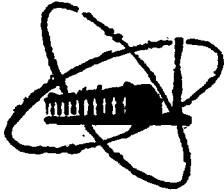


508501932

ФЭИ-1454



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

*В. С. ШУЛЕПИН*

**О влиянии способа усреднения  
групповых констант отражателя  
на Кэф реактора**

Обнинск — 1983

УДК 621.039.51

В. С. Шулепин

О влиянии способа усреднения групповых констант отражателя на  $K_{эф}$  реактора.

ФЭИ-1454. Обнинск: ФЭИ, 1983 — 8 с.

Показано влияние способа усреднения констант отражателя на  $K_{эф}$  реактора на тепловых нейтронах. При использовании билинейного способа усреднения получено более точное значение  $K_{эф}$ , чем в случае усреднения по потоку нейтронов. Выяснено, что причиной неточности  $K_{эф}$  при усреднении по потоку является завышение альbedo отражателя.

Предложен комбинированный способ расчета реактора с отражателем на основе использования обоих способов усреднения констант.

## ВВЕДЕНИЕ

В малогрупповых методах расчета реактора обычно используется усреднение констант по потоку нейтронов. Усреднение по потоку является основным методом в расчете быстрых реакторов и реакторов на тепловых нейтронах. Билинейное усреднение (усреднение констант по потоку и ценности нейтронов) не нашло широкого применения, однако данный метод представляет практический интерес, как это следует из результатов работы [1], в которой для получения констант активной зоны использовано билинейное усреднение по спектру голого реактора ( $B^2$  приближения) с последующим билинейным усреднением констант отражателя. Впоследствии было показано [2,3], что  $K_{эф}$  голого реактора не зависит от числа групп и сохраняет многогрупповое значение как при усреднении по потоку, так и при билинейном усреднении.

Большинство работ по методам усреднения констант относится к быстрым реакторам. Численные расчеты быстрых реакторов с отражателями показали почти одинаковую точность  $K_{эф}$  при усреднении по потоку нейтронов и билинейном усреднении [4], причем малогрупповые значения  $K_{эф}$  при использовании обоих способов усреднения близки к соответствующим многогрупповым величинам, если число групп, к которым сводятся многие группы, не слишком мало. По реакторам с отражателями на тепловых нейтронах нет достаточно полных данных относительно влияния способа усреднения на малогрупповое значение  $K_{эф}$ .

Кроме усреднения по потоку нейтронов и билинейного возможны и другие способы получения малогрупповых констант, например, усреднение по различным степенным комбинациям потока и ценности нейтронов.

Зависимость от способа усреднения проявляется не очень сильно при свертывании многогрупповых констант в малогрупповые в области надтепловых нейтронов. Характерные черты того или иного способа усреднения легче обнаружить при усреднении групп нейтронов с сильно различающимися свойствами, что имеет, например, место при сведении двухгруппового приближения в одну группу в случае легководного реактора.

В настоящей работе рассмотрена зависимость  $K_{эф}$  легководного реактора от способа усреднения констант отражателя в  $B^2$  приближе-

нии. Вычислены одногрупповые альbedo бесконечного отражателя при билинейном усреднении и усреднении по потоку нейтронов и оценена точность этих величин в сравнении с двухгрупповым расчетом.

### I. УСРЕДНЕНИЕ КОНСТАНТ. АЛЬБЕДО ОТРАЖАТЕЛЯ.

Известные формулы усреднения констант по потоку нейтронов и при билинейном усреднении получены умножением  $k$ -го многогруппового уравнения диффузии для потока на сопряженную функцию  $(\phi_k^+)^m$  ( $m=0$  или  $m=1$  соответственно), сложением уравнений и сравнением составляющих баланса нейтронов с соответствующими многогрупповыми значениями. В  $B^2$  приближении утечка нейтронов представляется в виде  $\mp B^2 D_k \phi_k$  (- для активной зоны, + для отражателя), где  $D_k$  и  $\phi_k$  - коэффициент диффузии и поток нейтронов в  $k$ -ом уравнении активной зоны. Свертывание многих групп в одну группу при усреднении по потоку нейтронов ( $m=0$ ) приводит к следующим формулам для одногрупповых констант отражателя или активной зоны

$$D = \frac{\sum_{k=1}^N D_k \phi_k}{\sum_{k=1}^N \phi_k}, \quad (1)$$

$$\Sigma_c = \frac{\sum_{k=1}^N (\Sigma_k \phi_k - \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_{jk} \phi_j)}{\sum_{k=1}^N \phi_k}, \quad (2)$$

$$V_f \Sigma_f = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \chi_k V_{fk} \Sigma_{jk} \phi_j}{\sum_{k=1}^N \phi_k}, \quad (3)$$

где  $N$  - число групп,  $\Sigma_k$  - сечение увода,  $\Sigma_{jk}$  - сечение замедления. Аналогичные формулы при билинейном [1] усреднении ( $m=1$ ) имеют вид

$$D = \frac{\sum_{k=1}^N D_k \phi_k^+ \phi_k^-}{\sum_{k=1}^N \phi_k^+ \phi_k^-}, \quad (4)$$

$$\Sigma_c = \frac{\sum_{k=1}^N (\Sigma_k \phi_k^+ \phi_k^- - \sum_{j=1}^{k-1} \Sigma_{jk} \phi_j^+ \phi_j^-)}{\sum_{k=1}^N \phi_k^+ \phi_k^-}, \quad (5)$$

$$V_f \Sigma_f = \frac{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N \chi_k V_{fj} \Sigma_{fj} \phi_j \phi_k^+}{\sum_{k=1}^N \phi_k \phi_k^+} \quad (6)$$

Кроме формул (1) - (3) и (4) - (6) возможны другие способы усреднения констант, возникающие в результате умножения основных и осужренных уравнений на целые или дробные степени  $\Phi$  и  $\Phi^+$ .

Влияние способов усреднения на численные значения одогрупповых констант и альbedo рассмотрим на примере бескончного плоского хогководного отражателя, усредняя двухгрупповые константы. Исходные двухгрупповые константы даны в таблице 1.

Таблица 1.

Двухгрупповые константы отражателя.

$D_1$	$D_2$	$\Sigma_1$	$\Sigma_2$	$\Sigma_{12}$
1,2	0,2	0,06	0,02	0,0595

В таблице 2 приведены одогрупповые константы отражателя, полученные при умножении уравнений для потока нейтронов на  $\Phi^n$  ( $n=1,2$ ) или на  $(\Phi^+)^m$  ( $m=0,1,2,3$ ), и соответствующие альbedo для двух значений  $B^2$ .

Таблица 2.

Усредненные константы и альbedo отражателя.

