

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ
ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

БФИ-649(39)-83

Л.Г.МЕЛКСУМЯН, С.В.ТЕР-АНТОНЯН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ
В ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ С РЕНТГЕНСЭМУЛЬСИОННЫХ
ПЛЕНОК

ԵՐԵՎԱՆ 1983 ԵՐԵՎԱՆ

EDM-649-(39)-83

L.G.MELKUMIAN, S.V.TER-ANTONIAN

USE OF THE MAXIMUM PROBABILITY METHOD
IN DATA PROCESSING FROM X-RAY-EMULSION FILMS

A method of maximum probability for the restoration of parameters of an electron-photon cascade on X-ray films is proposed. The technique and accuracies of the restoration of energy and spatial parameters of cascades, simulated by Monte Carlo method, are described. The maximum probability method allows to obtain the maximum accuracies of parameters estimates. The results may be used in data processing of emulsion experiments of large areas (Pamir etc.) using automatic scanning on a PDS type machine.

Yerevan Physics Institute

Yerevan 1983

ЕФИ-649(39)-83

УДК 519.283

Л. Г. МЕЛКУМЯН, С. В. ТЕР-АНТОНЯН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ
В ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ С РЕНТГЕНЭМУЛЬСИОННЫХ
ПЛЕНОК

В работе предложен метод максимального правдоподобия для восстановления параметров электронно-фотонного каскада на рентгеновских пленках. Описана методика и точности восстановления энергии и пространственных параметров каскадов, моделированных методом Монте-Карло. Метод максимального правдоподобия позволяет получать максимально возможные точности оценки параметров. Результаты могут быть использованы при обработке данных эмульсионных экспериментов больших площадей ("Памир" и др.) с применением автоматического сканирования на машине типа PDS.

Ереванский физический институт

Ереван 1983

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЕФИ-649(39)-83

Л.Г.МЕЛКУМЯН, С.В.ТЕР-АНТОНЯН

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ
В ОБРАБОТКЕ ИНФОРМАЦИИ С РЕНТГЕНОЭМУЛЬСИОННЫХ
ПЛЕНОК

Ереван 1983

© *Ереванский физический институт*, 1983г.

Изучение ядерных взаимодействий при экстремально высоких энергиях в последние годы значительно интенсифицировалось в связи с применением рентгеноэмulsionной (РЭ) методики [1-5], базирующейся на результатах осевого приближения каскадной теории [1,2]. Успешность метода РЭК в значительной степени зависит от точности восстановления пространственно-энергетических параметров источника каскадных ливней (γ -квант, электрон) по пятнам почернения в рентгеновской пленке. Съём информации с РЭК в настоящее время можно условно разделить на два типа: интегральный метод, основанный на фотометрировании пятен потемнения круговыми диафрагмами разных радиусов [2,4] и дифференциальный метод, основанный на автоматическом сканировании локальных плотностей пятен почернения микроденситометрами с высоким пространственным разрешением [6]. В работе [6] показано, что дифференциальный метод анализа почернений является наиболее эффективным и перспективным при изучении γ -семейств. Восстановление энергии γ -кванта в этой работе проводится методом моментов по матрице плотностей, полученной с различными шагами сканирования. Однако отметим, что представленные

результаты незначительно увеличили точность восстановления параметров источника пятен, что, вероятно, связано с процедурой частичного интегрирования внутри уровня одинаковой плотности.

В данной работе впервые предлагается использовать метод максимального правдоподобия для восстановления пространственно-энергетических параметров источника γ - семейств.

Хотя метод максимального правдоподобия часто приводит к более сложным вычислениям, чем метод моментов, наиболее правдоподобные (в статистическом смысле) оценки оказываются предпочтительнее, особенно в случаях малых выборок. Кроме того, при достаточно общих условиях уравнения правдоподобия имеют решение, дающие состоятельные, асимптотически нормальные и асимптотически эффективные оценки [7].

I. Постановка задачи

В системе координат $X_I Y_I$ на плоскости пленки РЭК имеется пятно почернения, вызванное γ - квантом с энергией E_0 , зенитным углом θ и азимутальным углом φ (рис.1). Точка генерации каскадного ливня (Z_0) расположена в слое поглотителя на расстоянии $t_0 = Z_0 / \cos \theta$ от центра пятна ($x_0 y_0$). Рентгеноэмульсионная пленка сканируется автоматическим микроденситометром с шагом сканирования Δx , $\Delta y = \Delta x$ и определяются локальные плотности почернения ρ_{ij} внутри прямоугольных ячеек ($\Delta x, \Delta y$) с координатами центров x_i, y_j ($i, j = 1, \dots, N$). Размеры раstra сканирования при разбиении его на N^2 элементарных площадок соответственно равны $x_p = \Delta x N$, $y_p = \Delta y N$.

