

# institut de physique nucléaire

LABORATOIRE ASSOCIÉ A L'IN2P3



UNIVERSITÉ PARIS-SUD  
I.P.N. BP n° 1 - 91061 ORSAY

FR8403370

IPNO-DRE/84-22

BEAM PREPARATION SYSTEM AND BEAM EMITTANCE,  
THE ESSENTIAL FOR HIGH-RESOLUTION MAGNETIC  
SPECTROSCOPY.

Pierre ROUSSEL

*Cet article est la version bilingue quelque peu étendue (matrices cibles)  
de la publication IPNO-GEPL 83-10 : "SPECTROMETRIE HAUTE RESOLUTION -  
COMMENT LES QUALITES DE L'ANALYSEUR, CELLES DU SPECTROMETRE ET L'EMITTANCE  
MACHINE CONTRIBUENT-ILS AUX PERFORMANCES OBTENUES".*

SPECTROMETRIE HAUTE RESOLUTION  
COMMENT LES QUALITES DE L'ANALYSEUR, CELLES DU SPECTROMETRE  
ET L'EMITTANCE MACHINE CONTRIBUENT-ILS AUX  
PERFORMANCES OBTENUES

Résumé

Par des calculs au premier ordre établis pour un système achromatique A) ( $\delta x_F / \delta E_i = 0$ ) ou optimisé 0) ( $x_F$  minimum) on montre que la résolution finale obtenue dans le plan focal (éventuellement déplacé du facteur cinématique) du spectromètre ne dépend que de l'émission de la machine (exclusivement géométrique pour A), également énergétique pour 0)) et de la surface polaire utilisable de l'analyseur, à l'exclusion donc des propriétés du spectromètre. On insiste sur la nécessaire prise en compte de ce résultat dont l'utilisation est évidemment limitée par l'intervention des termes d'ordre supérieur ou d'éléments d'une autre nature (taille de cible, teneur au faisceau, etc...).

Abstract

Using first order calculations derived for an achromatic system A) ( $\delta x_F / \delta E_i = 0$ ) or an optimised system 0) ( $x_F$  minima), it is shown that the final resolution measured in the focal plane (possibly kinematically displaced) of the spectrometer, depends only on the emittance of the accelerator and of the efficient area of the analyser, exclusive of the properties of the spectrometer. The use of this result is only limited by higher order terms in the calculation, or by considerations out of the scope of this article, like target effects etc...

## Introduction

L'utilisation d'un spectromètre magnétique est le plus souvent couplée à celle d'un analyseur qui prépare le faisceau fourni par un accélérateur. L'analyseur et le système de transport de faisceau établissent sur la cible des corrélations entre les différents paramètres des particules incidentes : position, angle, énergie. La possibilité de principe d'éliminer ainsi par compensation les effets de dispersion en énergie du faisceau et les effets de cible a été depuis longtemps mise en évidence (1) (2) et concrètement mise en oeuvre pour les ions légers (3) comme pour les ions lourds (4). Le formalisme matriciel a été rendu opérationnel (5) et utilisé en incluant les effets de cible (3) (6) (7). Le but de cet article est de mettre clairement en évidence les éléments physiques qui déterminent au premier ordre la résolution ultime qu'on peut espérer obtenir.

## I - LES ELEMENTS DU CALCUL

### 1. Notations

Les notations sont celles du code TRANSPORT (5) réduites aux seules variables du plan horizontal. Une trajectoire est définie en chaque point par  $x$  et  $\theta$ , les écarts linéaire et angulaire à la trajectoire centrale et par  $\delta$ , l'écart relatif en rigidité magnétique (les unités les plus utilisées\* sont respectivement le cm, le mr, le %  $\Delta p/p$ ).

Le vecteur qui définit la trajectoire en un point F ( $\delta = \delta_F$ ) se déduit du vecteur en un point I ( $\delta = \delta_I$ ) par une relation matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_F \\ \theta_F \\ \delta_F \end{pmatrix} = R_{IF} \begin{pmatrix} x_I \\ \theta_I \\ \delta_I \end{pmatrix}$$

avec, pour les cas qui nous intéressent (voir Ref. (5))\*\* :

$$R_{IF} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{26} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

\* Il est en fait plus cohérent d'utiliser le mètre, le radian, le nombre sans dimension

\*\* La troisième dimension ici est la sixième du code transport (2 dimensions verticales et 1 longitudinale sont manquantes).

## Introduction

The use of a magnetic spectrometer is most often coupled to that of an analysing magnet (analyser) acting on the beam produced by an accelerator. The combination of the analyser with the beam transport system produces correlations between the position, the angle and the energy of the incident particles when impinging on the target. The principle possibility to eliminate by such a compensation the effect of beam energy spread and target effects have long been known (1) (2) and actually been used for light ions (3) and heavy ions (4). The matrix formalism has been made versatile (5) and has included target effects (3) (6) (7). The aim of the present article is to clearly point out the physical elements responsible for the ultimate resolution within a first order approach.

### I - THE BASES OF THE DERIVATION

#### 1. Notations

The notations of the code TRANSPORT (5) are used, but reduced to the only variables related to the horizontal plane. At any specified position, a trajectory is represented by a vector whose components are the position  $x$ , the angle  $\theta$ , the momentum  $p$ , with respect to the reference trajectory i.e. the central path. The usual units are cm., mr., %  $\Delta p/p$  though it would be more coherent to use  $m$ ,  $r$ , dimensionless unit.

The vector defining a given trajectory at a point F ( $s = s_F$ ) can be deduced of that at a point I ( $s = s_I$ ) through the matrix equation :

$$\begin{pmatrix} x_F \\ \theta_F \\ \delta_F \end{pmatrix} = R_{IF} \begin{pmatrix} x_I \\ \theta_I \\ \delta_I \end{pmatrix}$$

For the cases of interest and using the notations of Ref. (5) :

$$R_{IF} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{16} \\ R_{21} & R_{22} & R_{26} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_{11}$  is the linear magnification (M) ;  $R_{22}$  is the angular magnification ;  
 $R_{21} = -1/f$  is the inverse of the focal length

$R_{11}$  est le grandissement linéaire (G),  $R_{22}$  est le grandissement angulaire,  $R_{21} = -1/f$  est l'inverse de la distance focale.

$$\left| \begin{matrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{matrix} \right| = R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21} = 1 \text{ (Théorème de Liouville).}$$

Si  $R_{12}$  est nul, il y a focalisation en F, F est le point conjugué de I et on a alors  $R_{22} = 1/R_{11} = 1/G$ .

Si la portion de trajet IF ne contient pas d'éléments dispersifs (dipôles), les deux termes  $R_{1\delta}$  (dispersion  $D = (x/\delta)$ ) et  $R_{2\delta}$  (dispersion angulaire  $D' = (\theta/\delta)$ ) sont nuls.

## 2. Pouvoir d'analyse d'un système dispersif

La matrice qui conduit du point objet au plan focal d'un système dispersif (analyseur, spectromètre) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} G & 0 & D \\ P & 1/G & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un objet monochromatique de taille  $x_1$  donne dans le plan focal une tache de dimension  $G.x_1$ . Un objet de même taille mais d'énergie légèrement différente ( $\delta_i$ ) pourra être distingué si  $D.\delta_i \geq G.x_1$ . Pour  $x_1$  donné,  $\delta$  est d'autant plus petit que  $D/G$  est grand. C'est ce paramètre ( $Q = D/G$ ) qui mesurera donc la qualité du système d'analyse.