$B^2$	$n, m$	$D$	$\Sigma_c$	$\beta$
0.005	$n = 1$	0.1867	0.003924	0.8973
0.01	$n = 1$	0.1867	0.003924	0.8973
0.005	$n = 2$	0.1035	0.001098	0.9583
0.01	$n = 2$	0.1035	0.001098	0.9583
0.005	$m = 0$	0.4473	0.01518	0.7170
0.01	$m = 0$	0.4473	0.01518	0.7170
0.005	$m = 1$	0.6723	0.02858	0.5659
0.01	$m = 1$	0.6469	0.02706	0.5815
0.005	$m = 2$	1.1565	0.05429	0.3323
0.01	$m = 2$	1.0502	0.04863	0.37774
0.005	$m = 3$	2.1192	0.10351	0.0328
0.01	$m = 3$	1.8103	0.08766	0.1131

формулы усреднения, полученные при умножении двухгрупповых уравнений диффузии для потока нейтронов на  $\Phi^n$ , дают средний коэффициент диффузии  $\mathcal{D}$ , величина которого меньше коэффициента диффузии тепловой группы  $\mathcal{D}_2$  (см. таблицы 1 и 2). Из результатов, приведенных в таблицах 1 и 2 также следует, что умножение тех же уравнений на  $(\Phi^+)^m$  ( $m = 1, 2, 3$ ) приводит к формулам усреднения, согласно которым средние сечения захвата  $\Sigma_c$  превышают максимальное сечение захвата ( $\Sigma_2 = 0.02$ ) в исходных двухгрупповых константах и, кроме того, при  $m = 3$  усредненный коэффициент диффузии больше максимального группового значения ( $\mathcal{D}_1 = 1, 2$ ). Лишь при усреднении по формулам (1) - (3) ( $m = 0$ ) одногрупповые константы не противоречат исходным двухгрупповым значениям. Отметим, что с увеличением  $n$  величины  $\mathcal{D}$  и  $\Sigma_c$  уменьшаются, тогда как увеличение  $m$  приводит к возрастанию  $\mathcal{D}$  и  $\Sigma_c$ . При росте  $n$  или  $m$  альbedo  $\beta$  увеличивается или уменьшается соответственно. В случае необходимости получения промежуточных величин альbedo отражателя можно использовать дробные значения  $n$  и  $m$ .

## 2. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДВУХГРУППОВЫХ И ОДНОГРУППОВЫХ РАСЧЕТОВ

В работе [3] показано, что при усреднении констант активной зоны голго реактора в  $B^2$  приближении сохраняется многогрупповое значение  $K_{эф}$ . Основной причиной расхождения многогрупповых значений  $K_{эф}$  реактора с отражателем несомненно является неточность расчета альbedo отражателя вследствие усреднения. Сравним одногрупповые значения  $K_{эф}$  и альbedo бесконечного отражателя одномерного плоского легководного реактора при усреднении констант в  $B^2$  приближении с соответствующими величинами двухгруппового расчета, полученными решением диффузионных двухгрупповых уравнений. Рассмотрим только два способа усреднения - билинейный и по потоку нейтронов. Двухгрупповые константы отражателя, использованные в двухгрупповом расчете и при усреднении в  $B^2$  приближении даны в таблице 1. Двухгрупповые расчеты выполнены для двух решений  $B^2$  характеристического двухгруппового уравнения, равных 0.005 и 0.01. При  $B^2 = 0.005$  значение  $K_{эф}$  равно 1.269 и в результате двухгруппового расчета получена полутолщина  $d$  активной зоны, равная 13.84 см. Соответствующие величины для  $B^2 = 0.01$  равны 1.067 и 7.481 см. Среднее значение альbedo бесконечного легководного отражателя определено из двухгруппового расчета в виде

$$\beta = \frac{J_1^- + J_2^-}{J_1^+ + J_2^+}, \quad (7)$$

где

$$J^- = \frac{\phi}{4} + \frac{D}{2} \frac{d\phi}{dx},$$

$$J^+ = \frac{\phi}{4} - \frac{D}{2} \frac{d\phi}{dx}$$

односторонние токи на границе активной зоны и отражателя.

Односторонние расчеты  $K_{эф}$  выполнены с константами, найденными при усреднении по потоку нейтронов и билинейном двухгрупповых сечений (использовался один и тот же способ усреднения для активной зоны и отражателя) при значениях  $d$ , полученных в двухгрупповом расчете. При усреднении констант использованы те же значения  $B^2$ , равные 0.005 и 0.01. Результаты двухгрупповых и одногрупповых расчетов сведены в таблице 3.

Таблица 3.

$K_{эф}$  и альbedo отражателя.

$d, \text{см}$	2-х групповой расчет		Одногрупповые расчеты	
			Усреднение (1) - (3)	Усреднение (4) - (5)
	$K_{эф}$	$\beta(7)$	$K_{эф}$	$K_{эф}$
13.24	1,269	0.6027	1.345	1.263
7,481	1,067	0,6025	1.169	1.029

Усреднение констант по потоку нейтронов в  $B^2$  приближении приводит к большому завышению одногрупповых  $K_{эф}$  относительно двухгрупповых величин (см. таблицу 3). Из сравнения альbedo, полученных двухгрупповым расчетом (таблица 3) с величинами альbedo, определенными через константы отражателя, вычисленными в  $B^2$  приближении (таблица 2,  $m = 0$ ) следует, что причиной завышения одногрупповых  $K_{эф}$  является слишком большая величина альbedo отражателя.

При билинейном усреднении в  $B^2$  приближении одногрупповые  $K_{эф}$  значительно более точны по сравнению с усреднением по потоку нейтронов (см. таблицу 3). Альbedo отражателя при билинейном усреднении близко к соответствующей величине двухгруппового расчета (таблица 2,  $m = 1$  и таблица 3).

### 3. КОМБИНИРОВАННЫЙ СПОСОБ УСРЕДНЕНИЯ КОНСТАНТ ОТРАЖАТЕЛЯ.

Билинейное усреднение в  $B^2$  приближении дает односкоростное сечение захвата нейтронов в отражателе (таблица 2,  $m = 1$ ), представляющее сечение захвата тепловых нейтронов, которое является наибольшим из групповых сечений захвата. Так как односкоростное альbedo, которое в случае бесконечной пластины имеет вид

$$\beta = \frac{1 - 2\sqrt{D\Sigma_c}}{1 + 2\sqrt{D\Sigma_c}}$$

при билинейном усреднении констант отражателя близко к усредненному двухгрупповому значению (7), то отсюда следует, что билинейное усреднение позволяет с хорошей точностью вычислить  $D\Sigma_c$ . При этом коэффициент диффузии и сечение захвата в отдельности определяются с большой погрешностью. Усреднение констант по потоку нейтронов дает неточное альbedo относительно (7), однако в этом случае правильно рассчитываются потоки и скорости реакций [4], т.е. усреднение констант по потоку нейтронов позволяет правильно рассчитать  $\Sigma_c$ . Неточность альbedo отражателя при усреднении по потоку определяется в основном ошибкой в величине коэффициента диффузии. Учитывая особенности рассматриваемых способов усреднения констант, можно предложить следующий способ усреднения, позволяющий получить достаточно точные значения альbedo и среднего сечения захвата в отражателе. Усредним билинейно константы отражателя и вычислим величину  $D\Sigma_c$ . Заменив в этом произведении  $\Sigma_c$ , полученное билинейным усреднением, на  $\Sigma_c$ , вычисленное при усреднении по потоку, найдем коэффициент диффузии  $D$ . Для окончательного расчета  $K_{эф}$  реактора используем усредненные по потоку нейтронов константы активной зоны и определенные путем комбинации способов усреднения константы отражателя. При этом  $K_{эф}$  несколько изменяется по сравнению с чисто билинейным усреднением, как это видно из сравнения результатов расчета, приведенных в таблицах 3 и 4.

Таблица 4.

Комбинированные константы отражателя и  $K_{эф}$ .

$d$	$\Sigma_c$	$D$	$K_{эф}$
13,64	0.01516	1.266	1.268
7,481	0.01518	1.153	1.045



Комбинация способов усреднения позволяет улучшить  $K_{эф}$  одногруппового расчета относительно двухгрупповых значений по сравнению с чисто билинейным усреднением. Оказалось, однако, что в случае  $d = 13.84$  см одногрупповой коэффициент диффузии превышает значение  $D_1$  надтепловой группы нейтронов (см. таблицы I и 4).