Задача заключается в восстановлении параметров γ - кванта ($E, \theta, \varphi, x_0 y_0$) по матрице плотностей почернения $\{\rho(x_i, y_j)\}$, если задана функция распределения генеральной совокупности

$f(p(x, y)/E_0, \theta, \varphi, x_0, y_0) dp$. Определение функции распределения $f(p/\bar{n})$, где $\bar{n} = \bar{n}(E_0, \theta, \varphi, x_0, y_0)$, проводится по априорной информации, основанной на осевом приближении каскадной теории [1, 2].

Известно, что проекция каскадного ливня (рис.1) на рентгеновской пленке при отсутствии флуктуаций и заданном векторе параметров аппроксимируется эллипсами почернения равных плотностей (рис.2а), которые в произвольной системе координат описываются каноническими уравнениями

$$R_K^2 = x^2 + y^2 \cos^2 \theta, \quad (1)$$

где

$$x = (x_1 - x_0) \cos \varphi + (y_1 - y_0) \sin \varphi \quad (2)$$

$$y = -(x_1 - x_0) \sin \varphi + (y_1 - y_0) \cos \varphi$$

x_0, y_0 - координаты центра эллипса, а $R_K = g(\bar{\rho}_K)$ - малые полуоси эллипсов, которые определяются из осевого приближения каскадной теории:

$$Lg(\rho_K) = 2Lg\left(\frac{E_0}{10}\right) + \sum_{i=1}^6 a_i(t) \left\{ Lg\left(R_K \frac{E_0}{10}\right) \right\}^{i-1}. \quad (3)$$

Величины $a_i(t)$ - табулированные постоянные, зависящие от глубины генерации каскадного ливня (t). Энергия (E_0) γ -кванта в выражении (3) измеряется в единицах ТэВ. Средняя плотность почернения $\bar{\rho}$ представляет собой среднее число эквивалентных электронов, прошедших через единичную площадку рентгеновской пленки. Флуктуации числа электронов в ячейках предполагаются распределенными по закону Пуассона [6]:

$$f(n, x, y/\bar{n}) = \exp(-\bar{n}) \bar{n}^n / n!, \quad (4)$$

где $\bar{n} = \bar{\rho} \cdot S$, а $S = \Delta x \cdot \Delta y$

Область изменения $\rho = \frac{n}{S}$ определяется из кривой почернения рентгеновских пленок и по аналогии с [6] соответственно равна $2 \cdot 10^{-3} = \rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ мкм}^{-2}$. Кроме этого, матрица плотностей содержит в себе флуктуации фона, которые не зависят от вектора параметров и распределены по Пуассону аналогично (4), со средним значением $\bar{\rho}_{\phi} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ мкм}^{-2}$.

Таким образом, на основе приведенной априорной информации, необходимо решить обратную задачу - восстановление вектора параметров $\vec{\eta} = \vec{\eta}(E, \theta, \psi, X_0, Y_0)$ по известной из эксперимента матрице плотностей $\{\rho_{ij}\}$ для набора X_i, Y_j ($i, j = 1, \dots, N$)

2. Метод максимального правдоподобия

Определение пространственно-энергетических параметров ξ - кванта по матрице плотностей семейства является классической проблемой теории многопараметрического оценивания. Рассмотрим метод максимального правдоподобия в применении к данной задаче.

На основе априорных данных о структуре пятна почернения определим функцию правдоподобия следующим образом:

$$\Phi(\{\rho_{ij}\} / \vec{\eta}) = \prod_{k_0=1}^N f_0(n_{k_0} \leq n_{\min} / \vec{\eta}) \prod_{k_1=1}^{N_1} f_1(n_{k_1} / \vec{\eta}) \prod_{k_2=1}^{N_2} f_2(n_{k_2} \geq n_{\max} / \vec{\eta}), \quad (5)$$

где $N_0 + N_1 + N_2 = N \cdot N$.

f_0 и f_2 - вероятности того, что в ячейке k_0 (k_2), соответствующей координатам X_i, Y_j , число эквивалентных электронов меньше (больше) порогового значения n_{\min} (n_{\max}) при данном значении $\vec{\eta}$. N_0 и (N_2) - число ячеек из матрицы плотностей, удовлетворяющих этим условиям.