Q n'est généré qu'à l'intérieur des dipôles et plus précisément, on a (voir Fig. 2) :

$$Q = \frac{D}{G} = \frac{R_{1\delta}}{R_{11}} = \int_{IF} -R_{12} d\alpha = \int_{IF} -R_{12} \frac{ds}{R} = \int_{IF} -\frac{dS}{R} \quad (1)$$

\*

Les relations générales sont :

$$R_{1\delta} = R_{12} \int_{IF} R_{11} d\alpha - R_{11} \int_{IF} R_{12} d\alpha ; \quad R_{2\delta} = R_{22} \int_{IF} R_{11} d\alpha - R_{21} \int_{IF} R_{12} d\alpha$$

mais on a utilisé ici le fait que  $R_{12} = 0$  (focalisation).

$$\|R_{IF}\| = R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21} = 1 \quad (\text{Liouville theorem}).$$

If  $R_{12}$  is zero, an imaging occurs in F which is hence conjugate to I and then  $R_{22} = 1/R_{11} = 1/M$ . If no (dipole) dispersing elements are present between I and F, then both  $R_{1\theta}$  (dispersion  $D = (x/\delta)$ ) and  $R_{2\theta}$  (angular dispersion  $D' = (\theta/\delta)$ ) are zero.

## 2. Resolving power of a dispersing system

The matrix connecting a given point to its conjugate in a dispersive system (analyser or spectrometer) can be written.

$$\begin{pmatrix} M & 0 & D \\ P & 1/M & D' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A monochromatic object of size  $x_i$  produces in the focal plane a spot of size  $Mx_i$ . The same object but with a slightly different energy  $\delta_i$  will be resolved if  $D\delta_i \geq Mx_i$ . Given  $x_i$ ,  $\delta_i$  is as small as  $D/M$  is large. It is this parameter ( $Q = D/M$ ) which measures the quality of the dispersing system for these conditions of use.

Actually,  $Q$  is generated only in dipoles since, see Fig. 2.

$$Q = D/M = R_{1\theta}/R_{11} = \int_{IF} -R_{12} d\alpha = \int_{IF} -R_{12} \frac{ds}{R} = \int_{IF} -\frac{dS}{R} \quad (1)$$

where account has been taken that  $R_{12} = 0$  and where  $d\alpha$  is the bending angle corresponding to the central path length  $ds$  and hence  $dS$  is the corresponding area element (dashed region in Fig. 2) between the central path and the path leaving I with a unit angle.

$dS$  has been written for the algebraic measure of  $dS$  i.e. positive above the axis or negative under it. In the same way,  $R$  and  $d\alpha$  have to be counted positive for a bend to the right or negative if to the left. This is very important if dipoles with opposite bending or/and with intermediate focus are used.

où  $d\alpha$  est la rotation correspondant à l'élément  $ds$  de trajectoire et  $dS$  est donc l'élément de surface comprise entre la trajectoire qui part de I avec l'angle unité et la trajectoire centrale (voir figure).

On a noté  $\bar{dS}$  pour la mesure algébrique de  $dS$ , positif au-dessus de l'axe, négatif en dessous. De la même façon,  $R$  et  $d\alpha$  doivent être comptés positif pour une rotation à droite, et négatif pour une rotation à gauche. Ceci est très important si on combine des dipôles avec des rotations opposées ou/et avec une focalisation intermédiaire.

Il est clair que c'est la valeur absolue de  $D/G$  qui caractérise le pouvoir d'analyse, par commodité, on gardera ou on ne gardera pas  $Q$  avec son signe.

### 3. Matrices cible

Pour des raisons de simplicité et en accord avec la réalité de nombreuses expériences à énergie élevée, on va se limiter ici aux observations à petit angle pour lesquelles la correction des effets d'épaisseur par les rotations de cibles ont des effets négligeables (diffusion élastique) ou nuls (correction conduisant à des angles irréalistes et donc non pratiquée) (1).

Même pour une réaction donnée, une cible fait correspondre à un rayon incident une infinité de rayons sortants. Elle ne peut donc être simulée par une matrice. On peut cependant utiliser le calcul matriciel à condition de fractionner le problème et d'utiliser deux matrices différentes, (4), l'une pour les réglages du spectromètre, l'autre pour les réglages de tout ce qui précède. Une matrice unique est proposée dans les références (6) et (7), mais c'est au prix de l'addition de trois éléments au vecteur représentant l'événement et donc de trois colonnes à cette matrice. Pour la première matrice qui concerne le trajet depuis la cible jusqu'au détecteur du spectromètre, on utilise la matrice ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & K & 1 \end{pmatrix}$$

qui permet de déterminer l'emplacement du plan focal déplacé correspondant. Pour la seconde, et ayant fixé la position du détecteur par la procédure précédente, on prend :

Although it is the absolute value of  $Q = D/M$  which clearly measures the resolving power of the system, its sign will be kept or not depending on convenience.

### 5. Target matrices

For the sake of simplicity and in accordance with high energy experiments where physics is concentrated at small angles, the target will be supposed perpendicular to both the beam direction and the direction of the observed particles.

Even for a given nuclear reaction an infinity of emitted rays can result from a single incident one, hence, the reaction cannot be simulated by a single matrix of the same kind as used in TRANSPORT\*. However, the same formalism can be kept if the whole problem is divided into two parts, each using a different target matrix, the first derivation apply only to the tuning of the spectrometer and starts at the target, the second one is used for the tuning of the beam transport system. For the first calculation the following matrix is used

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & K & 1 \end{pmatrix}$$

only in order to fix the displaced focal plane. Then the different following matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K & C \end{pmatrix}$$

is necessary to adjust the beam transport in order to minimize the spot size in the displaced focal plane previously fixed.

---

\* A unique target matrix is given in Ref.(6) and (7) but its price is the use of three more variables for the vector and three more columns for the matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K & C \end{pmatrix}$$

qui permet de régler tous les éléments du transport pour minimiser la taille du faisceau dans le plan du détecteur.

K est le facteur cinématique de la réaction :

$$|K| = \frac{1}{p} \frac{dp}{d\theta_R}$$

qui doit être pris avec le signe + si le diaphragme d'entrée du spectromètre est vu sur la droite par le faisceau, avec le signe - dans le cas inverse (voir Fig. 3)

$$C = (dp_F/p_F)/(dp_i/p_i)$$

est le rapport des variations relatives des rigidités magnétiques entre la sortie et l'entrée de la cible (après et avant la réaction).

On examinera d'abord le problème de la haute résolution pour le cas où  $K = 0$  et  $C = 1$ , c'est à dire pour la diffusion élastique ou faiblement inélastique à  $0^\circ$ , en fait aux petits angles.

## II - L'ENSEMBLE DU TRANSPORT ET SES DIFFERENTS REGLAGES

Au départ, on considère un accélérateur qui produit en un point O, un faisceau de dimensions  $x_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\delta_i$  et dont le volume de phase sera ou non considéré comme un ellipsoïde droit. Ce faisceau traverse d'abord une section d'analyse qui contient des éléments dispersifs (dipôles) et possède un plan focal (A). Elle est suivie d'une section de transport (non dispersif) qui amène le faisceau sur la cible (C). Enfin, on dispose un spectromètre dont l'espace focal est équipé d'un détecteur (D). Cela donne le schéma (voir Fig. 4), où la matrice cible n'est pas indiquée.

In both matrix, K is the reaction kinematical factor :

$$|K| = (1/p) (dp/d\theta_R)$$

the sign of which is given on Fig. 3. And

$$C = (dp_F/p_F) (dp_i/p_i)$$

is the ratio of the relative change of magnetic rigidity before and after the target (i.e. the nuclear reaction).