Если малогрупповое приближение содержит несколько групп, то для каждой энергетической группы нейтронов в зоне отражателя можно использовать изложенную здесь процедуру расчета сечения захвата и коэффициента диффузии через групповые значения альbedo, вычисленные при билинейном усреднении констант отражателя.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Результаты расчета легководных реакторов показали существенное влияние способа усреднения констант отражателя на величину  $K_{эф}$ . В случае билинейного усреднения констант отражателя одногрупповое значение  $K_{эф}$  ближе к двухгрупповому по сравнению с усреднением по потоку нейтронов. Это является следствием хорошей точности билинейного усреднения в расчете альbedo отражателя и завышения альbedo при усреднении по потоку. Усреднение с весом потока приводит к большой погрешности коэффициента диффузии отражателя, а при билинейном усреднении имеет место значительная ошибка и в коэффициенте диффузии и в сечении захвата. Представляет интерес использование комбинированного способа усреднения, который позволяет получить достаточно точные групповые значения альbedo и констант отражателя.

Свертывание многогрупповых констант в малогрупповые усреднением по потоку нейтронов в  $B^2$  приближении может сохранить свое значение в практических расчетах, если принять во внимание погрешность диффузионного приближения относительно точного решения уравнения переноса нейтронов. Диффузионное приближение завышает утечку нейтронов из активной зоны, что приводит к занижению  $K_{эф}$  по сравнению с точным значением. С другой стороны, усреднение констант по потоку нейтронов завышает малогрупповые альbedo отражателя и, следовательно,  $K_{эф}$ . Возможна значительная компенсация погрешности диффузионного приближения при использовании небольшого числа групп в расчетах реактора с отражателем, а это обеспечивает

диффузионному приближению практическую применимость.

Автор благодарен Г.Я.Румянцеву и М.Ф.Воротынцеву за обсуждение работ и критику.

#### ЛИТЕРАТУРА.

1. Новожилов А.И., Шихов С.Б. "Атомная энергия", 1960, т. 8, вып. 3, с.209.
2. Kiphauser E. Rep. Kernforschungszentrum, Karlsruhe, 1973 KFK-1759.
3. Шулепин В.С., Шарипов В.Н. Усреднение констант  $\Sigma B^2$  приближением для расчета реактора. Препринт ФЭИ-1336, Обнинск, 1982.
4. Wade D. C., Bucher R. G. "Nucl. Sci. and Engng.", 1977, v. 64, # 2, p.517.

**Технический редактор Н. П. Герасимова.**

---

**Подписано к печати 28.07.1983 г. Т-17310. Формат 60×90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Офсетная печать. Усл. п. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,3. Тираж 78 экз.  
Цена 5 коп. ФЭИ-1454. Индекс 3624.**

---

**Отпечатано на ротапринтере ФЭИ, г. Обнинск.**

5 коп.

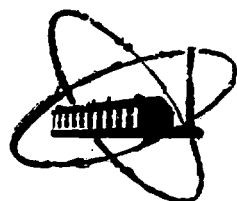
Индекс 3624

**О влиянии способа усреднения групповых констант отражателя на Кэф реактора.  
ФЭИ-1454, 1983, 1-8.**

2011040004

2

ФЭИ-1452



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

*В. С. ФЕДOTOVCKИИ*

**Колебания гидродинамически связанной системы  
стержень — концентрическая трубка**

Обнинск — 1983

УДК 533.6.013

**В. С. Федотовский.**

Колебания гидродинамически связанной системы стержень-концентрическая трубка.

ФЭИ-1452. Обнинск: ФЭИ, 1983. — 20 с.

Рассмотрены характеристики простейшей гидродинамически связанной колебательной системы, состоящей из стержня и трубки, пространство между которыми заполнено жидкостью. При изгибных колебаниях стержня и трубки жидкость в кольцевом зазоре осуществляет их гидродинамическую связь. Получены зависимости для собственных частот колебаний связанной системы от частот изолированных друг от друга колебательных подсистем без жидкости и гидродинамических инерционных коэффициентов, обусловленных жидкостью. Найдены коэффициенты динамичности системы и даны их зависимости от различных конструктивных параметров системы и свойств жидкости.

Многочисленные упругие элементы конструкций энергетического, технологического и другого оборудования, погруженные в жидкость или обтекаемые потоком жидкости, образуют связанные колебательные системы. Если в такой системе возбуждены колебания одного из элементов, то приведенная в колебательное движение жидкость, воздействуя на соседние упругие элементы, может передавать их часть энергии. При некоторых условиях может оказаться, что элементы, к которым непосредственно приложена возбуждающая сила, будут совершать весьма малые колебания, а колебания других упругих элементов конструкции будут значительными. Такое явление известно как антирезонанс.

В принципе теория связанных систем хорошо разработана и широко используется в многочисленных задачах о колебаниях механических объектов с упругими связями, а также в задачах о колебаниях в электрических цепях с индуктивной и емкостной связью [1,2]. Однако, для колебательных систем, связанных гидродинамической связью, эта теория еще не получила должного применения. Несмотря на чрезвычайную распространенность таких систем в различных областях техники.

Одним из примеров применения теории связанных колебательных систем может служить система упругих стержней или труб, погруженных в жидкость. Такие стержневые системы, являются основой конструкций атомных энергетических установок (активных зон реакторов, теплообменных аппаратов и т.п.). В работах [3,4] рассмотрены колебания нулевых стержней и с помощью ЭВМ получены решения для собственных частот колебаний в приближении потенциального течения невязкой жидкости, заполняющей межстержневое пространство. Для определения резонансных амплитуд колебаний таких связанных систем требуется, очевидно, рассмотрение и учет диссипативных процессов в вязкой жидкости и в материале элементов конструкции. Этот вопрос слабо освещен в литературе.

В настоящей работе рассмотрены динамические свойства простейшей гидродинамически связанной колебательной системы, состоящей из упругого цилиндрического стержня и окружающей его упругой цилиндрической оболочки (трубки), заполненной жидкостью. Это, пожалуй, один из немногих случаев, когда решение легко может быть получено аналитически. Кроме того, при определенных предположениях эта задача может быть полезной для исследования динамики гетерогенных сред с упругими закрепленными включениями при вибрационных воздействиях.

1. Уравнения движения связанной колебательной системы.

Будем считать, что стержень и концентрическая трубка одинаковой длины  $l$  могут совершать изгибные колебания по одной и той же форме в плоскости  $xu$ . В этом случае задача сводится к исследованию системы с двумя степенями свободы.

Пусть, например, изгибные колебания стержня и трубки описываются зависимостями

$$x_1(y, t) = c_1 f(y) \sin \omega t, \quad (1)$$

$$x_2(y, t) = c_2 f(y) \sin \omega t, \quad (2)$$

где  $x_{1,2}$  и  $y$  - координаты в направлении изгиба и вдоль оси стержня и трубки. Индексы 1 и 2 - относятся к стержню и трубке соответственно.

Если массы стержня  $M_1$  и трубки  $M_2$  на единицу длины и, соответственно, изгибные жесткости  $(EJ)_1$  и  $(EJ)_2$  заданы, то собственные частоты колебаний каждого из элементов известны

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{\int_0^l (EJ)_{1,2} [f''(y)]^2 dy}{\int_0^l M_{1,2} f^2(y) dy}} = \frac{\alpha^2}{l^2} \sqrt{\frac{(EJ)_{1,2}}{M_{1,2}}} \quad (3)$$

Здесь  $\alpha$  - коэффициент, характеризующий способ заделки концов стержня и трубки [5].

