

# institut de physique nucléaire

LABORATOIRE ASSOCIÉ A L'IN2P3



IPNO-GEPL/83-03

PROPRIETES OPTIQUES DU MIROIR ELECTROSTATIQUE ;  
APPLICATION AU PROJET D'ORSAY.

J.P. SCHAPIRA

Institut de Physique Nucléaire, B.P. n° 1,  
91406 Orsay Cédex - France

PROPRIETES OPTIQUES DU MIROIR ELECTROSTATIQUE ;  
APPLICATION AU PROJET D'ORSAY

J.P. SCHAPIRA

Institut de Physique Nucléaire, B.P.1, 91406 Orsay cedex, France

## TABLE DES MATIÈRES

- I INTRODUCTION
  - II EQUATIONS DU MOUVEMENT DANS L'INFLECTEUR
    - II.a Convention
    - II.b Trajectoire quelconque
    - II.c Trajectoire moyenne et limitation de fonctionnement
  - III MATRICE DE TRANSFERT DE L'INFLECTEUR
    - III.a Description du faisceau en entrée et en sortie de l'inflecteur
    - III.b Transfert entre le plan  $P_0$  (point 0) et  $E'$  (point 2)
    - III.c Transfert entre  $E'$  et  $S'$  (point 3)
    - III.d Transfert entre  $S'$  et un plan perpendiculaire au plan médian (point 4)
    - III.e Transfert entre  $\delta'$  et le plan  $P_1$  (point 1)
    - III.f Matrice  $T$  de transfert de l'inflecteur entre  $P_0$  et  $P_1$
  - IV ACCEPTANCE DU MIROIR ÉLECTROSTATIQUE
  - V APPLICATION AU PROJET D'ORSAY
-

## I. INTRODUCTION

L'injection axiale dans un cyclotron a été proposée il y a maintenant 20 ans par W.B.Powell et col. (COX 62) pour l'accélération de protons polarisés. Depuis, cette technique d'injection à basse énergie a été et continue d'être mise en oeuvre sur de nombreuses machines existantes (RYC 81). Elle est notamment prévue sur les cyclotrons compacts correspondants aux projets de M.S.U. (BEL 82), Milan et Orsay, et devrait permettre l'utilisation de la nouvelle génération de sources d'ions lourds multichargés type CRYEBIS ou ECR, ainsi que l'accélération de particules légères. Ces deux dernières possibilités étant les atouts majeurs du projet de cyclotron compact à l'IPN d'Orsay, l'injection axiale doit y être intégrée dès le début, dans l'élaboration de ce projet.

Par rapport à ce qui se passe avec un cyclotron conventionnel, l'injection axiale dans un cyclotron compact se heurte aux difficultés suivantes :

- 1 - Pour obtenir une déviation de  $90^\circ$  du faisceau injecté qui le ramène dans le plan médian du cyclotron, on applique un champ électrique E entre deux plaques constituant l'inflécteur. On peut montrer que, quelque soit le type d'inflécteur, le champ électrique nécessaire pour courber un ion de nombre de charge Zi et de masse A donné s'écrit :

$$E = \frac{e}{m} \frac{Z_i}{A} B^2 \rho F(\tau) = 9.65 \times 10^7 \frac{Z_i}{A} B^2 \rho F(\tau) \quad (\text{MKSA}) \quad (1)$$

où B est le champ magnétique existant au centre,  $\rho$  le rayon de courbure magnétique correspondant à la vitesse  $v_0$  d'injection dans le champ  $B$  ( $\frac{m_0}{e} \frac{Av_0}{Z_i} = B\rho$ ) et  $F(\tau)$  une fonction de l'angle de transit de la particule dans l'inflécteur ( $\tau = \frac{e}{m} \frac{Z_i}{A} Bt$ ). Cette fonction F, caractéristique du type d'inflécteur choisi, décroît avec  $\tau$  à moins qu'elle n'en soit indépendante.

Dans un cyclotron compact, on travaille au centre à champ magnétique élevé et plus précisément à  $p = \frac{Z_i}{A} B^2$  élevé selon le rang harmonique choisi. Comme on est limité en valeurs de champ électrique (composante Ez parallèle à  $B$  à  $25 \text{ KV/cm}$ ) pour des raisons de claquage dans l'inflécteur on est conduit à des rayons d'injection petits, de l'ordre du cm dans la pratique. On notera cependant que ceci dépend de l'inflécteur choisi à travers  $F(\tau)$ . Jusqu'à présent, trois types d'inflécteurs électrostatiques ont été envisagés pour l'injection axiale sur des cyclotrons.

- Le miroir électrostatique, qui est constitué de 2 plaques parallèles inclinées d'environ  $45^\circ$ , le faisceau entrant et sortant par la face d'entrée (COX 62, POW 65, TAL 65, HAZ 69).

- L'infecteur spirale type Pabot-Belmont, qui est essentiellement un infecteur circulaire "tournant" pour tenir compte de la présence du champ magnétique et qui a été développé pour la cyclotron de Grenoble. Le faisceau ne subit ici aucune variation de vitesse puisque la trajectoire moyenne reste sur une équipotentielle (PAB 68).

- L'infecteur hyperboloïde type Müller, développé pour le cyclotron injecteur du SIN et qui est le plus simple d'une famille d'infecteur formés de surfaces équipotentielles du 2ème degré (MUL 67). Comme pour l'infecteur précédent, la trajectoire moyenne demeure sur une surface équipotentielle.

La fonction de  $F_Z(\tau)$  de chacun de ces infecteurs est donnée au tab. 1. On constate que pour les deux premiers types d'infecteurs, on peut augmenter le temps de transit et donc diminuer  $E_z$ .

TABLEAU 1

Valeurs de $F_Z(\tau)$ pour 3 types d'infecteur (unité : MKSA)		
$(E_z(\max) = \frac{e}{m_0} \frac{Zi}{A} B^2 \rho F_Z(\tau))$		
Type d'infecteur	$F_Z(\tau)$	limitation en $\tau$
Miroir électrostatique	$1/\tau$	$< \pi$ a)
Spirale, type Pabot-Belmont	$\pi/2\tau$	aucune en principe
Hyperboloïde, type Müller	$\pi/2\tau$	valeur fixe $\frac{\pi\sqrt{6}}{2}$

a) pour  $\tau = \pi$  la trajectoire sort tangentiellement de l'infecteur

Cependant ceci se fait au détriment de la place, et à cet égard le miroir électrostatique est plus avantageux que l'infecteur type Pabot. Dans la pratique on est obligé de se limiter à des énergies d'injection correspondantes à  $\rho > 1cm$ .

2 - Une autre limitation résulte alors des tailles caractéristiques des objets au centre comparés aux valeurs de  $\rho$  : intervalles d'accélération, distances parcourues dans le premier des d'accélération. Comme on cherche à obtenir un gain élevé par tour pour l'extraction, on est amené à porter la tension maximum des dees à  $V_{\max} \sim 100\text{kV}$  donc à prévoir des espaces d'accélération de l'ordre du cm, c'est-à-dire de  $\rho$  (pour des raisons de claquage). Dans ces conditions les gains d'énergie dans les premiers intervalles où on est à basse énergie seront généralement limités ( $\sim 80\%$  de  $V_{\max}$ ), ce qui pose le problème du dégagement rapide par les trajectoires, de la région centrale en général assez encombrée. On est amené de plus dans la région centrale à fermer le plus possible les dees en hauteur pour limiter la pénétration des équipotentielles et donc obtenir le maximum de gain.

On peut maintenant s'orienter vers tel type d'infecteur à partir des critères suivants, que l'on peut à priori satisfaire si l'on conçoit l'injection axiale et la région centrale dès le départ avec l'ensemble accélérateur.

a - injection axiale centrée : il est très avantageux pour simplifier la conduite du faisceau de l'entrée du cyclotron à celle de l'infecteur, d'injecter le long de l'axe du cyclotron en raison de l'absence de composante transverse  $B_{\perp}$  du champ magnétique.