Keeping the small angle assumption, the derivation will be first given for  $K = 0$ ,  $C = 1$ .

## II - THE TRANSPORT SYSTEM AND ITS DIFFERENT TUNINGS

An accelerator produces at point 0 a beam whose dimensions are  $x_i$ ,  $\theta_i$ ,  $\delta_i$ ; the phase space being or not considered as an upright ellipsoid. The beam is first treated by an analysing section with dispersing (dipoles) elements ending with a focal plane (A). It is followed by a transport section with no dispersing elements, bringing the beam on target (C). Finally a spectrometer is set whose focal space is equipped with a detector (D). This scheme is given on Fig. 4 where the target matrix has not been written.

Of course, the splitting between analyse and transport can be somehow arbitrary but it can be related to fixed and tunable elements.

Emphasizing again that the essential of the derivation is best seen when  $K = 0$  and  $C = 1$ , its consequences will be used : there is a focus ( $R_{12} = 0$ ) on both the target (C) and the detector plane (D) and the target matrix can be simply ignored. Hence

$$R_A = \begin{pmatrix} M_A & 0 & D_A \\ P_A & 1/M_A & D'_A \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ P & 1/M & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad R_S = \begin{pmatrix} M_S & 0 & D_S \\ P_S & 1/M_S & D'_S \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Il y a bien sûr une part d'arbitraire dans le découpage analyse/transport ; il peut cependant correspondre dans la pratique à une partie fixe et une partie où sont effectués les réglages.

Les propriétés essentielles du système étant le mieux mises en valeur dans le cas déjà indiqué où  $K = 0$ ,  $C = 1$ , on va tout de suite prendre en compte ce qui en découle : il y a focalisation ( $R_{12} = 0$ ) sur la cible (C) et dans le plan du détecteur (D). On peut alors tout simplement ignorer la cible. On a alors :

$$R_A = \begin{pmatrix} G_A & 0 & D_A \\ P_A & 1/G_A & D'_A \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} G & 0 & 0 \\ P & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; R_S = \begin{pmatrix} G_S & 0 & D_S \\ P_S & 1/G_S & D'_S \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$R_C = \begin{pmatrix} GG_A & 0 & GD_A \\ PG_A + \frac{P_A}{G} & \frac{1}{GGA} & PD_A + \frac{D'_A}{G} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} G_S G_A G & 0 & G_S G D_A + D_S \\ P_S G G_A + \frac{1}{G_S} (P G_A + \frac{P_A}{G}) & 1/G_S G_A & P_S G D_A + \frac{1}{G_S} (P D_A + \frac{D'_A}{G}) + D'_S \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$R_C = \begin{pmatrix} MM_A & 0 & MD_A \\ PM_A + \frac{P_A}{M} & \frac{1}{MM_A} & PD_A + \frac{D'_A}{M} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$R = \begin{pmatrix} M_S M_A M & 0 & M_S MD_A + D_S \\ P_S M_A + \frac{1}{M_S} (PM_A + \frac{P_A}{M}) & 1/M_S MM_A & P_S MD_A + \frac{1}{M_S} (PD_A + \frac{D'_A}{M}) + D'_S \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

### 1. Achromatic tuning

It is expected that, after the spectrometer, the particle paths are independent of their energy ( $\delta_1$ ). It implies that both D and D' are zero.

If the angular dispersion D' would be not zero, the total spatial dispersion D would be zero only in the detector plane (here focal plane). The two cases are indicated on Fig. 5.

As regard as matrices, the spatial achromatism gives :

$$D = 0 = M_S MD_A + D_S$$

hence  $M = -D_S / M_S D_A = -Q_S / D_A$  (5)

and then  $M = M_S M_A M = -M_A D_S / D_A = -D_S / Q_A$  (6)



The total resolving power related to the initial source (the accelerator) is obviously zero since  $\mathcal{D} = 0$ . But what is significant is the resolving power related to what happens in the target and the corresponding parameter can be defined as :

$$Q = D_S / M = - Q_A \quad \text{hence} \quad |\mathcal{Q}| = |Q_A| \quad (7)$$

The quality of the whole system as used as described above is measured by the resolving power of the analyser and not that of the spectrometer.

And this result, as well as any one related to the achromatic tuning, is independent of any hypothesis on the initial phase-space shape.

The angular achromatism requires in addition that  $\mathcal{D}' = 0$  which sets P to the value :

$$P = D'_A M_S / D_S + M'_S (P_S D_S / M_S - D'_S) D_A \quad (8)$$

It is worth noticing what happens on the target for :

- spatial achromatism

$$\left. \begin{aligned} D_C &= M D_A = - D_S / S = - Q_S \\ G_C &= M'_A = - Q_S / Q_A \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

- angular achromatism

$$P_S D_C + D'_C / M_S + D'_S = 0 \quad (10)$$

which is nothing but the angular relation for a given trajectory, between the entrance and the exit of the spectrometer for particles  $\delta^+$  or  $\delta^-$  leaving the accelerator with no geometrical displacement i.e. along the central path (continuous line on Fig. 5).

$$R_{21}^S x_C^\delta + R_{22}^S \theta_C^\delta + R_{2\epsilon}^S \delta_C = 0 \quad (11)$$

Pour l'achromatisme angulaire, on veut en plus,  $\mathcal{D}' = 0$  qui détermine la valeur de P :

$$P = \frac{D'_A G_S}{D_S} + \frac{G_S}{D_A} \left( \frac{P_S D_C}{G_S} - D'_S \right) \quad (8)$$

Il est intéressant de regarder ce qui se passe sur la cible :

- l'achromatisme spatial impose :

$$\begin{cases} D_C = GD_A = -\frac{D_S}{G_S} = -Q_S \\ G_C = GG_A = -Q_S/Q_A \end{cases} \quad (9)$$

- et pour l'achromatisme angulaire, on vérifie qu'on a simplement en plus :

$$P_S D_C + \frac{D'_C}{G_S} + D'_S = 0 \quad (10)$$

qui exprime la relation angulaire entre l'entrée et la sortie du spectromètre pour les trajectoires  $\delta^+$  (ou  $\delta^-$ ) issues de l'accélérateur sans écart géométrique (trait continu dans la Fig. 5).

$$R_{21}^S x_C^{\delta} + R_{22}^S \delta_C^{\delta} + R_{2\epsilon}^S \delta_C = 0 \quad (11)$$

Intéressons-nous maintenant à la tache du faisceau sur la cible (qui reste la même qu'on soit en achromatique total ou seulement spatial). Elle comporte deux contributions :

$$R_{11} x_i = -\frac{Q_S}{Q_A} x_i \quad (12)$$

et

$$R_{1\epsilon} \delta_i = -Q_S \delta_i$$

(La taille résultante dépend de la forme du volume de phase : on examinera plus loin le cas d'un ellipsoïde).

- beam spot size (independent of angular dispersion) : two terms are contributing

$$\left. \begin{aligned} R_{11} x_i &= - Q_S x_i / Q_A \\ R_{16} \delta_i &= - Q_S \delta_i \end{aligned} \right\} (12)$$

the resulting size depending on the initial phase space shape (the case of an upright ellipsoid will be examined below) but in any case, the use of a poorly resolving spectrometer ( $Q_S$  small) may lead to a too small beam spot on the target. And this is one of the limits for the use of relation (7). It also gives an incentive for designing moving targets.