Колебания стержня и трубки под действием возбуждающих сил  $F_1(t)$  и  $F_2(t)$  описываются при этом двумя независимыми обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$M_1 \ddot{x}_1 + \omega_1^2 M_1 x_1 = F_1(t), \quad (4)$$

$$M_2 \ddot{x}_2 + \omega_2^2 M_2 x_2 = F_2(t). \quad (5)$$

Пусть теперь пространство между стержнем радиусом  $a$  и трубкой с внутренним радиусом  $b$  заполнено жидкостью плотностью  $\rho$  и кинематической вязкостью  $\nu$ .

При относительных перемещениях стержня и трубки в жидкости возникает движение, обуславливающее гидродинамическую связь элементов



системы и проявляющуюся в том, что движения элементов становятся зависимыми друг от друга.

Уравнения Лагранжа, описывающие движение связанной системы по координатам  $x_1$  и  $x_2$ , имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = F_1(t), \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{x}_2} \right) - \frac{\partial E}{\partial x_2} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = F_2(t). \quad (7)$$

Здесь  $E$  - кинетическая энергия системы,  $\Pi$  - потенциальная энергия,  $\Phi$  - диссипативная функция Рэлея.

Кинетическая энергия на единицу длины системы стержень-трубка-жидкость состоит из трех слагаемых: кинетической энергии стержня  $E_1 = M_1 \dot{x}_1^2 / 2$ , кинетической энергии трубки  $E_2 = M_2 \dot{x}_2^2 / 2$  и кинетической энергии жидкости  $E_{ж}$  в кольцевом зазоре между стержнем и трубкой. Эта кинетическая энергия определяется полем скорости жидкости  $v(r, \theta, t)$ , возникающем в результате движения стержня и трубки со скоростями  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ .

$$E_{ж} = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v^2(r, \theta, t) r dr d\theta. \quad (8)$$

Потенциальная энергия системы состоит из суммы потенциальных энергий упругой деформации стержня и трубки

$$\Pi_1 = \frac{1}{2} (EJ)_1 [f''(y)]^2 x_1^2, \quad \Pi_2 = \frac{1}{2} (EJ)_2 [f''(y)]^2 x_2^2. \quad (9)$$

Производные по соответствующим координатам  $\partial(\Pi_1 + \Pi_2) / \partial x_1$  и  $\partial(\Pi_1 + \Pi_2) / \partial x_2$  в уравнениях Лагранжа дают, очевидно, упругие члены  $\omega_1^2 M_1 x_1$  и  $\omega_2^2 M_2 x_2$ .

---

ж/ Жидкость в кольцевом зазоре принимается несжимаемой и, поэтому, ее потенциальная энергия не рассматривается. Учет сжимаемости и, следовательно, потенциальной энергии среды, необходим, например, в случае двухфазной пузырьковой среды при достаточно высоких частотах вибрационных или акустических воздействий.

В элементарном анализе будем пока пренебрегать диссипативными потерями в системе, а влияние диссипативной функции на динамические характеристики связанной колебательной системы рассмотрим ниже.

Поскольку гидродинамическая задача определения поля скорости вязкой жидкости, необходимого для расчета кинетической энергии  $E_{ж}$ , представляет значительные трудности в связи с решением уравнений Навье-Стокса, то введем некоторые ограничения и упрощающие предположения. Будем рассматривать малые колебания стержня и трубки по сравнению с величиной кольцевого зазора и радиусом стержня. Кроме того положим, что колебательное число Рейнольдса существенно больше единицы ( $Re_{\omega} = a^2 \omega / \nu \gg 1$ ). В этом случае течение жидкости почти во всей кольцевой области будет определяться силами инерции и только в пограничных слоях толщиной  $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$  - силами вязкости. Таким образом, для расчета кинетической энергии  $E_{ж}$ , можно использовать приближение потенциального обтекания. В этом случае

$$E_{ж} = -\frac{\rho}{2} \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \quad (10)$$

где  $\varphi$  - потенциал поля скорости,  $S$  - поверхность, ограничивающая область жидкости,  $n$  - нормаль к поверхности, направленная внутрь жидкости.

При движении стержня и трубки со скоростью  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = -\dot{x}_1 \cos \theta, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=b} = -\dot{x}_2 \cos \theta, \quad (11)$$

где  $\theta$  - угол между направлением движения стержня (трубки) и направлением нормали к рассматриваемой точке.

Потенциал  $\varphi$ , удовлетворяющий уравнению Лапласа  $\nabla^2 \varphi = 0$  и граничным условиям (11), имеет вид

$$\varphi(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{b^2 - a^2} \left[ (a^2 \dot{x}_1 - b^2 \dot{x}_2) r + \frac{a^2 b^2}{r} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \right]. \quad (12)$$

Производная  $\partial \varphi / \partial r$  равна

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\cos \theta}{b^2 - a^2} \left[ (a^2 \dot{x}_1 - b^2 \dot{x}_2) - \frac{a^2 b^2}{r^2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \right]. \quad (13)$$

В цилиндрических координатах формула (10) имеет вид

$$E_{ж} = -\frac{\rho}{2} \left[ \int_0^{2\pi} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} a d\theta - \int_0^{2\pi} \left( \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=b} b d\theta \right]. \quad (14)$$

Знак минус перед вторым интегралом связан с тем, что направление нормали к поверхности оболочки противоположно радиус - вектору  $r$ .

Подставляя (12), (13) в (14) и производя вычисления, получим

$$E_{ж} = \frac{\pi \rho}{2(b^2 - a^2)} \left[ (a^2 \dot{x}_1 - b^2 \dot{x}_2) + a^2 b^2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 \right]. \quad (15)$$

Взяв частные производные от кинетической энергии жидкости по скоростям стержня и трубки, запишем

$$\frac{\partial E_{ж}}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\pi \rho}{b^2 - a^2} \left[ (a^4 + a^2 b^2) \dot{x}_1 - 2 a^2 b^2 \dot{x}_2 \right], \quad (16)$$

$$\frac{\partial E_{ж}}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\pi \rho}{b^2 - a^2} \left[ (b^4 + a^2 b^2) \dot{x}_2 - 2 a^2 b^2 \dot{x}_1 \right]. \quad (17)$$

Соотношения (16) и (17) дают дополнительные обобщенные импульсы к собственным импульсам стержня и трубки. Эти дополнительные импульсы, как видно из формул, зависят как от скорости движения элемента к которому они добавляются, так и от скорости движения другого элемента. Из-за этого и осуществляется инерционная гидродинамическая связь колеблющихся элементов.

Производные по времени от (16) и (17) дают соответственно инерционные силы, действующие на стержень и трубку. Учитывая, что производные от кинетической энергии по координатам в рассматриваемом случае малых колебаний пренебрежимо малы, получим уравнение движения связанной системы стержень-трубка-жидкость<sup>\*/</sup>.

<sup>\*/</sup> При колебаниях стержня в концентрической оболочке, заполненной жидкостью, с амплитудой  $A \ll b - a$ , присоединенная масса  $M$  и, следовательно, кинетическая энергия жидкости не зависят от положения стержня относительно оси трубки, т.е. от смещения  $x$  [6].

$$\ddot{x}_1 + \frac{m}{M_1} \ddot{x}_1 - \frac{m'}{M_1} \ddot{x}_2 + \omega_1^2 x_1 = \frac{F_1(t)}{M_1}, \quad (18)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{\beta^2 m}{\alpha^2 M_2} \ddot{x}_2 - \frac{m'}{M_2} \ddot{x}_1 + \omega_2^2 x_2 = \frac{F_2(t)}{M_2}, \quad (19)$$

где введены обозначения

$$m = \pi \rho \alpha^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2 - \alpha^2}, \quad (20)$$

$$m' = 2\pi \rho \frac{\alpha^2 \beta^2}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (21)$$

Величина  $m$  здесь - присоединенная масса жидкости для цилиндрического стержня; ее инерционное действие проявляется полностью, когда движение стержня происходит в неподвижной трубке.