Ceci revient à placer dans le plan médian, la projection de l'entrée de l'infecteur au centre exact de la machine. A condition de choisir judicieusement la forme du gap d'injection et la position angulaire de l'infecteur par rapport à ce gap, on montre qu'une telle injection axiale centrée est possible avec raccordement ultérieur de la trajectoire à une orbite accélérée centrée, à condition de pouvoir jouer sur deux paramètres indépendants intrinsèques de l'infecteur. Ceci élimine l'infecteur type Müller qui est défini complètement à partir du seul paramètre  $\rho$  (voir tableau 1). Les deux seuls autres infecteurs que l'on peut considérer sont le miroir électrostatique plan et l'infecteur spirale type Pabot-Belmont.

b - faible encombrement : à cet égard on a noté plus haut que le miroir était plus avantageux que l'infecteur spirale. On arrive en fait à loger un miroir dans une boîte cylindrique de l'ordre de 2 à 3 cm de diamètre.

c - simplicité de fabrication : le miroir est à priori plus simple à construire. Un des points délicats à bien étudier est celui de la face d'entrée qui peut être constituée d'une "gase" métallique (problèmes de transmission, d'émission secondaires).

d - composante  $E_z$  de champ électrique la plus faible possible : compte tenu que la fonction  $F_z(\tau)$  est plus faible pour le miroir électrostatique que pour l'infecteur spirale (1 comparé à  $\frac{\pi}{2} \sim 1.6$  - voir tableau 1), à temps de transit donné le miroir électrostatique est certainement plus performant du point de vue de l'effet de courbure introduit par le champ électrique. En revanche on est limité à  $\tau \sim 140^\circ$  en raison de la perte de transmission en sortie où les trajectoires sont de plus en plus rasantes. En tout état de cause, on n'a pas intérêt à avoir un temps de transit trop long dans un infecteur, si l'on veut limiter les effets de fluctuation de temps de transit liés à l'émission finie du faisceau injecté. Rappelons, en effet, que l'on essaye de regrouper en temps le plus possible le faisceau à l'entrée du cyclotron.

Aussi notre étude s'est-elle orientée vers l'emploi d'un miroir électrostatique centré sur l'axe du cyclotron, et dont on a limité la valeur maximum de la composante  $E_z$  du champ électrique à 25kV/cm. Nous avons également montré que l'on pouvait injecter les trois modes harmoniques, prévus avec les paramètres de Mars 1982 de la machine à trois secteurs, sur le même dee d'injection (SCH 81). Les premières mesures sur maquette en cuve électrolytique menée récemment au CERN, ont confirmé la possibilité d'une telle géométrie "commune" aux trois harmoniques.

Dans cette note :

- a) nous rappelons les propriétés optiques d'un miroir électrostatique (équations du mouvement, matrice de transfert, fluctuation de temps de transit, acceptance) dans le cas général d'un temps de transit quelconque (jusqu'à présent nous n'avons eu connaissance que de l'étude de Talalaëff (TAL 65) difficile à exploiter et celle plus récente de N. Hazewindus (HAZ 69) applicable seulement à un temps de transit  $\tau \ll 1$  a)

---

a) Au moment de la rédaction de ce texte, des calculs similaires ont été publiés par l'équipe MSU/Milan (BEL 82).

b) les caractéristiques concrètes des inflecteurs prévus sur le projet d'Orsay compte tenu de la géométrie centrale qui a été calculée. On a été ainsi amené à réduire légèrement les énergies max. d'injection par rapport à la préétude présentée à la Conférence de Caen (SCH 81), de manière à ne jamais dépasser un champ électrique  $E_z$  de 25kV/cm.



## II . EQUATIONS DU MOUVEMENT

### II.a - Conventions :

Un miroir électrostatique est constitué de deux électrodes parallèles inclinées d'environ  $45^\circ$ , par rapport au plan médian du cyclotron. Le faisceau entre et sort à travers la plaque avant portée à la masse, après avoir subi une déviation de  $90^\circ$  due à l'action répulsive de la tension électrique de la plaque arrière.

Le système de coordonnées choisi est représenté sur la fig.1 : le trièdre Oxyz est direct, l'axe Oz est parallèle à l'axe du cyclotron ; l'axe Oy est parallèle aux plans de l'infecteur. Le plan Oxy est le plan médian du cyclotron.

### II.b - Trajectoire quelconque :

La trajectoire centrale ou moyenne, chemine le long de l'axe Oz dans le sens des z décroissants. Il est raisonnable d'admettre qu'à l'intérieur de l'infecteur, le champ magnétique B reste constant et parallèle à l'axe Oz. On prendra B négatif, de manière à ce que les ions positifs infléchis dans le plan médian tournent dans le sens trigonométrique. Dans ce système d'axe (fig.1), la face d'entrée de l'infecteur est représentée par l'équation :

$$e_x x + e_z z = h e_z \quad (1)$$

où h est à la hauteur du trou d'entrée de l'infecteur par rapport au plan médian. On a également introduit les composantes réduites  $e_x$  et  $e_z$  du champ électrique  $\vec{E}$  par la relation :

$$\vec{E} = \frac{q}{m} B^2 \cdot \vec{a} \quad (2)$$

q et m étant respectivement la charge et la masse de l'ion.

Les équations du mouvement  $m\vec{\gamma} = q(\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$  projetés sur les trois axes donnent :

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} - \frac{dz}{d\tau} = e_x \quad (3.a)$$

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = e_z \quad (3.b)$$

où l'on a posé :

$$\tau = -\frac{q}{m} B.t \quad (4)$$

$$Z = x + i y \quad (5)$$

$$i = \sqrt{-1} \quad (6)$$

B étant choisi < 0, l'angle de transit  $\tau$  de l'ion dans le champ B est positif.

L'équation (3.a) exprime le couplage des mouvements transverses x et y dus au champ magnétique axial.

Les équations 3. s'intègrent immédiatement avec les conditions initiales à l'entrée de l'infecteur :  $Z_0, Z'_0, z_0, z'_0$ , (avec  $' = \frac{d}{d\tau}$ ) :

$$Z = e_x (1 + i \tau - e^{i\tau}) + Z_0 + i (1 - e^{i\tau}) Z'_0 \quad (7.a)$$

$$z = \frac{1}{2} e_z \tau^2 + z'_0 \tau + z_0 \quad (7.b)$$

On notera que les conditions initiales de positions ne sont pas indépendantes puisqu'elles doivent satisfaire (1), entrée de l'infecteur, soit :

$$e_x x_0 + e_z z_0 = h e_z \quad (8)$$

La même relation existe au point de sortie atteint à une valeur  $\bar{\tau}$ , tel que :

$$e_x x(\bar{\tau}) + e_z z(\bar{\tau}) = h e_z \quad (9)$$

En revenant aux coordonnées x, y, z, les équations (7) s'écrivent :

$$\begin{aligned} x &= e_x (1 - \cos \bar{\tau}) + x_0 + x'_0 \sin \bar{\tau} - y'_0 (1 - \cos \bar{\tau}) \\ x' &= e_x \sin \bar{\tau} + x'_0 \cos \bar{\tau} + y'_0 \sin \bar{\tau} \\ y &= e_x (\bar{\tau} - \sin \bar{\tau}) + y_0 + x'_0 (1 - \cos \bar{\tau}) + y'_0 \sin \bar{\tau} \\ y' &= e_x (1 - \cos \bar{\tau}) + x'_0 \sin \bar{\tau} + y'_0 \cos \bar{\tau} \\ z &= \frac{1}{2} e_z \bar{\tau}^2 + z'_0 \bar{\tau} + z_0 \\ z' &= e_z \bar{\tau} + z'_0 \end{aligned} \quad (10)$$

On obtient le temps de transit  $\tau$  pour une trajectoire quelconque en résolvant (9) par rapport à  $\tau$ , compte tenu des relations (10).

### II.c - Trajectoire moyenne et limitation de fonctionnement :

La trajectoire moyenne correspond aux conditions initiales suivantes :  $Z_0 = Z'_0 = 0$   $z'_0 = -\rho$   $z_0 = h$  où  $\rho$  est le rayon magnétique d'injection dans le champ B à la vitesse  $v_0$  d'injection ( $\frac{mv_0}{q} = B\rho$ ).