## 2. Optimised tuning

It will not usually be considered as optimized to obtain an achromatic tuning since it is not the independence from incident energy which is looked for but the best (target related) energy resolution i.e. the smallest beam spot in the detector plane.

This optimization depends on the phase-space shape. Assuming an initial upright ellipsoid leads to :

$$x_{DM} = \sqrt{M^2 x_i^2 + (D)^2 \delta_i^2} \quad (13)$$

where  $x_{DM}$  is the largest value of  $x_D$  i.e. the spot size observed on the detector.

Both  $D$  and  $M$  depend on the same parameter  $M$ . The smallest size is found for :

$$M_{opt.} = -D_S / (M_S D_A (1 + M_A^2 x_i^2 / D_A^2 \delta_i^2)) = M_{achr.} / (1 + \nu^2 / Q_A^2) \quad (14)$$

where :  $\nu = x_i / \delta_i$  is then a parameter characteristic of the accelerator.

The corresponding detector spot-size is :

$$x_{DM} = \frac{D_S x_i}{Q_A \left[ 1 + \frac{\nu^2}{Q_A^2} \right]^{1/2}} = \frac{x_{DM} \text{achr.}}{\left[ 1 + \frac{\nu^2}{Q_A^2} \right]^{1/2}} \quad (15)$$

Ce qu'on remarque, c'est que l'utilisation d'un mauvais spectromètre ( $Q_s$  petit) conduit à des faisceaux très petits sur la cible, et c'est une des bornes qui limite l'utilisation de la relation (7) ! mais cela indique aussi l'utilité d'avancer dans la réalisation de cibles tournantes etc...

## 2. Système optimisé

Faut-il travailler en achronatique ? En général, non : ce qu'on recherche, ce n'est pas l'indépendance par rapport à l'énergie, mais c'est la meilleure résolution, c'est-à-dire la tache la plus petite possible dans le plan de détection.

On peut faire diverses hypothèses sur la forme de la surface de phase ( $x_i, \delta_i$ ) qui conduisent à des optimisations différentes. Avec une ellipse droite, on a :

$$x_{DM} = \sqrt{G^2 x_i^2 + (D)^2 \delta_i^2} \quad (13)$$

où  $x_{DM}$  est la valeur maximum de  $x_D$ , c'est à dire la taille de la tache observée sur le détecteur.

Les coefficients  $D$  et  $G$  dépendent du même paramètre  $G$ . La valeur de  $G$  qui donne  $D=0$  (réglage achronatique) ne conduit évidemment pas à  $x_{DM}$  minimum. On trouve pour  $x_{DM}$  minimum :

$$G_{opt.} = - \frac{D_S}{G_S D_A} \frac{1}{\left[ 1 + \frac{x_i^2}{\delta_i^2} \times \frac{G^2}{D^2} \right]} = G_{achr.} \frac{1}{\left[ 1 + \frac{v^2}{Q_A^2} \right]} \quad (14)$$

$$\text{où } v = \frac{x_i}{\delta_i}$$

\* A titre d'exemple, sur le tandem MP d'Orsay, on a  $Q_A = 5 \text{ cm}/\%$  ;  
en ions lourds légers on a :  $v = 0.050/0.015 = 3.3$  ;  $Q_{opt.}/Q_{achr.} = 1.2$ .

To keep  $Q$  the same physical meaning,  $M$  should be exchanged with the ratio of the detector spot-size  $x_{DM}$  to the initial size  $x_i$ , leading to :

$$Q_{opt.} = \frac{D_S}{x_{DM}/x_i} = Q_{achr.} \left[ 1 + \frac{v^2}{Q_A^2} \right]^{1/2} = \left[ Q_A^2 + v^2 \right]^{1/2} = v \left[ 1 + \frac{Q_A^2}{v^2} \right]^{1/2} \quad (16)$$

It has to be emphasized that the improved resolution depends on the parameters of the beam ( $v = x_i/\delta_i$ ) but remains independent of the spectrometer whereas the size spot on the target does depend on the latter.

If  $x_{CM}$  is the max. value of  $x_c$  i.e. the spot size on the target, the achromatic tuning gave :

$$x_{CM}^{achr.} = Q_S \delta_i \sqrt{1 + \frac{v^2}{Q_A^2}} = (Q_S/Q_A) x_i \sqrt{1 + \frac{Q_A^2}{v^2}} \quad (17)$$

which become after optimization :

$$x_{CM}^{opt.} = x_{CM}^{achr.} / \left( 1 + \frac{v^2}{Q_A^2} \right) = Q_S \delta_i / \sqrt{1 + \frac{v^2}{Q_A^2}} = \dots \quad (18)$$

and finally, all results of optimizing can be gathered as follows :

$$\frac{M_{opt.}}{M_{achr.}} = \frac{x_{CM}^{opt.}}{x_{CM}^{achr.}} = \left( \frac{x_{DM}^{opt.}}{x_{DM}^{achr.}} \right) = \left( \frac{Q_{opt.}}{Q_{achr.}} \right) = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{Q_A^2}} \quad (19)$$

Notice that the more monoenergetic the beam ( $v$  large) the further the optimized tuning away from achromatism.

On a alors :

$$x_{DM} = \frac{D_S x_i}{Q_A \left[ 1 + \frac{v^2}{Q_A^2} \right]^{1/2}} = \frac{x_{DM} \text{achr.}}{\left[ 1 + \frac{v^2}{Q_A^2} \right]^{1/2}} \quad (15)$$

Pour garder au pouvoir d'analyse  $\mathcal{Q}$  la même signification physique, on va remplacer  $\mathcal{G}$  par le rapport de la taille de la tache dans le plan du détecteur  $x_{DM}$  à la taille initiale  $x_i$ , soit :

$$\mathcal{Q}_{opt.} = \frac{D_S}{x_{DM}/x_i} = \mathcal{Q}_{achr.} \left[ 1 + \frac{v^2}{Q_A^2} \right]^{1/2} = \left[ Q_A^2 + v^2 \right]^{1/2} = v \left[ 1 + \frac{Q_A^2}{v^2} \right]^{1/2} \quad (16)$$

Ce qui est intéressant, c'est que cette optimisation peut (évidemment) améliorer le résultat, mais elle le fait en fonction des qualités du faisceau ( $v = \frac{x_i}{\delta_i}$ ) mais toujours indépendamment de celles du spectromètre ! Notons également que plus le faisceau est monoénergétique, plus on s'éloigne de l'achromatisme.

On retrouve, bien sûr, l'influence du spectromètre sur la cible.

On aurait en achromatique :

$$x_{CM}^{achr.} = \sqrt{\left( \frac{Q_S}{Q_A} x_i \right)^2 + (Q_S \delta_i)^2} = Q_S \delta_i \sqrt{1 + \frac{v^2}{Q_A^2}} = \frac{Q_S}{Q_A} x_i \sqrt{1 + \frac{Q_A^2}{v^2}} \quad (17)$$

où  $x_{CM}$  est la valeur max. de  $x_C$ .

On a maintenant après optimisation :

$$x_{CM}^{opt.} = \frac{x_{CM}^{achr.}}{1 + \frac{v^2}{Q_A^2}} = \frac{Q_S \delta_i}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{Q_A^2}}} = \text{etc ...} \quad (18)$$

### 3. Role of the beam emittance

So far,  $x_i$  and  $Q_A$  have been treated as independant parameters, the former produced by the accelerator the latter attached to the analysing system. However, the insertion of an adjustable, non dispersive transport system between the accelerator exit and the analyser entrance brings in a new parameter and the possible use of it for a new optimization.