Величину  $m\beta^2/\alpha^2$ , стоящую сомножителем перед  $\ddot{x}_2$  в уравнении (19), можно интерпретировать как присоединенную массу жидкости для трубки при неподвижном стержне.

Величина  $m'$  - также является эффективной гидродинамической массой, как  $m$  и  $m\beta^2/\alpha^2$ ; ее инерционное действие оказывает взаимное влияние на трубку и на стержень.

При движении стержня и трубки в одном направлении при синфазных колебаниях системы инерционное действие массы  $m'$  ослабляет действие присоединенной массы  $m$  на стержень и действие массы  $m\beta^2/\alpha^2$  на трубку. При равных ускорениях  $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 = \ddot{x}$  жидкость в кольцевой области оказывается "замороженной" и ее инерционное действие на стержень будет определяться величиной

$$m - m' = \pi \rho \alpha^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} - 2\pi \rho \frac{\alpha^2 \beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} = -\pi \rho \alpha^2, \quad (22)$$

равной, с обратным знаком, массе жидкости вытесненной стержнем. Это означает, что на стержень в этом случае действует выталкивающая сила Архимеда, обусловленная градиентом давления в движущейся с ускорением  $\ddot{x}$  жидкости

$$F = -\pi \alpha^2 \frac{dP}{dx} = \pi \rho \alpha^2 \ddot{x}. \quad (23)$$

Знак минус в (22) связан с тем, что, в отличие от обычной инерционной силы, выталкивающая сила действует в направлении ускорения жидкости.

Инерционное действие жидкости на трубку обусловлено величиной

$$\pi \rho b^3 \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - 2\pi \rho \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} = \pi \rho b^3, \quad (24)$$

равной массе жидкости в кольцевом слое и массе жидкости в бесконечной стержнем.

Если ускорения стержня и трубки противоположны по направлению, то инерционное действие  $m'$  усиливает действие присоединенной массы  $m$  на стержень, а массы  $m b^2/a^2$  на трубку. В этом случае следует ожидать более низкую собственную частоту, чем в случае синфазных колебаний.

Рассмотрим свойства колебательной системы, описываемой системой уравнений (18) и (19).

Разыскивая решение системы уравнений (18) и (19) при  $F_1(t) = F_2(t) = 0$  в виде  $x_1 = c_1 \sin(\omega t)$ ;  $x_2 = c_2 \sin \omega t$ , получим

$$c_1 \left( \omega_1^2 - \omega^2 - \frac{m}{M_1} \omega^2 \right) + c_2 \frac{m'}{M_1} \omega^2 = 0, \quad (25)$$

$$c_1 \frac{m'}{M_2} \omega^2 + c_2 \left( \omega_2^2 - \omega^2 - \frac{b^2 m}{a^2 M_2} \omega^2 \right) = 0. \quad (26)$$

Приравняв определитель системы нулю

$$D = \begin{vmatrix} \left( \omega_1^2 - \omega^2 - \frac{m}{M_1} \omega^2 \right) & \frac{m'}{M_1} \omega^2 \\ \frac{m'}{M_2} \omega^2 & \left( \omega_2^2 - \omega^2 - \frac{b^2 m}{a^2 M_2} \omega^2 \right) \end{vmatrix} = 0, \quad (27)$$

получим частотное уравнение системы

$$\omega^4 (\mu_1 \mu_2 - \mu'_1 \mu'_2) - \omega^2 (\mu_1 \omega_2^2 + \mu_2 \omega_1^2) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0, \quad (28)$$

где введены обозначения

$$\mu_1 = 1 + \frac{m}{M_1}, \quad \mu_2 = 1 + \frac{b^2 m}{a^2 M_2}, \quad \mu'_1 = \frac{m'}{M_1}, \quad \mu'_2 = \frac{m'}{M_2}. \quad (29)$$

Решение биквадратного частотного уравнения (28) дает собственные частоты колебаний связанной колебательной системы

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{(M_1 \omega_2^2 + M_2 \omega_1^2) \pm \sqrt{(M_1 \omega_2^2 + M_2 \omega_1^2)^2 - 4(M_1 M_2 - m_1' m_2') \omega_1^2 \omega_2^2}}{2(M_1 M_2 - m_1' m_2')} \quad (30)$$

Итак, рассматриваемая колебательная система с двумя степенями свободы  $X_1$  и  $X_2$  имеет, как и следовало ожидать, две собственные частоты  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , зависящие от собственных частот  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  изолированных элементов, а также от соотношения эффективных гидродинамических масс  $m$ ,  $m'$  и собственных масс элементов  $M_1$  и  $M_2$ .

Если к одному из элементов связанной системы приложена гармоническая возбуждающая сила  $F_0 \sin \omega t$ , то при совпадении частоты  $\omega$  с одной из собственных частот  $\Omega_1$  или  $\Omega_2$  в системе возникнут резонансные колебания. Если же частота возбуждающей силы имеет промежуточное значение между  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , то имеет место одно из характерных свойств связанных систем - антирезонанс.

## 2. Динамические характеристики связанной системы.

Для определения амплитудно-частотной характеристики системы рассмотрим решение системы (18), (19), где в правой части одного из них зададим возбуждающую силу  $F = F_0 \sin \omega t$ .

Пусть возбуждающая нагрузка приложена к стержню ( $F_1 = F_0 \sin \omega t$ ,  $F_2 = 0$ ). Тогда уравнения для амплитуд принимают вид

$$c_1 (\omega_1^2 - \omega^2 - \frac{m}{M_2} \omega^2) + c_2 \frac{m'}{M_1} \omega^2 = \frac{F_0}{M_1}, \quad (31)$$

$$c_1 \frac{m'}{M_2} \omega^2 + c_2 (\omega_2^2 - \omega^2 - \frac{\beta^2 m}{\alpha^2 M_2} \omega^2) = 0. \quad (32)$$

Решения системы (31), (32) есть

$$c_1 = D_1/D, \quad c_2 = D_2/D, \quad (33)$$

где

$$D_1 = \begin{vmatrix} \frac{F_0}{M_1} & \frac{m'}{M_1} \omega^2 \\ 0 & (\omega_2^2 - \omega^2 - \frac{\beta^2 m}{\alpha^2 M_2} \omega^2) \end{vmatrix} = \frac{F_0}{M_1} (\omega_2^2 - \omega^2 - \frac{\beta^2 m}{\alpha^2 M_2} \omega^2), \quad (34)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} (\omega_f^2 - \omega^2 - \frac{m}{M_1} \omega^2) & \frac{F_0}{M_1} \\ \frac{m'}{M_2} \omega^2 & 0 \end{vmatrix} = - \frac{F_0 m'}{M_1 M_2} \omega^2. \quad (35)$$

Учитывая, что при статическом нагружении стержня равномерно распределенной силой  $F_0$  на единицу длины его отклонение будет равно  $C_1(\omega=0) = \frac{F_0}{M_1 \omega_1^2}$ , запишем коэффициент динамичности стержня в виде

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{C_1(\omega)}{C_1(\omega=0)} = \frac{(\omega_2^2 - \omega^2 m_2) \omega_1^2}{\omega^4 (m_1 m_2 - m'_1 m'_2) - \omega^2 (m_1 \omega_2^2 + m_2 \omega_1^2) + \omega_1^2 \omega_2^2}. \quad (36)$$

откуда видно, что при частоте возбуждающей силы, удовлетворяющей условию

$$\omega^2 = \frac{\omega_2^2}{m_2} = \Omega_{*1}^2 \quad (37)$$

коэффициент динамичности обращается в нуль, т.е. имеет место антирезонанс стержня. В этом случае стержень остается неподвижным несмотря на приложенную к нему возбуждающую силу. При этом трубка, на которую не действует внешняя сила, совершает колебания с некоторой амплитудой  $C_2(\Omega_{*1})$ , определяемой второй формулой (33).