On veut de plus que la trajectoire quitte l'infecteur dans le plan médian, c'est-à-dire qu'en sortie  $z = z' = 0$  (11)

La trajectoire centrale a pour équation (déduite des relations(10)) :

$$\bar{x} = e_x (1 - \cos\tau) \quad (12.a)$$

$$\bar{y} = e_x (\tau - \sin\tau) \quad (12.b)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{2} e_z \tau^2 - \rho\tau + h \quad (12.c)$$

Le mouvement projeté sur le plan médian est un arc de cycloïde engendré par roulement sur Ox d'un cercle de rayon  $e_x$ . Les conditions (9) et (11) en sortie fixent la géométrie de l'infecteur (inclinaison  $\alpha$  par rapport à l'axe Oz, hauteur h du point d'entrée) et le champ électrique en fonction des deux paramètres indépendants  $\rho$  et  $\bar{\tau}$ , où  $\bar{\tau}$  est l'angle de transit moyen :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \bar{\tau}/2}{\bar{\tau}/2} \quad (< 1) \quad 13.a$$

$$h = \frac{\rho\bar{\tau}}{2} \quad 13.b$$

$$e_x = \frac{\rho}{2\sin \frac{\bar{\tau}}{2}} \quad 13.c$$

$$e_z = \frac{\rho}{\bar{\tau}} \quad 13.d$$

$$\text{soit } E_z = 5.530 \times 10^9 \frac{Z_1}{A} B^2 \frac{\rho}{\bar{\tau}} \quad (\text{en MKSA-deg}) \quad 13.e$$

Le miroir électrostatique est donc un infecteur à deux paramètres indépendants :

$\rho$  = rayon de courbure magnétique d'injection

$\bar{\tau}$  = angle de transit de la trajectoire moyenne.

La zone possible de variation de ces deux paramètres est limitée par les contraintes suivantes :

- a - On ne peut guère dépasser  $\beta_S = 75^\circ$  comme angle que fait la trajectoire en sortie avec la normale au plan de l'infecteur, ce qui implique qu'on ne peut guère envisager des angles de transit supérieurs à  $140^\circ$  (rappelons que  $\cos \beta_S = \cos \frac{\pi}{2} \cos \alpha$  où  $\alpha$  est donné par 13.a).
- b - Le rayon d'injection  $\rho$  ne doit pas être trop petit à la fois pour que le gain au 1er gap soit significatif et pour dégager les obstacles du centre de la machine (en fait  $\rho \gtrsim 1.0$  cm).
- c - Enfin le champ électrique  $E_z$ , parallèle au champ magnétique ne peut guère dépasser 25 kV/cm. Une fois fixée pour chaque mode harmonique la valeur maximum atteinte par le paramètre  $\frac{Z_i}{A} B^2$ , l'équation (13.e) fixera une limitation due au champ électrique.

Les résultats sont montrés sur la Fig. 2 dans le cas du projet d'Orsay avec le paramètre résultant du calcul et des mesures sur maquette de la géométrie centrale (MAN 83). L'optimisation de cette géométrie a précisément été rendue possible grâce aux deux paramètres  $(\rho, \bar{v})$  indépendants qui caractérisent le miroir électrostatique.

### III . MATRICE DE TRANSFERT DE L'INFLECTEUR

#### III.a - Description du faisceau en entrée et en sortie de l'inflecteur :

Le faisceau arrivant sur l'inflecteur est constitué d'un ensemble de trajectoires caractérisées chacune par un écart en position, en angle, en énergie et en temps par rapport à la trajectoire moyenne, et ce dans un plan déterminé. Avant l'inflecteur, dans la région sans champ électrique, le faisceau peut donc être caractérisé par ces 6 paramètres mesurés sur un plan  $P_0$  perpendiculaire à l'axe Oz du cyclotron, paramètres que l'on peut considérer comme les composants d'un vecteur  $X(0)$  :

$$X(0) = \left\{ \delta x_0, \left( \frac{dx}{ds} \right)_0, \delta y_0, \left( \frac{dy}{ds} \right)_0, \delta \tau_0, \left( \frac{\delta p}{p} \right)_0 \right\} \quad (14)$$

Nous reprenons donc ici l'approche développée couramment en transport de faisceau (BRO 73), à ceci près qu'au lieu de considérer des écarts de longueur de parcours nous nous sommes référés directement à des écarts de temps (en unité (eq.4)) la vitesse des particules variant dans l'inflecteur. De même les écarts en énergie sont représentés d'une manière équivalente par des écarts relatifs en rayon magnétique d'injection.. On notera que le plan  $P_0$  est choisi le plus proche de l'entrée de l'inflecteur, avec la condition que l'ensemble des points touchés par ce plan restent à l'extérieur de l'inflecteur. On fait également l'hypothèse qu'en entrée et en sortie, la face avant de l'inflecteur constitue une équipotentielle de champ  $V = 0$ , c'est-à-dire qu'on néglige les effets de pénétration du champ électrique liés aux trous de passage du faisceau ou au maillage de fils constituant une partie de cette face.

Après avoir quitté l'inflecteur, la trajectoire moyenne décrit un cercle dans le plan médian du cyclotron. On décrira alors l'état en sortie des 6 paramètres d'une trajectoire quelconque en les mesurant dans un plan  $P_1$  perpendiculaire à la trajectoire moyenne et passant donc par le centre C du cercle d'injection. Ce plan  $P_1$  est situé juste en sortie de l'inflecteur de manière à ce que l'ensemble des points touchés restent extérieurs à l'inflecteur.

Une trajectoire quelconque sera donc caractérisée dans ce plan  $P_1$  de la même façon qu'en entrée, par un vecteur  $X(1)$

$$X(1) = \left\{ \delta Y_1, \left( -\frac{dY}{ds} \right)_1, \delta Z_1, \left( -\frac{dZ}{ds} \right)_1, \delta \tau_1, \left( -\frac{\delta p}{\rho} \right)_1 \right\} \quad (15)$$

On change donc de systèmes de références :

- en entrée : le système d'axes de l'infecteur Oxy
- en sortie : le système d'axes de Serrat-Franet lié au cercle d'injection SKYZ.

On peut relier X(0) et X(1) par une matrice T appelée matrice de transfert de l'infecteur relative aux écarts transverses reliant entre elles des grandeurs, puisque mesurées dans des plans  $P_0$  et  $P_1$  perpendiculaires à la trajectoire moyenne. Soit :

$$X(1) = T \cdot X(0) \quad (16)$$

La connaissance de T permet de décrire le faisceau injecté en sortie d'infecteur (mouvement radial en Y et vertical en Z). Suivant un formalisme couramment utilisé, on peut décrire le faisceau dans chacun des plans  $P_0$  et  $P_1$  par un ensemble de points de coordonnées  $X_0$  (ou  $X_1$ ), situés, dans un espace à 6 dimensions à l'intérieur d'un hyperellipsoïde. Le faisceau est alors entièrement défini par les coefficients  $\sigma_{ij}$  de la matrice symétrique  $6 \times 6$  définissant l'équation de cet hyperellipsoïde :

$$\tilde{X} \sigma^{-1} X = 1 \quad (17)$$

où  $X = \{ x_1, \dots, x_6 \}$ ,  $\sigma^{-1}$  l'inverse de la matrice  $\sigma$ , et  $\tilde{X}$  la transposée du vecteur X. On déduit la matrice  $\sigma(1)$  en sortie d'infecteur en fonction de la matrice en entrée  $\sigma(0)$  et de la matrice de transfert T par relation bien connue :

$$\sigma(1) = T \sigma(0) \tilde{T} \quad (18)$$

Le calcul de la matrice de transfert se fait en 3 étapes :

- calcul du transfert entre  $P_0$  et la face avant  $E'$  de l'infecteur.
- calcul du transfert entre les points d'entrée  $E'$  et de sortie  $S'$  de l'infecteur.
- calcul du transfert entre  $S'$  et le plan  $P_1$ . Ces calculs se font dans le système d'axes de l'infecteur dans lequel les équations du mouvement ont été étudiées.