В случае применимости пуассоновского распределения (4) со-

ответственно имеем:

$$f_0(n_{k_0}/\bar{\eta}) = \sum_{n=0}^{n_{\min}} \exp(-\bar{\eta}_{k_0}) \frac{\bar{\eta}_{k_0}^n}{n!}, \quad (6)$$

$$f_2(n_{k_2}/\bar{\eta}) = 1 - \sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \exp(-\bar{\eta}_{k_2}) \frac{\bar{\eta}_{k_2}^n}{n!}. \quad (7)$$

Применяя к (5) стандартные процедуры метода максимального правдоподобия [7] получим оценки компонент вектора $\bar{\eta}$ из системы уравнений

$$\partial L / \partial \eta_i = \partial (\ln \Phi) / \partial \eta_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 5). \quad (8)$$

Оценка (8) максимального правдоподобия имеет асимптотически нормальное распределение со средними значениями $\langle \eta_i \rangle$ и дисперсией

$$\sigma_{\eta_i}^2 = -1/M \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i^2} \right\} \approx -1 / \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial \eta_i^2} \right\} \eta_i = \langle \eta_i \rangle, \quad (9)$$

где M – оператор математического ожидания.

Система уравнений (8), решениями которых являются точечные оценки параметров $\langle \eta_i \rangle \cong E_0, \theta, \varphi, \chi_0, \psi_0$, является почти во всех случаях системой нелинейных уравнений, аналитически не разрешимых относительно параметров η_i . Обычно этим и обуславливается сложность применения метода максимального правдоподобия при решении многопараметрических задач. Для примера рассмотрим эксперимент с "идеальной" рентгеновской пленкой, т.е. $\rho_{\min} = 0$, $\rho_{\max} = \infty$, $n_{\phi} = 0$. Тогда на основе (I-4) и (8) имеем систему нелинейных уравнений правдоподобия

$$\frac{\partial L}{\partial (E/I_0)} = \sum_i^N \sum_j^N [\bar{P}_{ij} \{2 + c \cdot \varepsilon_{ij}\} \cdot \left(\frac{P_{ij}}{\bar{P}_{ij}} - 1 \right)] = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_i^N \sum_j^N \left[\bar{P}_{ij} \frac{Y_i^2}{R_{ij}^2} \varepsilon_{ij} \left(\frac{P_{ij}}{\bar{P}_{ij}} - 1 \right) \right] = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \sum_i^N \sum_j^N \left[\bar{P}_{ij} \frac{X_i Y_i}{R_{ij}^2} \varepsilon_{ij} \left(\frac{P_{ij}}{\bar{P}_{ij}} - 1 \right) \right] = 0,$$

где $\varepsilon_{ij} = \sum_{\ell=2}^6 b_{\ell}(t) (\ell-1) \left\{ c \cdot \ln \left(R_{ij} \frac{E_0}{10} \right) \right\}^{\ell-2}$, $b_{\ell} = a_{\ell}(t) L_n 10$.

Решение уравнений (9) возможно только лишь на ЭВМ, обладающей большой памятью для запоминания матриц координат $\{X_i\}$, $\{Y_j\}$ и плотностей $\{P_{ij}\}$.

Отметим, что для ЭВМ БЭСМ-6 это доступно подпрограмме MINSQ (ОБСП ДУБНА [8]), минимизирующей сумму квадратов функций

$$\left(\frac{\partial L}{\partial E_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right)^2 = \Delta(E_0, \theta, \varphi) \quad (11)$$

для определения искомых точечных оценок E_0, θ, φ .

3. Результаты численных расчетов

В настоящее время для апробирования методов обработки информации с РЭК получила распространение методика моделирования растров рентгеновских пленок с пятном почернения при фиксированных параметрах источника [2,6]. Аналогично работе [6] нами был разработан генератор растров, моделирующий методом Монте-Карло матрицу плотностей $\{P_{ij}\}$ (рис.2). На рис.2 (а, б, с) для примера приведены пятна почернения, вызванные γ -квантом энергии 10 ТэВ при глубине генерации ливня 10 радиационных единиц для под большим зенитным углом падения. Рис.2а соответствует отсутствию флуктуаций и фона рентгеновской пленки. Рис.2б, с) — с учетом флуктуаций (б) и фона (с) пленки. Текстовые величины $\square, A, B, C, D, Ж$ соответствуют граничным плотностям меньше, 0,2, .04 (ФОН), .1, .2, .5, > .5 мкм^{-2} . Шаг сканирова-