Let us suppose that the extra transport is of telescopic type with a matrix :

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & 1/g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

The parameter  $g$  will be chosen in order to optimize the use of the analyser magnet as shown on Fig. (6). With this purpose, two particular rays leaving the object central point of the analyser have been drawn namely i) the one making a unit angle ( $\theta = 1$ ) with the central path ii) the one making the largest angle ( $\theta = \theta_u$ ), taking account of the usable size of the analyser pole-pieces. The first (the second) rays spans an area  $s(S)$  on the pole piece surface. And  $S/s = \theta_u$ .

The final resolution will be as good as  $x_i$ , hence  $g$  be small. The limit in this way is related to the beam emittance which makes  $\theta$  increase when  $x$  decrease. More precisely, neglecting  $R_{11} x_i$  and  $R_{16} \delta_i$  as compared to  $R_{12} \theta_i$ , in the central angular region of the analyser, leads to equate the maximum value of  $\theta_i$  to  $\theta_u$  as previously defined.

Therefore, if  $\Sigma/\pi = \varepsilon = \theta_i x_i = \theta_u x_i$  is the beam emittance (over  $\pi$ ), then :

$$x_i = \varepsilon/\theta_u$$

and

$$Q_A = \int R_{12} d\alpha = \int \frac{ds}{R} = \frac{s}{R} = \frac{S}{\theta_u R} \quad (20)$$

c'est-à-dire que la tache sur la cible est modifiée dans le même sens que la tache sur le détecteur et on a :

$$\frac{x_{CM}^{opt.}}{x_{CM}^{achr.}} = \left( \frac{x_{DM}^{opt.}}{x_{DM}^{achr.}} \right)^2 = \left( \frac{Q_{opt.}}{Q_{achr.}} \right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{Q_A^2}} \quad (19)$$

### 3. Rôle de l'émission machine

On a considéré jusqu'ici  $x_i$  et  $Q_A$  comme des données indépendantes,  $x_i$  produit par la machine,  $Q_A$  une donnée du système d'analyse. En fait, on peut faire précéder l'analyseur proprement dit d'un système de transport non dispersif de grandissement  $g$  et (par exemple) télescopique de matrice :

$$\begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & 1/g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et c'est l'ensemble de ces deux parties qui devra être considéré comme analyseur mais avec un paramètre ajustable  $g$ .

On peut aussi -et les résultats finaux seront évidemment les mêmes- considérer l'ensemble de l'accélérateur et du transport préliminaire comme un accélérateur comportant cette fois le paramètre ajustable  $g$ , c'est ce que nous allons faire.

On a alors le schéma suivant où on a mis en évidence dans l'analyseur deux trajectoires particulières : i) celle qui part du point central objet avec un angle unité (et qui sous tend la surface polaire  $s$ ) ; ii) celle qui part du même point avec un angle utile maximum  $\theta_u$  -compte tenu des dimensions utiles des pièces polaires de l'analyseur- et qui engendre la surface  $S$  avec  $S/s = \theta_u$ .

and then :

$$Q_A = \frac{S}{R} \frac{x_i}{\epsilon} \quad (21)$$

The resulting final resolution  $\mathcal{R}$  which can be written as  $x_i/Q$  where  $Q$  is the resolving power as previously defined, is then for the achromatic tuning

$$\mathcal{R}_{\text{achr.}} = \frac{x_i}{Q_{\text{achr.}}} = \frac{x_i}{Q_A} = \frac{\epsilon}{S/R} = \frac{\epsilon}{\Sigma_A} \quad (22)$$

where  $\Sigma_A$  is defined as  $\Sigma_A = S/R$  for the analyser. An equivalent derivation leads to :

$$\mathcal{R}_{\text{opt.}} = \frac{x_i}{Q_{\text{opt.}}} = \frac{\delta_i}{\left[1 + \left(\frac{\delta_i}{\epsilon/\Sigma_A}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{\epsilon/\Sigma_A}{\left[1 + \left(\frac{\epsilon/\Sigma_A}{\delta_i}\right)^2\right]^{1/2}} = \left[ \frac{\Sigma_A^2}{\epsilon} + \frac{1}{\delta_i^2} \right]^{-1/2} \quad (23)$$

for the optimized tuning.

And again, nothing in  $\mathcal{R}$  depends on the spectrometer since only intervene the geometrical beam emittance  $\epsilon$ , the beam energy spread  $\delta_i$  and the usable polar-piece area of the analyser :

$$\Sigma_A = S/R = \theta_u D_A/M_A$$

#### 4. Target matrices

The effects of inserting in C a target matrix will be now examined the effects of C and K being separately treated.

$$\text{Insertion of } C = \frac{(dp_f/p_f)}{(dp_i/p_i)}$$

The insertion of C do not produce any displacement of the focal plane and the combination of the target matrix with that of the spectrometer leads to a modified equivalent spectrometer whose matrix is

La résolution finale sera d'autant meilleure que  $x_i$  sera petit et donc  $g$  petit. La limite tient à l'émittance du faisceau qui donne une ouverture angulaire  $\theta_i$  d'autant plus grande que  $x_i$  est petit. Si dans la région centrale de l'analyseur, on néglige les termes  $R_{11} x_i$  et  $R_{16} \delta_i$  devant le terme  $R_1 \theta_i$ . La limite supérieure de  $\theta_i$  peut être prise égale à  $\theta_u$ .

Si  $\epsilon/\pi = \Sigma = \theta_i x_i = \theta_i X_i$  est l'émittance du faisceau (divisée par  $\pi$ ). On a alors :

$$x_i = \epsilon/\theta_u$$

$$Q_A = \int R_{12} d\alpha = \int \frac{ds}{R} = \frac{s}{R} = \frac{S}{\theta_u R} \quad (20)$$

et ainsi

$$Q_A = \frac{S}{R} \frac{x_i}{\epsilon} \quad (21)$$

La résolution finale obtenue  $\mathcal{R}$  qui s'exprime comme  $x_i/Q$  où  $Q$  est le pouvoir d'analyse défini précédemment est alors, pour le réglage achromatique :

$$\mathcal{R}_{\text{achr.}} = \frac{x_i}{Q_{\text{achr.}}} = \frac{x_i}{Q_A} \frac{\epsilon}{S/R} = \frac{\epsilon}{\Sigma_A} \quad (22)$$

où on a posé  $S/R = \Sigma_A$  pour l'analyseur, et pour le réglage optimisé :

$$\mathcal{R}_{\text{opt.}} = \frac{x_i}{Q_{\text{opt.}}} = \frac{\delta_i}{\left[1 + \left(\frac{\delta_i}{\epsilon/\Sigma_A}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{\epsilon/\Sigma_A}{\left[1 + \left(\frac{\delta_i}{\epsilon/\Sigma_A}\right)^2\right]^{1/2}} = \left[ \left(\frac{\Sigma_A}{\epsilon}\right)^2 + \frac{1}{\delta_i^2} \right]^{-1/2} \quad (23)$$

$$\begin{pmatrix} M_s & 0 & CD_s \\ P_s & 0 & CD'_s \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

For the achromatic tuning, the dispersion of the spectrometer is multiplied by C resulting in a different value for M, a different spot size on the target, but the final performances are unchanged since independent of the spectrometer.

For the optimized tuning,  $\delta_i$  should be exchanged with  $C\delta_i$  hence  $v$  with  $v/C = x_i/C\delta_i$  and then the resulting tuning and final resolution are different because the insertion of C is equivalent to a change in the beam itself.

