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-82-27	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Р18-82-117	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д2-82-568	Труды Международного симпозиума по поляризаационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Д9-82-664	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
ДЗ,4-82-704	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
	Труды IV Международной школы по нейтринной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:  
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79  
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ  
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Иовнович М.Л., Кузнецов А.Б., Рубин Н.Б.

9-83-554

О компенсации потерь при синхротронном излучении электронного кольца, периодически движущегося в магнитном поле

Электронное кольцо совершает колебания в неоднородном магнитном поле. Синхротронное излучение электронов приводит к уменьшению энергии и обобщенного азимутального импульса электронов. Компенсация потерь производится с помощью электромагнитных полей резонаторов, создающих один продольное, другой азимутальное электрические поля. Получены рекуррентные соотношения для изменения энергии, продольной скорости электронов и фазы напряжения резонаторов за период колебания кольца. Найдены параметры равновесного движения электронов и исследована его устойчивость. Определена область значений равновесной фазы, при которых возможно устойчивое равновесное движение.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Iovnovich M.L., Kuznetsov A.B., Rubin N.B.

9-83-554

On Losses Compensation at the Synchrotron Radiation of an Electron Ring Moving Periodically in the Magnetic Field

Electron ring oscillates in an inhomogeneous magnetic field. Electron synchrotron radiation leads to the decrease of electron energy and generalized azimuthal momentum. The loss compensation is performed by means of electron fields of two resonators one of which creates longitudinal, and the other - azimuthal electric fields. Recurrent relations for changing the energy, electron longitudinal velocity and voltage phase of the resonators during ring oscillation are obtained. Parameters of electron equilibrium motion are found, and its stability is investigated. The region of equilibrium phase values is determined at which stable equilibrium motion is possible.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой

12 коп.

Редактор Н.Н.Зрелова. Макет Р.Д.Фоминной.  
Набор В.С.Румянцевой, Е.М.Граменицкой.

Подписано в печать 24.08.83.  
Формат 60x90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 0,79.  
Тираж 220. Заказ 33346.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.  
Дубна Московской области.