

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE

E.13

**STABILITE DES COQUES MINCES
FLAMBAGE D'UNE POUTRE PAR CUMUL
DE DEFORMATION PLASTIQUE SOUS L'EFFET
D'UN CHARGEMENT THERMIQUE CYCLIQUE
ETUDE D'UN MODELE SIMPLIFIE**

*par**Camille GONTIER, Alain HOFFMANN*

**INSTITUT DE RECHERCHE TECHNOLOGIQUE ET
DE DEVELOPPEMENT INDUSTRIEL**

**DIVISION D'ETUDE ET DE
DEVELOPPEMENT DES REACTEURS**

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

Rapport CEA-R-5246

1984**SERVICE DE DOCUMENTATION**

PLAN DE CLASSIFICATION DES RAPPORTS ET BIBLIOGRAPHIES CEA
(Classification du système international de documentation nucléaire SIDON/INIS)

A 11	Physique théorique	C 30	Utilisation des traceurs dans les sciences de la vie
A 12	Physique atomique et moléculaire	C 40	Sciences de la vie : autres études
A 13	Physique de l'état condensé	C 50	Radioprotection et environnement
A 14	Physique des plasmas et réactions thermonucléaires	D 10	Isotopes et sources de rayonnements
A 15	Astrophysique, cosmologie et rayonnements cosmiques	D 20	Applications des isotopes et des rayonnements
A 16	Conversion directe d'énergie	E 11	Thermodynamique et mécanique des fluides
A 17	Physique des basses températures	E 12	Cryogénie
A 20	Physique des hautes énergies	E 13	Installations pilotes et laboratoires
A 30	Physique neutronique et physique nucléaire	E 14	Explosions nucléaires
B 11	Analyse chimique et isotopique	E 15	Installations pour manipulation de matériaux radioactifs
B 12	Chimie minérale, chimie organique et physico-chimie	E 16	Accélérateurs
B 13	Radiochimie et chimie nucléaire	E 17	Essais des matériaux
B 14	Chimie sous rayonnement	E 20	Réacteurs nucléaires (en général)
B 15	Corrosion	E 30	Réacteurs nucléaires (types)
B 16	Traitement du combustible	E 40	Instrumentation
B 21	Métaux et alliages (production et fabrication)	E 50	Effluents et déchets radioactifs
B 22	Métaux et alliages (structure et propriétés physiques)	F 10	Economie
B 23	Céramiques et composites	F 20	Législation nucléaire
B 24	Matériaux plastiques et autres matériaux	F 30	Documentation nucléaire
B 25	Effets des rayonnements sur les propriétés physiques des matériaux	F 40	Sauvegarde et contrôle
B 30	Sciences de la terre	F 50	Méthodes mathématiques et codes de calcul
C 10	Action de l'irradiation externe en biologie	F 60	Divers
C 20	Action des radioisotopes et leur cinétique		

Rapport CEA-R-5246

Cote-matière de ce rapport : E.13

DESCRIPTION-MATIERE (mots clefs extraits du thesaurus SIDON/INIS)

<i>en français</i>	<i>en anglais</i>
DEFORMATION	DEFORMATION
MODELES MATHEMATIQUES	MATHEMATICAL MODELS
CONTRAINTES THERMIQUES	THERMAL STRESSES
ECROUISSAGE	STRAIN HARDENING
PLASTICITE	PLASTICITY
STRUCTURES MECANIQUES	MECHANICAL STRUCTURES
ACIER - CR17 NI12 MO3 - L	STEEL - CR17 NI12 MO3 - L

RAPPORT CEA-R-5246 - Camille GONTIER, Alain HOFFMANN

STABILITE DES COQUES MINCES. FLAMBAGE D'UNE POUTRE PAR CUMUL DE DEFORMATION PLASTIQUE SOUS L'EFFET D'UN CHARGEMENT THERMIQUE CYCLIQUE. ETUDE D'UN MODELE SIMPLIFIE.

Sommaire - Cette étude s'inspire d'un travail de J. DEVOS (NOVATOME) concernant le flambage d'une tige à deux rotules sous un chargement axial combiné avec un chargement thermique cyclique. Mais ici, le modèle est développé en tenant compte de l'écroutissage des rotules, et en étudiant la convergence du processus au cours du cyclage. L'étude fait apparaître la réalité du "flambage progressif" pour des valeurs trop élevées de la charge thermique. Une condition de non ruine est proposée et présentée sous formes d'abaques.

1984

73 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

RAPPORT CEA-R-5246 - Camille GONTIER, Alain HOFFMANN

STABILITY OF THIN SHELLS. BUCKLING OF A BEAM, DUE TO CUMULATED PLASTIC DEFORMATIONS UNDER CYCLIC THERMAL LOADING. STUDY OF A SIMPLIFIED MODEL

Summary - The study was carried out on a simple model made of a one bar with two hinges. This model is subjected to an axial force combined with cyclic thermal loading. The plastic hardening of the hinges has been taken into account, and the convergence of the process, while cycling, has been studied. When the thermal load is too high, "progressive buckling" occurs. Diagrams defining the safe domain are presented.

1984

73 p.

Commissariat à l'Energie Atomique - France

- Rapport CEA-R-5246 -

Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay
Institut de Recherche Technologique et de Développement Industriel
Division d'Etude et de Développement des Réacteurs
Département des Etudes Mécaniques et Thermiques

STABILITE DES COQUES MINCES.
FLAMBAGE D'UNE POUTRE PAR CUMUL DE DEFORMATION
PLASTIQUE SOUS L'EFFET D'UN CHARGEMENT THERMIQUE CYCLIQUE.
ETUDE D'UN MODELE SIMPLIFIE

par

Camille GONTIER, Alain HOFFMANN

- Janvier 1984 -

I - ORIGINE DU PROBLEME

Le problème étudié dans les pages qui suivent est une extension du problème présenté par J.DEVOS dans la note Réf. [1] : "Influence des contraintes thermiques sur le flambage élastoplastique, étude d'un modèle élémentaire".

Dans la note de DEVOS, le dispositif suivant (fig. 1.1), constitué d'une tige rigide et de deux rotules élastoplastiques 1 et 2, affecté d'un défaut initial η_0 , chargé axialement d'une charge P, est soumis à un gradient

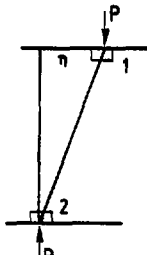


Fig. 1.1

thermique cyclique défini par son amplitude maximum Q . Le fonctionnement des rotules est supposé parfaitement plastique et leur chargement limite est caractérisé par l'équation :

$$(1.1) \quad |\sigma_m| + |\sigma_f| = \sigma_e$$

où σ_m représente la contrainte de membrane, σ_f la contrainte due à la flexion et σ_e la limite élastique.

L'étude complète du premier cycle thermique permettait à l'auteur d'éclairer quelque peu le mécanisme de ruine du système sous ce type de chargement et conduisait à une condition mathématique sur les charges maximums applicables à cette structure. L'idée principale sous-jacente à cette théorie était qu'au cours du deuxième demi-cycle (décharge) l'adaptation de la structure pouvait être déjà acquise à la condition qu'une au moins des rotules n'ait fonctionné qu'élastiquement dans cette phase. Au contraire, la plastification simultanée des deux rotules entraînait automatiquement la ruine.

II - EXTENSION DU PROBLEME

Le problème étudié ici est essentiellement le même que celui de la note précédente, avec les deux extensions suivantes :

a) Le matériau est écrouissable.

Le fonctionnement des rotules est défini par une courbe (C, θ) dépendant de σ_m . Pour la théorie, nous avons raisonné sur une loi d'écrouissage type, tandis que pour les applications numériques, nous avons modélisé une rotule réelle. A partir de la courbe de traction d'un acier courant, en utilisant le programme SAMSON du C.E.A., et pour une section rectangulaire, nous avons calculé la loi moment-courbure correspondante, cela pour différents niveaux de précontrainte axiale. Les courbes obtenues fournissent les modèles de comportement d'une rotule réelle, pour différentes valeurs de la précontrainte.

b) L'évolution des déformations est étudiée jusqu'au $N^{\text{ième}}$ cycle thermique, N éventuellement infini.

Dans ce dernier cas le critère d'adaptation est la convergence de la série associée à la déformation du système. Nous verrons les difficultés que présentera, dans le cas général, l'étude de convergence, ce qui nous amènera à simplifier le modèle par une approximation.

III - DEFINITION DES VARIABLES, EQUATIONS DE BASE

III.1 - Fonctionnement des rotules

Le fonctionnement des deux rotules supposées identiques, est représenté sur la figure 3.1 par une loi type "moment-angle de rotation".

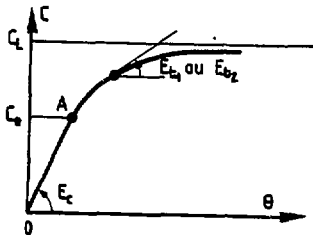


Fig. 3.1

Cette courbe comporte évidemment une partie linéaire OA représentant la phase élastique. Au delà de A, la courbe s'infléchit pour atteindre asymptotiquement une valeur limite C_L . Il est clair que les valeurs C_e (limite élastique) et C_L (moment limite) dépendent de la charge de membrane P.

La pente de cette courbe dans sa partie élastique sera notée E_c , en ce sens qu'elle représente le "module d'élasticité en rotation" de la rotule. La pente en un point courant de la zone plastique (module tangent)

sera notée E_{t1} ou E_{t2} suivant qu'il s'agit de la rotule 1 ou de la rotule 2. Pour simplifier les calculs, on notera :

$$t_1 = \frac{E_{t1}}{E_c} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{E_{t2}}{E_c} \quad (3.1.1)$$

les modules tangents "normalisés" des deux rotules.

De même, si C_1 et C_2 sont les couples supportés par les deux rotules, on notera également :

$$q_1 = \frac{C_1}{E_c} \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{C_2}{E_c} \quad (3.1.2)$$

les "charges normalisées" des deux rotules.

III.2 - Fonctionnement élastique

a) Sous la charge axiale P :

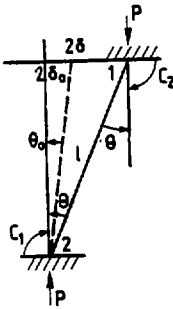


Fig. 3.2

Si C_1 et C_2 sont les couples supportés par les deux rotules, comptés pour chacune positivement dans le sens indiqué sur la figure (3.2), la relation fondamentale d'équilibre est évidemment :

$$(3.2.1) \quad \boxed{2P\delta = C_1 + C_2}$$

Si le système présentait à l'origine un défaut angulaire $\theta_0 = \frac{2\delta_0}{l}$, les réactions des ressorts, en fonctionnement élastique sont $-E_c(\theta - \theta_0)$ et la formule (3.2.1) s'écrit :

$$2P\delta = 2E_c(\theta - \theta_0) = \frac{2E_c}{l} (2\delta - 2\delta_0)$$

On pose classiquement (3.2.2)

$$P_E = \frac{2E_C}{l}$$

de façon à avoir (3.2.3)

$$\delta = \frac{\delta_0}{1 - P/P_E}$$

formule classique d'amplification du défaut.

Ici P_E apparaît comme la charge d'Euler du système.

b) Sous la charge thermique C_{th} :

En phase élastique, la charge thermique appliquée tend à provoquer des variations de charge $-C_{th}$ et $+C_{th}$ dans les rotules 1 et 2 ; et cela sans modification de la géométrie. En effet, la relation fondamentale (3.2.1) reste satisfaite soit :

$$2P\delta = (C_1 - C_{th}) + (C_2 + C_{th}) \quad \text{si } \delta \text{ n'a pas varié.}$$

Par la suite nous noterons :

$$q = \frac{C_{th}}{E_C} \quad (3.2.4)$$

un facteur sans dimension (homogène à un angle) représentant l'amplitude de la charge thermique et

$$\beta = \frac{P}{P_E} \quad \text{le facteur de chargement axial.}$$

III.3 - Cadre général du problème

D'une manière générale, le problème présente les mêmes caractéristiques que celui de J. DEVOS : instabilité géométrique, courbe d'états limites.

- Instabilité géométrique

Le système possède une charge de flambage élastique dite "charge d'Euler" définie par la relation :

$$(3.2.2) \quad P_E = \frac{2E_C}{\lambda}$$

L'existence de ce phénomène entraîne la non linéarité, comme l'atteste la relation :

$$(3.2.3) \quad \delta = \frac{\delta_0}{1 - \frac{\sigma}{\sigma_E}}$$

La courbe (σ, δ) a l'asymptote horizontale $\sigma = \sigma_E$ (fig. 3.3)

- Etats limites

Le matériau possédant une contrainte limite σ_L , les rotules présentent des couples limites C_L . On sait que sous une charge axiale σ , le couple maximum C_L est donné par :

$$\frac{C_L}{C_{L0}} = 1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_L}\right)^2 \quad (3.3.1)$$

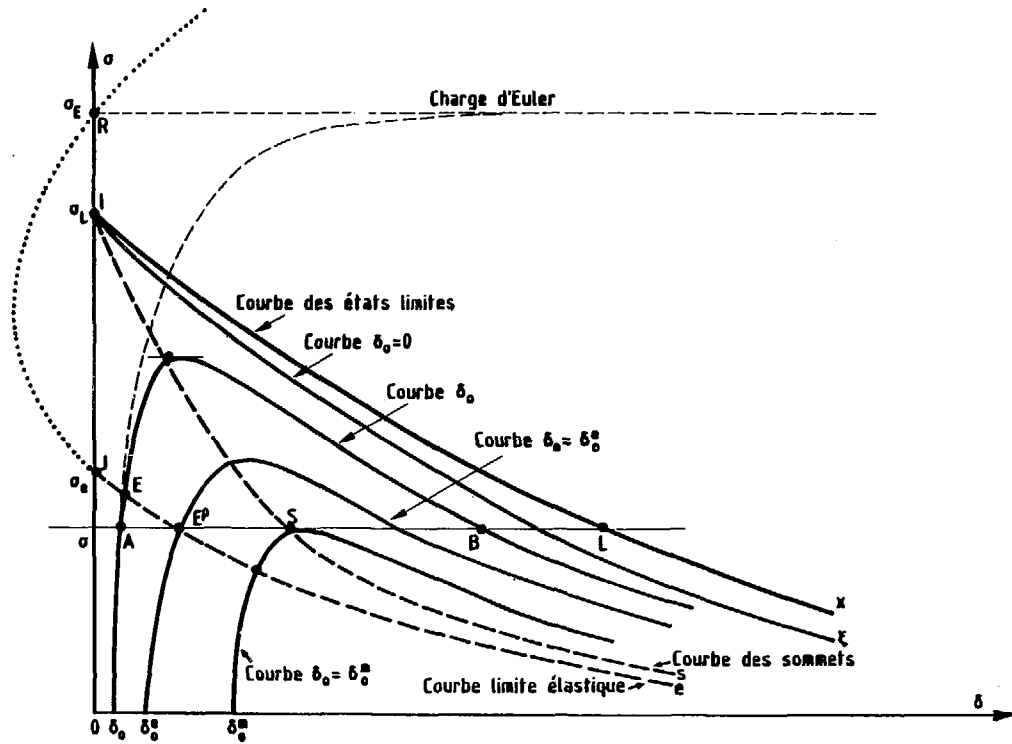
C_{L0} étant le couple limite calculé sous $\sigma = 0$ soit $C_{L0} = \frac{3}{2} \sigma_L \frac{I}{V}$

Par conséquent le système possède une courbe d'états limites. La relation de base $2P\delta = C_1 + C_2$ conduit en limite à la relation $2\sigma\delta = 2 C_{L0} \left(1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_L}\right)^2\right)$ (S section de la rotule) soit pour une section rectangulaire :

$$\sigma\delta = \sigma_L \frac{h}{4} \left(1 - \left(\frac{\sigma}{\sigma_L}\right)^2\right)$$

Cette relation est représentée, dans le plan (σ, δ) par une portion d'hyperbole IX dite "courbe des états limites". (fig. 3.3)

Fig. 3.3



- Charge maximum suivant défaut

Pour une charge P donnée atteinte en suivant un trajet monotone, la loi moment courbure des rotules a l'allure de la courbe représentée sur la figure 3.1, soit $C = f(\theta)$, mais qu'il convient de décaler d'un angle θ_0 représentant le défaut initial (fig. 3.4).

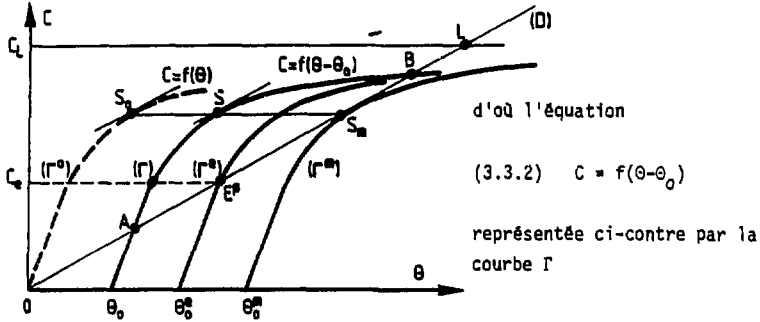


Fig. 3.4

On sait que l'équilibre du système est atteint lorsque l'on a $2P\delta = P\ell = 2C$ soit $C = \frac{P\ell}{2} \theta$, relation qui est représentée par la droite (D) de pente $\frac{P\ell}{2}$. Comme on doit nécessairement supposer $P < P_c = \frac{2E_c}{\ell}$, cette pente est inférieure à E_c qui est la pente initiale de la courbe Γ . Par conséquent, il est clair que l'on peut définir deux valeurs θ_0^e et θ_0^m du défaut initial telles que :

- pour $0 < \theta_0 < \theta_0^e$ il y a deux solutions d'équilibre (points A et B) dont une (point A) en phase élastique
- pour $\theta_0^e < \theta_0 < \theta_0^m$ il y a deux solutions d'équilibre, toutes deux en phase plastique
- pour $\theta_0 > \theta_0^m$ il n'y a plus d'équilibre possible.