As regard as angular achromatism, and going back to relation (10),  $D_c$  and  $D'_s$  are multiplied by C implying  $D'_c$  multiplied by C too. So that relation (11) and its physical signification are unchanged. For a given  $\delta_c$ ,  $\theta_c$  and  $x_c$  are merely multiplied by C.

Insertion of a kinematical factor  $K = (dp/p)/d\theta$

It is first recalled that the existence of a kinematical factor produces two consequences (see Fig. (7)) :

- 1) - A displacement of the focal plane :

$$FF' = \Delta = \frac{-KM_s D_s}{1 + KM_s D'_s} = \frac{-K D_s}{1/M_s + K D'_s} \quad (24)$$

- 2) - A focusing of the incident beam in a point C' distant of the target C by

$$CC' = L = \frac{-K D_s / M_s}{1 - K (P_s D_s - M_s D'_s)} = -\frac{R_{1s}^S}{R_{11}^S} = K Q'_s \quad (25)$$

where  $X_s$ ,  $D_s$ ,  $D'_s$  are related to the spectrometer in its "ordinary" use, whereas  $R_{1s}^S$  and  $R_{11}^S$  are the dispersion and magnification in the displaced focal plane - notice it is not necessary to precise whether C or C' is taken as a starting point. And  $Q'_s$  is the value of the resolving power of the spectrometer when used with a source in C' (and focal detector in F' - since C' and F' as well as C and F are image conjugated through the spectrometer, as can be seen in Fig. 7b)).

Les trois éléments déterminants sont donc l'émittance géométrique du faisceau  $\epsilon$ , la largeur en énergie  $\delta_i$  de ce faisceau, la surface polaire utile  $\Sigma_A = S/R^*$  de l'analyseur et toujours rien qui concerne le spectromètre !

#### 4. Matrices de cibles

Introduisant en C une matrice cible :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K & C \end{pmatrix}$$

Examinons comment sont modifiées les conclusions précédentes, et pour cela examinons séparément l'intervention de C et de K.

Intervention du facteur :  $C = (dp_f/p_f)(dp_i/p_i)$

La combinaison de { c } avec le spectromètre donne :

$$\begin{pmatrix} G_s & 0 & CD_s \\ P_s & 0 & CD'_s \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

Pour le réglage achromatique, la dispersion du spectromètre est multipliée par C ; il en résulte un réglage différent pour G, une taille différente sur la cible, mais les performances obtenues, indépendantes du spectromètre, sont donc inchangées.

Pour le réglage optimisé,  $\delta_i$  est remplacé par  $C\delta_i$ , et donc  $v$  par  $v/C = x_i/C\delta_i$  et cette fois, réglage et performances sont différentes.

---

\* De fait, la détermination de  $\Sigma_A$  sera plutôt effectuée à partir des paramètres théoriques  $D_A$  et  $G_A$  et de l'évaluation de l'angle limite  $\theta_{ul}$  (par  $S/R = \theta_{ul} \cdot D_A / G_A$ ) Il est cependant utile de retenir la signification physique de S/R.

The beam preparation as regard as its dispersion is concerned (energetic emittance) is independant of the kinematical factor -see Fig. 5 -.

Therefore and again and even if the use of the spectrometer is now depending on K, the final energy resolution still independant of the spectrometer, is uncharged for both the achromatic and the optimized tuning.

On the contrary, and except if  $D'_S = 0$ , the spot size on the detector depends on K and so is the spot size on the target. Three terms contribute to the latter, they are expressed here for the case of the achromatic tuning i) the  $\delta_i$  contribution  $|R_{16}| \delta_i$ , independant of K (see Fig. 7) ii) the  $x_i$  contribution  $| - Q'_S(K) Q_A - KQ'_S(K) R_{21}(K) | x_i$  now depending on K iii) the  $\theta_i$  contribution  $|KQ_A| \theta_i$  obviously zero for K = 0 and independant of the spectrometer. Actually, the  $\theta_i$  contribution on the target can simply be exprimed as  $K\epsilon/\pi \mathcal{R}$  since  $\mathcal{R} = x_i/Q_A$  and  $\epsilon/\pi = x_i \theta_i$ .

### III - CONCLUSION

A sole formula can resume what has been found for the resolution :

$$\mathcal{R}_{opt.} = \left| \frac{\Sigma_A}{\epsilon}^2 + \frac{1}{\delta_i^2} \right|^{-1/2}$$

where  $\Sigma_A = S/R$  is a characteristic of the analyser of usable polar area S and radius of curvature R (note  $\Sigma_A$  and  $\epsilon$  do have the same dimension) and  $\pi \cdot \epsilon$  is the geometrical beam emittance and  $\delta_i$  its momentum width.

$\mathcal{R}_{opt.}$  is the optimized target-related resolution when the initial phase-space shape is assumed to be an upright ellipsoid. Setting  $\delta_i \rightarrow \infty$  gives the  $\mathcal{R}$  value for an achromatic tuning.

In all cases the properties of the analyser appear essential, not those of the spectrometer. The beam emittance ( $\epsilon_i, \delta_i$ ) is important too.

Different factors will reduce the use of this somehow paradoxical result. For a given resolution, the target spot-size is as small as the resolving power of the spectrometer is poor. This may rapidly leads to problems with the beam heating of the target. Also, the beam angular spread

En ce qui concerne l'achromatisme angulaire, (le spatial étant supposé réalisé) dans la relation (10)  $D_c$  et  $D'_s$  multipliés par C impose que  $D'_c$  soit lui aussi multiplié par C, de telle sorte que la relation (11) et sa signification géométrique sont inchangées. Simplement, pour un  $\delta_c$  donné,  $x_c$  et  $\theta_c$  sont multipliés par C.

Intervention du facteur cinématique  $K = dp/p/d\theta$

Rappelons que l'existence d'un facteur cinématique pour la réaction conduit à deux conséquences (voir Fig. 7) :

- 1) - un déplacement du plan focal d'une quantité :

$$FF' = \Delta = \frac{-K G_s D_s}{1 + K G_s D'_s} = \frac{-K D_s}{1/G_s + K D'_s} \quad (24)$$

- 2) - une focalisation du faisceau incident sur la cible en un point C' distant de la cible C de la quantité :

$$CC' = L = \frac{-K D_s / G_s}{1 - K (P_s D_c - G_s D'_s)} = -K \frac{R_{1s}^s}{R_{11}^s} = K Q'_s \quad (25)$$

où  $G_s$ ,  $D_s$ ,  $D'_s$ , correspondent au fonctionnement "normal" du spectromètre mais où  $R_{1s}^s$  et  $R_{11}^s$  sont les valeurs de la dispersion et du grandissement du spectromètre, dans le plan focal déplacé.  $Q'_s$  est la valeur de  $Q_s$  pour les conditions d'utilisation correspondant à K (c'est-à-dire pour une source située en C'). La préparation du faisceau dispersé (émittance énergétique) - voir Fig. 5- est indépendante du facteur cinématique.