Аналогично (36) введем коэффициент динамичности для трубки исходя из того, что если бы статическая нагрузка была приложена к трубке, то ее смещение было бы  $C_2(\omega=0) = F_0 / M_2 \omega_2^2$ . Таким образом, для трубки имеем

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{C_2(\omega)}{C_2(\omega=0)} = - \frac{m'_1 \omega_2^2 \omega^2}{\omega^4 (m_1 m_2 - m'_1 m'_2) - \omega^2 (m_1 \omega_2^2 + m_2 \omega_1^2) + \omega_1^2 \omega_2^2} \quad (38)$$

В формулах (36) и (38)и далее верхний индекс обозначает номер элемента, к которому приложена возбуждающая нагрузка (1 - стержень, 2 - трубка).

Аналогично (36) и (38) легко получить коэффициенты динамичности для стержня и трубки, когда возбуждающая нагрузка приложена к трубке ( $F_1 = 0$ ,  $F_2 = F_0 \sin \omega t$ ).

$$\lambda_1^{(2)} = - \frac{\mu_1 \frac{M_1}{M_2} \omega_1^2 \omega^2}{\omega^4 (\mu_1 \mu_2 - \mu_1' \mu_2') - \omega^2 (\mu_1 \omega_2^2 + \mu_2 \omega_1^2) + \omega_1^2 \omega_2^2} \quad (39)$$

$$\lambda_2^{(2)} = \frac{(\omega_1^2 - \mu_1 \omega^2) \omega_2^2}{\omega^4 (\mu_1 \mu_2 - \mu_1' \mu_2') - \omega^2 (\mu_1 \omega_2^2 + \mu_2 \omega_1^2) + \omega_1^2 \omega_2^2} \quad (40)$$

Из формулы (40) видно, что в этом случае антирезонанс возможен для трубки при частоте возбуждающей силы, удовлетворяющей условию

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2}{\mu_1} = \Omega_{*1}^2. \quad (41)$$

Из сравнения формул (41) и (37) видно, что, в общем случае, частоты антирезонансов трубки и стержня не совпадают.

Таким образом, рассмотренная система, связанная инерционной гидродинамической связью, имеет типичные для связанных систем динамические характеристики с тремя характерными особенностями - собственными частотами  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и частотой антирезонанса  $\Omega_{*1}$  или  $\Omega_{*2}$ .

Для иллюстрации динамических характеристик связанной системы рассмотрим случай, когда массы стержня, трубки и присоединенная масса равны  $M_1 = M_2 = M = M$ . Кроме того, ограничимся случаем, когда отношение радиусов трубки и стержня равно двум. При таких условиях получается, что плотность жидкости, заполняющей кольцевой зазор, будет в шесть раз меньше плотности материала сплошного стержня. Такая система вполне может соответствовать реальной конструкции (например, трубки Фильда). Собственные частоты такой системы (при  $\mu_1 = 2$ ,  $\mu_2 = 5$ ,  $\mu_1' = \mu_2' = 8/5$ ) будут равны (введем безразмерные величины  $Z_{1,2} = (\Omega_{1,2}/\omega_2)^2$  и  $z_0 = (\omega_1/\omega_2)^2$ ).

$$Z_{1,2} = \frac{(2+5z_0) \pm \sqrt{(2+5z_0)^2 - 30z_0}}{15} \quad (42)$$

Частоты антирезонансов  $Z_{*1,2} = (\Omega_{*1,2}/\omega_2)^2$  при этом будут

$$Z_{*1} = 1/5, \quad Z_{*2} = (1/2)z_0. \quad (43)$$



На рис. I показана зависимость собственных частот связанной системы (42) от отношения собственных частот изолированных элементов системы. (аналог известной диаграммы Вина). Сплошными линиями показана зависимость  $Z(x)$ , а пунктирными - зависимости для частот антирезонансов (43). Из рисунка видно, что наличие жидкости в зазоре между стержнем и трубкой приводит к тому, что собственные частоты связанной системы уменьшаются из-за инерционного действия жидкости, причем, даже в случае равных собственных частот изолированных друг от друга элементов, инерционная связь приводит к тому, что система становится двухчастотной и собственные частоты при  $x_0 = (\omega_1/\omega_2)^2 = 1$  отличаются приблизительно в два раза. Другими словами, для равночастотных элементов, гидродинамическая инерционная связь приводит к тому, что квадрат одной из собственных частот уменьшается в 1,32 раза, а другой - в 5,7 раза.

При произвольной частоте возбуждающей силы колебания каждого из элементов системы будут происходить с некоторой амплитудой, определяемой коэффициентами динамичности (36), (37) или (39), (40). При  $x_0 = (\omega_1/\omega_2)^2 = 1$  и перечисленных выше параметрах, коэффициенты динамичности для стержня и трубки имеют вид

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{1 - 5x}{7,5x^2 - 7x + 1}, \quad (44)$$

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{-(8/5)x}{7,5x^2 - 7x + 1}, \quad (45)$$

$$\lambda_2^{(2)} = \frac{1 - 2x}{7,5x^2 - 7x + 1}, \quad (46)$$

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{-2x}{7,5x^2 - 7x + 1}, \quad (47)$$

где  $x = (\omega/\omega_2)^2$ .

Зависимости (44)-(47) показаны на рис. 8, откуда видно, что при антирезонансе стержня ( $\lambda_1^{(1)} = 0$  при  $x = 1/5$ ) коэффициент динамичности трубки отличается от нуля ( $\lambda_2^{(1)} \approx 3$ ). Аналогичным образом, при антирезонансе трубки ( $\lambda_2^{(2)} = 0$  при  $x = 1/2$ ), коэффициент динамичности стержня отличен от нуля и равен  $\lambda_1^{(2)} \approx 1,6$ .

Итак, нами рассмотрена простейшая колебательная система с инерционной гидродинамической связью, обусловленной невязкой жидкостью

в кольцевом зазоре. Использование модели невязкой жидкости, а также предположение об отсутствии конструкционного демпфирования, приводит к тому, что при возбуждении колебаний системы на собственных частотах коэффициенты динамичности обращаются в бесконечность. В реальных системах, как известно, такие особенности не возникают из-за различных диссипативных процессов и проявлений нелинейности.

### 3. Влияние диссипативных потерь на амплитудно-частотные характеристики.

В рассматриваемой колебательной системе стержень-трубка-жидкость существуют диссипативные потери, связанные с вязким внутренним трением в материале стержня и трубки при изгибных деформациях. Для стержневых и трубчатых элементов сила вязкого трения на единицу длины равна  $\eta J \partial^5 x / \partial y^4 \partial t$ , где  $\eta$  - коэффициент внутреннего трения материала,  $J$  - момент инерции сечения стержня или трубки.