Toutes ces situations se retrouvent sur la figure 3.3 où les courbes portant la mention : "courbe $\delta_0 = \dots$ " représentent les situations d'équilibre possibles pour des charges P variables, le défaut initial δ_0 étant fixé. Pour une valeur δ_0 de ce défaut, on retrouve les deux points d'équilibre A et B correspondant à ceux de la figure 3.4. Si ce défaut dépasse un δ_0^e (de valeur $\theta_0^e/2$) le point A passe en phase plastique. Si ce défaut dépasse un $\delta_0^m = \theta_0^m/2$, l'équilibre cesse d'être possible. Sur les figures 3.3 et 3.4, on repère également le point limite L correspondant à l'épuisement de la rigidité des rotules.

- Courbes auxiliaires

Sur la figure 3.3 ont été également représentées quelques courbes repères :

→ La courbe OIG représente les points d'équilibre possibles pour un défaut initial nul ($\delta_0 = 0$).

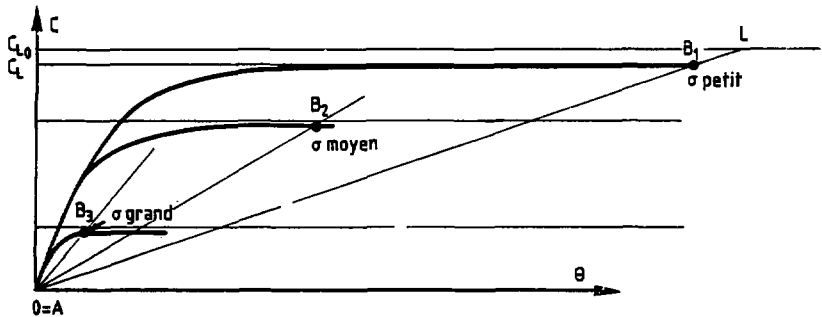


Fig. 3.5

La figure 3.5 permet de comprendre sans calcul l'allure de cette courbe. Les courbes (C, θ) correspondant à trois cas de charge axiale ; σ petit, σ moyen, et σ grand y sont représentées ainsi que les trois droites correspondantes permettant de trouver les points d'équilibre. Le défaut initial est nul. On voit que quelle que soit la charge axiale σ , on a toujours deux points d'équilibre A et B dont l'un est à l'origine $\theta_A = 0$ (branche OI de la fig. 3.3) et l'autre est pour une valeur θ_B qui augmente rapidement lorsque σ diminue (branche IΞ).

La droite $C = C_{L_0}$ étant une asymptote (fig. 3.5), il est clair que la courbe $I\xi$ reste légèrement en retrait de la courbe limite, comme l'atteste sur la fig. 3.5 la position des points B_1 et L .

- + La courbe I_s situe le lieu géométrique des sommets S des courbes suivant le défaut initial. Le point S est défini par les équations qui expriment, d'une part qu'il est à l'intersection des courbes Γ^m et (D) (fig. 3.4), d'autre part que ces deux courbes sont tangentes soit :

$$f(\theta_S - \theta_0, \sigma_S) = P_S \delta_S = \frac{S \ell \sigma_S \theta_S}{2}$$

et

$$f'_{\theta}(\theta_S - \theta_0, \sigma_S) = P_S \frac{\ell}{2} = \frac{S \ell \sigma_S}{2}$$

Pour un défaut donné θ_0 , cette relation donne σ_S fonction de θ_S . Il est difficile d'aller plus avant sans connaître la fonction f , mais on peut donner l'allure de la courbe obtenue par quelques considérations simples : Pour un défaut nul, la courbe d'équilibre $OI\xi$ (fig. 3.3) a son sommet en I , ce qui fournit un premier point.

Pour une charge σ faible, la droite D (fig. 3.4) a une pente faible alors que la courbe Γ est maximum ; le sommet S est rejeté à l'infini. D'où la courbe I_s de la figure.

- + Enfin, la courbe J_e situe le lieu géométrique des points E où les rotules sortent du domaine élastique. Ces points sont atteints lorsque la contrainte totale sur la fibre la plus sollicitée $\sigma_t = \sigma + \sigma_f$ atteint la valeur σ_e .

Classiquement $\sigma_f = \frac{C}{l/v}$ où $C = P\delta = \frac{P\delta_0}{1 - P/P_E}$

d'où $\sigma_t = \sigma + \frac{P\delta_0}{1 - P/P_E} \frac{v}{l} = \sigma_e$

$$\text{Soit encore } \delta_0 = \frac{I}{\sqrt{S}} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_E} \right) (\sigma_e - \sigma)$$

Pour une section rectangulaire, il vient $\delta_0 = \frac{h}{6} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma_E} \right) (\sigma_e - \sigma)$

$$\text{soit en posant } \eta_0 = \frac{\delta_0}{h} : \sigma^2 - 6 \sigma_0 \eta_0 - (\sigma_e + \sigma_E) \sigma + \sigma_e \sigma_E = 0.$$

La courbe Je est une branche d'hyperbole passant par les points J et R d'ordonnées σ_e et σ_E .

III.4 - Cas du cyclage thermique

Pour une charge axiale P donnée, le cyclage thermique fait progresser la déformation Θ du système, ce qui peut amener à craindre le risque de flambage.

Un critère de flambage fréquemment mentionné (voir la note Réf. [3_] de HOFFMANN - COMBESURE) est la condition du module tangent :

$$\frac{P}{P_E} = \frac{E_t}{E} \quad (3.4.1)$$

Nous retrouverons d'ailleurs cette condition au cours de l'étude précise du cyclage.

Cette condition s'écrit ici :

$$\frac{P\ell}{2E_C} = \frac{E_t}{E_C} \quad \text{soit} \quad \frac{P\ell}{2} = E_t$$

Il est clair qu'elle correspond à la situation représentée par le point S des figures 3.3 et 3.4.

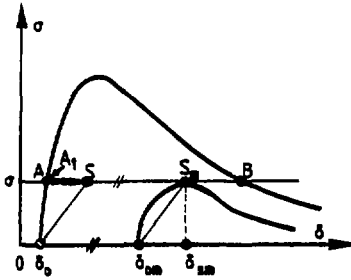


Fig. 3.6

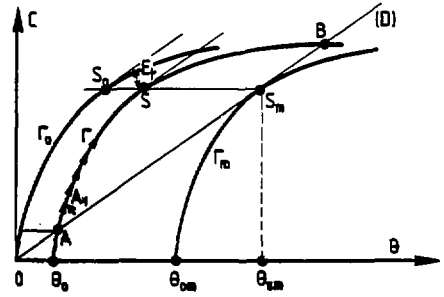


Fig. 3.7

Pour une charge σ et un défaut initial δ_0 donnés (fig. 3.6) on part du point d'équilibre initial A. A partir de ce point le cyclage thermique, en déchargeant une rotule et chargeant l'autre simultanément, ou l'inverse, impose aux deux rotules des chemins différents. Suivons l'une d'entre elles, par exemple la rotule 1. Chaque cycle thermique la fait progresser le long de l'horizontale AB. Sur la figure (3.7) la déformation résiduelle due au premier cycle thermique déplace le point d'équilibre de A en A_1 , qui n'est plus sur la droite D à cause de la dissymétrie de rotules ; et de même pour les cycles ultérieurs. Si l'on accepte le critère (3.4.1), l'adaptation pourra être acquise si la convergence du processus se produit avant d'atteindre le point S. La suite de cette note n'a d'autre but que d'étudier cette condition de convergence.

On notera que le repérage du point limite S sur la courbe Γ ne dépend pas du défaut, et qu'il suffira de repérer le point S_0 de la courbe σ_0 correspondant à la rotule sans défaut, point où la pente E_c (module tangent) prend la valeur $\frac{P}{P_E} E_c$

IV - ETUDE DU CYCLE THERMIQUE COURANT

IV.1 - Cyclage thermique - Principe

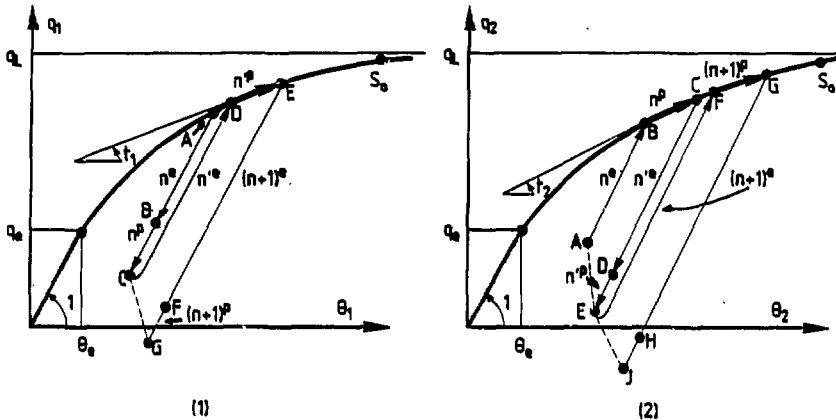


Fig. 4.1(1) et (2)

La figure ci-dessus représente les courbes d'écroutissage des deux rotules, normalisées par les conventions (3.1.2). Sur ces courbes les angles θ_1 et θ_2 représentant les déformations des rotules rapportées à un défaut initial nul. En fonctionnement les angles θ_1 et θ_2 correspondent à l'angle $(\theta - \theta_0)$ définissant la déformation du système depuis sa position initiale

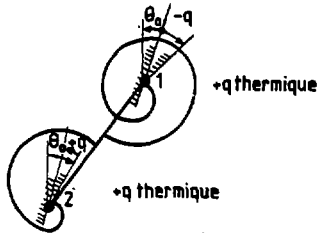


Fig. 4.2

(fig. 3.2), augmenté ou diminué d'un décalage angulaire q dû à la charge thermique. En quelque sorte, on peut considérer que la charge thermique $+q$ agit sur le ressort 1 en décalant d'un angle $-q$ la section d'attache du ressort, et sur le ressort 2 en décalant d'un angle $+q$ la section d'attache de ce dernier (fig. 4.2).

Supposons qu'à la fin du $(n-1)^{\text{ème}}$ cycle la rotule 1 ait achevé une phase de chargement plastique et la rotule 2 une phase de décharge élastique. Sur les figures 4.1, on est alors au point A.

On applique à nouveau la charge thermique. Il est clair que les deux rotules s'engagent alors respectivement sur les droites de décharge et charge élastiques repérées par les segments égaux AB sur les figures 4.1.

Supposons que le point B soit atteint sans que la totalité de la charge thermique q ait été épuisée. Le système entre alors dans une phase de fonctionnement plus complexe, la rotule 1 poursuivant son trajet de décharge élastique BC, tandis que la rotule 2 parcourt l'arc BC de chargement plastique. Dans cette phase élastoplastique, il y aura également une variation de l'angle θ . Résumons la succession des événements.

Cycle n	Symbole phase	Charge thermique	Variation charge Rotule 1	Variation charge Rotule 2	Variation de θ	Repères sur courbes 4.1
(Phase de chargement thermique croissant seulement) Symbole n =	(n^e) (phase élastique)	$q = \left\{ \begin{array}{l} \delta_n q^e \\ \delta_n q^p \end{array} \right.$	$(-\delta_n q^e)$	$(+\delta_n q^e)$	0	AB
	(n^p) (phase élastoplastique)		$(-\delta_n q_1^p)$	$(\delta_n q_2^p)$	$\delta_n \theta$	BC

Tableau 4.1

Les valeurs figurant dans ce tableau seront calculées au § 4.2 à l'aide de l'équation d'équilibre. Néanmoins, nous pouvons déjà imaginer le principe du fonctionnement à l'étape suivante, celle des chargements thermiques décroissants :

Cycle n	Symbole phase	Charge thermique	Variation charge Rotule 1	Variation charge Rotule 2	Variation de θ	Repères sur courbes 4.1	
(Phase de chargement thermique décroissant)	(n ^e) (phase élastique)	-q =	(- $\delta'_n q^e$)	($\delta'_n q^e$)	(- $\delta'_n q^e$)	0	CD
	U		+	+	+	+	
Symbole n ⁱ	(n ^p) (phase élasto-plastique)	(- $\delta'_n q^p$)	($\delta'_n q^p_1$)	(- $\delta'_n q^p_2$)	$\delta'_n \theta$	DE	

Tableau 4.2

IV.2 - Equations de fonctionnement du système

Les équations de fonctionnement du système résultent de l'équation d'équilibre (3.2.1) mais il faut donner à chaque rotule le module de raideur qui est le sien à cet instant.

- Etape (n^e) (élastique)

Elle est résumée dans le tableau 4.1. La seule inconnue est l'amplitude de $\delta'_n q^e$; on ne peut pas la préciser pour l'instant. Elle sera obtenue par une équation de récurrence après étude du cycle complet.

- Etape (n^p) (élastoplastique)

→ La rotule 1 décharge élastiquement : $\frac{dq^p_1}{d\theta - dq} = 1$ * (le module de raideur normalisé de la rotule 1 est 1).

→ La rotule 2 charge plastiquement : $\frac{dq^p_2}{d\theta + dq} = t_2$ * (le module de raideur normalisé de la rotule 2 est t_2).

La relation d'équilibre $2Pd\delta = dC_1 + dC_2$ avec $d\theta = \frac{2d\delta}{\lambda}$ devient,
 en valeurs normalisées : $\frac{2Pd\delta}{E_C} = dq_1 + dq_2$ soit $\frac{P}{P_E} \times 4 \frac{d\delta}{\lambda} = dq_1 + dq_2$

$$\text{soit } 2\beta d\theta = dq_1^P + dq_2^P *$$

En éliminant $d\theta$ entre les 3 équations repérés par un "*", il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} dq_1^P = -2 \frac{t_2 - \beta}{1 + t_2 - \beta} dq \\ dq_2^P = 2 \frac{t_2(1-\beta)}{1 + t_2 - 2\beta} dq \\ d\theta = \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} dq \end{array} \right. \quad (4.2.1.)$$

Si la variation de t_2 n'est pas trop grande le long de l'arc BC, les relations (4.2.1) peuvent être intégrées à la variation totale δ_{nq}

$$\text{soit } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{nq_1}^P = -2 \frac{t_2 - \beta}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_{nq} \\ \delta_{nq_2}^P = 2 \frac{t_2(1-\beta)}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_{nq} \\ \delta_{n\theta} = \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_{nq} \end{array} \right. \quad (4.2.2)$$

- Bilan de la phase de charge

Faisons le bilan des étapes n^e et n^P (phase des charges thermiques croissantes).

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_n q_1 &= -\delta_n q^e + \delta_n q_1^p = -\delta_n q^e - 2 \frac{t_2 - \beta}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_n q^p \\ \delta_n q_2 &= \delta_n q^e + \delta_n q_2^p = \delta_n q^e + 2 t_2 \frac{(1-\beta)}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_n q^p \end{aligned} \right.$$

On préférera ne conserver que l'inconnue $\delta_n q^p$, en éliminant $\delta_n q^e$ par l'équation : $q = \delta_n q^e + \delta_n q^p$. Il vient alors :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_n q_1 &= -q + \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_n q^p \\ \delta_n q_2 &= q - \frac{(1-2\beta)(1-t_2)}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_n q^p \\ \delta_n \theta &= \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_n q^p \end{aligned} \right. \quad (4.2.3)$$

- Etape (nⁱe)

Elle est également résumée dans le tableau 4.2, mais ici on peut préciser l'amplitude $\delta_n q^e$ de la décharge thermique correspondant à cette phase. En effet, le point D (courbes 4.1) est atteint lorsque la rotule 1 aura "rattrapé" la décharge totale AC du demi-cycle précédent soit :

$$\delta_n q^e = -\delta_n q_1^p = q - \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_n q^p$$

Supposons pour l'instant que le deuxième terme de cette expression soit positif et inférieur à q. Nous discuterons ultérieurement (§ 5.3) de ces conditions. La décharge ne peut être complétée en phase élastique, il faut donc envisager une nouvelle phase élastoplastique DE d'amplitude $\delta_n q^p = q - \delta_n q^e$, soit :

$$\delta_n' q^P = \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_n q^P \quad (4.2.4)$$

- Etape (nⁱP)

Les rotules fonctionnent alors comme suit : pour une variation élémentaire dq de la charge thermique (ici, dq > 0 pour une "décharge"),

La rotule 1 charge plastiquement $\frac{dq_1^P}{d\theta + dq} = t_1$

La rotule 2 décharge élastiquement $\frac{dq_2^P}{d\theta - dq} = 1$

avec toujours $dq_1^P + dq_2^P = 2\beta d\theta$

En éliminant dθ il vient :

$$\left\{ \begin{aligned} dq_1^P &= \frac{2 t_1 (1-\beta)}{1 + t_1 - 2\beta} dq \\ dq_2^P &= -2 \frac{(t_1 - \beta)}{1 + t_1 - 2\beta} dq \\ d\theta &= \frac{1 - t_1}{1 + t_1 - 2\beta} dq \end{aligned} \right. \quad (4.2.5)$$