### III.b - Transfert entre le plan $P_0$ (point O) et $E'$ (point 2) :

Dans cette région le champ magnétique demeure constant puisque l'on a pris  $P_0$  le plus proche possible de  $E'$  ; les trajectoires sont donc décrites

par les équations (10) avec  $e_x = e_z = 0$ . Une particule, synchrone en  $P_0$  avec la particule moyenne et définie en  $P_0$  par les conditions initiales  $(\delta x_0, \delta x_0', \delta y_0, \delta y_0', \delta z_0')$ , atteindra donc la face avant de l'infecteur au temps  $\bar{\tau}_2 + \delta\tau_2$  avec les écarts suivants par rapport à la trajectoire moyenne (eqs .10) :

$$\delta x_2 = \delta x_0 + \delta x_0' \sin \bar{\tau}_2 - \delta y_0' (1 - \cos \bar{\tau}_2) \quad 19.a$$

$$\delta x_2' = \delta x_0' \cos \bar{\tau}_2 - \delta y_0' \sin \bar{\tau}_2 \quad 19.b$$

$$\delta y_2 = \delta y_0 + \delta x_0' (1 - \cos \bar{\tau}_2) + \delta y_0' \sin \bar{\tau}_2 \quad 19.c$$

$$\delta y_2' = \delta x_0' \sin \bar{\tau}_2 + \delta y_0' \cos \bar{\tau}_2 \quad 19.d$$

$$\delta z_2 = \bar{\tau}_2 \delta z_0' + \bar{z}_0' \delta \bar{\tau}_2 \quad 19.e$$

$$\delta z_2' = \delta z_0' \quad 19.f$$

Les quantités  $\bar{Q}$  se réfèrent à la trajectoire moyenne. En particulier  $\bar{z}_0' = -\rho$ :

L'écart de temps de transit  $\delta\tau_2$  entre  $P_0$  et  $E'$  est obtenu à partir de la condition (8), qui conduit à la contrainte suivante :

$$e_x \delta x_2 + e_z \delta z_2 = 0 \quad (20)$$

$$\text{soit :} \quad e_x \delta x_0 + e_z (\bar{\tau}_2 \delta z_0' - \rho \delta \tau_2) = 0 \quad (21)$$

Négligeant les termes supérieurs au 1er ordre (rappelons que le temps de transit moyen  $\bar{\tau}_2$  est un infiniment petit du 1er ordre), et compte tenu des relations 13.c et 13.d, on obtient finalement les relations entre les vecteurs  $\{\delta x_0, \delta x_0', \delta y_0, \delta y_0', \delta z_0, \delta z_0', \delta \tau_0\}$  et le vecteur  $\{\delta x_2, \delta x_2', \delta y_2, \delta y_2', \delta z_2, \delta \tau_2\}$

$$\begin{pmatrix} \delta x_2 \\ \delta x_2' \\ \delta y_2 \\ \delta y_2' \\ \delta z_2 \\ \delta \tau_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \gamma/\rho s & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta x_0' \\ \delta y_0 \\ \delta y_0' \\ \delta z_0' \\ \delta \tau_0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

où l'on pose :  $\gamma = \frac{\pi}{2} - s = \sin \gamma$ ,  $c = \cos \gamma$  et  $t = \tan \gamma$ .

III.c - Transfert entre E' (point 2) et S' (point 3) :

Une trajectoire quelconque, synchrone avec la trajectoire centrale au plan d'entrée E' et y présentant des écarts  $\{ \delta x_2, \dots, \delta z_2' \}$  par rapport à la trajectoire centrale, aboutira au plan de sortie avec le transit  $\bar{\tau} + \delta\tau_3$  et des écarts  $\{ \delta x_3, \dots, \delta z_3' \}$  fournis par les équations (10) et (12) :

$$\delta x_3 = x(\bar{\tau} + \delta\tau_3) - \bar{x}(\bar{\tau}) \quad \text{etc...}$$

Après un développement limité au 1er ordre, ceci conduit à :

$$\delta x_3 = e_x \sin \bar{\tau} \delta\tau_3 + \delta x_2 + \delta x_2' \sin \bar{\tau} - \delta y_2' (1 - \cos \bar{\tau}) \quad 23.a$$

$$\delta x_3' = e_x \cos \bar{\tau} \delta\tau_3 + \delta x_2' \cos \bar{\tau} - \delta y_2' \sin \bar{\tau} \quad 23.b$$

$$\delta y_3 = e_x (1 - \cos \bar{\tau}) \delta\tau_3 + \delta y_2 + \delta x_2' (1 - \cos \bar{\tau}) + \delta y_2' \sin \bar{\tau} \quad 23.c$$

$$\delta y_3' = e_x \sin \bar{\tau} \delta\tau_3 + \delta x_2' \sin \bar{\tau} + \delta y_2' \cos \bar{\tau} \quad 23.d$$

$$\delta z_3 = (e_z \bar{\tau} - \rho) \delta\tau_3 + \bar{\tau} \delta z_2' + \delta z_2 = \delta z_2 + \bar{\tau} \delta z_2' \quad (\text{en raison de l'équation 13.d}) \quad 23.e$$

$$\delta z_3' = e_z \delta\tau_3 + \delta z_2' \quad 23.f$$

L'écart  $\delta\tau_3$  de temps de transit s'obtient en tenant compte de la relation (9) qui impose :

$$e_x \delta x_3 + e_z \delta z_3 = 0 \quad (24)$$

On obtient ainsi en se limitant au 1er ordre :

$$\delta\tau_3 = \frac{i}{\rho} \{- 2s \delta x_2' + 2st \delta y_2' - 2t \delta z_2'\} \quad (25)$$

Reportant l'expression (25) dans les relations (23), on obtient facilement le transfert interne à l'infecteur, entre le vecteur  $\{ \delta x_2, \delta x_2', \delta y_2, \delta y_2', \delta z_2, \delta\tau_2 \}$  et le vecteur  $\{ \delta x_3, \delta x_3', \delta y_3, \delta y_3', \delta z_3, \delta z_3', \delta\tau_3 \}$  :



$$\begin{pmatrix} \delta x_3 \\ \delta x_3' \\ \delta y_3 \\ \delta y_3' \\ \delta z_3 \\ \delta z_3' \\ \delta \tau_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & (st-s/t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2t & -2st & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2s & 0 \\ -\gamma/s & 0 & 0 & 0 & 2\gamma & 0 \\ 0 & -s/\gamma & 0 & st/\gamma & 1-t/\gamma & 0 \\ 0 & -2s/\rho & 0 & 2st/\rho & -2t/\rho & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta x_2 \\ \delta x_2' \\ \delta y_2 \\ \delta y_2' \\ \delta z_2 \\ \delta z_2' \\ \delta \tau_2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

III.d - Transfert entre S' (point 3) et un plan perpendiculaire au plan médian (point 4) :

Le calcul du transfert entre la face avant S' de l'injecteur et le plan P<sub>1</sub> est un cas particulier du transfert entre S' et un plan quelconque perpendiculaire au plan médian du cyclotron

Nous traitons d'abord ce cas général. Un tel plan est représenté dans le repère de l'injecteur par l'équation suivante :

$$ux + vy + w = 0 \quad (27)$$

Le temps de transit entre S' et ce plan, désigné par  $\bar{\beta}$  est racine de l'équation :

$$\bar{u}_3 + v\bar{y}_3' + w + (\bar{u}_3' + v\bar{y}_3') \sin \bar{\beta} + (u\bar{x}_3'^2 - v\bar{y}_3'^2) (1 - \cos \bar{\beta}) = 0 \quad (28)$$

où  $\bar{x}_3$ ,  $\bar{y}_3$ ,  $\bar{x}_3'$  et  $\bar{y}_3'$  sont les coordonnées et les pentes du point n°3 de la trajectoire moyenne au plan de sortie (eqs.12.a et 12.b). L'équation (28) exprime simplement l'intersection du cercle moyen d'injection avec le plan (eq.27).

En appliquant la même méthode qu'au § III.c, on peut montrer que l'écart de temps de transit par rapport à  $\bar{\beta}$  pour une trajectoire quelconque synchrones avec la particule moyenne en S', s'écrit :

$$\delta\beta = A_1 \delta x_3 + A_2 \delta x_3' + A_3 \delta y_3 + A_4 \delta y_3' \quad (29)$$

où l'on a posé :

$$A_1 = -u/D \quad (30.a)$$

$$A_2 = -(u \sin \bar{\beta} + v(1 - \cos \bar{\beta})/D \quad (30.b)$$

$$A_3 = -v/D \quad (30.c)$$

$$A_4 = (u(1 - \cos \bar{\beta}) - v \sin \bar{\beta})/D \quad (30.d)$$

$$D = au + bv \quad (30.e)$$

$$a = \bar{x}'_3 \cos \bar{\beta} - \bar{y}'_3 \sin \bar{\beta} = \rho \cos \left( \frac{\bar{\tau}}{2} + \bar{\beta} \right) \quad (30.f)$$

$$b = \bar{x}'_3 \sin \bar{\beta} + \bar{y}'_3 \cos \bar{\beta} = \rho \sin \left( \frac{\bar{\tau}}{2} + \bar{\beta} \right) \quad (30.g)$$