Les points C' et F' (de même que C et F) sont conjugués pour le spectromètre, il suffit pour s'en convaincre de considérer les rayons ne subissant pas de déviation dans la cible (voir Fig. 7b). Si l'utilisation du spectromètre est différente (son pouvoir séparateur  $Q_s$  dépend maintenant de K) toutes les conclusions des paragraphes précédents concernant la résolution finale obtenue, indépendantes du spectromètre, aussi bien pour le réglage achromatique qu'optimisé, sont inchangées. Par contre, la taille du faisceau sur la cible dépend maintenant de K ; il en est de même de la taille dans le plan du détecteur sauf si  $D'_s = 0$  qui maintient  $D_s$  indépendante de la position du plan focal déplacé.

may become prohibitive as regards the beam transport system or the angular accuracy of the studied phenomena. On the other hand , higher order terms should be considered in the calculation and would probably limit the use of too small a magnification. Finally it has been assumed that the detector accuracy in the spectrometer focal plane did not introduce any limit for the resolution and nor did the stability of the used magnetic elements or the differential slowing down in the target, etc...

If the presently derived results do not reach the generality of previously published studies like Ref. 7, they give evidence for considerations which should be taken into account when designing a beam line for high resolution, a spectrometer or even... an accelerator.

D. Potaux is acknowledge for his carefull reading of most of the manuscript and for suggestions and correction which resulted of it.

Revenons à la taille du faisceau sur la cible que nous traiterons dans le cas du réglage achromatique. Trois contributions sont présentes :

1) - la contribution en  $\delta_i$

$$|R_{1s} \delta_i = |Q_s \delta_i$$

indépendante de K (voir Fig. 7).

2) - la contribution en  $x_i$

$$\left| -\frac{Q'_s(K)}{Q_A} - K Q'_s(K) R_{21}(K) \right| x_i$$

qui dépend maintenant de K.

3) - la contribution en  $\theta_i$

$$K Q_A \theta_i$$

qui est évidemment nulle pour  $K = 0$  et qui ne dépend pas du spectromètre.

Puisque la résolution finale est  $\mathcal{R} = \frac{x_i}{Q_A}$ , on peut remarquer que la contribution en  $\theta$  sur la cible :

$$K Q_A \theta_i = \frac{K x_i \theta_i}{\mathcal{R}} = \frac{K \varepsilon}{\pi \mathcal{R}}$$

ne dépend ni du spectromètre, ni de l'analyseur, mais seulement de l'émission, de la résolution cherchée et est proportionnelle à K.

### III - CONCLUSION

Une seule formule peut résumer ce qui a été trouvé pour la résolution :

$$R_{opt.} = \left| \frac{L_A}{\epsilon}^2 + \frac{1}{\delta_i^2} \right|^{-1/2} \quad (23)$$

- où  $L_A^*$  = S/R caractérise l'analyseur de surface polaire utile S et de rayon de courbure moyen R
- où  $\pi\epsilon^*$  est l'émittance géométrique du faisceau.  $\delta_i$  sa largeur en énergie,  $R_{opt.}$  correspond alors à une optimisation de la résolution pour un volume de phase initial ellipsoïdal. Il suffit de faire  $\delta_i \rightarrow \infty$  pour avoir le cas achromatique.

Dans tous les cas, ce sont donc les qualités de l'analyseur qui apparaissent comme essentielles et non celles du spectromètre pour déterminer la résolution en énergie obtenue.

L'émittance du faisceau ( $\epsilon_i, \delta_i$ ) est également déterminante.

Les limites de validité de ce résultat qui peut paraître paradoxal sont diverses.

- 1) - au premier ordre, et pour une résolution donnée, la tache sur la cible est d'autant plus petite que le spectromètre est mauvais : cela peut rapidement conduire à des problèmes de tenue de cible au faisceau. En même temps, la largeur angulaire du faisceau peut devenir prohibitive : soit pour le transport du faisceau, soit parce qu'elle nuit à la précision de la distribution angulaire du phénomène étudié.
- 2) - les termes d'ordre supérieur vont aussi limiter l'utilisation de grandissements trop différents de 1.

---

\* Notons que  $L_A$  et  $\epsilon$  ont les mêmes dimensions - par exemple mm.mr.

- 3) - enfin, on a implicitement supposé que la précision du détecteur dans le plan focal du spectromètre ne limitait jamais la résolution obtenue, ni la stabilité des éléments magnétiques utilisés, ni les effets de ralentissement différentiels dans la cible, etc...

Malgré ces limites, il semble important de tenir compte de la réalité du résultat au moment de la conception d'une ligne pour haute résolution, d'un spectromètre... ou celle d'un accélérateur.

Si les calculs présents ici n'ont pas la généralité d'études déjà publiées comme celles de la Ref. (7), ils ont par contre permis d'établir pour la première fois des résultats importants.

Cet article est la version bilingue quelque peu étendue (matrices cibles) de la publication IPNO-GEPL 83-10.

D. Potaux est remercié pour sa lecture détaillée d'une grande partie du manuscrit et les suggestions qui en ont résulté.

## FIGURES

- Fig. 1 - Notations du code TRANSPORT utilisées
- Fig. 2 - Schéma des éléments déterminant le pouvoir d'analyse d'un spectromètre
- Fig. 3 - Schéma donnant le signe du facteur cinématique  $K = (dp/p)/d\theta$
- Fig. 4 - Schéma de l'ensemble du transport avec les matrices correspondantes
- Fig. 5 - Trajectoires d'énergie différentes  $\delta^+$  et  $\delta^-$  pour un réglage achromatique vrai (trait plein) et pour un réglage où seul l'achromatisme spatial est assuré dans le plan focal (trait pointillé)
- Fig. 6 - Préparation du faisceau (matrice g) pour une utilisation optimum de l'analyseur.
- Fig. 7 - Utilisation d'un spectromètre en présence d'un facteur cinématique  $K = (dp/p)/d\theta$   
Schéma des différentes trajectoires qui mettent en évidence le déplacement au plan focal a) et la focalisation hors de la cible b). Les trajectoires sont repérées par leurs paramètres initiaux  $x_i, \theta_i, \delta_i$  mesurés en C. Les échelles (arbitraires) longitudinales et transversales sont supposées différentes.

## FIGURES

- Fig. 1 - The transport notations
- Fig. 2 - Scheme of the elements determinative of the resolving power of a spectrometer
- Fig. 3 - The sign of the kinematical factor  $K = (dp/p)/d\theta$
- Fig. 4 - The transport system and the corresponding matrices
- Fig. 5 - Particle trajectories with different energies  $\delta^+$  and  $\delta^-$  for a true achromatic tuning (continuous line) and for a tuning where only spatial achromatism is obtained in the focal plane (dotted line)
- Fig. 6 - Beam preparation (g matrix) for an optimized use of the analyser
- Fig. 7 - Use of a spectrometer in case of a target endowed with a kinematical factor  $K = \frac{dp}{p} / d\theta$ . Scheme of the different rays exhibiting
- a) - the focal plane displacement
  - b) - the beam focus displaced out of the target. The particle trajectories are noted with their initial parameters  $x_i, \theta_i, \delta_i$  as measured in C.