Si la variation de t₁ n'est pas trop grande le long de l'arc DE, on peut intégrer ces variations :

$$\left\{ \begin{aligned} \delta_n' q_1^P &= \frac{2 t_1 (1-\beta)}{1 + t_1 - 2\beta} \delta_n' q^P \\ \delta_n' q_2^P &= -\frac{2(t_1 - \beta)}{1 + t_1 - 2\beta} \delta_n' q^P \\ \delta_n' \theta &= \frac{1 - t_1}{1 + t_1 - 2\beta} \delta_n' q^P \end{aligned} \right. \quad (4.2.6)$$

- Bilan de la phase de décharge

Le bilan des étapes n^e et n^P (phase des charges thermiques décroissantes) s'établit ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta'_n q_1 = \delta'_n q^e + \delta'_n q_1^P = \delta'_n q^e + \frac{2 t_1 (1-\beta)}{1 + t_1 - 2\beta} \delta'_n q^P \\ \delta'_n q_2 = - \delta'_n q^e + \delta'_n q_2^P = - \delta'_n q^e - 2 \frac{(t_1 - \beta)}{1 + t_1 - 2\beta} \delta'_n q^P \end{array} \right.$$

comme précédemment on se débarrasse de $\delta'_n q^e$ par l'équation :

$$q = \delta'_n q^e + \delta'_n q^P$$

il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta'_n q_1 = q - \frac{(1-2\beta)(1-t_1)}{(1+t_1-2\beta)} \delta'_n q^P \\ \delta'_n q_2 = -q + \frac{1-t_1}{1+t_1-2\beta} \delta'_n q^P \\ \delta'_n \theta = \frac{1-t_1}{1+t_1-2\beta} \delta'_n q^P \end{array} \right. \quad (4.2.7)$$

- Bilan du n^{ième} cycle complet

Les équations (4.2.3) et (4.2.7) permettent de faire le bilan du n^{ième} cycle.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_n q_1 = \delta_n q_1 + \delta'_n q_1 \\ \Delta_n q_2 = \delta_n q_2 + \delta'_n q_2 \\ \Delta_n \theta = \delta_n \theta + \delta'_n \theta \end{array} \right.$$

Toutes expressions réduites il vient ; en tenant compte de 4.2.4

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_n q_1 &= \frac{2(1-\beta)(1-t_2)}{(1+t_1-2\beta)(1+t_2-2\beta)} t_1 \delta_n q^p \\ \Delta_n q_2 &= \frac{2(1-\beta)(1-t_2)}{(1+t_1-2\beta)(1+t_2-2\beta)} (2\beta-t_2) \delta_n q^p \\ \Delta_n \theta &= \frac{2(1-\beta)(1-t_2)}{(1+t_1-2\beta)(1+t_2-2\beta)} \delta_n q^p \end{aligned} \right. \quad (4.2.8)$$

Le fonctionnement du $n^{\text{ème}}$ cycle est donc parfaitement déterminé en fonction de la quantité $\delta_n q^p$, pour l'instant inconnue. Pour connaître cette quantité, il est nécessaire d'examiner le demi-cycle suivant. A nouveau, on rencontre deux étapes :

- Etape (n+1)^e (élastique) correspondant au segment EF, d'amplitude $\delta_{n+1} q^e$

La rotule 1 décharge élastiquement tandis que la rotule 2 charge élastiquement.

$$\delta_{n+1} q_1^e = - \delta_{n+1} q^e \quad \delta_{n+1} q_2^e = \delta_{n+1} q^e$$

Cette étape s'achève lorsque la rotule 2 a "absorbé" la totalité de la décharge précédente DE, soit d'après (4.2.7) :

$$\delta_{n+1} q^e = - \delta_n q_2^p = q - \frac{1-t_1}{1+t_1-2\beta} \delta_n q^p$$

La part de la charge thermique q "non absorbée" est donc :

$$\delta_{n+1} q^p = q - \delta_{n+1} q^e$$

d'où (4.2.9)
$$\delta_{n+1}q^P = \frac{1 - t_1}{1 + t_1 - 2\beta} \delta_n'q^P$$

soit, en tenant compte de (4.2.4) :

$$\delta_{n+1}q^P = \frac{1 - t_1}{1 + t_1 - 2\beta} \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_n q^P \quad (4.2.10)$$

Cette équation de récurrence permet de calculer $\delta_n q$ de proche en proche.

IV.3 - Résumé du n^{ième} cycle

En résumé, les variations de charge normalisées des rotules au cours du n^{ième} cycle sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_n q_1 = \frac{2(1-\beta)(1-t_2)}{(1+t_1-2\beta)(1+t_2-2\beta)} t_1 \delta_n q^P \\ \Delta_n q_2 = \frac{2(1-\beta)(1-t_2)}{(1+t_1-2\beta)(1+t_2-2\beta)} (2\beta-t_1) \delta_n q^P \end{array} \right. \quad (4.3.1)$$

Le changement de géométrie est défini par :

$$\Delta_n^\theta = \frac{2(1-\beta)(1-t_2)}{(1+t_1-2\beta)(1+t_2-2\beta)} \delta_n q^P \quad (4.3.2)$$

Dans ces équations le facteur $\delta_n q^P$, qui rappelons-le, représente la part de charge thermique non "absorbée" élastiquement au cours de la première moitié (charge) du n^{ième} cycle, est donné par l'équation de récurrence :

$$\delta_{n+1}q^P = \frac{(1-t_1)(1-t_2)}{(1+t_1-2\beta)(1+t_2-2\beta)} \delta_n q^P \quad (4.3.3)$$

Dans toutes ces équations, t_1 et t_2 sont les modules tangents instantanés (normalisés) des deux rotules, et β est le rapport $\beta = \frac{P}{P_E}$.

IV.4 - Remarques sur le modèle précédent

a) Il est clair que le processus décrit aux § 4.2 et 4.3 ne peut être "déclenché" que s'il existe, au premier tour, un $\delta_1 q^P$ positif permettant d'initialiser la relation (4.3.3). Nous verrons ultérieurement (§ 5.3) les conséquences de cette condition.

b) D'autres conditions proviennent également de la relation (4.2.4) :

$$\delta_n q^P = \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_n q^P$$

Remarquons que le facteur $\frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta}$ est inférieur à 1 si $t_2 > \beta$.

Ce résultat est important. Si la rotule 2 est telle que son module tangent $t_2 = \frac{E_2}{E_C}$ est inférieur à $\beta = \frac{P}{P_E}$, la "part non absorbée" élastiquement $\delta_n q^P$ croît entre le demi-cycle de charge et celui de décharge.

On peut voir par ailleurs (relation 4.2.9) que cette remarque peut être transposée au demi-cycle suivant pour la rotule 1.

En conséquence, si l'une au moins des deux rotules atteint ou dépasse le point critique S_0 de sa courbe (C, θ) défini par $\frac{E_t}{E_C} = \frac{P}{P_E}$, E_t étant son "module tangent en flexion", la part de la charge thermique q "non absorbée" élastiquement tend à s'étendre. Simultanément, l'incrément de déformation $\Delta_n \theta$ devient croissant et la déformation n'est pas bornée ; le processus est divergent.

Au contraire, si aucune des deux rotules n'atteint ce point critique, le processus peut être convergent dans la mesure où les séries définies au § 4.3 le seront. Dans le cas intermédiaire où une seule des deux rotules a atteint son point critique S_0 , l'évolution ultérieure apparaît cependant plus confuse.

Dans la suite, nous admettrons que la ruine est virtuellement atteinte si l'une au moins des deux rotules a atteint ou dépassé le point critique S_0 de sa courbe (C, θ) pour lequel $\frac{Et}{E_c} = \frac{P}{P_E}$.

Le fonctionnement décrit au § 4.2 n'est donc valable que si :

$$(4.4.1) \quad \beta < t_1 < 1 \quad \text{et} \quad \beta < t_2 < 1$$

Remarquons que ces conditions sont certainement vérifiées au début du processus, puisque les pentes d'écroutissage t_1 et t_2 sont alors proches de 1. Par contre elles peuvent cesser d'être vérifiées au cours de la progression du phénomène, lorsqu'une au moins des rotules atteint le point critique S_0 de sa courbe d'écroutissage.

Notons également que les conditions (4.4.1) nous préviennent également contre une autre difficulté de la formule (4.2.4), à savoir que le coefficient $\frac{1-t_2}{1+t_2-2\beta}$ doit être positif. En effet, la deuxième des conditions que nous venons d'écrire ($t_2 > \beta$) implique que le dénominateur $1+t_2-2\beta$ est positif.

c) On peut s'étonner que les formules (4.3.1) ne soient pas symétriques pour les rotules 1 et 2. Il faut voir que la première de ces formules représente la variation d'une rotule en "sommet de charge" (segment AE de la figure 4.1(1)) tandis que la deuxième de ces formules représente la variation d'une rotule en "fin de décharge" (segment AE de la figure 4.2.(2)).

De fait, les formules s'identifient, pour les deux rotules, si l'on calcule pour toutes deux les conditions en "sommet de charge". Ainsi pour la rotule 2, la variation de charge le long de l'arc CG, exprimée en fonction du paramètre $\delta_n'q$ (qui correspond à δ_nq au 1/2 cycle précédent), a une forme exactement symétrique de la première équation (4.3.1).

d) Les dénominateurs $1+t_1-2\beta$ et $1+t_2-2\beta$ des formules de récurrence peuvent être interprétés. Le premier est lié à la charge d'Euler du système lorsque :

- la rotule 1 a le module tangent E_1 (normalisé t_1)
- la rotule 2 a le module d'élasticité E_c (normalisé 1).

Le second est lié à la charge d'Euler du système lorsque :

- la rotule 1 a le module d'élasticité E_c (normalisé 1)
- la rotule 2 a le module tangent E_2 (normalisé t_2).

D'une manière générale, si la rotule 1 a le module E_1 , la rotule 2 le module E_2 , la relation d'équilibre élastique :

$$2P\delta = E_1(\theta - \theta_0) + E_2(\theta - \theta_0) = P\theta\lambda \quad \text{entraîne}$$

$$\theta = \frac{\theta_0}{1 - P/(E_1 + E_2)/\lambda} \quad \text{ou} \quad \delta = \frac{\delta_0}{1 - P/(E_1 + t_2)/\lambda}$$

La quantité $\frac{E_1 + E_2}{\lambda}$ apparait donc comme la charge d'Euler du système.

Ainsi les quantités $1+t_1-2\beta$ et $1+t_2-2\beta$ s'écrivent respectivement :

$$1+t_1-2\beta = (1+t_1) \left(1 - \frac{2\beta}{1+t_1}\right) = (1+t_1) \left(1 - 2 \frac{P/P_E}{1+t_1}\right) = (1+t_1) \left(1 - \frac{P}{(E_c + E_1)/\lambda}\right)$$

$$\text{et } 1+t_2-2\beta = (1+t_2) \left(1 - \frac{2\beta}{1+t_2}\right) = (1+t_2) \left(1 - 2 \frac{P/P_E}{1+t_2}\right) = (1+t_2) \left(1 - \frac{P}{(E_c + E_2)/\lambda}\right)$$

En posant $P_1' = \frac{E_c + E_1}{\lambda}$ et $P_2' = \frac{E_c + E_2}{\lambda}$ les charges critiques du système lorsque l'une ou l'autre des deux rotules est plastique, $\beta_1 = \frac{P}{P_1'}$ et $\beta_2 = \frac{P}{P_2'}$ les valeurs de la charge rapportées à ces charges critiques

$$\text{et } \rho_1 = \frac{P_1'}{P_E} = \frac{1+t_1}{2} \quad \text{et} \quad \rho_2 = \frac{P_2'}{P_E} = \frac{1+t_2}{2}$$

les valeurs de ces charges critiques rapportées à P_E , les quantités $1+t_1-2\beta$ et $1+t_2-2\beta$ prennent la forme :

$$1+t_1-2\beta = (1+t_1)(1-\beta_1) = 2\rho_1(1-\beta_1)$$

$$1+t_2-2\beta = (1+t_2)(1-\beta_2) = 2\rho_2(1-\beta_2)$$

Notons que les formules ci-dessus impliquent :

$$t_1 < \rho_1 < 1 \quad \text{et} \quad t_2 < \rho_2 < 1$$

$$\text{et} \quad \beta < \beta_1 < 1 \quad \text{et} \quad \beta < \beta_2 < 1$$

Compte tenu de ces conventions, les relations de récurrence (4.3.1) à (4.3.3) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_n q_1 &= \frac{(1-\beta)(1-t_2)}{2\rho_1\rho_2(1-\beta_1)(1-\beta_2)} t_1 \delta_n q^P \\ \Delta_n q_2 &= \frac{(1-\beta)(1-t_2)}{2\rho_1\rho_2(1-\beta_1)(1-\beta_2)} (2\beta-t_1) \delta_n q^P \\ \Delta_n \theta &= \frac{(1-\beta)(1-t_2)}{2\rho_1\rho_2(1-\beta_1)(1-\beta_2)} \delta_n q^P \\ \delta_{n+1} q^P &= \frac{(1-t_1)(1-t_2)}{4\rho_1\rho_2(1-\beta_1)(1-\beta_2)} \delta_n q^P \end{aligned} \right. \quad (4.4.2)$$

Ces expressions mettent bien en évidence, à travers les dénominateurs $1-\beta_1$ et $1-\beta_2$, les rôles joués par les deux rotules en flambage ; elles ont cependant l'inconvénient d'introduire de nouvelles variables β_1 , β_2 , ρ_1 , ρ_2 qui varient toutes avec t_1 et t_2 au cours du processus.

e) Une autre restriction doit être faite à la validité du modèle développé ci-dessus. Elle concerne le cas où les points C, G etc... de la figure 4.1.(1) et les points A, E, J, etc... de la figure 4.1.(2) ("fins de décharge") viendraient à atteindre la courbe des chargements négatifs (C, θ).

Nous n'approfondirons pas plus cette éventualité, et nous retiendrons simplement que la charge thermique ne doit pas atteindre une valeur trop importante d'un ordre de grandeur du double de la limite élastique.

V - ETUDE PARTICULIERE DU PREMIER CYCLE DE CHARGE

L'initialisation des relations de récurrence (4.3.1) à (4.3.3) nécessite l'examen approfondi du premier cycle de charge. Nous verrons d'ailleurs que le premier demi-cycle ne répond pas tout à fait au modèle type décrit au paragraphe précédent.

V.1 - Chargement initial

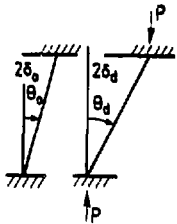


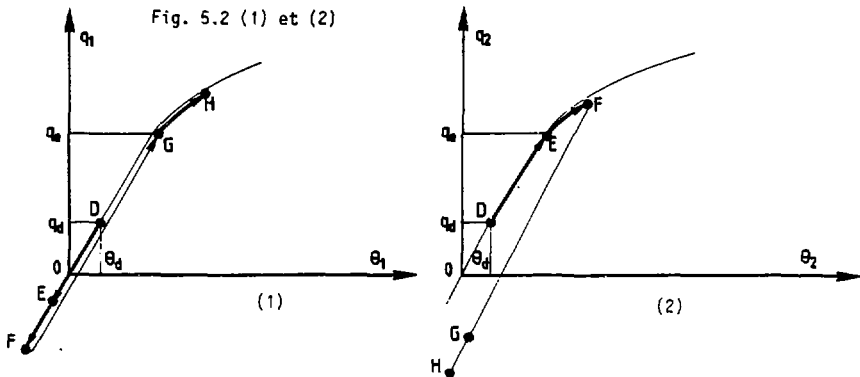
Fig. 5.1

Le système étant initialement non chargé possède un défaut $2\delta_0$. L'application de la charge axiale P donne à ce défaut une valeur $2\delta_d$. (l'indice d indique que ces valeurs seront les valeurs au "départ" du processus de cyclage thermique).

Il lui correspond une rotation Θ_d et des couples égaux dans les rotules $C_d = P\delta_d$, normalisés $q_d = \frac{P}{E_C} \delta_d$

Les formules classiques d'amplification du défaut donnent :

$$\delta_d = \frac{\delta_0}{1-\beta} \quad \text{et} \quad q_d = \frac{P}{P-E_C} 2 \frac{\delta_0}{1-\beta} \quad \text{soit} \quad q_d = \frac{2\beta}{1-\beta} \frac{\delta_0}{\ell} \quad (5.1.1)$$



Sur les courbes 5.2 qui représentent les lois (q, θ) des rotules, on est au point D.

V.2 - Premier demi-cycle thermique - Charge thermique q croissante

Les rotules parcourent élastiquement les segments égaux DE limités en E par la plastification de la deuxième rotule. Si le point E n'est pas atteint, le processus restera élastique. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si :

$$q > q_e - q_d \quad (5.2.1)$$

il faudra envisager une première phase élastoplastique.