ния $\Delta x = \Delta y = 10$ мкм. Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6. Генератором псевдослучайных чисел, равномерно распределенных в интервале $[0, 1]$, использовалась подпрограмма RNDM (-I) из работы [8]. По моделированной матрице плотностей $\{\rho_{ij}\}$, полученной для фиксированных $N, \Delta x = \Delta y, E_0, \theta, \psi, x_0, y_0, n_{\phi}, n_{\min}, n_{\max}$, минимизировалось выражение

$$\Delta(E_0, \theta, \psi, x_0, y_0) = -L_n \Phi(\{\rho_{ij}\} / \vec{n}) \quad (12)$$

и определялись точечные оценки $E'_0, \theta', \psi', x'_0, y'_0$, с соответствующими значениями стандартных отклонений $\sigma_{E_0}, \sigma_{\theta}, \dots, \sigma_{y_0}$. Минимизация проводилась посредством подпрограммы FUMILI - вход LIKE LM [8].

Для увеличения скорости счета на ЭВМ при минимизации выражения (12) пуассоновские распределения в функции правдоподобия (5) при $n \geq 10$ можно заменить на соответствующие нормальные распределения ($\sigma^2 = \bar{n}$). Это позволит использовать быстродействующую подпрограмму NORMCØ [8] в генераторе растров. Дифференциальный (4) и интегральные спектры плотностей (6) и (7) соответственно преобразуются к виду:

$$f_1(\bar{n}_{k_1} / \vec{n}) = n(\bar{n}_{k_1}, \sqrt{\bar{n}_{k_1}}) \quad (13)$$

$$f_0(\bar{n}_{k_0} / \vec{n}) \approx \int_0^{n_{\min}} n(\bar{n}_{k_0}, \sqrt{\bar{n}_{k_0}}) dn_{k_0} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} \left(\frac{n_{\min} - \bar{n}_{k_0}}{\sqrt{2\bar{n}_{k_0}}} \right)) \quad (14)$$

$$f_1(\bar{n}_{k_2} / \vec{n}) \approx 1 - \int_0^{n_{\max}} n(\bar{n}_{k_2}, \sqrt{\bar{n}_{k_2}}) dn_{k_2} = 1 - \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} \left(\frac{n_{\max} - \bar{n}_{k_2}}{\sqrt{2\bar{n}_{k_2}}} \right)) \quad (15)$$

где $n(\bar{n}, \sqrt{\bar{n}})$ - плотность нормального распределения со средним значением \bar{n} и среднеквадратным отклонением $\sqrt{\bar{n}}$.

$e z f(z)$ - функция ошибок.

Восстановление параметров моделированных растров проводилось для дискретного ряда энергий γ - квантов ($E_0 = 2; 5; 10; 20; 50; 100; 200; 500; 1000$ ТэВ) и размеров ячеек соответственно $\Delta x = \Delta y = 10, 20$ мкм, с дополнительным условием $t = d / \cos \theta = 10$ рад.ед.длины Рб, где d - соответствующая толщина поглотителей РЭК. Последнее условие вводилось для простоты вычислений и экономии времени счета на ЭВМ. Граничные значения параметров \bar{n}_ϕ , n_{\min} , n_{\max} в функции правдоподобия (5) выбирались из работы [6] и соответственно равны $\rho_\phi = 0.4 \text{ мкм}^{-2}$, $\rho_{\min} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ мкм}^{-2}$, $\rho_{\max} = 0.5 \text{ мкм}^{-2}$, где $\rho = n / (\Delta x \cdot \Delta y)$. Функции распределения плотности электронов при данных значениях E, R определялись согласно выражениям (4), (6), (7) с учетом плотности фона рентгеновской пленки $\bar{n} = \bar{n}(ER) + \bar{n}_\phi$ (распределение фона предполагается пуассоновским).

Основные результаты численных расчетов приведены на рис. 3-7. На рис. 3 показана точность оценки E' энергии E γ -кванта. Там же приведены результаты из работы [6], полученные методом моментов. Видно значительное улучшение точности восстановления энергии и независимость точности от энергии γ - кванта.