Dans ces conditions, on déduit des équations 10, en se limitant au 1er ordre, le transfert entre S' et un plan P d'équation  $ux + vy + w = 0$  (méthode analogue à celle utilisée au III.c) :

$$\begin{bmatrix} \delta x_4 \\ \delta x'_4 \\ \delta y_4 \\ \delta y'_4 \\ \delta z_4 \\ \delta z'_4 \\ \delta \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+aA_1 & \sin \bar{\beta} + aA_2 & aA_3 & \cos \bar{\beta} - 1 + aA_4 & 0 & 0 & 0 \\ -bA_1 & \cos \bar{\beta} - bA_2 & -bA_3 & -\sin \bar{\beta} - bA_4 & 0 & 0 & 0 \\ bA_1 & 1 - \cos \bar{\beta} + bA_2 & 1 + bA_3 & \sin \bar{\beta} + bA_4 & 0 & 0 & 0 \\ aA_1 & \sin \bar{\beta} + aA_2 & aA_3 & \cos \bar{\beta} + aA_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta x_3 \\ \delta x'_3 \\ \delta y_3 \\ \delta y'_3 \\ \delta z_3 \\ \delta z'_3 \\ \delta \tau_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

### III.e - Transfert entre S' (point 3) et le plan P<sub>1</sub>

L'expression (31) s'applique immédiatement à un plan P<sub>1</sub> (SYZ) perpendiculaire au cercle d'injection. Un tel plan coupe l'axe Oy au point C, centre de courbure (x<sub>c</sub>, y<sub>c</sub>) du cercle moyen d'injection, et fait un angle  $\bar{\beta}$  avec la droite CS' (fig.4). Les valeurs de u et v (eq.27) pour ce plan P<sub>1</sub> sont :

$$u = \cos \left( \frac{\bar{\tau}}{2} + \bar{\beta} \right) \quad (32.a)$$

$$v = \sin \left( \frac{\bar{\tau}}{2} + \bar{\beta} \right) \quad (32.b)$$

$$A_1 = \frac{\cos(\frac{\bar{\gamma}}{2} + \bar{\beta})}{\rho \cos \bar{\beta}} = -\frac{c}{\rho} + \text{terme du 1er ordre en } \bar{\beta} \quad (33.a)$$

$$A_2 = \frac{\sin(\frac{\bar{\gamma}}{2} + \bar{\beta}) - \sin \gamma}{\rho \cos \bar{\beta}} = 0 + \text{ " " " " " " } \quad (33.b)$$

$$A_3 = \frac{\sin(\frac{\bar{\gamma}}{2} + \bar{\beta})}{\rho \cos \bar{\beta}} = -\frac{s}{\rho} + \text{ " " " " " " } \quad (33.c)$$

$$A_4 = \frac{\cos \gamma - \cos(\frac{\bar{\gamma}}{2} + \bar{\beta})}{\rho \cos \bar{\beta}} = 0 + \text{ " " " " " " } \quad (33.d)$$

Dans les expressions (33) des quantités  $A_n$ , on peut en effet négliger les termes du 1er ordre (et plus) en  $\bar{\beta}$ ; car il- conduisent dans l'expression (31) à des termes du 2ème ordre, une fois multipliés par les écarts  $\{\delta x_3, \dots\}$ . Les composants, dans le repère de l'inflexeur, des écarts relatifs au plan  $F_1(\bar{\beta}=0)$ , s'expriment donc à l'aide de (31), compte tenu des relations 32 et 33 :

$$\begin{bmatrix} \delta x_4 \\ \delta x_4 \\ \delta y_4 \\ \delta y_4 \\ \delta z_4 \\ \delta z_4 \\ \delta \bar{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & 0 & -sc & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sc & 1 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sc & 0 & c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c^2 & 0 & -sc & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c/\rho & 0 & -s/\rho & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta x_3 \\ \delta x_3 \\ \delta y_3 \\ \delta y_3 \\ \delta z_3 \\ \delta z_3 \\ \delta \tau_3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Le passage aux composants dans le trièdre de Serret-Frenet  $SXYZ$  de ces écarts, s'obtient en appliquant à cette matrice (relation 34) une rotation d'angle  $\frac{\bar{\gamma}}{2}$  représentée par la matrice  $D(\frac{\bar{\gamma}}{2})$  dont la sous matrice  $4 \times 4$   $D_s(\frac{\bar{\gamma}}{2})$  est donnée par :

$$D_s \left( \frac{\bar{I}}{2} \right) = \begin{pmatrix} c & 0 & s & 0 \\ 0 & c & 0 & s \\ -s & 0 & c & 0 \\ 0 & -s & 0 & c \end{pmatrix} \quad (35)$$

On obtient ainsi l'expression des écarts transverse en sortie, exprimés dans le trièdre de Serret-Frenet (on posera  $\delta\tau_u = \delta\beta$ ) :

$$\begin{pmatrix} \delta x_u \\ \delta x_u' \\ \delta y_u \\ \delta y_u' \\ \delta z_u \\ \delta z_u' \\ \delta \tau_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ -s & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & -s & -s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c}{\rho} & 0 & -\frac{s}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta x_3 \\ \delta x_3' \\ \delta y_3 \\ \delta y_3' \\ \delta z_3 \\ \delta z_3' \\ \delta \tau_3 \end{pmatrix} \quad (36)$$

La matrice de transfert complète reliant les mouvements transverse en entrée et en sortie, au sens défini au §III.a, s'obtient par produits des matrices définies dans les relations 22, 26 et 36 soit :

$$\begin{pmatrix} \delta x_u \\ \delta x_u' \\ \delta y_u \\ \delta y_u' \\ \delta z_u \\ \delta z_u' \\ \delta \tau_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -s & 0 & c & 2s & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & -s & c-st & t & 0 & 0 \\ -\gamma/s & 0 & 0 & 0 & 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -s/\gamma & 0 & st/\gamma & 1-t/\gamma & 0 & 0 \\ (\gamma/s-c)/\rho & -2s/\rho & -s/\rho & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta x_0 \\ \delta x_0' \\ \delta y_0 \\ \delta y_0' \\ \delta z_0 \\ \delta z_0' \\ \delta \tau_0 \end{pmatrix} \quad (37)$$

### III.f - Matrice T de transfert de l'infecteur entre P<sub>0</sub> et P<sub>1</sub>

Les deux premières lignes de la matrice précédente (eq.37) indiquent simplement que l'on a calculé les écarts transverses dans le plan S YZ ( $\delta x_4 = 0$ ) et que l'énergie initiale est totalement restituée à la sortie de l'infecteur ( $\delta x_4' = -\delta z_0'$ , le signe provenant du changement d'orientation des axes Oz et SX par rapport à la direction du mouvement). En d'autres termes les vecteurs X(0) et X(1) (eqs.14 et 15) suffisent à déterminer complètement l'état d'une trajectoire respectivement en entrée et en sortie.

La matrice T (eq.16) reliant ces deux vecteurs, se déduit de (37) en remarquant qu'en entrée et en sortie de l'infecteur on a :

$$\frac{d}{dt} = v = \rho \frac{d}{ds} \quad (38)$$

et que :

$$\delta z_0' = -\delta \rho \quad (39)$$

Dans ces conditions, la matrice de transfert de l'infecteur s'écrit finalement :

$$X(1) = T. X(0) \quad \text{soit:}$$

$$T = \begin{pmatrix} -s & 0 & c & 2ps & 0 & 0 \\ -c/\rho & 0 & -s/\rho & c-st & 0 & -t \\ -\gamma/s & 0 & 0 & 0 & 0 & -2p\gamma \\ 0 & -s/\gamma & 0 & st/\gamma & 0 & t/\gamma-1 \\ (\gamma/s-c)/\rho & -2s & -s/\rho & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

On vérifie que  $\det(T) = 1$ , c'est-à-dire que l'émittance totale (définie par rapport à la trajectoire moyenne et dans un plan perpendiculaire à celle-ci est conservée à travers l'infecteur (eq.18).

La matrice décrivant le transfert "en arrière" est égale à :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -s/\gamma & 0 & 0 & -2ps \\ \frac{st}{\rho} & s & -\frac{st}{\gamma\rho} & -\frac{\gamma}{s} & 0 & c - \frac{\gamma}{s} \\ c-st & -2ps & \frac{st}{\gamma} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s}{\rho} & c & -\frac{s}{\gamma\rho} & 0 & 0 & -s \\ -\frac{t}{\rho} & 0 & (1 - \frac{t}{\gamma})/\rho & -2\gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

#### IV - ACCEPTANCE DU MIROIR ELECTROSTATIQUE

Le passage d'un faisceau à travers le miroir électrostatique doit satisfaire à des contraintes liées à la forme de cet inflecteur.