La phase élastique d'amplitude $q_e - q_d$ a créé dans les rotules des moments :

$$\delta_1 q^e = - (q_e - q_d)$$

$$\delta_2 q^e = q_e - q_d$$

La phase élastoplastique qui suit (segment EF) aura l'amplitude :

$$\delta_1^* q^p = q - \delta_1 q^e = q - (q_e - q_d) \quad (5.2.2)$$

(Le "marquage" par un "*" sera justifié au prochain paragraphe). Cette phase engendre dans les rotules les couples (formules 4.2.2) :

$$\delta_1 q_1^p = - 2 \frac{(t_2 - \beta)}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_1^* q^p$$

$$\delta_1 q_2^p = \frac{2 t_2 (1 - \beta)}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_1^* q^p$$

et une rotation du système
$$\delta_1 \theta = \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} \delta_1^* q^p$$

f) La fin du premier demi-cycle de charge, l'état du système est donc :

$$q_1^{(1/2)} = q_d - (q_e - q_d) - 2 \frac{t_2 - \beta}{1 + t_2 - 2\beta} [q - (q_e - q_d)]$$

soit $q_1^{(1/2)} = q_d - 2 \frac{t_2 - \beta}{1 + t_2 - 2\beta} q - \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} (q_e - q_d)$

de même $q_2^{(1/2)} = q_d + (q_e - q_d) + 2 \frac{t_2(1-\beta)}{1 + t_2 - 2\beta} [q - (q_e - q_d)]$

soit $q_2^{(1/2)} = q_e + \frac{2 t_2(1-\beta)}{1 + t_2 - 2\beta} [q - (q_e - q_d)]$

et $\theta^{(1/2)} = \theta_d + \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} [q - (q_e - q_d)]$

V.3 - Deuxième demi-cycle thermique charge thermique q décroissante

L'inversion de la charge thermique entraîne évidemment une première phase élastique le long du segment EG. On rencontre ici une difficulté ; n'ayant parcouru que le segment DF à la charge, il n'est pas évident que la décharge atteigne, pour la rotule 1 le point G (fig. 5.2.(1)). Il y a là une condition nouvelle, qui n'existait pas en cyclage thermique courant.

Reprenons l'étude d'évolution. On rencontre successivement :

- une phase élastique FG dont l'amplitude maximum est celle qui ramène la rotule 1 en limite

$$\delta_1^e q^e = q_e - q_1^{(1/2)}$$

Les rotules supportent alors :

$$q_1 = q_e$$

$$q_2 = q_2^{(1/2)} - \delta_1^1 q_e$$

- Dans le cas seulement où la charge thermique q n'a pas été épuisée,

une phase élastoplastique GH d'amplitude

$$\delta_1^1 q^P = q - \delta_1^1 q_e = q - q_e + q_1^{1/2}$$

soit
$$\delta_1^1 q^P = q - q_e + q_d - 2 \frac{(t_2 - \beta)}{1 + t_2 - 2\beta} q - \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} (q_e - q_d)$$

d'où
$$\delta_1^1 q^P = \frac{1 - t_2}{1 + t_2 - 2\beta} q - \frac{2(1-\beta)}{1 + t_2 - 2\beta} (q_e - q_d) \quad (5.3.1)$$

Si cette quantité est négative, la plastification n'est pas atteinte et l'adaptation est acquise. Le processus ne se poursuit donc qu'à la condition :

$$\delta_1^1 q^P > 0 \quad \text{soit}$$

$$q > \frac{2(1-\beta)}{1 - t_2} (q_e - q_d)$$

(5.3.2)

Si cette condition est réalisée, le système se trouve alors au point G, prêt à aborder la deuxième phase élastoplastique du premier cycle complet. Au delà, le processus suit le modèle type du § 4. Notons au passage que la condition (5.3.2) implique la précédente condition (5.2.1). En effet, rappelons que nous avons imposé la condition $t_2 > \beta$ (relation qui est certainement véri-

fiée au début des courbes d'érouissage, car t_2 est alors proche de 1). Ainsi le coefficient

$$\frac{2(1-\beta)}{1-t_2} \text{ qui peut s'écrire } 1 + \frac{1+t_2-2\beta}{1-t_2} \text{ est plus grand que 1.}$$

Si la condition (5.3.2) est réalisée, le processus du § 4 se met en route et les équations montrent qu'il ne s'arrête jamais (cependant les variations des charges peuvent devenir infiniment petites). Si cette condition n'est pas réalisée, l'adaptation est acquise dès le premier cycle. Nous verrons (Annexe 1) que cette condition est identique à celle trouvée par J. DEVOS (Réf. 1) pour des rotules parfaitement plastiques.

Supposons la condition (5.3.2) réalisée, la question n'est pas résolue pour l'instant, de la valeur initiale à donner à $\delta_1 q^P$ pour initialiser les relations de récurrence. La valeur qui porte le nom $\delta_1^* q^P$ dans la formule (5.2.2) ne convient pas, car le premier cycle de charge ne fonctionne pas comme un cycle courant (c'est pourquoi nous avons "marqué" cette valeur d'un "*"). La valeur qu'il faut retenir est celle qui permet d'identifier la formule (5.3.1) avec la formule (4.2.4) c'est-à-dire celle qui initialise correctement le passage du premier demi-cycle au second.

On est donc amené à poser :

$$\delta_1^* q^P = \frac{1-t_2}{1+t_2-2\beta} \delta_1 q^P = \frac{1-t_2}{1+t_2-2\beta} q - \frac{2(1-\beta)}{1+t_2-2\beta} (q_e - q_d)$$

$$\text{soit } \delta_1 q^P = q - \frac{2(1-\beta)}{1-t_2} (q_e - q_d) \quad (5.3.3)$$

On notera que la condition (5.3.2) nous assure également que cette valeur est positive.

On peut achever l'étude du premier cycle afin d'initialiser correctement toutes les valeurs entrant en jeu dans les relations de récurrence.

La dernière plastification (segment GH) amène des couples définis par (4.2.7) :

$$\delta_1^1 q_1^P = 2 \frac{t_1(1-\beta)}{1+t_1-2\beta} \delta_1^1 q^P = \frac{2t_1(1-t_2)(1-\beta)}{(1+t_1-2\beta)(1+t_2-2\beta)} \delta_1^1 q^P$$

$$\delta_1^1 q_2^P = - \frac{2(t_1-\beta)}{1+t_1-2\beta} \delta_1^1 q^P = - \frac{2(t_1-\beta)(1-t_2)}{(1+t_1-2\beta)(1+t_2-2\beta)} \delta_1^1 q^P$$

et une rotation $\delta_1^1 \theta = \frac{1-t_1}{1+t_1-2\beta} \delta_1^1 q = \frac{(1-t_1)(1-t_2)}{(1+t_1-2\beta)(1+t_2-2\beta)} \delta_1^1 q^P$

V.4 - Initialisation des relations de récurrence

Il est évidemment plus intéressant de suivre les charges dans les rotules en "sommet de charge" qu'en "fin de décharge", ce qui revient à considérer les valeurs :

$$q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, q_1^{(3)}, \dots, q_1^{(n)}, \dots$$

l'indice supérieur représentant le numéro du cycle achevé, et les valeurs

$$q_2^{(1/2)}, q_2^{(3/2)}, \dots, q_2^{(n+1/2)}, \dots$$

Le repérage de θ est indifférent, il est plus aisé de suivre les valeurs :

$$\theta^{(1/2)}, \theta^{(3/2)}, \dots, \theta^{(n+1/2)}$$

Au cours de l'évolution du système, les pentes t_1, t_2 varient et doivent également être indicées par le numéro du cycle. Ainsi les valeurs initiales des variables sont :

$$q_1^{(1)} = q_e + \delta_1^1 q_1^p = q_e + \frac{2t_1^{(1)}(1-t_2^{(1)})(1-\beta)}{(1+t_1^{(1)}-2\beta)(1+t_2^{(1)}-2\beta)} \delta_1^1 q^p$$

$$q_2^{(1/2)} = q_e + \frac{2t_2^{(1)}(1-\beta)}{(1+t_2^{(1)}-2\beta)} [q - (q_e - q_d)]$$

$$\theta^{(1/2)} = \theta_d + \frac{1 - t_2^{(1)}}{1 + t_2^{(1)} - 2\beta} [q - (q_e - q_d)] \quad (5.4.1)$$

avec $\delta_1^1 q^p = q - \frac{2(1-\beta)}{1 - t_2^{(1)}} (q_e - q_d)$

La suite du processus sera définie par les relations qui ajoutent un cycle complet à un état courant du système. Rappelons que l'on écrit des relations en sommet de charge, et que ces relations sont les mêmes pour la rotule 2 que pour la rotule 1 à condition de permuter les rôles de t_1 et t_2 et de $\delta_n^1 q^p$ et $\delta_n^1 q^p$ (cf.: la première des relations 4.3.1).

rotule 1 : $A_n q_1 = \frac{2(1-\beta)(1-t_2^{(n)})}{(1+t_1^{(n)}-2\beta)(1+t_2^{(n)}-2\beta)} t_1^{(n)} \delta_n^1 q^p$ (5.4.2)

avec $\delta_{n+1}^1 q^p = \frac{(1-t_1^{(n)})(1-t_2^{(n)})}{(1+t_1^{(n)}-2\beta)(1+t_2^{(n)}-2\beta)} \delta_n^1 q^p$

$$\text{rotule } 2 : \quad \Delta_{n+1/2}^{q_2} = \frac{2(1-\beta)(1-t_1^{(n)})}{(1+t_1^{(n)}-2\beta)(1+t_2^{(n+1)}-2\beta)} t_2^{(n+1)} \delta_n^{q^P}$$

$$\text{ou} \quad \delta_n^{q^P} = \frac{1-t_2^{(n)}}{1+t_2^{(n)}-2\beta} \delta_n^{q^P} \quad (5.4.3)$$

Les indices $n+1/2$ désignent un cycle complet achevé, donc allant des numéros $n-1/2$ à $n+1/2$. On remarque également quelques indices $(n+1)$, ils affectent des valeurs appartenant formellement au $(n+1)^{\text{e}}$ cycle thermique. (Les pentes d'écroutissage changent à chaque cycle).

$$\text{rotation} : \quad \Delta_{n+1/2}^{\Theta} = \frac{2(1-\beta)(1-t_1^{(n)})}{(1+t_1^{(n)}-2\beta)(1+t_2^{(n+1)}-2\beta)} \delta_n^{q^P} \quad (5.4.4)$$

VI - INTEGRATION DES RELATIONS DE RECURRENCE

La relative complexité des relations ci-dessus rend illusoire l'intégration analytique pour des modèles de rotule tant soit peu compliqués. Plusieurs voies sont alors possibles.

VI.1 - Intégration numérique

Les formules (5.4.1) à (5.4.4) sont assez faciles à programmer, et permettent de conclure à la convergence ou la non-convergence du processus. La méthode a cependant l'inconvénient qu'elle ne permet pas la discussion des cas de convergence en fonction des nombreux paramètres du problème. Nous ne l'avons pas utilisée.

VI.2 - Transformation en équation différentielle

Elle consiste à assimiler les variations Δq à de petites variations dq . La variable indépendante est le nombre de cycles N , de sorte que les premiers membres des équations (5.4.2) à (5.4.4) qui représentent des variations pour un cycle, doivent être remplacés par :

$$\frac{dq_1}{dN}, \quad \frac{dq_2}{dN} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dN}$$

L'intégration reste toujours difficile à envisager si l'on ne fait pas l'hypothèse $t_1 = t_2 = t$. Cette hypothèse paraît justifiée, sauf dans les premiers cycles du processus, car les deux rotules jouent des rôles symétriques. (On peut craindre toutefois que la rotule 2 ne "conserve son avance" en réalité).

Moyennant cette hypothèse cependant, l'équation de fonctionnement des rotules s'écrit :

$$\frac{dq}{dN} = \frac{2(1-\beta) t (1-t)}{(1+t-2\beta)^2} \frac{dq^P}{dN}$$

La relation de récurrence qui permet de calculer $\frac{dq^P}{dN}$ est obtenue en écrivant sous logarithmes la deuxième relation (5.4.2) :

$$\frac{d}{dN} \left(\text{Log} \frac{dq^P}{dN} \right) = \text{Log} \frac{(1-t)^2}{(1+t-2\beta)^2} = 2 \text{Log} \frac{1-t}{1+t-2\beta}$$

Soit les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 q^P}{dN^2} = 2 \text{Log} \frac{1-t}{1+t-2\beta} \frac{dq^P}{dN} \\ \frac{dq}{dN} = \frac{2(1-\beta) t (1-t)}{(1+t-2\beta)^2} \frac{dq^P}{dN} \end{array} \right. \quad (6.2.1)$$

A ces relations, il faut ajouter les relations de fonctionnement de la rotule, soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{dq}{d\theta} = \frac{1}{d\theta/dq} \\ \text{où } \theta = \varphi(q) \text{ est la loi moment courbure normalisée.} \\ \text{Soit } t = \frac{1}{\varphi'(q)} \end{array} \right. \quad (6.2.2)$$

L'intégration analytique des équations (6.2.1) et (6.2.2) n'est possible que par deux fonctions φ simples, soit :

a) $\theta = \alpha q + \beta$ $t = \frac{1}{\alpha}$ est constant.

Nous ne traiterons pas ce cas car nous verrons (§ 6.3) que les relations de récurrence peuvent être alors intégrées directement.

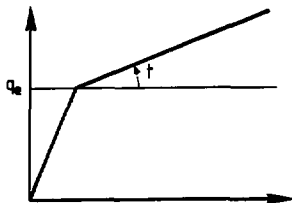
b) La fonction φ est celle qui conduit à une forme linéaire pour t
soit $t = 1 - \alpha(q - q_e)$

Il faut avoir $\frac{dq}{d\theta} = 1 - \alpha(q - q_e)$ soit $q = q_e + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-(\theta - \theta_e)})$

L'intégration de (6.2.1) peut être conduite à son terme, mais l'interprétation des résultats reste difficile. Nous ne présenterons pas ces calculs.

VI.3 - Cas où la pente d'écroissage est constante

Dans ce cas seulement les équations de récurrence peuvent être intégrées exactement. Posons $t_1 = t_2 = t$, les équations (5.4.1) à (5.4.4) s'écrivent :



$$\Delta_n q_1 = \frac{2(1-\beta)(1-t)}{(1+t-2\beta)^2} t \delta_n q^P$$

$$\delta_{n+1} q = \frac{(1-t)^2}{(1+t-2\beta)^2} \delta_n q^P \quad (6.3.1)$$

$$\delta_1 q^P = q - \frac{2(1-\beta)}{1-t} (q_e - q_d)$$

$$\Delta_{n+1/2} q_2 = \frac{2(1-\beta)(1-t)}{(1+t-2\beta)^2} t \delta'_n q^P$$

$$\delta'_n q^P = \frac{1-t}{1+t-2\beta} \delta_n q^P \quad (6.3.2)$$

$$\Delta_{n+1/2} \Theta = \frac{2(1-\beta)(1-t)}{(1+t-2\beta)^2} \delta'_n q^P$$

$$\textcircled{1} q_1 = q_e + \frac{2t(1-t)(1-\beta)}{(1+t-2\beta)^2} \delta_1 q^P$$

$$\textcircled{1/2} q_2 = q_e + \frac{2t(1-\beta)}{(1+t-2\beta)^2} [q - (q_e - q_d)] \quad (6.3.3)$$

$$\textcircled{1/2} \Theta = \Theta_d + \frac{1-t}{1+t-2\beta} [q - (q_e - q_d)]$$

Il y a sans doute peu de différence à suivre l'évolution de la rotule 1 ou de la rotule 2, mais nous donnons la préférence à la rotule 2 qui plastifie la première. Les rotules jouant des rôles symétriques, il est vraisemblable qu'elle restera un peu "en avance" sur la rotule 1.

Des équations ci-dessus on tire successivement :

$$\delta_1 q^P = q - \frac{2(1-\beta)}{1-t} (q_e - q_d) \rightarrow \delta_2 q^P = \left(\frac{1-t}{1+t-2\beta}\right)^2 \delta_1 q^P + \delta_3 q^P = \left(\frac{1-t}{1+t-2\beta}\right)^4 \delta_1 q^P \rightarrow \text{etc...}$$

$$\delta_1 q^P = \frac{1-t}{1+t-2\beta} \delta_1 q^P + \delta_2 q^P = \left(\frac{1-t}{1+t-2\beta}\right)^3 \delta_1 q^P + \delta_3 q^P = \left(\frac{1-t}{1+t-2\beta}\right)^5 \delta_1 q^P \rightarrow \text{etc...}$$

$$\text{Puis } \Delta \frac{3}{2} q_2 = \frac{2(1-\beta)t(1-t)}{(1+t-2\beta)^2} \frac{1-t}{1+t-2\beta} \delta_1 q^P = \frac{2(1-\beta)t(1-t)^2}{(1+t-2\beta)^3} \delta_1 q^P$$

$$\Delta \frac{5}{2} q_2 = \frac{2(1-\beta)t(1-t)}{(1+t-2\beta)^2} \frac{(1-t)^3}{(1+t-2\beta)^3} \delta_1 q^P = \frac{2(1-\beta)t(1-t)^4}{(1+t-2\beta)^5} \delta_1 q^P$$

etc.....