На рис. 4 показана зависимость оценки энергии 10 ТэВ при различных зенитных углах θ (рад) падения γ - кванта на рентгеновскую пленку. На рис. 5 приведено распределение относительной точности (θ'/θ) восстановления зенитного угла θ . На рис. 6 дано аналогичное распределение для азимутальных углов (ψ'/ψ). Точность восстановления центра пятна потемнения ($X_0 = Y_0 = 20$ мкм) приведена на рис. 7.

Из рис.3-7 следует, что метод максимального правдоподобия при дифференциальном сканировании рентгеноэмульсионных пленок значительно увеличивает точность восстановления параметров источника. При этом расчетное значение точности восстановления согласно (9) совпадает с реальной точностью оценок. Это указывает на асимптотическую нормальность и асимптотическую несмещенность оценок. Кроме того, нами исследовано влияние флуктуаций электромагнитного каскадного ливня и фона пленки на точность оценки параметров. Получено, что функция правдоподобия (5) дает несмещенные оценки даже при 2-х кратном увеличении флуктуаций.

Отметим, что предложенный метод можно применить и в случае наложенных друг на друга (перекрывающихся) пятен почернения, вызванных несколькими γ - квантами. Для этой цели в функции правдоподобия (5) необходимо провести замену

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{n_{\gamma}} \bar{n}(E_i, R_i) + \bar{n}_{\phi} .$$

Соответственно число неизвестных параметров в процедуре минимизации (12) будет равно $5 n_{\gamma}$.