- a - Il ne faut pas que les trajectoires à l'intérieur de l'inflecteur rencontrent l'électrode haute tension destinée à dévier le faisceau de 90°, électrode placée parallèlement à la face avant d'entrée/sortie, à une distance D en arrière de celle-ci. On peut par exemple exiger qu'aucune trajectoire ne s'écarte à l'intérieur du miroir de moins de D/4 de la face avant d'entrée/sortie.
- b - Si la face avant est constituée d'une grille, il n'y a a priori aucune contrainte sur la dimension du faisceau à l'entrée et à la sortie de l'inflecteur. L'utilisation d'une grille est actuellement l'option retenue par le projet d'Orsay, étant donné que le faisceau sort de l'inflecteur d'une manière relativement rasante (voir les valeurs de  $\beta_s$  au tableau 2).
- c - On peut éventuellement imposer que l'amplitude des trajectoires parallèlement à la face avant soit limitée de manière à éviter des inhomogénéités de champ électrique liées aux effets de bord. Comme on dispose en effet de peu de place au centre d'un cyclotron compact, les dimensions du miroir sont relativement réduites.
- d - Comme le champ électrique est statique l'acceptance en phase est bien évidemment illimitée.

La condition a) est a priori la plus restrictive. Elle définit une région d'acceptance relative aux composants du vecteur  $X(o)$  d'entrée (éq.14). Le calcul de cette région est conduit de la manière suivante. Reprenant les notations du chapitre II, la distance  $\bar{d}(\tau)$  de la trajectoire moyenne à la face d'entrée (voir eq.8) est égale à :

$$\bar{d}(\tau) = \frac{e_x \bar{x}(\tau) + e_z \bar{z}(\tau) - h a_z}{e_x^2 + e_z^2} \quad (42)$$

Il est aisé de montrer que cette distance est maximum pour un temps de transit  $\tau_M$  voisin de  $\bar{\tau}/2$ , solution de l'équation :

$$\sin \tau_M + (\tau_M - \bar{\tau}) \operatorname{tg}^2 \alpha = 0 \quad (43)$$

où  $\operatorname{tga}$  est fourni par l'éq. 13.a.

On obtient la distance maximum  $\bar{d}_M$  pour la trajectoire moyenne en reportant  $\tau_M$  solution de (43) dans l'éq. 42. Une valeur approximative de  $\bar{d}_M$  est obtenue en faisant l'approximation  $\tau_M \approx \bar{\tau}/2$ , soit :

$$\bar{d}_M \approx - \frac{\rho \gamma}{4s \sqrt{s^2 + \gamma^2}} (1-c)(1+3c) \quad (44)$$

où l'on a posé :  $\gamma = \frac{\bar{\tau}}{2}$   $s = \sin \gamma$   $c = \cos \gamma$

On voit ainsi que  $\bar{d}_M$  ne peut jamais dépasser 21% de la valeur du rayon d'injection (soit dans la pratique de 2 à 3 mm), valeur atteinte pour un temps de transit maximum  $\bar{\tau} = \pi$ .

Ayant ainsi fixé l'écart  $D \approx 2\bar{d}_M$  entre les deux électrodes constituant l'inflexeur, on peut montrer par une méthode analogue à celle développée au chapitre III, que la "demi-épaisseur" maximum  $\Delta d$  d'un faisceau à l'intérieur de l'inflexeur est reliée aux écarts  $X(o)$  en entrée (éq. 14) par la relation :

$$\Delta d = \rho \sin \tau_M \cos \alpha \cdot x'_o - \rho(1 - \cos \tau_M) \cos \alpha \cdot y'_o - \rho \tau_M \sin \alpha \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right)_o \quad (45)$$

La condition  $\Delta d < \Delta d_M$  (on peut prendre par exemple  $\Delta d_M = \bar{d}_M/2$ ), impose que le vecteur  $X(o)$  soit à l'intérieur d'une région de l'espace de phase délimitée par les deux plans (dans le sous-espace de phase  $x'_o, y'_o, \left( \frac{\delta \rho}{\rho} \right)_o$ )

$$\Delta d = \Delta d_M \quad (46.a)$$

$$\Delta d = -\Delta d_M \quad (46.b)$$



V - APPLICATION AU PROJET D'ORSAY

Les caractéristiques générales du projet d'Orsay, le calcul d'une géométrie centrale fixe et compatible avec le fonctionnement de trois inflecteurs type miroir électrostatique associés chacun aux trois modes harmoniques envisagés, sont décrits dans la référence MAN 83. Les caractéristiques (MAN 83) de ces trois inflecteurs sont reportés au tableau 2.

Tableau 2

Paramètres du miroir	a)	b)	h = 3	h = 4
	h = 2	h = 2		
$p = \frac{Z_i}{\Lambda} B^2$	5.168	4.404	3.930	2.693
temps de transit (°)	120.733	102.884	109.349	95.144
rayon d'injection (cm)	1.058	1.058	1.095	1.514
angle $\tau_M$ (éq. 43) (°)	53.266	47.340	49.632	44.368
élongation max. $d_M$ (éq.42) (cm)	0.299	0.278	0.297	0.379
angle de sortie $\beta_B$ (§II.c) (deg)	67.6	62.0	63.9	59.7
$E_z$ (max) (éq.13.e) (kV/cm)	25.0	25.0	21.8	23.7
Inclinaison du miroir (éq.13a) (°)	39.5	41.1	40.5	41.6

- a) première valeur considérée dans MAN 83 compatible avec les caractéristiques maximum du projet.
- b) deuxième valeur considérée dans MAN 83, tenant compte de la limitation à l'éjection  $v_z < 0.1$  pour les ions  $\frac{Z_i}{\Lambda} = 0.37$ .

Dans la référence MAN 83, on a calculé l'acceptance géométrique et en phase due à la géométrie centrale, acceptance définie à l'entrée du miroir. On a ainsi constaté qu'en ce qui concerne les acceptances géométriques on pouvait passer des faisceaux d'émissions projetés dans les plans  $(x_0, x'_0)$  et  $(y_0, y'_0)$  variant de  $110^\circ$  à  $200^\circ$  mmomrad (selon les harmoniques ; voir fig. 5),

mais que les trajectoires correspondant à ces acceptances initialement synchrones à l'entrée du miroir, présentaient en début d'accélération un large étalement en phase H.F. introduit par le miroir. Cette situation est certainement défavorable à l'obtention de bonnes qualités de faisceau à l'éjection. Il faudra donc en entrée de miroir, limiter l'émittance du faisceau à des valeurs inférieures à celles obtenues dans l'étude de l'acceptance de la géométrie centrale.

Cette limitation est donnée par la relation suivante, déduite de la matrice de transfert du miroir (eq.40) :

$$(\gamma/s - c) \frac{\delta x_0}{\rho} - 2s x'_0 - s \frac{\delta y_0}{\rho} < (\delta \alpha_1)_{\max} \quad (47)$$

où  $(\delta \alpha_1)_{\max}$  est l'ouverture en phase orbitale tolérée en début d'accélération.

Une deuxième limitation sur l'émittance est liée à l'acceptance du miroir lui-même, telle qu'elle a été décrite au §V (eq.45).

Ces deux limitations ont été calculées dans le cadre de l'étude réalisée dans MAN 83, c'est-à-dire en considérant certaines coupes particulières dans l'aperçue d'acceptance liée à la géométrie centrale, à savoir :

$$a) \delta y_0 = y'_0 = \delta \alpha_0 = \left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)_0 = 0 \quad \text{plan } (\delta x_0, x'_0)$$

$$b) \delta x_0 = x'_0 = \delta \alpha_0 = \left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)_0 = 0 \quad \text{plan } (\delta y_0, y'_0)$$

Cas a) : dans le plan  $(\delta x_0, x'_0)$  considéré dans MAN 83, on a des limitations suivantes (eq. 45 et 47) :

$$|x'_0| < \frac{\Delta d_m}{\rho \sin \tau_M \cos \alpha} \quad (48.a)$$

$$\left| \left( \frac{\gamma}{s} - c \right) \frac{\delta x_0}{\rho} - 2s x'_0 \right| < (\delta \alpha_1)_{\max} \quad (48.b)$$

Cas b) : dans l'autre plan considéré dans MAN 83, on a les limitations suivantes :

$$|y'_0| < \frac{\Delta d_M}{\rho(1-\cos\theta_M) \cos\alpha} \quad (49.a)$$

$$|\delta y_0| < \rho \frac{(\delta\alpha_x)_{\max}}{s} \quad (49.b)$$

Les résultats numériques sont représentés sur la fig.5, où les zones hachurées des 2 ellipses d'acceptance  $(\delta x_0, x'_0)$  et  $(\delta y_0, y'_0)$  sont dues à la limitation  $\Delta\phi_{HF} < 10^\circ$  en sortie d'infecteur. En revanche l'infecteur lui-même (éq.45) ne limite pas les zones d'acceptances calculées dans MAN 83. On constate donc que pour ne pas dépasser en sortie d'infecteur un étalement du faisceau en phase HF de  $10^\circ$  pour  $h = 2, 3$  et  $4$ , il faut limiter la divergence du faisceau en entrée d'infecteur. Ceci est surtout le cas pour le plan  $x_0z$  perpendiculaire au plan de l'infecteur.