Soit à l'ordre N :

$$\Delta_{N+1/2} q_2 = \frac{2(1-\beta)(1-t)^{2N}}{(1+t-2\beta)^{2N+1}} \delta_1 q^P$$

au total :

$$\begin{aligned} q_2^{(N+1/2)} &= q_e + \frac{2t(1-\beta)}{1+t-2\beta} [q - (q_e - q_d)] + \frac{2(1-\beta)t(1-t)^2}{(1+t-2\beta)^2} \delta_1 q^P \left[1 + \left(\frac{1-t}{1+t-2\beta}\right)^2 + \left(\frac{1-t}{1+t-2\beta}\right)^4 + \dots + \right. \\ &\left. + \left(\frac{1-t}{1+t-2\beta}\right)^{2(N-1)} \dots \right] = q_e + \frac{2t(1-\beta)}{1+t-2\beta} [q - (q_e - q_d)] + \frac{2(1-\beta)t(1-t)^2}{(1+t-2\beta)^2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1-t}{1+t-2\beta}\right)^{2N}}{4(1-t)(t-\beta)} \right] \delta_1 q^P \end{aligned}$$

Soit :

$$q_2^{(N+1/2)} = q_e + \frac{2t(1-\beta)}{1+t-2\beta} [q-(q_e-q_d)] + \frac{t(1-t)^2}{2(1-\beta)} \left[1 - \left(\frac{1-t}{1+t-2\beta} \right)^{2N} \right] \left[q - \frac{2(1-\beta)}{1-t} (q_e-q_d) \right] \quad (6.3.4)$$

Si la condition $t > \beta$ est vérifiée, le terme $\frac{1-t}{1+t-2\beta}$ est inférieur à 1 donc :

$$q_2^{(\infty+1/2)} = q_e + \frac{2t(1-\beta)}{1+t-2\beta} [q-(q_e-q_d)] + \frac{t(1-t)^2}{2(t-\beta)} \left[q - \frac{2(1-\beta)}{1-t} (q_e-q_d) \right] \quad (6.3.5)$$

où l'indice $\infty+1/2$ indique symboliquement qu'il s'agit d'un milieu de cycle. A ces formules correspondent celles qui donnent la rotation calculées de la même façon :

$$\Theta^{N+1/2} = \Theta_d + \frac{1-t}{1+t-2\beta} [q-(q_e-q_d)] + \frac{(1-t)^2}{2(t-\beta)} \left[1 - \left(\frac{1-t}{1+t-2\beta} \right)^{2N} \right] \left[q - \frac{2(1-\beta)}{1-t} (q_e-q_d) \right] \quad (6.3.6)$$

$$\Theta^{\infty+1/2} = \Theta_d + \frac{1-t}{1+t-2\beta} [q-(q_e-q_d)] + \frac{(1-t)^2}{2(t-\beta)} \left[q - \frac{2(1-\beta)}{1-t} (q_e-q_d) \right] \quad (6.3.7)$$

Dans ces quatre dernières équations, on reconnaîtra essentiellement trois termes :

- Un premier terme q_e ou Θ_d correspondant à la première phase élastique.
- Un deuxième terme correspondant au premier demi-cycle thermique, et proportionnel à la part de la charge thermique "non absorbée élastiquement" ou premier demi-cycle, soit $q-(q_e-q_d)$.

- Un troisième terme correspondant à la somme des cycles thermiques ultérieurs, et proportionnel à une part (fictive) de charge thermique qui n'aurait pas été "absorbée élastiquement" au premier cycle, soit :

$$q - \frac{2(1-\beta)}{1-t} (q_e - q_d)$$

VII - CAS DES ROTULES REELLES

VII.1 - Approximation des rotules réelles

Dans la seule configuration du § 6.3, (pente d'écrouissage t constante), il est possible d'intégrer exactement les relations. Il apparaît deux cas :

- Soit $t < \beta$, on a vu que cette hypothèse entraînait rapidement la ruine (§ 4.4.b)
- Soit $t > \beta$ et il est clair que l'on n'atteindra jamais la ruine.

Ce résultat ne nous surprendra pas dans la mesure où, dans ce modèle, les rotules peuvent supporter des charges illimitées.

Ce modèle n'est donc pas réel, mais nous pouvons l'utiliser de la manière suivante :

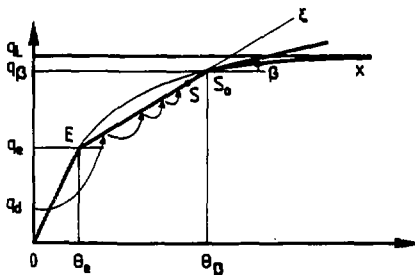


Fig. 7.1

Nous avons vu, pour une charge P , le rôle essentiel joué par le point critique S_0 où la pente normalisée a la valeur :

$$t = \beta = \frac{P}{P_E}$$

Faute de pouvoir intégrer mathématiquement les équations le long de l'arc ES_0 , nous proposons de le remplacer simplement par le segment de droite ES_0 de pente.

$$t^* = \frac{q_\beta - q_e}{\theta_\beta - \theta_e} \quad (7.1.1)$$

Le fonctionnement des rotules est alors symbolisé par la ligne brisée OES_0X . Sur la portion OES_0 , il est possible d'appliquer le modèle du § 6.3. La progression par cycle de charge est symbolisée sur la figure 7.1 par la succession de flèches courbes.

Choisissons un nombre de cycles maximum N correspondant à la durée de vie du système (N peut être déterminé par des critères de fatigue ; éventuellement sa valeur peut être infinie).

Les formules (6.3.4) ou (6.3.5) permettent de calculer $q_2^{N+1/2}$, la conclusion s'établira ainsi :

a) Soit $q_2^{N+1/2} > q_\beta$ (éventuellement $q_2^{\infty+1/2} > q_\beta$)

En quelque sorte, le long de la droite $ES_0\xi$, le point K est atteint ou dépassé pour un nombre de cycles $< N$. Dans ce cas le système est ruiné lorsqu'on dépasse le point S_0 .

b) Soit $q_2^{N+1/2} < q_\beta$

Le point représentatif n'a pas dépassé un point S du segment EK .

Dans ce cas, le système est sûr pour la durée de vie projetée. En particulier, si $q_2^{\infty+1/2} < q_\beta$ le système s'est quasiment adapté, en ce sens que les variations non élastiques des charges sont devenues infiniment petites.

VII.2 - Conditions de non-ruine

La condition de non ruine

$$q_2^{N+1/2} < q_\beta \quad (7.2.1)$$

peut être développée ainsi :

$$\left. \begin{aligned} & \left(\frac{t^* [4(t^*-\beta)(1-\beta) + (1-t^*)^2]}{2(1+t^*-2\beta)(t^*-\beta)} - \epsilon_N \right) q < q_\beta - q_e + \left(\frac{t^*(1-\beta)}{t^*-\beta} (q_e - q_d) - \epsilon'_N \right) \\ \text{où l'on a posé} \quad & \epsilon_N = \frac{t^*(1-t^*)^2}{2} \left(\frac{1-t^*}{1+t^*-2\beta} \right)^{2N} \quad \begin{matrix} \epsilon_N \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \end{matrix} \\ & \epsilon'_N = \frac{t^*(1-\beta)(1-t^*)}{(t^*-\beta)} \left(\frac{1-t^*}{1+t^*-2\beta} \right)^{2N} \quad \begin{matrix} \epsilon'_N \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty \end{matrix} \end{aligned} \right\} (7.2.2)$$

Si $N = \infty$, cette équation se simplifie sous la forme :

$$\frac{t^* [4(t^*-\beta)(1-\beta) + (1-t^*)^2]}{2(1+t^*-2\beta)(t^*-\beta)} q < q_\beta - q_e + \frac{t^*(1-\beta)}{t^*-\beta} (q_e - q_d) \quad (7.2.3)$$

On peut réécrire ces équations en faisant intervenir les contraintes "de peau", comme cela se pratique dans la plupart des codes et normes. Il suffit de traduire, dans ces relations, tous les moments q par la contrainte de peau σ_f qui leur correspond. On remarquera que le moment q_e est atteint pour $\sigma_f = \sigma_e - \sigma$ (plastification de la première fibre), et que le moment de départ $q_d = \frac{1}{E_c} P \delta_d$ correspond à une contrainte de peau :

$$\sigma_d = P \delta_d \frac{V}{I} = \frac{\sigma_s \delta_o}{(1-\beta)} \frac{V}{I} = \frac{\sigma_o}{(1-\beta)} \frac{S h^2}{2I}$$

En posant $k = \frac{S h^2}{2I}$, qui pour une section rectangulaire a la valeur 6, l'équation (7.2.2) s'écrit alors :

$$(7.2.4) \quad (A - \epsilon_N)Q < \sigma_\beta - (\sigma_e - \sigma) + \frac{t^*(1-\beta)}{(t^*-\beta)} - \epsilon_N' \left(\sigma_e - \sigma - k \frac{\sigma_{\sigma_0}}{(1-\beta)} \right)$$

où l'on a posé

$$A = \frac{t^*[4(t^*-\beta)(1-\beta) + (1-t^*)^2]}{2(1+t^*-2\beta)(t^*-\beta)}$$

Q étant la charge thermique exprimée par la "contrainte de peau élastique équivalente".

$\sigma_\beta = C_\beta \frac{V}{I} = E_c q_\beta \frac{V}{I}$ définit le point critique S_0 (ou plutôt son équivalent sur la courbe de fonctionnement de la rotule exprimée à l'aide des contraintes de peau). Nous verrons au § 8.2 comment repérer ce point pour la rotule réelle.

L'équation (7.2.3) s'écrit également :

$$(7.2.5) \quad AQ < \sigma_\beta - (\sigma_e - \sigma) + \frac{t^*(1-\beta)}{t^*-\beta} \left(\sigma_e - \sigma - k \frac{\sigma_{\sigma_0}}{1-\beta} \right)$$

Numériquement, nous l'utiliserons sous la forme condensée :

$$\frac{t^*[4(t^*-\beta)(1-\beta) + (1-t^*)^2]}{2(1+t^*-2\beta)} Q < (t^*-\beta) \sigma_\beta + \beta(1-t^*)(\sigma_e - \sigma) - kt^* \sigma_{\sigma_0} \quad (7.2.6)$$

VIII - APPLICATION NUMERIQUE A DES ROTULES REELLES POUR N INFINI

VIII.1 - Normalisation de la rotule réelle

Les courbes (C, θ) d'une rotule réelle ont été obtenues à l'aide du programme SAMSON pour une section standard 100 mm x 100 mm constituée d'un matériau type (acier inox 316L) dont la courbe de traction est donnée par la planche I. La section est affectée d'une précontrainte σ . Le programme donne les valeurs fictives en flexion.

$$\sigma^* = C \frac{V}{I} \quad \text{et} \quad \varepsilon^* = \chi V \quad (8.1.1)$$

pour une série de valeurs croissantes de χ , et cela pour chaque valeur de la précontrainte σ .

La géométrie de la rotule sera définie par les valeurs classiques S (section), I (inertie), v (abscisse de la fibre la plus éloignée) et sa longueur u qui est nécessaire pour relier la courbure à l'angle de rotation.

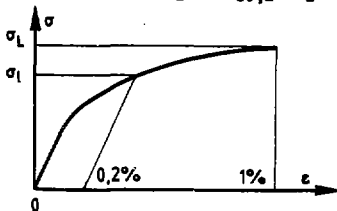
De préférence à v on utilisera la quantité $h = 2v$ et l'on définira le rap-

port $r = \frac{u}{h}$ (8.1.2) caractérisant la forme de la rotule. Egalement on définira un défaut relatif en posant

$\eta = \frac{\delta_0}{h}$ (8.1.3); ainsi le défaut initial

sera défini par $\eta_0 = \frac{\delta_0}{h}$. La longueur de la tige est toujours notée l , mais sera ensuite abandonnée en étant reliée à la charge d'Euler.

Sur la courbe de traction du matériau (planche I) on relève les valeurs de E (module d'élasticité) de σ_e (limite élastique) et deux valeurs conventionnelles σ_L et $\sigma_{e0,2}$. σ_L est une valeur conventionnelle considérée



comme limite du matériau (par exemple correspondant à une déformation totale de 1%) et $\sigma_{e0,2}$ la valeur notée classiquement $Re_{0,2}$ qui correspond à une déformation résiduelle de 0,2%.

Fig. 8.2

Pour situer le niveau d'interaction entre limite d'Euler et limite du matériau, on posera $\mu = \frac{\sigma_{e0,2}}{\sigma_E}$ (8.1.4). Enfin on conservera la notation

déjà utilisée $\beta = \frac{\sigma}{\sigma_E}$ (8.1.5)

En fonctionnement élastique, le fonctionnement de la rotule est défini par $\sigma_f = \frac{C_V}{I}$; $\varepsilon_f = \frac{C_V}{EI}$; $Y = \frac{\varepsilon_f}{V} = \frac{C}{EI}$; $\theta = Yu = \frac{C_u}{EI}$ ce qui conduit à

poser : $E_C = \frac{EI}{u}$ (8.1.6)

La charge normalisée d'une rotule q est reliée à la contrainte fictive "de peau" σ_f par : $\sigma_f = \frac{C_V}{I} = q \frac{E_C V}{I} = q \frac{EI}{u} \frac{V}{I} = q \frac{EV}{u}$

soit $q = 2r \frac{\sigma_f}{E}$ (8.1.7)

De même, la rotation θ d'une rotule est reliée à la déformation fictive "de peau" ε_f par : $\theta = Yu = \varepsilon_f \frac{u}{V}$ soit $\theta = 2r \varepsilon_f$ (8.1.8)

Ainsi le moment limite élastique q_e est défini par la contrainte "de peau" en flexion :

$\sigma_f = \sigma_e - \sigma$ soit $q_e = \frac{2r(\sigma_e - \sigma)}{E}$ (8.1.9)

Enfin on a vu au § 7.2 l'intervention du groupe $k = \frac{Sh^2}{2I}$ (8.1.10)

qui, pour une section rectangulaire, a la valeur 6.

Ce paramètre intervient essentiellement dans la relation de θ à η (géométrie des rotules et géométrie du système), si l'on veut inclure le paramètre λ dans le groupement déterminant la contrainte d'Euler σ_E .

$$\theta = \frac{2\delta}{\lambda} = \frac{2\eta h}{\lambda}$$

λ est relié à σ_E par $P_E = \frac{2E_c}{\lambda} = \frac{2EI}{\lambda^2}$ soit $\sigma_E = \frac{2EI}{Su\lambda}$ qui entraîne $\lambda = \frac{2EI}{\sigma_E Su}$

Il vient donc : $\theta = 2 \eta h \frac{\sigma_E Su}{2EI} = 2 \eta r \frac{\sigma_E}{E} \frac{Sh^2}{2I}$

$$\theta = 2 \eta r k \frac{\sigma_E}{E} \quad (8.1.11)$$

VIII.2 - Calcul de σ_β et t^*

La formule (7.2.6) fait intervenir les quantités σ_β et t^* qu'il faut relier aux données de la rotule réelle.

La contrainte σ_β correspond au point S_0 où le module tangent de la loi (q, θ) a la valeur $t = \beta$ avec :

$$t = \frac{dq}{d\theta} = \frac{2r}{E} \frac{d\sigma^*}{2r d\epsilon^*} = \beta \quad \text{soit}$$

$$\text{en } S_0 : \quad \frac{d\sigma^*}{d\epsilon^*} = \beta E \quad (8.2.1)$$

Cette relation permet de repérer sur la courbe (σ^*, ϵ^*) issue de SAMSON le point critique équivalent $S_0^*(\sigma_\beta^*, \epsilon_\beta^*)$.

La pente moyenne t^* des relations (7.2.2) à (7.2.6) est définie par (7.1.1) soit :

$$t^* = \frac{q_\beta - q_e}{\theta_\beta - \theta_e} \quad \text{où} \quad q_\beta = \frac{2r}{E} \sigma_\beta^* \\ \text{et} \quad q_e = \frac{2r}{E} (\sigma_e - \sigma)$$

de même

$$\theta_\beta = 2r \epsilon_\beta^*$$

et $\theta_e = q_e$ car la pente de la courbe

élastique normalisée est 1.

La valeur t^* est donc :

$$t^* = \frac{\frac{2r}{E} \sigma_\beta^* - \frac{2r}{E} (\sigma_e - \sigma)}{2r \epsilon_\beta^* - \frac{2r}{E} (\sigma_e - \sigma)}$$

soit

$$t^* = \frac{\sigma_\beta^* - (\sigma_e - \sigma)}{E \epsilon_\beta^* - (\sigma_e - \sigma)} \quad (8.2.2)$$

Pour la présentation de résultats numériques, il est préférable de rapporter les contraintes à une valeur référence, par exemple la valeur $\sigma_{e0,2} = Re_{0,2}$, d'où la relation :

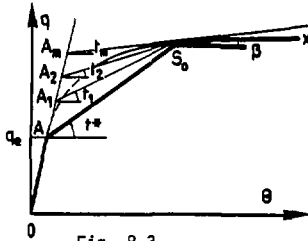
$$(8.2.3) \quad A \frac{Q}{\sigma_{e0,2}} < \frac{\sigma_\beta^* - (\sigma_e - \sigma)}{\sigma_{e0,2}} - \frac{k t^*}{(t^* - \beta)} \eta_0 \frac{\sigma}{\sigma_{e0,2}}$$

$$\text{où } A = \frac{t^* [4(t^* - \beta)(1 - \beta) + (1 - t^*)^2]}{2(1 + t^* - 2\beta)(t^* - \beta)}$$

Les courbes des planches II à IX montrent les valeurs de $\frac{Q}{\sigma_{e0,2}}$ ainsi calculées, en fonction des valeurs $\frac{\beta}{\mu} = \frac{\sigma}{\sigma_{e0,2}}$. On a tracé une planche pour chaque valeur de $\frac{1}{\mu} = \frac{\sigma E}{\sigma_{e0,2}}$ (8 valeurs différentes) et sur chaque planche, une courbe pour chaque valeur du défaut initial η_0 (soit $\eta_0 = 0.$, $\eta_0 = 0.1$, $\eta_0 = 0.5$, $\eta_0 = 1$).