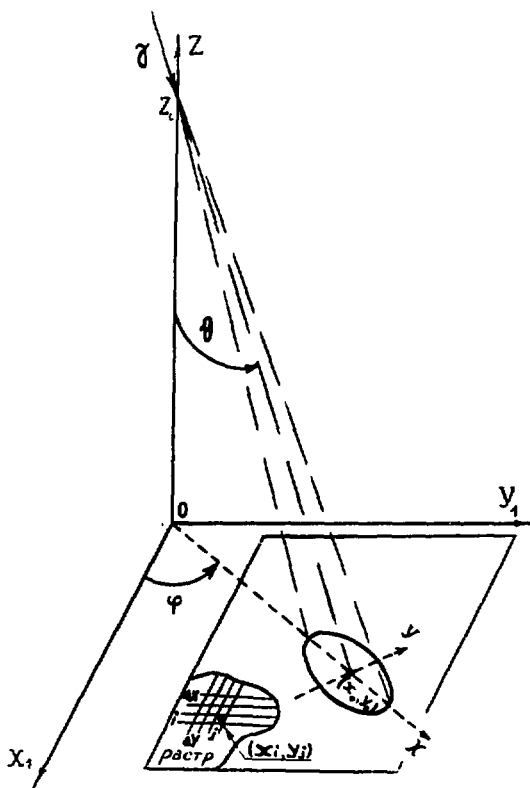


Рис. 1

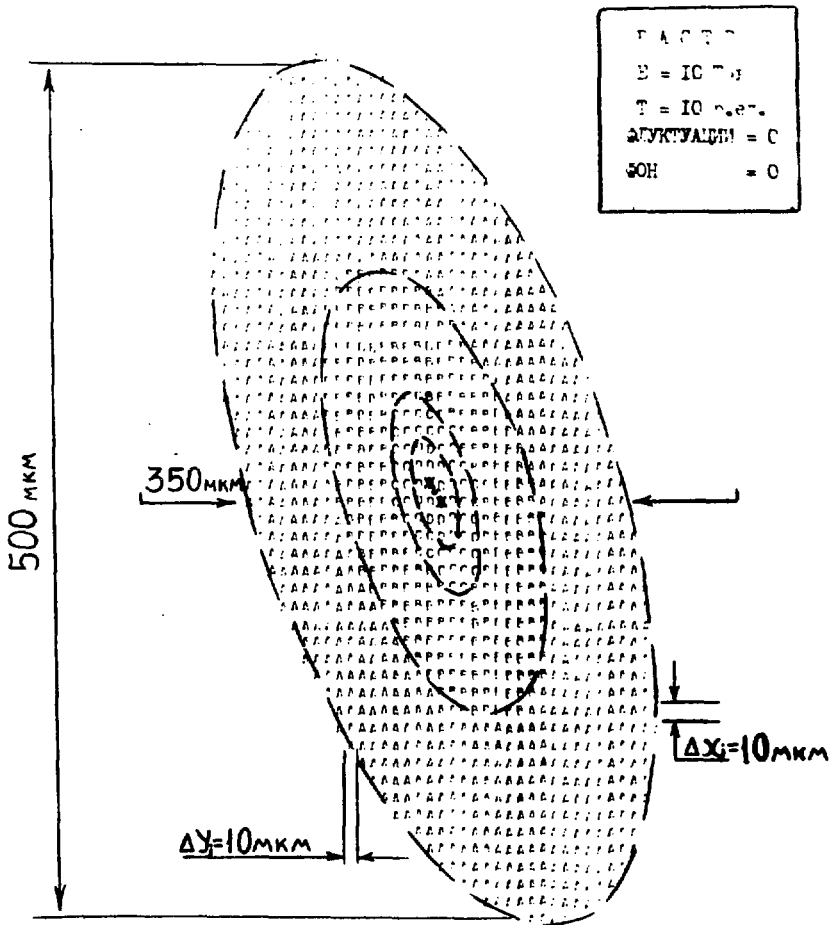
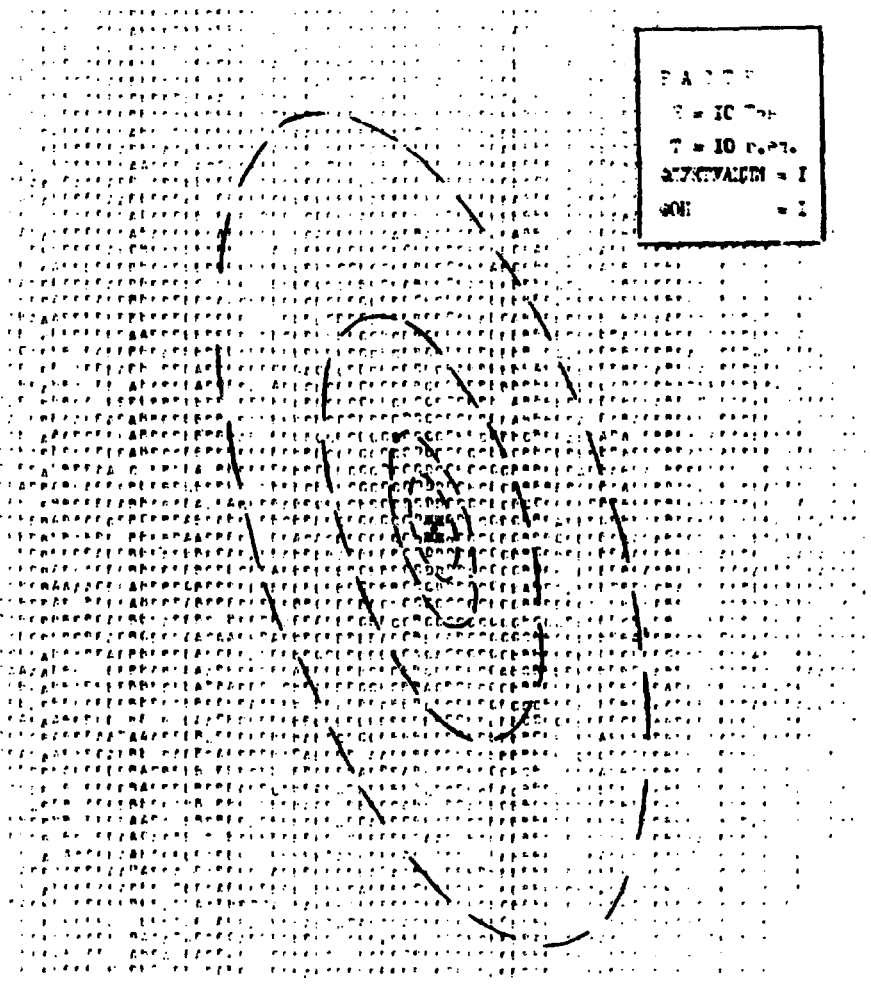
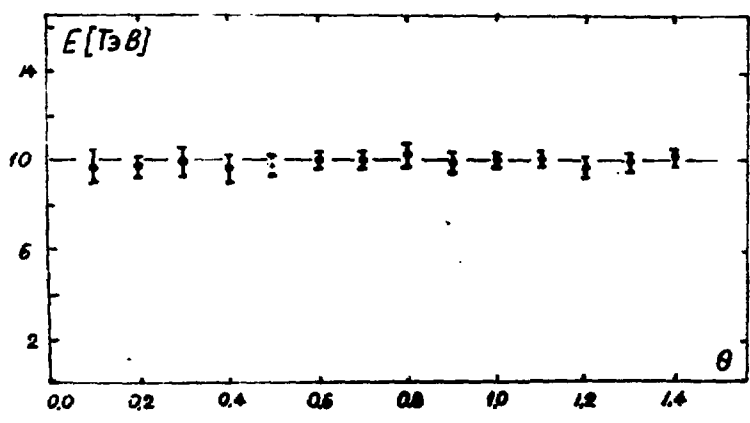
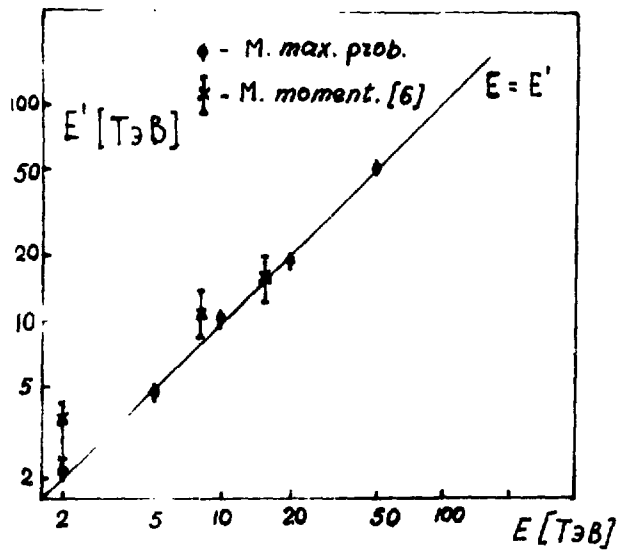