Un calcul de trajectoires jusqu'à l'éjection devra montrer si une telle limite  $\Delta\phi_{HF} = 10^\circ$  est nécessaire pour obtenir un faisceau de qualité suffisante (extraction sur un tour, résolution en énergie, regroupement en phase). Il est peut être envisageable de réduire artificiellement l'émittance du faisceau à l'entrée de l'infecteur, en profitant des ventres d'élongation de ce faisceau lors du transport le long de l'axe du cyclotron.

En conclusion, le miroir électrostatique présente des avantages de simplicité et de compacité. Parce qu'il introduit en revanche des fluctuations de temps de transit importantes dues à l'émittance géométrique finie, son acceptance (compte tenu d'une condition  $\Delta\phi_{HF} < 10^\circ$ ) géométrique reste faible. Des sources capables de délivrer des faisceaux intenses de bonne émittance apparaissent comme tout à fait indispensables pour une injection axiale utilisant un miroir électrostatique.

## REFERENCES

- BEL 82 G. Bellomo et al., On the Feasibility of Axial Injection in Superconducting Cyclotrons, MSUCP-39 (March 1982)
- BRO 73 K.L. Brown et al., "Transport, a computer program for designing charged particle beam transport systems", rapport CERN 73-16 (et aussi SLAC 91 et NAL. 91)
- COX 62 A.J. Cox et al., Nucl. Instr. and Meth. 18, 19 (1962) 25
- HAZ 69 N. Hazewindus, Nucl. Instr. and Meth. 76 (1969) 273
- MAN 83 F. Mandrillon et J.P. Schapira, "Etude de la région centrale du projet de Cyclotron compact supraconducteur d'Orsay", rapport interne IPNO-GEPL 83-01
- MUL 67 R.W. Miller, Nucl. Instr. and Meth. 54 (1967) 29
- FAB 68 J.L. Fabot, thèse 1968, Université de Grenoble
- POW 65 W.B. Powell and B.L. Reese, Nucl. Instr. and Meth. 32 (1965) 325
- RYC 81 G.H. Ryckewaert, 9<sup>e</sup> Conférence Internationale sur les Cyclotrons et leurs Applications, Caen (sept. 1981) p.241
- SCH 81a J.P. Schapira, 9<sup>e</sup> Conférence Internationale sur les Cyclotrons et leurs Applications, Caen (sept. 1981) p. 307
- SCH. 81b J.P. Schapira, Transport au premier ordre d'un faisceau injecté le long de l'axe du cyclotron, Rapport interne GEPL-12/81/27
- TAL.65 G. Talalaeff, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Faculté des Sciences d'Orsay (1965)

LEGENDES DES FIGURES

- Fig. 1 - Système d'axes liés à l'infecteur et trajectoire moyenne.
- Fig. 2 - Zones de variation de  $(\rho, \bar{\tau})$  dans le cas des 3 harmoniques considérés pour le projet d'Orsay.
- Fig. 3 - Systèmes d'axes de Serret-Frenet aux points d'entrée (E) et de sortie (S) de l'infecteur.
- Fig. 4 - Projection sur le plan médian de la trajectoire à l'intérieur de l'infecteur (OS') et cercle d'injection (S'S) ; le système d'axe est celui de l'infecteur.
- Fig. 5 - Ellipse d'acceptance associée au mouvement dans le plan médian de la géométrie centrale, pour chacun des 3 harmoniques et déterminée à l'entrée de l'infecteur. Les zones hachurées correspondent à la limitation  $\Delta\phi_{HP} \leq 10^\circ$  (éqs. 48.a et 49.a).