VIII.3 - Remarques sur les résultats numériques

a) 1ère remarque



On peut craindre (Fig. 8.3) que le repérage de la limite d'élasticité q_e (issu de celui de σ_e) ne soit trop imprécis, ce qui risque de créer une grande imprécision sur le paramètre fondamental t^* . En outre on ne sait dire dans quel sens, favorable ou défavorable, joue le déplacement éventuel de cette limite. Aussi, nous avons re-

tenu pour σ_e une valeur de départ plutôt faible (13 hbar), puis nous avons déplacé cette valeur le long d'une droite de pente E. Sur la courbe (q, θ) cela revient à remplacer la courbe théorique par les lignes brisées OAS_0X , puis OA_1S_0X , puis OA_2S_0X ... jusqu'à la dernière courbe possible OA_mS_0X ; cela dans le but de ne retenir que la configuration la plus défavorable (Q_{\max} le plus petit). De fait, le calcul n'a retenu dans tous les cas, que la courbe la plus basse OAS_0X .

b) 2ème remarque

Ces courbes conduisent quelquefois à des valeurs élevées de $\frac{Q}{\sigma_{e0,2}}$. Il est clair (cf. Remarque § 4.4.e) que ces courbes doivent être écrêtées en raison du risque d'écroutissage inverse. Tout au moins, la théorie développée

ici ne conviendrait pas dans un tel cas. Dans l'hypothèse d'écrouissage cinématique, les courbes devraient donc être écrêtées à des limites de l'ordre de

$$\frac{Q}{\sigma_{e0,2}} \approx 2.$$

c) 3ème remarque

Les courbes obtenues sont essentiellement assimilées à des droites, sauf dans leur partie extrême gauche (valeurs des charges faibles). Cette propriété sera exploitée au § 9. pour une présentation simplifiée des résultats.

d) 4ème remarque

Pour un défaut initial nul ($\eta_0 = 0.$) on est conduit à des courbes non triviales qui sont figurées sur les planches II à IX. L'interprétation de ces courbes est un peu confuse, de sorte qu'elle devrait apparaître plutôt comme des courbes limites ($\eta_0 \rightarrow 0$) que comme des courbes correspondant à des cas réels.

En effet, si l'on examine pour ce cas ($\delta_0 = 0$), le premier demi-cycle de charge (§ 5.2) on constate qu'une déformation est possible dès l'application de la première charge thermique. De fait il faut noter que ce fonctionnement suppose essentiellement la plastification d'une seule des rotules, tandis que l'autre décharge élastiquement. Cette hypothèse de dissymétrie permet dès lors en phase thermique, l'existence d'un équilibre non trivial, c'est-à-dire la création d'un défaut.

En réalité, un défaut initial effectivement nul entraînerait, en phase thermique, la plastification simultanée des deux rotules, sous déformation nulle ; l'équilibre restant réalisé de manière triviale avec $(0-C_{th}) + (0-C_{th}) = 0$, quelle que soit la valeur C_{th} .

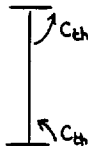


Fig. 8.4

L'hypothèse de plastification unilatérale est donc en principe fautive, mais cette remarque n'a qu'une portée très limitée car il y aura toujours un défaut minimum pour créer la dissymétrie.

e) 5ème remarque

Sur les planches VI et VII a été représentée une zone hachurée correspondant aux expériences de flambage sous torsion cyclique réalisées au C.E.A. (Réf. 4). Les valeurs à prendre en compte étant : $\sigma_E = 40,5$ hbar, $\sigma_{e0,2} = 29,5$ hbar, $\sigma = 16,23$ à $13,27$ bars. On a $\sigma_E/\sigma_{e0,2} = 1,37$, ce qui nous situe entre les planches VI et VII et $\sigma/\sigma_{e0,2} = 0,45$ à $0,55$. La charge secondaire évaluée par la méthode du cisaillement maximal était $Q = 1,18$ à $2,35$ hbar. Il est clair qu'en dehors de tout défaut, les essais se placeraient déjà en zone de flambage.

Il faut noter cependant qu'au sens des diagrammes de De Bree, la charge, pour ce cas de charge, est affectée d'un facteur $\frac{1}{4}$, alors que dans nos critères (cf. Planche XI), le critère limite ne fait apparaître qu'un facteur $1/2$. En d'autres termes, il pourrait être justifié de diviser les valeurs de Q ci-dessus d'un facteur 2, ce qui rapprocherait la zone hachurée des courbes limites. Quoiqu'il en soit, la conclusion ne serait pas fondamentalement changée.

f) 6ème remarque

Sur les planches II à IX ont également été représentées (traits interrompus courts) les courbes issues des calculs de J. DEVOS, pour un défaut nul. On constate qu'elles se situent bien au-dessous des notres, sauf pour les valeurs les plus élevées de la charge, ce qui était prévisible.

IX - PRESENTATION SIMPLIFIEE DES RESULTATS

Dans l'optique d'une présentation des résultats sous la forme simplifiée du type des normes habituelles, on peut, comme indiqué au (8.3.c) ci-dessus, assimiler la partie utile des courbes à des droites, et cela avec une bonne précision. En relevant sur les figures les équations de ces droites, on est conduit à des conditions simplifiées du type $a\sigma + bQ < c$, que l'on peut toujours mettre sous la forme :

$$\sigma + \lambda\sigma + \mu Q < \sigma_{e0,2}$$

(9.1.1)

Cette écriture est obtenue artificiellement, il est vrai, puisqu'elle ne résulte pas directement des équations établies, mais elle présente cependant certains avantages. Sa forme est semblable à la forme classique des codes. La charge à prendre en compte apparaît comme la somme d'une charge de membrane σ , d'un terme $\lambda \sigma$ dû à l'amplification de cette charge par flambage et cyclage, et d'un terme μQ dû à la charge thermique.

Les planches X et XI donnent les valeurs de λ et μ établies d'après les courbes précédentes.

On notera que les valeurs de λ diminuent rapidement lorsque la charge d'Euler augmente, ce qui dénote le rôle majeur de la non linéarité géométrique dans le processus.

Par contre, le paramètre μ ne varie que faiblement, tant en fonction de σ_E que du défaut. Le phénomène de limite thermique est donc essentiellement lié à l'existence des maxima plastiques plus qu'à la non linéarité. Par ailleurs, le défaut δ_0 ne fait qu'initialiser le rochet thermique, mais ne joue pas sur son amplitude. Notons sur la planche XI que si σ_E est grand la charge thermique reste limitée. L'instabilité géométrique ne joue plus, mais les maxima plastiques (liés à la courbe d'états limites) existent toujours et déterminent un chargement thermique maximal, qui ne varie plus. Par contre, le défaut, nous l'avons dit, agit fortement sur le facteur d'amplitude de σ . On sait qu'en phase élastique on a simplement : $\sigma_f = \frac{3\sigma\delta_0}{1-P/P_E}$; ici le fonctionnement élastoplastique modifie quelque peu ce résultat, sans doute en diminuant fortement la valeur de P_E . Toutefois on ne saurait pousser trop loin cette analogie ; par exemple, on constate dans le cas présent, que le défaut nul ($\eta_0 = 0$) n'empêche pas une certaine amplification des contraintes.

X - CALCUL SIMPLIFIÉ DE LA CHARGE THERMIQUE MAXIMUM

X.1 - Théorie simplifiée

Un calcul approximatif, mais considérablement plus facile, de la charge thermique maximum peut être effectué. Reprenons le schéma (3.7) par lequel nous définissions les situations d'équilibre possibles, sous une charge axiale P , en l'absence de toute charge thermique. Rappelons que le point S est le point qu'il ne faut pas dépasser sur la courbe Γ . Il lui correspond,

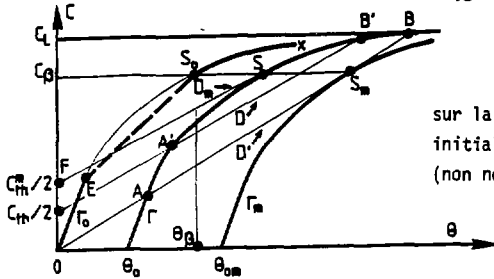


Fig. 10.1

sur la courbe translée Γ_0 (défaut initial nul) le point S_0 de coordonnées (non normalisées) θ_β et C_β .

Supposons maintenant l'adaptation réalisée. L'étude du phénomène de cyclage nous a permis de comprendre qu'à ce moment, la rotule (1) oscillera élastiquement entre des charges C_1 et $C_1 - C_{th}$ et la rotule 2 entre des charges $C_2 - C_{th}$ et C_2 ; l'angle θ restant alors fixé. Les points (θ, C_1) et (θ, C_2) seront les "sommets de charge" des rotules tandis que les points $(\theta, C_1 - C_{th})$ et $(\theta, C_2 - C_{th})$ situeront les "fins de décharge" de ces rotules.

A chaque extrémité de ces trajets de charge, et même en tout point de ces trajets, l'équilibre devra rester réalisé ce qui implique :

$$2P\delta = C_1 + (C_2 - C_{th}) = (C_1 - C_{th}) + C_2$$

ou encore
$$P\theta\delta = C_1 + C_2 - C_{th} \tag{10.1.1}$$

On ne peut évidemment pas assurer a priori l'égalité des couples C_1 et C_2 . Faisons l'hypothèse qu'après un grand nombre de cycles, on a cette égalité (hypothèse que nous discuterons au § 10.2). L'équation (10.1.1) s'écrit alors : $P\theta\delta = 2C - C_{th}$

soit
$$C = \frac{P\theta\delta}{2} + \frac{C_{th}}{2} \tag{10.1.2}$$

On voit que la situation d'adaptation est définie par les intersections de la courbe Γ avec une droite D' parallèle à D , d'ordonnée à l'origine $C_{th}/2$. Il est clair que la charge thermique maximum sera définie par l'ordonnée à l'origine $C_{th}^m/2$ de la tangente en S à la courbe Γ .

Le point S ayant les coordonnées $\theta_\beta + \theta_0$ et C_s , la pente de D_m étant toujours $\frac{Pl}{2}$, Q_m sera donné par la condition $\frac{C_{th}}{2} + \frac{Pl}{2} (\theta_\beta + \theta_0) = C_s$ qui exprime que la droite issue de F, de pente $\frac{Pl}{2}$ passe par S, soit :

$$C_{th} = 2C_s - Pl (\theta_\beta + \theta_0) \quad (10.1.3)$$

En coordonnées normalisées, cette condition s'écrit :

$$q = 2q_s - \frac{Pl}{E_c} (\theta_\beta + \theta_0) \quad \text{soit}$$

$$\boxed{q = 2(q_s - \beta (\theta_\beta + \theta_0))} \quad (10.1.4)$$

Cette relation peut être écrite à l'aide des variables normalisées utilisées au § 8.2 : il vient, en vertu de (8.1.7) (8.1.8) et (8.1.11) :

$$2r \frac{Q}{E} = 2 \left[\frac{2r \sigma_\beta^*}{E} - \beta (2r \varepsilon_\beta^* + 2r k \eta_0 \frac{\sigma_E}{E}) \right]$$

$$\text{soit} \quad \boxed{Q = 2 \left[\sigma_\beta^* - \beta (E \varepsilon_\beta^* + k \eta_0 \sigma_E) \right]} \quad (10.1.5)$$

Rapportée à $\sigma_{e0,2}$, cette relation a été numérisée :

$$\boxed{\frac{Q}{\sigma_{e0,2}} = 2 \left[\frac{\sigma_\beta^*}{\sigma_{e0,2}} - \beta \left(\frac{E \varepsilon_\beta^*}{\sigma_{e0,2}} + k \frac{\eta_0}{\mu} \right) \right]} \quad (10.1.6)$$

et a conduit aux courbes en traits interrompus longs des planches II à IX.

X.2 - Remarques sur la méthode simplifiée

Le calcul simplifié ci-dessus repose sur l'hypothèse :

$$C_1 = C_2 \quad (10.2.1)$$

Cette hypothèse n'est vraisemblablement pas vérifiée. Pour une courbe d'érouissage linéaire par exemple, on peut constater, aux équations (6.3.1) à (6.3.3) que la rotule 2 tend à conserver l'avance qu'elle a acquise aux premiers cycles thermiques. Comme dans le calcul itératif, nous avons imposé à une seule rotule (la rotule 2) de ne pas dépasser le point critique S_0 , il semble que la méthode simplifiée doive plutôt nous donner des valeurs majorantes, la méthode itérative donnant plutôt des valeurs minorantes. Nous verrons que cette hypothèse est en général vérifiée par les résultats numériques, l'écart entre les deux méthodes n'étant jamais considérable (= 20%).

Remarquons également que, dans la théorie simplifiée, (Fig. 10.1) le résultat obtenu (formule 10.1.4) n'aurait subi aucun changement si l'on avait remplacé la courbe Γ_0 par la courbe OES_0X , comme nous l'avons fait au § (7.1). Cette remarque valorise l'étude itérative faite précédemment vis-à-vis de l'approximation fondamentale de la courbe qui avait dû être faite au § (7.1). Les considérations ci-dessus montrent en effet que les résultats ne devraient guère être affectés par cette approximation.

X.3 - Comparaison des résultats numériques des deux méthodes

D'une manière générale, les résultats de la méthode simplifiée recourent ceux de la méthode directe.

Pour les très faibles valeurs de la charge d'Euler cependant la différence entre les deux courbes devient plus importante, cette fois ci en faveur des courbes issues du calcul direct. On trouve certainement là le rôle important joué par les premiers cycles thermiques, qui, dans le cas où P_E est faible, conduisent rapidement aux grandes déformations. C'est dans ces cas, vraisemblablement, que l'hypothèse (10.2.1) est la plus fautive. A notre avis il conviendra de préférer la méthode directe.

XI - CONCLUSIONS

Les modèles présentés dans les pages qui précèdent sont évidemment quelque peu simplifiés vis-à-vis des structures réelles, fut-ce une simple poutre. Nous croyons cependant que le fonctionnement décrit ci-dessus, qualitativement, doit se retrouver dans des pièces réelles unidimensionnelles (poutres) ou bidimensionnelles : plaques, voire coques à simple courbure, (cylindre...) ou autres. Rappelons les aspects principaux de ce modèle :

- Existence d'un phénomène de cumul de déformations faisant intervenir la non linéarité géométrique.
- Existence d'un état critique au delà duquel la ruine est virtuellement assurée, définie par la formule classique du module tangent :

$$\frac{E_t}{E} = \frac{P}{P_E}$$

- Possibilité de convergence avant cet état critique (non-ruine) moyennant certaines conditions limitatives sur les charges.
- Condition de non ruine exprimée (pour les valeurs numériques choisies) avec une bonne précision par une relation linéaire :

$$\sigma + \lambda\sigma + \mu Q < Re_{0,2} \quad (\text{Planches X et XI})$$

Cette approximation linéaire montre qu'une augmentation de la charge thermique appliquée se traduit par une diminution en conséquence de la charge axiale P possible. Vis-à-vis du risque de ruine, Q et P jouent des rôles symétriques, à condition qu'ils soient assortis des coefficients convenables.

Tel que présenté dans ces pages, ce modèle apparaît un peu comme un cas isolé. De fait ce genre de phénomène devrait être formalisé et généralisé, et l'exemple ci-dessus n'en serait plus qu'un cas particulier. En outre une telle étude apporterait certainement une lumière intéressante sur les phénomènes réels de flambage. Une telle généralisation reste à faire, ce sera là notre principale conclusion.

- ANNEXE 1 -

EQUIVALENCE DE LA CONDITION (5.3.2) ET LA CONDITION DE J. DEVOS (Réf. 1)

Une condition de non-ruine en cyclage est proposée par J. DEVOS dans la Réf. 1, 8.3.3.3, p.3.3.3 en bas de la page :

$$F + 3F \frac{\eta_0}{1-F/F_E} + 3F \frac{\eta_{th \max}}{1-F/F_E} + \frac{\Delta Q}{2} < \sigma_e, \text{ pour son modèle sans écrouissage.}$$

Avec les notations que nous avons adoptées, F s'identifie à $\frac{F}{F_E} \sigma$, ΔQ à Q , F_E est la contrainte de flambage en mode une fois rotulé $F'_E = \frac{F_E}{2}$

En outre, DEVOS pose :

$$\eta_{th} = \frac{Q - Q_e}{6F \frac{1}{E}} \text{ où } Q_e = \sigma_e - F \left(1 + \frac{3 \eta_0}{1 - \frac{F}{F_E}} \right)$$

Dans le terme $\frac{3F \eta_0}{1 - F/F_E}$ on reconnaît la contrainte de peau σ_d due à la flexion initiale, la condition de non ruine s'écrit :

$$\sigma + \sigma_d + 3F \frac{Q - [\sigma_e - (\sigma + \sigma_d)]}{3F_E (1-2F/F_E)} + \frac{Q}{2} < \sigma_e$$

soit
$$\sigma + \sigma_d + \beta \frac{Q - [\sigma_e - (\sigma + \sigma_d)]}{1 - 2\beta} + \frac{Q}{2} < \sigma_e$$