Если, например, форма колебаний стержня и трубки имеет вид  $x_{1,2}(y) = C_{1,2} \sin(\pi y / \ell)$ , что соответствует шарнирному закреплению концов, то диссипативную функцию Рэлея для системы можно записать в виде

$$\Phi = \frac{\pi^4}{2 \ell^4} (\eta_1 J_1 \dot{x}_1^2 + \eta_2 J_2 \dot{x}_2^2). \quad (48)$$

При этом силы трения, связанные с потерями на внутреннее трение в материалах элементов, будут равны

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} = \frac{\pi^4}{\ell^4} \eta_1 J_1 \dot{x}_1 = \xi_1 \dot{x}_1, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_2} = \frac{\pi^4}{\ell^4} \eta_2 J_2 \dot{x}_2 = \xi_2 \dot{x}_2. \quad (49)$$

Известно, однако, что для металлических конструкций внутреннее трение в материале имеет небольшое значение и обычно во много раз перекрывается потерями на трение в местах сочленения элементов - так называемым конструкционным гистерезисом. Надежные оценки конструкционного демпфирования в сложных механических системах можно получить только из эксперимента; лишь в простейших соединениях с четкой схемой контакта элементов конструкционное демпфирование может быть рассчитано [7].

Другим источником диссипативных потерь в рассматриваемой задаче является вязкая жидкость в кольцевом зазоре. В работе [8] показано, что при поперечных колебаниях круглого цилиндрического стержня в жесткой концентрической оболочке, заполненной вязкой жидкостью, средняя за период колебания скорость диссипации энергии равна

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\pi \rho a (2\nu\omega)^{1/2} \left[ \frac{b^4 + a^3 b}{(b^2 - a^2)^2} \right] u_0^2, \quad (50)$$

где  $\rho$ ,  $\nu$  - плотность и кинематическая вязкость жидкости,  $u_0$  - амплитудное значение виброскорости стержня. Поскольку диссипативные потери в жидкости связаны с полем относительной скорости, возникающем в результате относительного движения стержня и трубки, то диссипативную функцию Рэлея, равную половине мгновенной скорости диссипации энергии в жидкости, запишем в виде

$$\Phi = \pi \rho a (2\nu\omega)^{1/2} \left[ \frac{b^4 + a^3 b}{(b^2 - a^2)^2} \right] (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2. \quad (51)$$

Дифференцируя (51) по скоростям стержня  $\dot{x}_1$  и трубки  $\dot{x}_2$ , получим силы вязкого трения (с точностью до знака), действующие на стержень и трубку

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_1} = \xi (\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \quad (52)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{x}_2} = \xi (\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \quad (53)$$

где  $\xi = 2\pi \rho a (2\nu\omega)^{1/2} \left[ \frac{b^4 + a^3 b}{(b^2 - a^2)^2} \right]$  - коэффициент гидродинамического демпфирования [8].

Если на всех видах потерь на трение учесть только гидродинамическое демпфирование, то уравнения колебаний связанной системы имеют вид

$$m_1 \ddot{x}_1 - m'_1 \ddot{x}_2 + \frac{\xi}{M_1} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_1^2 x_1 = \frac{F_1}{M_1}, \quad (54)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - m'_2 \ddot{x}_1 + \frac{\xi}{M_2} (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_2^2 x_2 = \frac{F_2}{M_2}. \quad (55)$$

где коэффициенты  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m'_1$ ,  $m'_2$  имеют вид (29).

Расчет вынужденных колебаний связанной системы при наличии демпфирования удобно вести при помощи комплексных параметров и стандартных схем [9]. Любую механическую систему с двумя степенями свободы всегда можно привести к схеме, показанной на рис. 2. Элементы колебательной системы с координатами  $x_1$  и  $x_2$  находятся под действием сил, комплексные амплитуды которых равны  $F_1$  и  $F_2$ .

Эти безмассовые элементы опираются на три звена, обладающие динамическими жесткостями  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  и соединены как показано на рисунке. Звенья  $K_1$ ,  $K_2$  связаны с неподвижной системой отсчета, а  $K_3$  - представляет собой звено связи. Каждое из звеньев  $K_1$  и  $K_2$  характеризуется набором из трех элементов - собственных масс  $M_1$  и  $M_2$ , присоединенных масс  $m$  и  $m\delta^2/a^2$ , и жесткостей  $\omega_1^2 M_1$  и  $\omega_2^2 M_2$  (для учета конструкционного демпфирования следует ввести также и элементы сухого или вязкого трения). Звено связи  $K_3$  состоит из двух элементов - гидродинамической инерционности -  $m'$  и вязкого трения  $\xi$  (при необходимости в это звено может быть введен элемент жесткости)\*.

Уравнение колебаний какого-либо звена имеет вид

$$M\ddot{x} + \xi\dot{x} + \omega_0^2 Mx = Fe^{i\omega t}.$$

Отыскивая решение в виде  $x = Xe^{i\omega t}$ , получим связь между комплексной амплитудой силы  $F$ , комплексным смещением  $X$  и комплексной динамической жесткостью звена  $K$

$$KX = F,$$

где

$$K = -M\omega^2 + i\omega\xi + \omega_0^2 M.$$

Таким образом, комплексные динамические жесткости звеньев будут равны

$$K_1 = -(M_1 + m)\omega^2 + M_1\omega_1^2,$$

$$K_2 = -(M_2 + m\frac{\delta^2}{a^2})\omega^2 + M_2\omega_2^2,$$

$$K_3 = m'\omega^2 + i\omega\xi.$$

Можно ввести парциальную динамическую жесткость для каждого из элементов системы (жесткость координаты  $x_1$  или  $x_2$ ). Парциальная динамическая жесткость координаты  $x_1$  равна динамической жесткости

---

\*/ Элементы жесткости и трения показаны на рис. 2 в виде пружины и демпфера с продольной пластиной; элемент присоединенной массы показан в виде поперечной пластины в емкости.

системы при  $x_2 = 0$ . При этом имеем

$$F_1 = K_{x_1} X_1, \quad (56)$$

где  $X_1$  — комплексная амплитуда колебаний первого элемента. Из схемы видно, что при  $x_2 = 0$

$$F_1 = (K_1 + K_3) X_1, \quad (57)$$

т.е.

$$K_{x_1} = K_1 + K_3. \quad (58)$$

Аналогично парциальная жесткость координаты  $x_2$  будет

$$K_{x_2} = K_2 + K_3. \quad (59)$$

Таким образом, при действии на стержень силы  $F_1$  ( $F_2 = 0$ ), комплексные амплитуды и динамические жесткости связаны соотношениями

$$K_1 X_1 + K_3 (X_1 - X_2) = F_1, \quad (60)$$

$$K_2 X_2 + K_3 (X_2 - X_1) = 0, \quad (61)$$

или через парциальные жесткости

$$K_{x_1} X_1 - K_3 X_2 = F_1, \quad (62)$$

$$K_{x_2} X_2 - K_3 X_1 = 0. \quad (63)$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$X_1^{(1)} = \frac{F_1 K_{x_1}}{K_{x_1} K_{x_2} - K_3^2}, \quad (64) \quad X_2^{(1)} = \frac{F_1 K_3}{K_{x_1} K_{x_2} - K_3^2}, \quad (65)$$

Если на трубку действует сила  $F_2$ , а  $F_1 = 0$ , то

$$X_1^{(2)} = \frac{F_2 K_3}{K_{x_1} K_{x_2} - K_3^2}, \quad (66) \quad X_2^{(2)} = \frac{F_2 K_{x_1}}{K_{x_1} K_{x_2} - K_3^2}. \quad (67)$$

В отличие от амплитудно-частотных характеристик системы без трения (36), (38), (39) и (40), полученные характеристики (64)–(67) дают конечные амплитуды колебаний при резонансах.