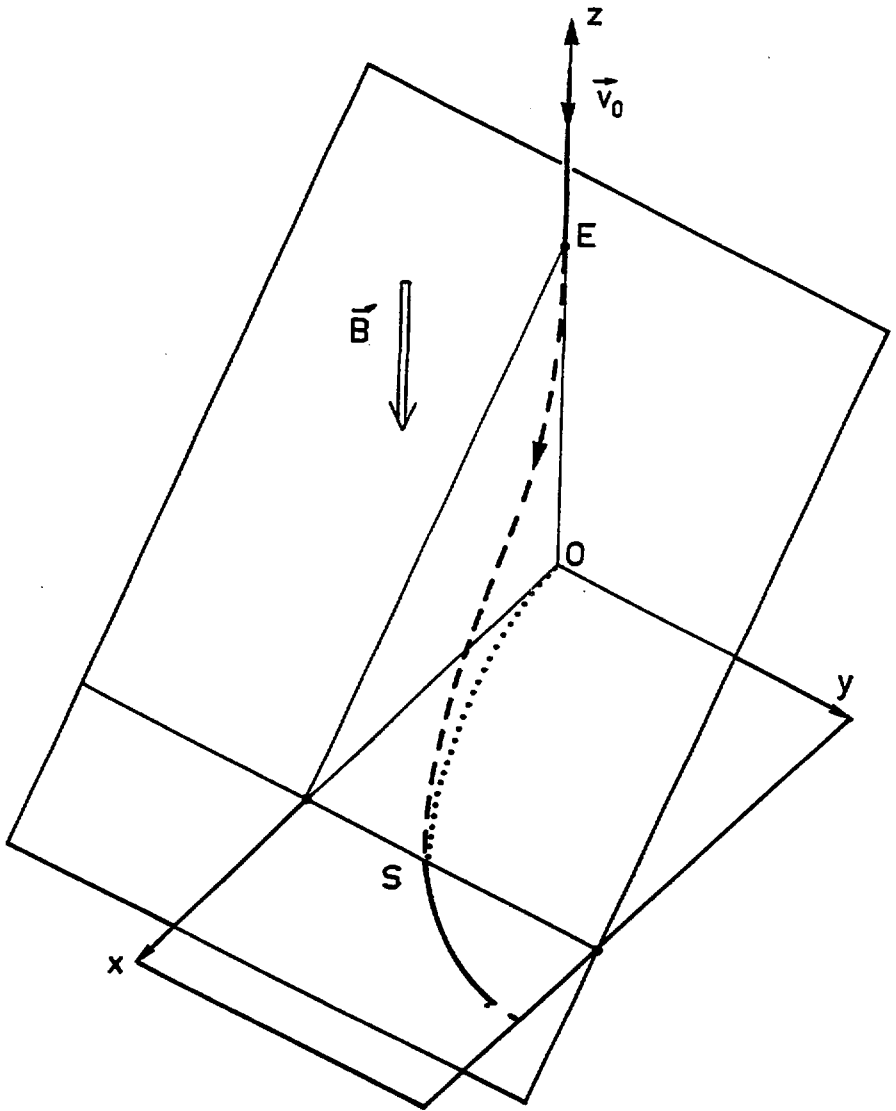


Fig.1

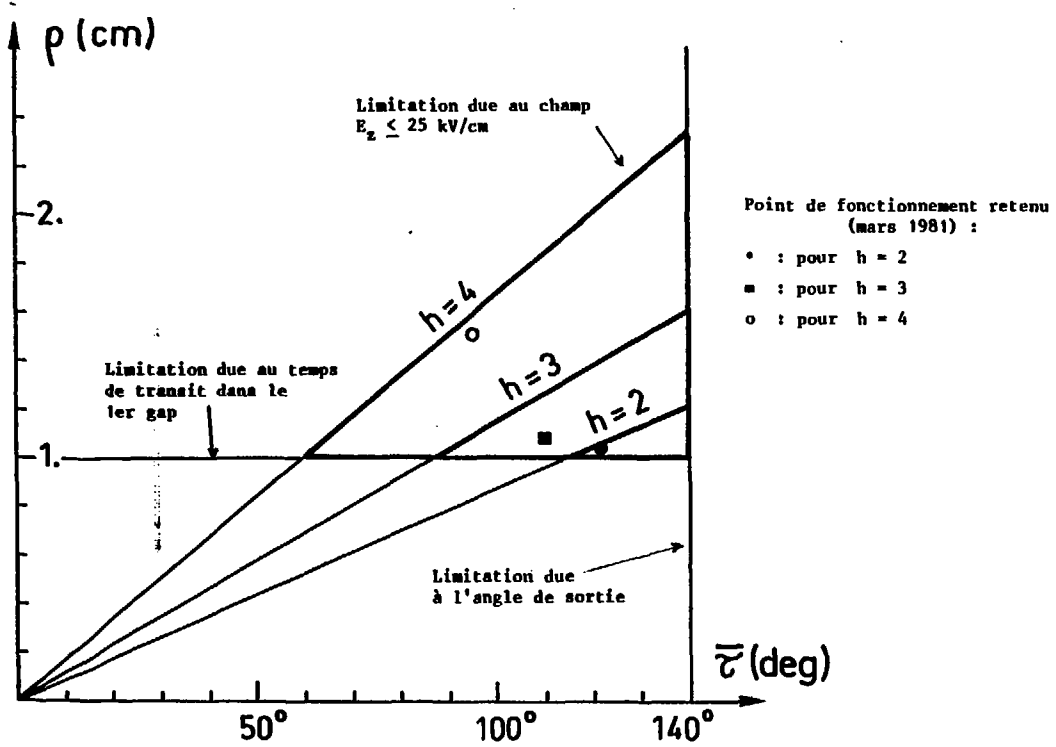


Fig.2

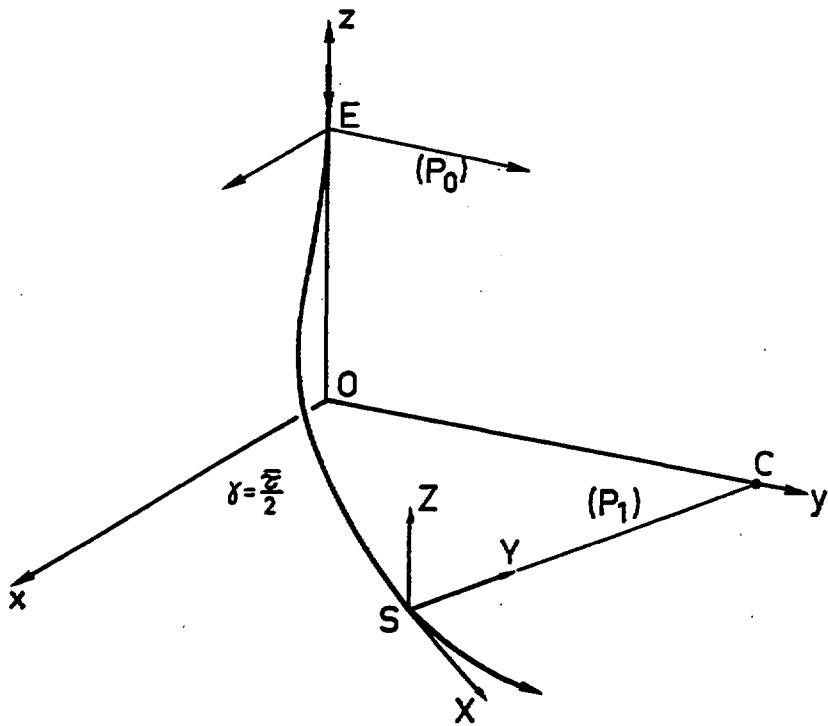


Fig.3



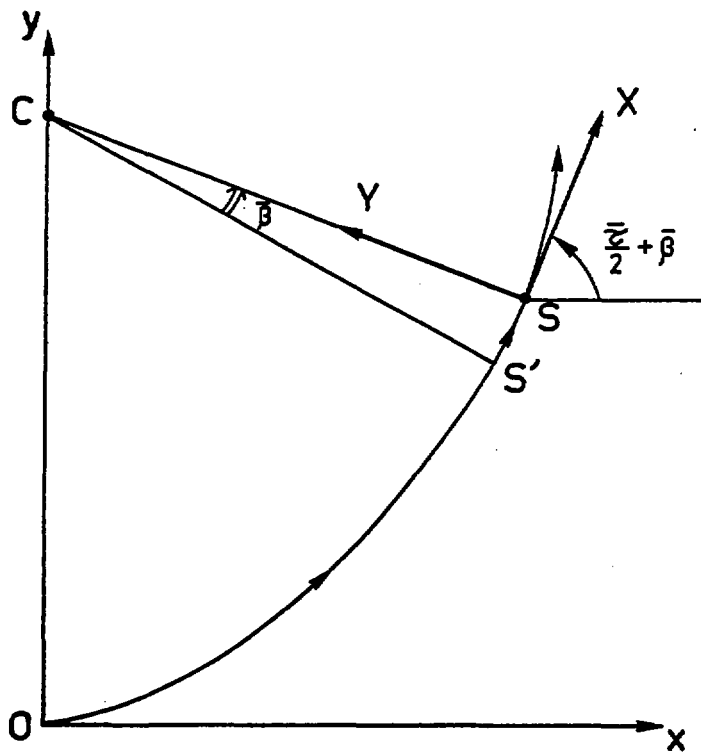


Fig.4

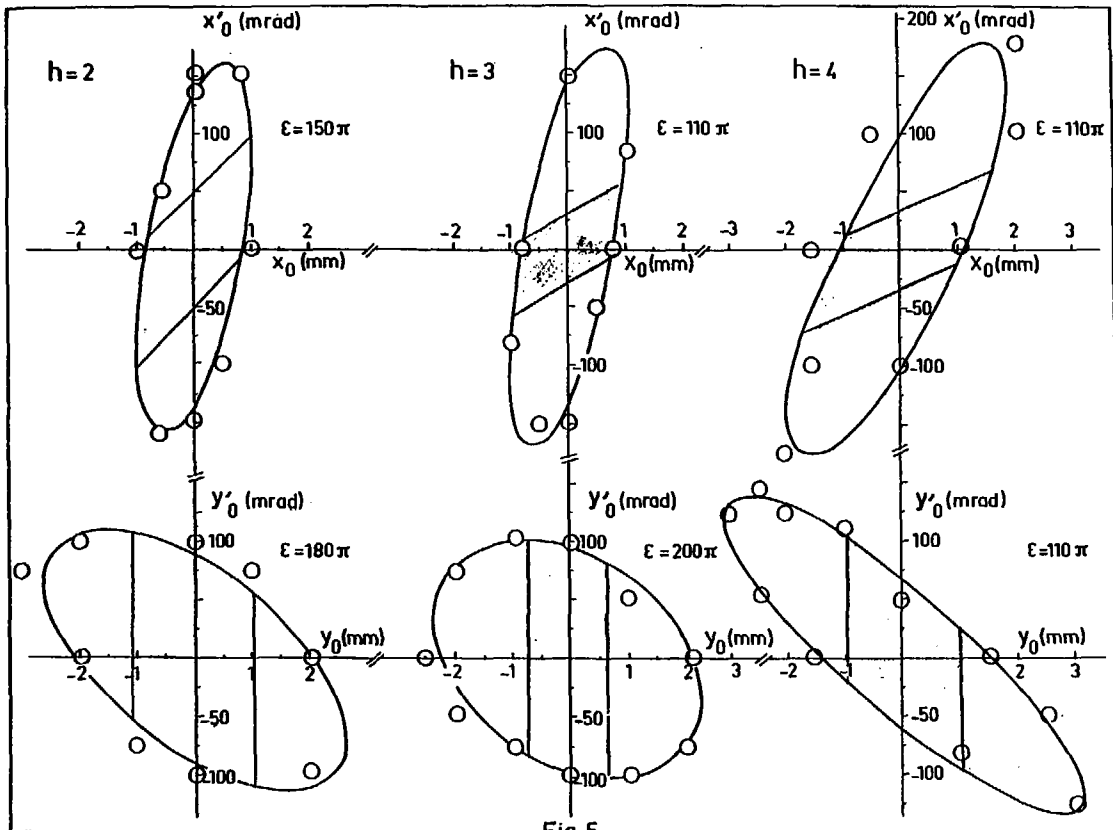


Fig.5