Рис. 10

P A C T S
L = IC Tel.
T = IC n.en.
SIVKIVAIDET = I
GCH = 0



P A T E N T
U. S. P. O.
T = 10 P. 27.
SERIAL = 1
NO. = 2



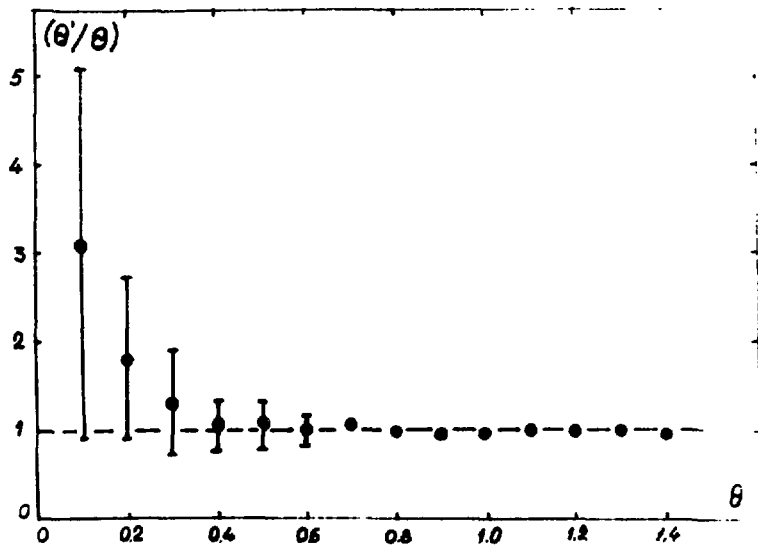


Рис. 5

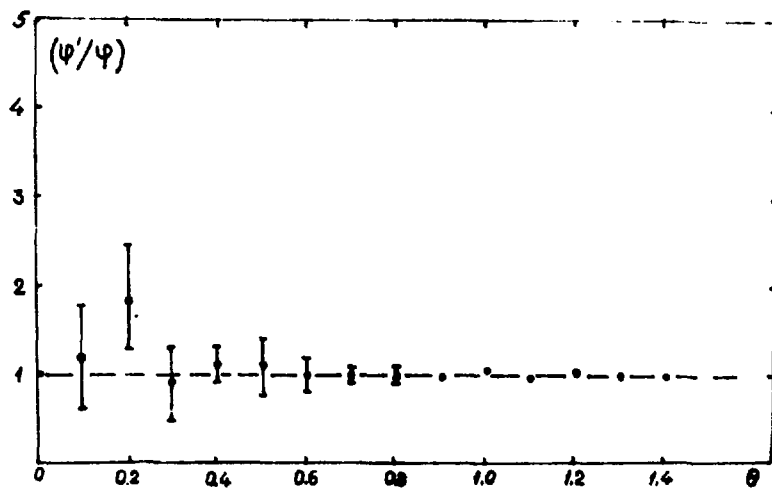
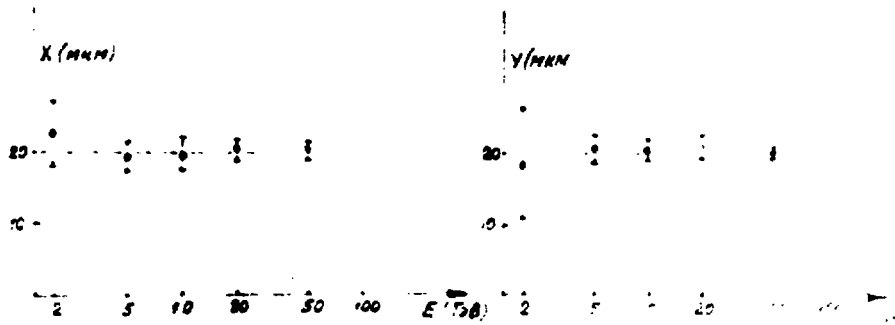