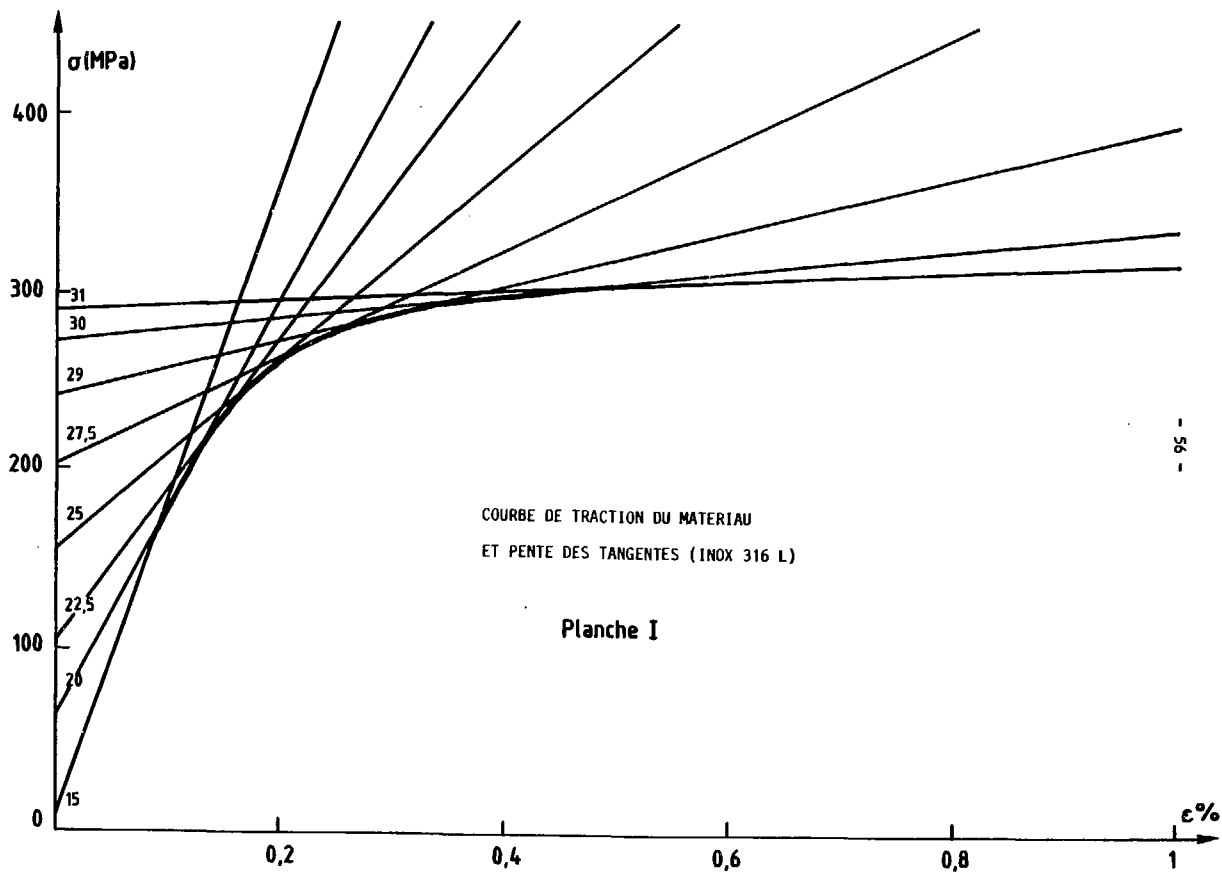
En développant, cette condition prend la forme :

$$Q < 2(1-\beta) [\sigma_e - \sigma - \sigma_d] \tag{A.1}$$

Au § 5.3, nous avons obtenu la condition de non ruine (d'après la formule (5.3.2) :

$$q < \frac{2(1-\beta)}{1-t_2} (q_e - q_d)$$

Les quantités q , q_e , q_d qui y figurent sont des moments normalisés, il leur correspond des contraintes de peau Q , $\sigma_e - \sigma$ et σ_d . En outre, en l'absence d'écroutissage, il faut poser $t_2 = 0$; la relation prend alors la forme (A.1) de J. DEVOS.



COURBE DE TRACTION DU MATERIAU
ET PENTE DES TANGENTES (INOX 316 L)