\* \* \*

REFERENCES

- (1) - B.L. Cohen, Rev. Sci. Instr. 30(1959)415
- (2) - M.A. Enge, Rev. Sci. Instr. 29(1958)885
- (3) - M.G. Blosser, G.M. Crawley, R. Deforest, E. Kashy and B.M. Wildenthal, Nucl. Instr. and Meth. 91(1971)61
- (4) - P. Roussel, E. Kashy, Nucl. Inst. and Meth. 180(1981)335
- (5) - K.L. Brown, D.C. Carey, Ch. Iselin and F., Rothacker, Rapport CERN 73-16 et 80-04
- (6) - J. Reich, S. Martin, D. Protic and G. Riepe, Proc. 7th. Conf. on Cyclotrons and their applications (1975) p. 235
- (7) - G. Hinderer, M. Lehr and K. Maier, Nucl. Instr. and Meth. 160(1979)449

\*\*\*\*\*

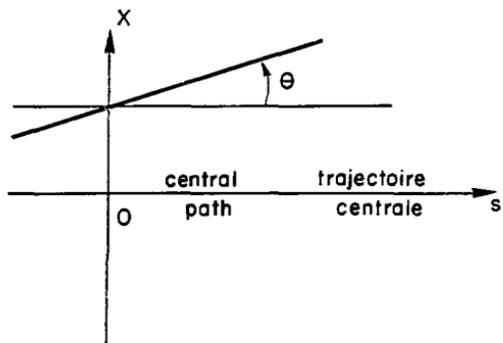


Fig. 1

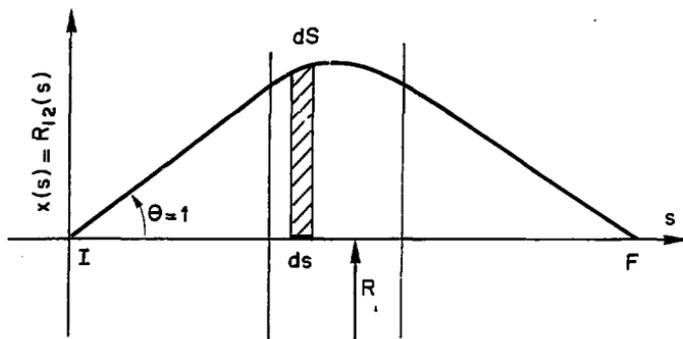


Fig. 2

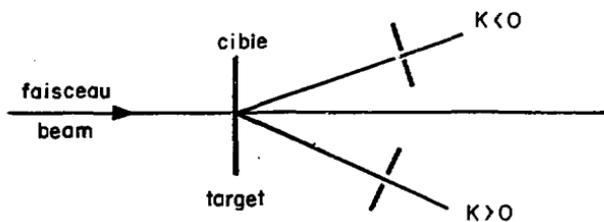


Fig. 3

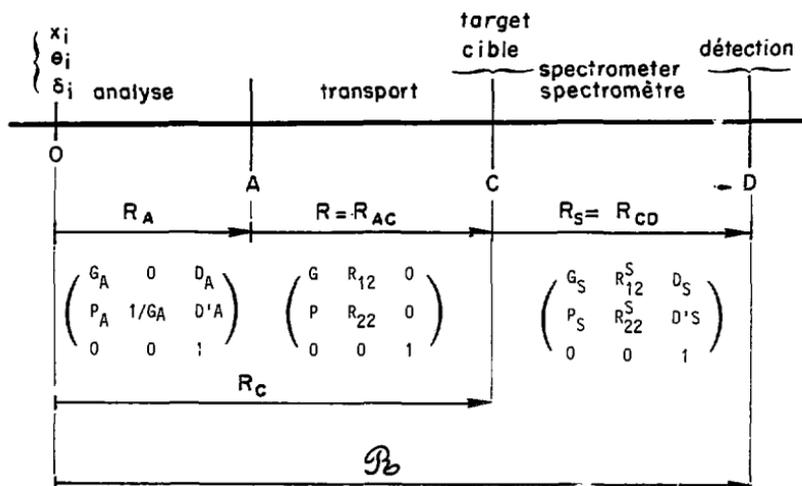


Fig. 4

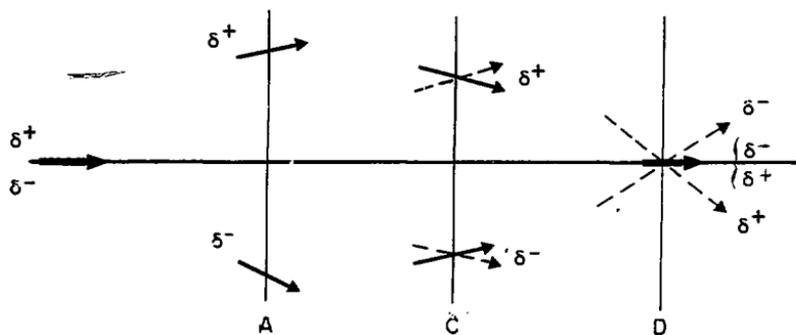


Fig. 5

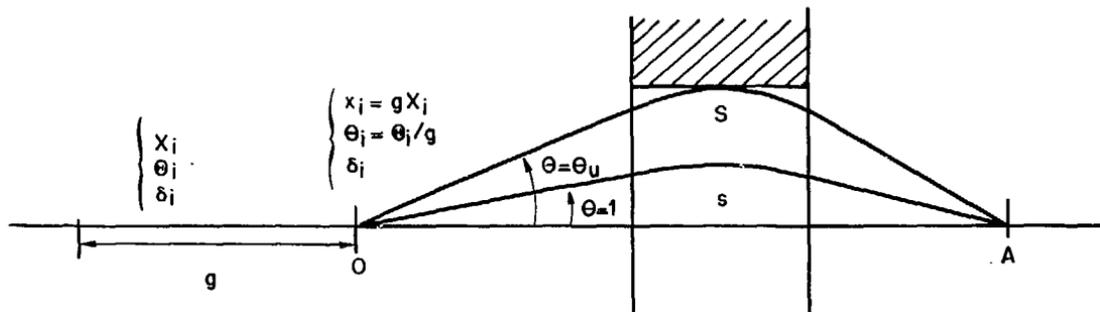


Fig. 6

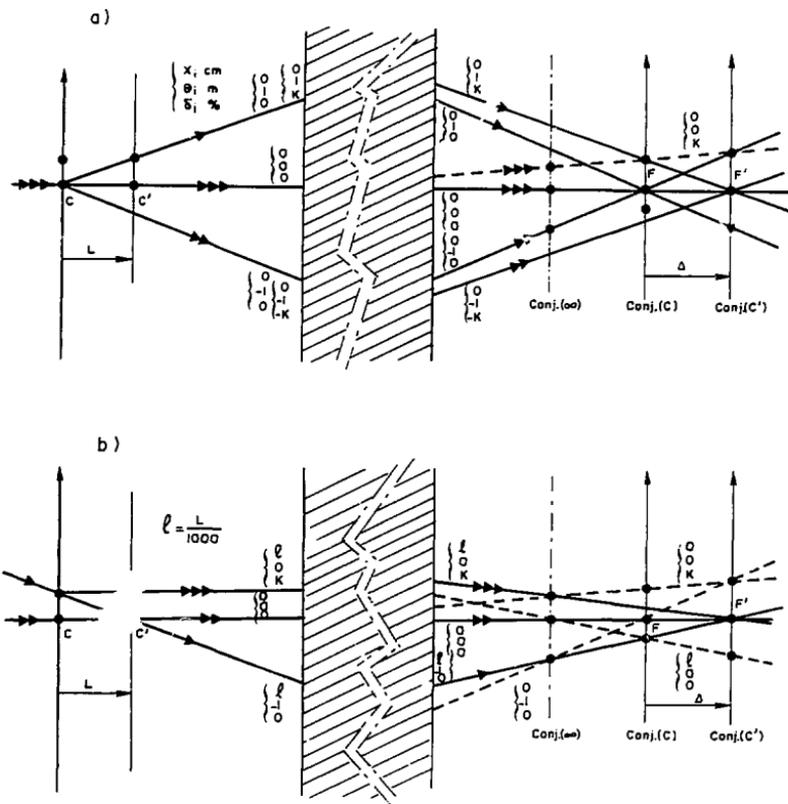


Fig. 7