Рис. 6б



PAC.7

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.1 Проекция каскадного ливня на плоскость пленки.

Рис.2 Пятна почернения, вызванные γ - квантом с энергией 10 ТэВ при $t = 10$ рад.ед.длины под зенитным углом 1 рад:

- а) без флуктуаций и фона ;
- б) с учетом флуктуаций без фона ;
- с) с учетом флуктуаций и фона .

Текстовые величины \square , А, В, С, Д, Ж соответствуют граничным плотностям $< .02, .04, .1, .2, .5, > .5 \text{ мкм}^{-2}$
Шаг сканирования 10 мкм.

Рис.3 Точность оценки E' энергии E γ - кванта.

Рис.4 Зависимость оценки энергии 10 ТэВ при различных зенитных углах θ (рад) падения γ - кванта на рентгеновскую пленку .

Рис.5 Распределение относительной точности (θ'/θ) восстановления зенитного угла θ .

Рис.6 Распределение относительной точности (ψ'/ψ) восстановления азимутального угла.

Рис.7 Точность восстановления центра пятна потемнения $(X_0=Y_0=20 \text{ мкм})$.

✳ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aranasenko A.V., Baradzei L.T., Kanevskaya E.A. et al.
The spectrum of γ -rays in the energy range 10^{11} to 10^{13} eV at an atmospheric depth of 200 g/cm^2 , and pion generation in high-energy nucleon interactions. *Canad. Journ. of Phys.* 1968 vol.46, p.701.
2. Барадзей Л.Т., Каневская Е.А., Смородин Ю.А. Труды ФИАН, 1970, т.46, с.200.
3. Барадзей Л.Т., Каневская Е.А., Смородин Ю.А., Соловьев М.В. Уточненный метод фотометрического определения энергии электронно-фотонных каскадов в эмульсионных камерах с рентгеновскими пленками. Препринт ФИАН № 65, Москва, 1971.
4. Содружество "Памир". Энергетические характеристики семейств χ квантов. Изв.АН СССР, сер.физ.1980, т 44, № 3, с.450-453.
Содружество "Памир". Пространственные характеристики семейств χ - квантов. Изв.АН СССР сер.физ. 1980, т.44, № 3, с.454-456.
5. Nosino K., Kuramatu S., Niu K., et al. Proc. 14-th Intern. Cosmic Ray Conf., 1975, vol.7, p.2330.
6. Асатиани Т.Л., Генина Л.Э., Мелкумян Л.Г., Смородин Ю.А. Моделирование обработки электронно-фотонных каскадов на пленках рентгеноэмульсионных камер методом сканирования. Изв. АН СССР, сер.физ. 1980, т.44, № 3, с.466-468.
7. Худсон Д. Статистика для физиков. М: Мир, 1967, с.242.
8. Мазный Г.Л. Программирование на БЭСМ-6 в системе "Дубна" М.: Наука, 1978.

Рукопись поступила 8 апреля 1983 г.

Редактор Л.П.Мукаян

Тех.редактор А.С.Абрамян

Заказ 250

ВФ-06002

Тираж 270

Препринт ЕФИ

Формат издания 60x84/16

Подписано к печати 22/III-83г. I, 0 уч.-изд. л. Ц. 15 к.

Издано Отделом научно-технической информации
Ереванского физического института, Ереван 36, Маркарян 2

индекс 3624