#### Заключительные замечания.

Может оказаться, что под действием достаточно больших возбуждающих сил, приложенных к стержню или трубке, их амплитуды, рассчитанные по формулам (64)–(67), будут соизмеримы с величиной зазора между стержнем и трубкой. В этом случае задача о связанных колебаниях системы становится нелинейной. Присоединенная масса и коэффициент гидродинамического демпфирования в этом случае являются функциями амплитуд колебаний. Некоторые вопросы нелинейности гидродинамической инерционности и демпфирования рассмотрены в работе [6].

Кроме того, при больших колебаниях возможны соударения элементов; при этом виброударную систему с распределенными параметрами уже нельзя свести к простейшей схеме с двумя степенями свободы.

И, наконец, последнее замечание. В настоящей работе рассмотрены связанные колебания системы в одном направлении  $X$ . В действительности каждый из элементов, обладая осевой симметрией, имеет две степени свободы, соответствующие двум взаимно перпендикулярным направлениям  $X$  и  $Z$ . При этом гидродинамически связанная система должна иметь четыре собственные частоты.

Следует отметить, однако, что связанность системы по взаимно перпендикулярным координатам обусловлена нелинейными гидродинамическими силами, отличающимися от тех сил, которые обуславливают связанность колебаний в одном направлении. Эти силы возникают при смещении элемента друг относительно друга в направлении, нормальном их движению, и пропорциональны квадрату относительной скорости. Для возбуждения поперечных колебаний системы необходимо достигнуть определенного критического уровня колебаний в направлении действия внешних возбуждающих сил  $F_1$  или  $F_2$ .

Таким образом, при достаточно малых продольных колебаниях в системе с трением поперечные колебания могут не возбуждаться. Полученные в настоящей работе динамические характеристики связанной системы относятся именно к этому случаю. Для описания колебаний системы в более общем случае, с возбуждением поперечных степеней свободы, необходимы дополнительные исследования гидродинамических сил в эксцентрической системе стержень-трубка.

Литература.

1. Ден Гартог Дж. Механические колебания. М., Физматгиз, 1980, 580 с.
2. Теория линейных электрических цепей. М., "Высшая школа", 1973. авт.: Б.П.Афанасьев, О.Е.Гольдин, И.Г.Кляцкин, Г.Я.Нинес. 592с.
3. Chung H., Chen S.S. Vibration of group of circular cylinders in a confined fluid. Trans. ASME, ser. E, 1977, v. 44, n2, p. 213 - 217.
4. Вальес Н.Г. Колебания системы стержней в жидкости. Проблемы прочности, 1978, № II, с. 62-63.
5. Прочность, Устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т, т. 3 под редакцией И.А.Биргера, Я.Г.Пановко. "Машиностроение". М., 1968, 567 с.
6. Федотовский В.С. О гидродинамической инерционности и демпфировании колебаний стержневых элементов и оболочек в ограниченных объемах, заполненных жидкостью. Препринт ФЭИ-962, Обнинск, 1979, 12 с.
7. Пановко Я.Г. Проблемы теории конструкционного демпфирования. Труды третьего совещания по основным проблемам теории машин и механизмов. Сб. "Динамика машин". М., Машгиз, 1963.
8. Сиявский В.Ф., Федотовский В.С., Кухтин А.Б. О колебаниях цилиндра в вязкой жидкости. "Прикладная механика", 1980, т.16, № II, с.62-67.
9. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М., ГИИЛ, 1950, 344 с.

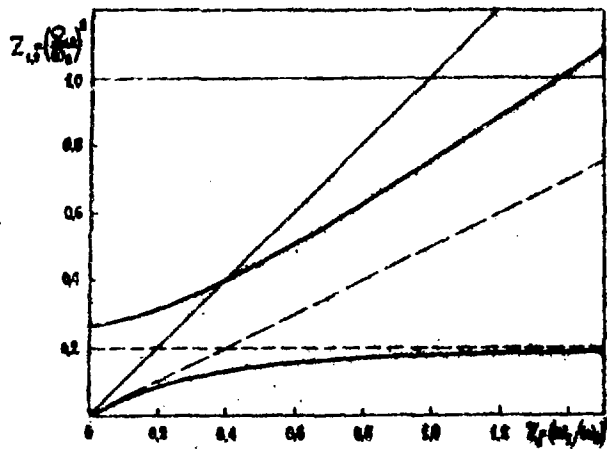


Рис.1. Зависимость собственных частот связанной системы от отношения собственных частот изолированных элементов

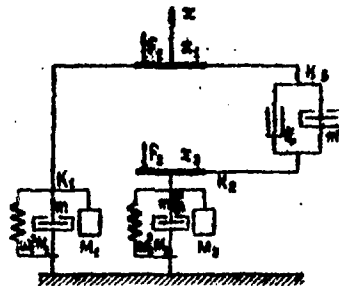


Рис.2. Эквивалентная схема гидродинамически связанной колебательной системы стержень-концентрическая трубка



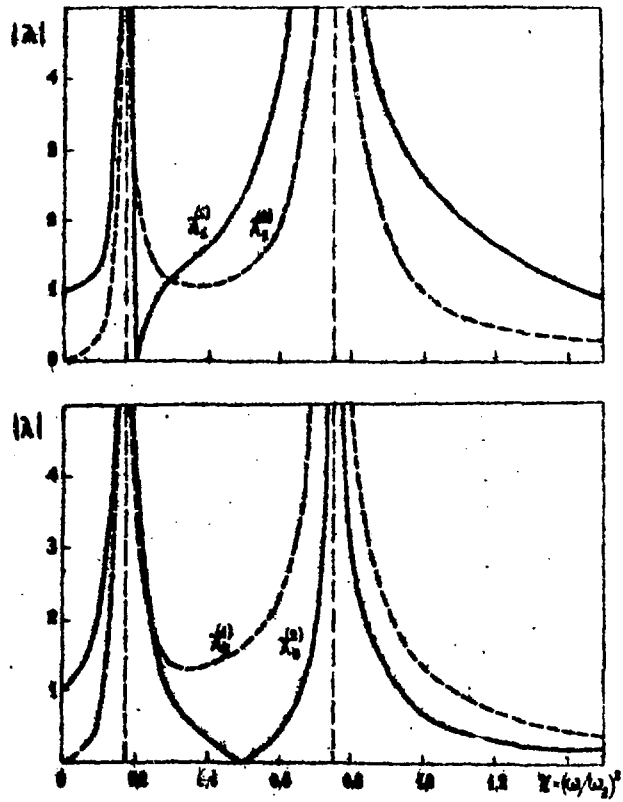


Рис.3. Зависимости коэффициентов динамичности стержня и трубки, образующих гидродинамически связанную систему:  
а - возбуждающая сила приложена к стержню,  
б - возбуждающая сила приложена к трубке.

**Технический редактор Н. П. Герасимова.**

---

Подписано к печати 26.04.1983 г. Т-08987. Формат 60×90 1/16.

Офсетная печать. Усл. п. л. 1,3. Уч.-изд. л. 0,9. Тираж 88 экз.

Цена 14 коп. ФЭИ-1452. Индекс 3624.

---

Отпечатано на ротаприте ФЭИ, г. Обнинск.

**14 коп.**

**Индекс 3624**

**Колебания гидродинамически связанной системы стержень-  
концентрическая трубка.**

**ФЭИ-1452, 1983, 1-20.**