Planche I

96

Planche II

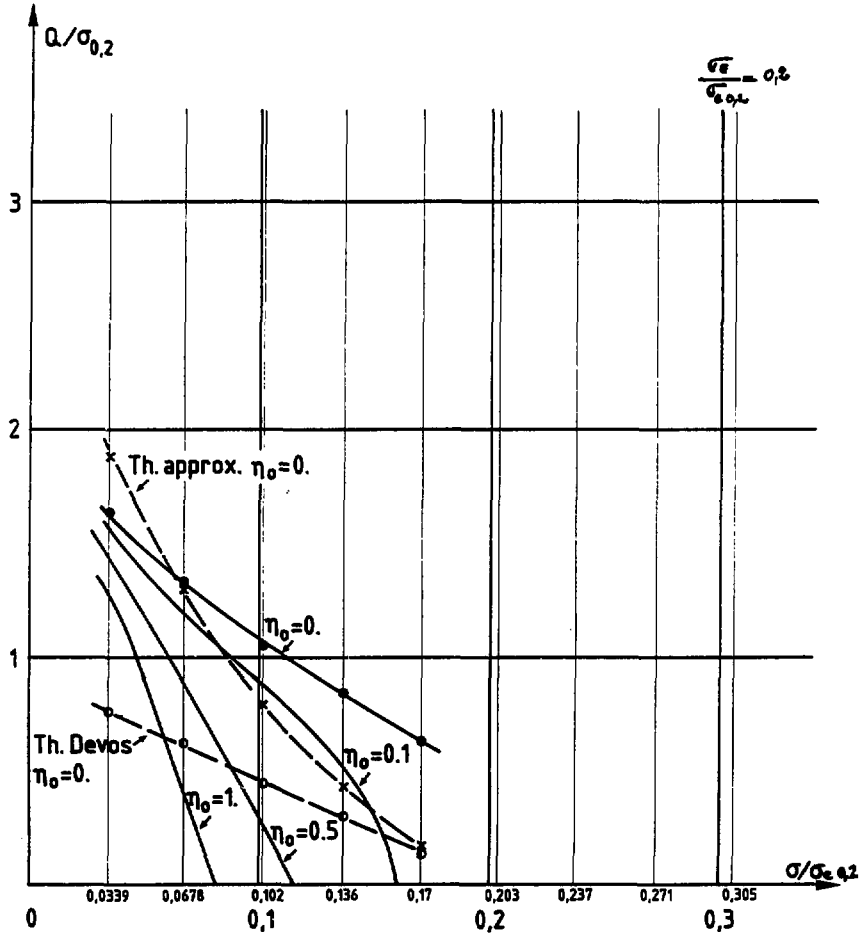


Planche III

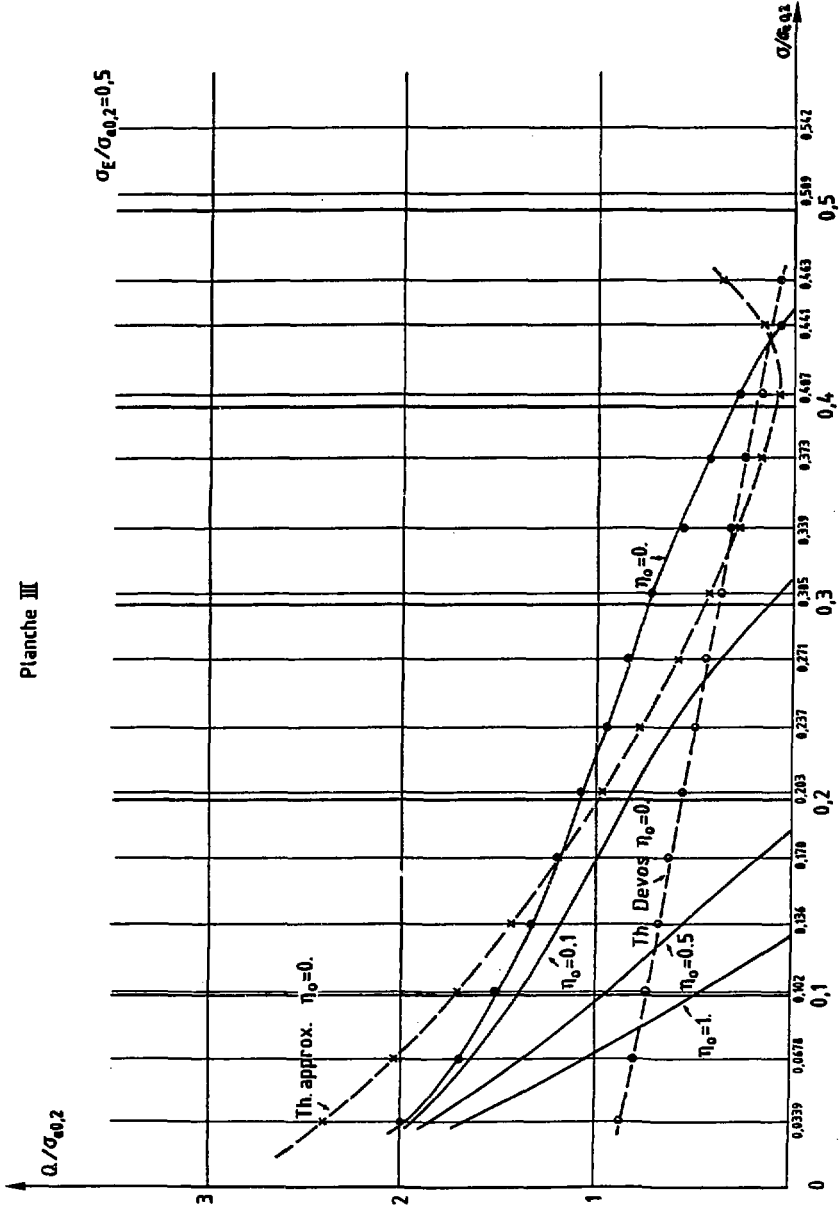


Planche IV

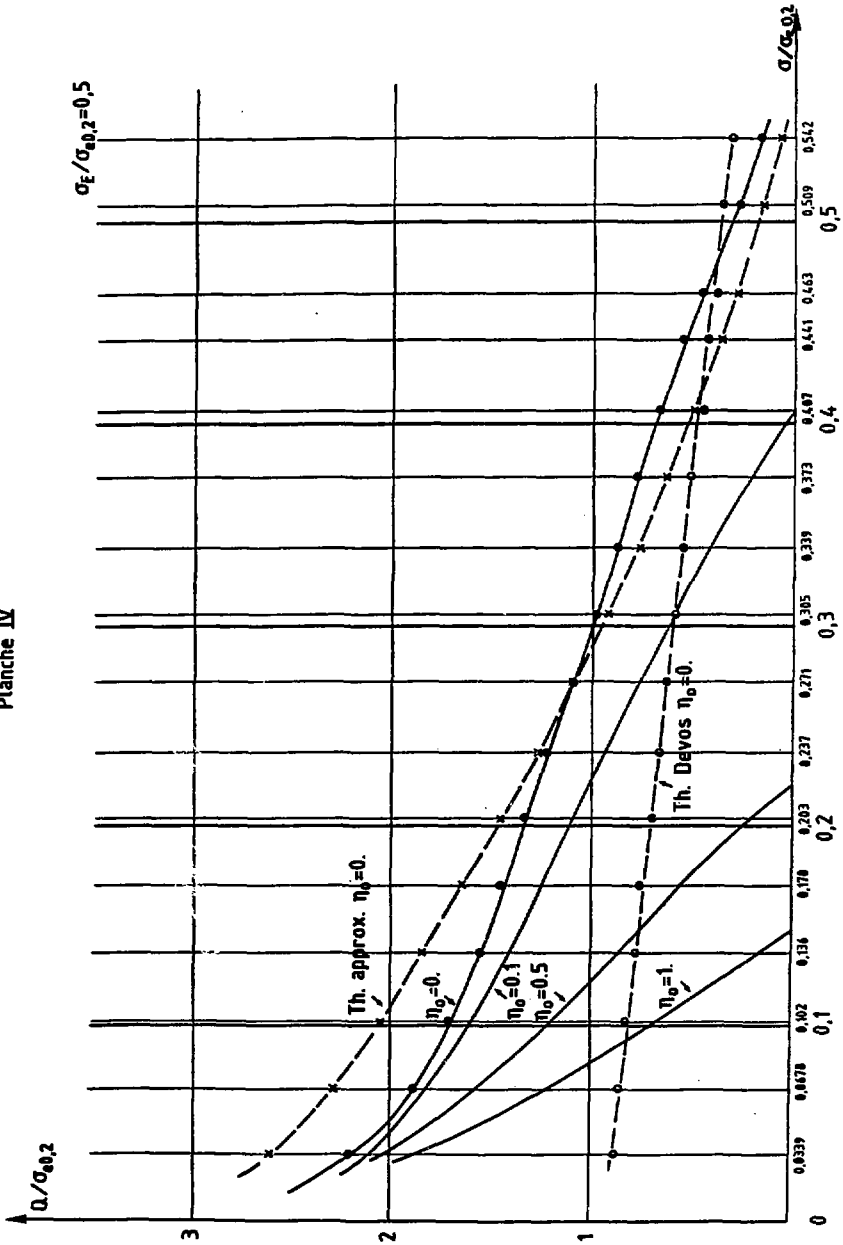


Planche Y

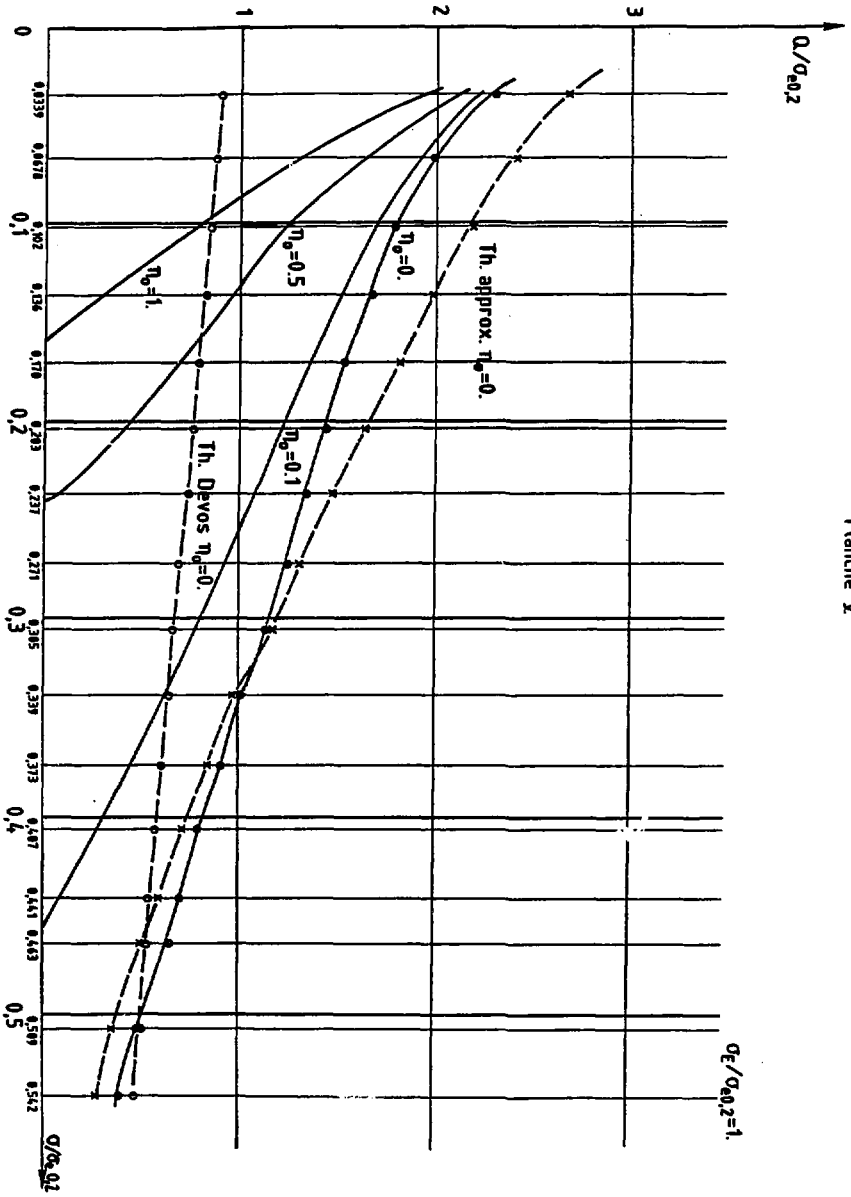


Planche VI

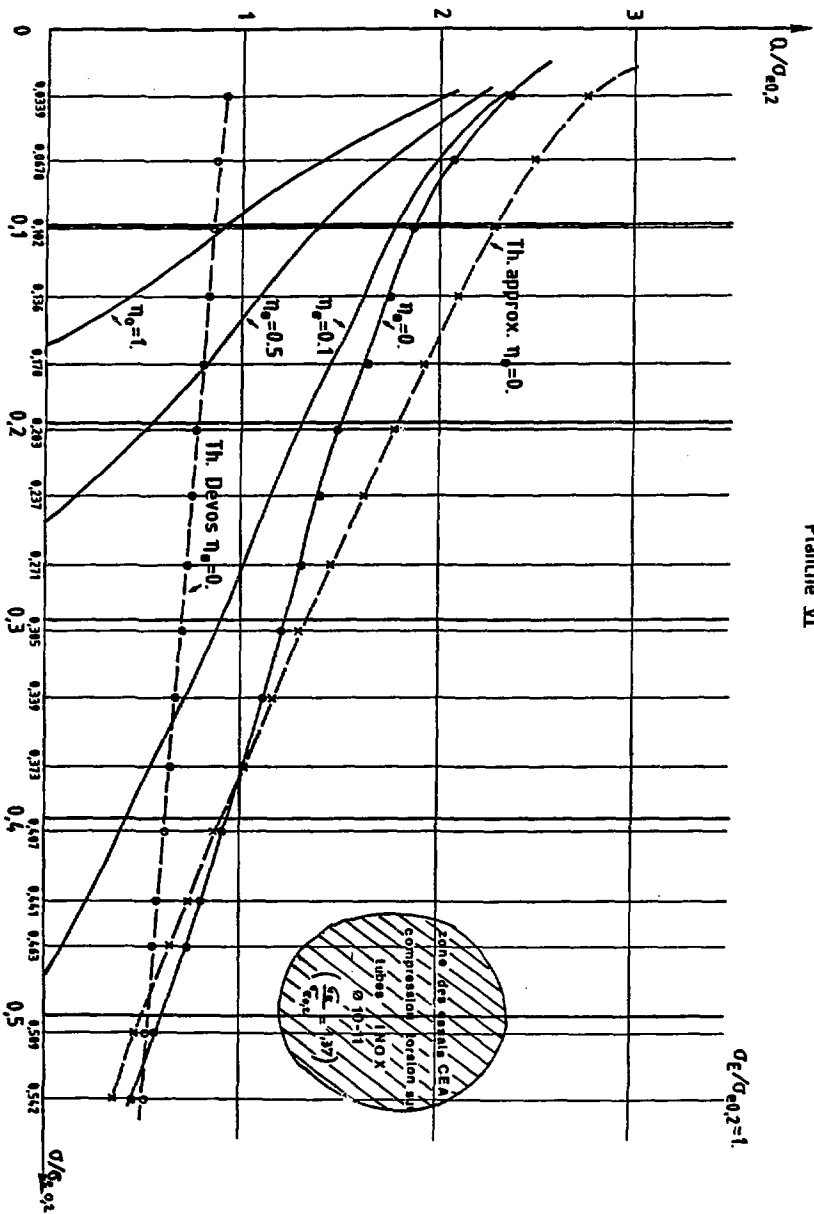


Planche VII

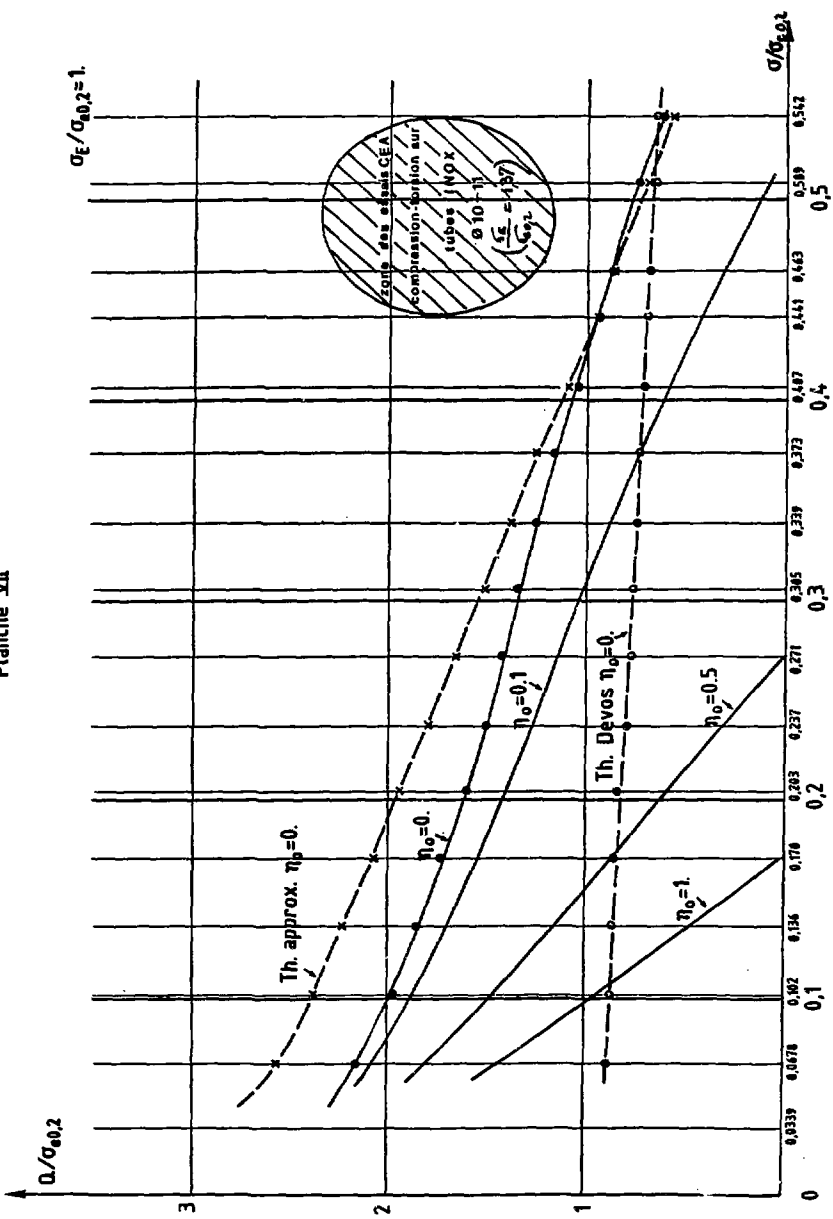


Planche VIII

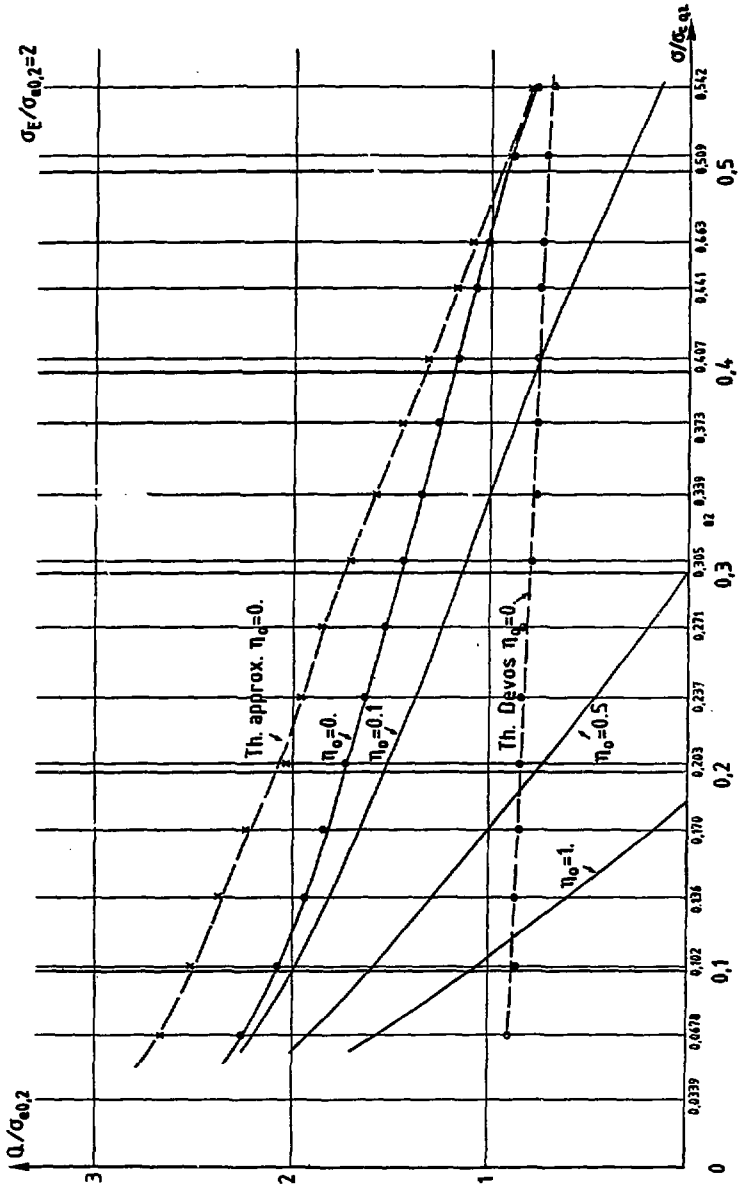
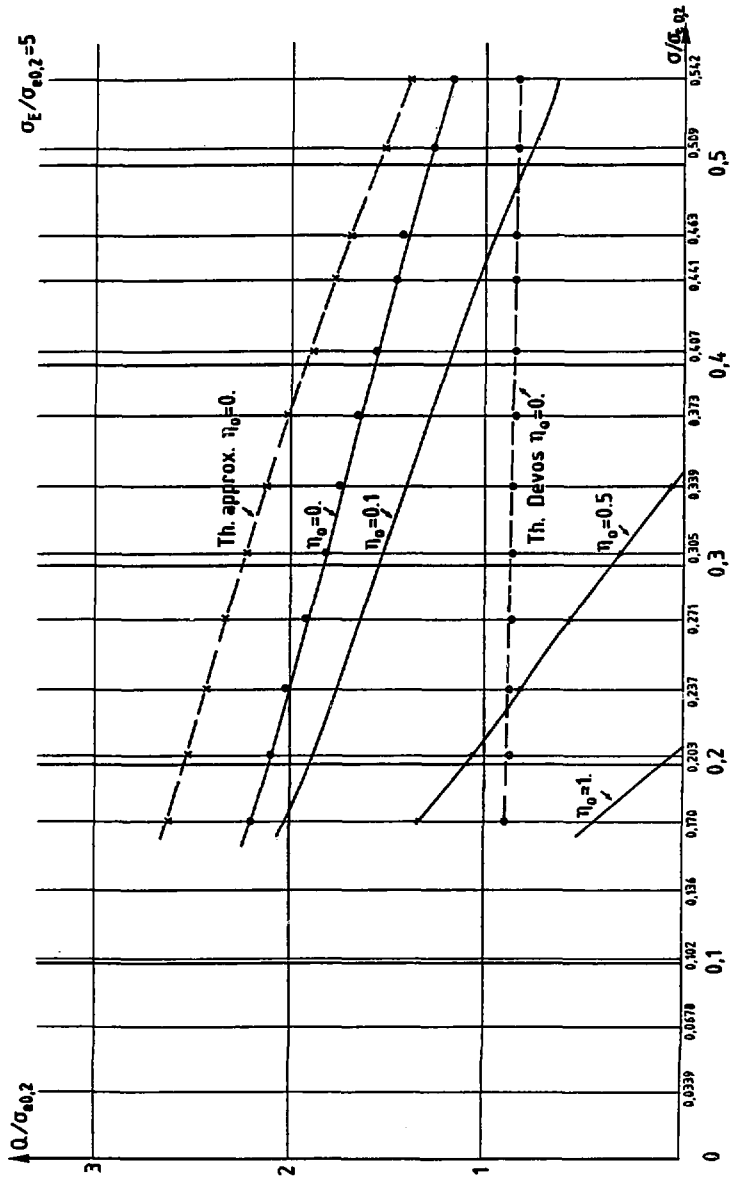
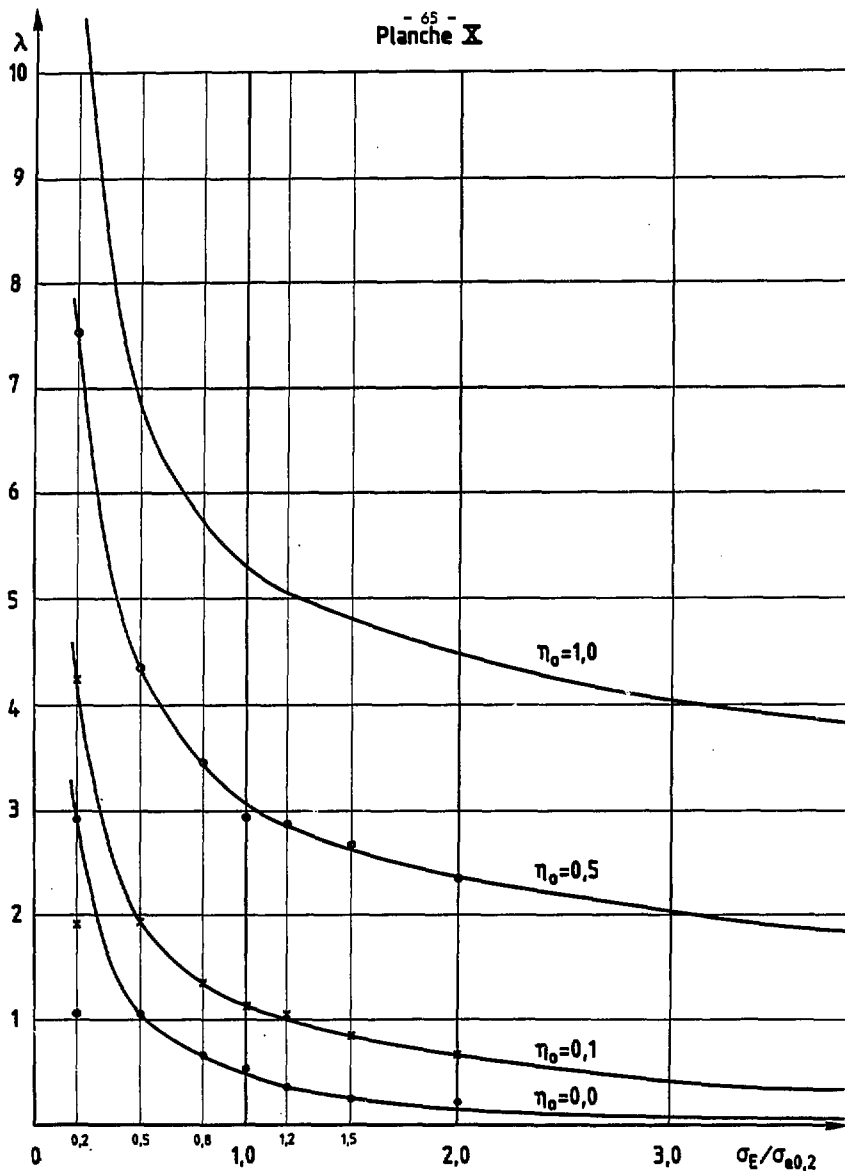


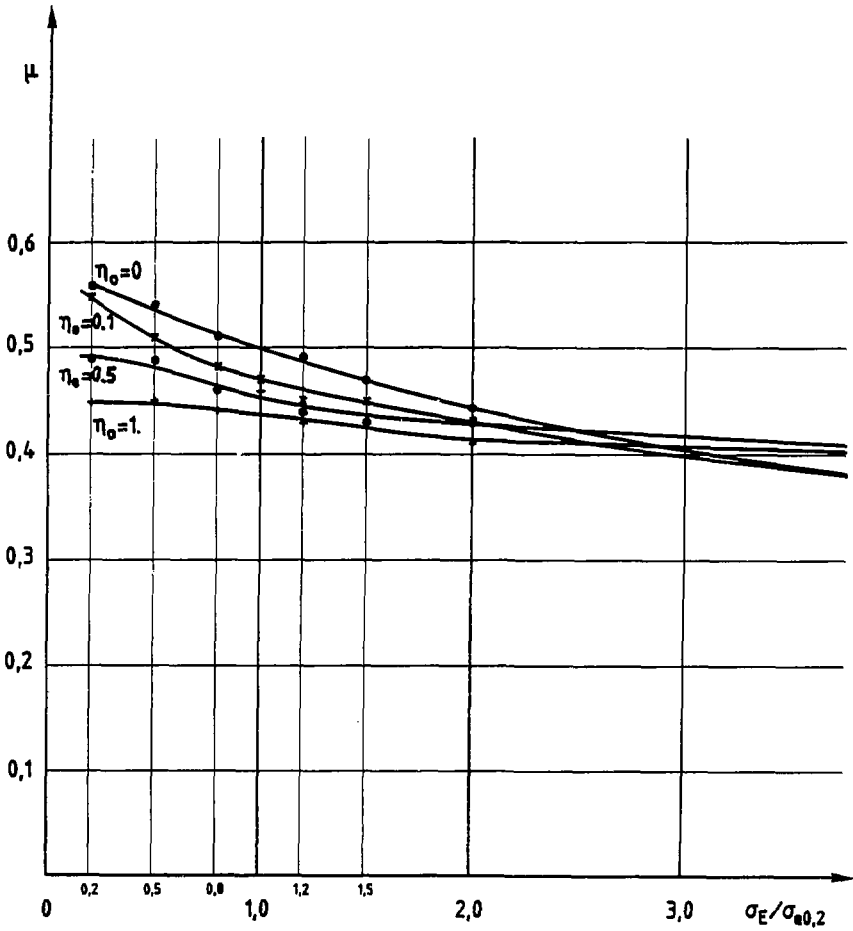
Planche IX





Valeurs de λ dans la relation $\sigma + \lambda \sigma + \mu \sigma = \sigma_{a0,2}$

Planche XI



Valeurs de μ dans la relation $\sigma + \lambda\sigma + \mu Q = \sigma_{e0,2}$

REFERENCES

- [1] J. DEVOS
Influence des contraintes thermiques sur le flambage élastoplastique. Etude d'un modèle élémentaire
Note technique, Contrat Novatome-CEA N° SA-675. Date 21/04/81
- [2] A. HOFFMANN, P. VERPEAUX
Plasticité et post flambage. Position du problème et exemples
- [3] A. HOFFMANN, A. COMBESCURE
Quelques considérations simples sur l'étude de l'effet des défauts de forme sur les charges critiques de flambage
Rapport DENT/SMTS/BAMS/80-28 (F.E. 5423 04 000 056)
- [4] D. TOMASSIAN, D. BROUARD
Essais de compression-torsion sur tube Inox 310L Ø 10-11 et Ø 15-16
Fiche technique EMT/SMTS/81/35 (F.E. 5423 02 000 010)

Manuscrit reçu le 8 décembre 1983

*Achévé d'imprimer
par
le CEA, Service de Documentation, Saclay
Janvier 1984.*

DEPOT LEGAL
1er trimestre 1984

ISSN 0429 - 3460

La diffusion des rapports et bibliographies du Commissariat à l'Energie Atomique est assurée par le Service de Documentation, CEN-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, (France)

Reports and bibliographies of the Commissariat à l'Energie Atomique are available from the Service de Documentation, CEN-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, (France)

Edité par
le Service de Documentation
Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay

91191 GIF-sur-YVETTE Cédex (France)