

institut de physique nucléaire

LABORATOIRE ASSOCIÉ A L'IN2P3

FR 8500 201



IPNO. 83-04

E. ERSTA, R. SELLEM, L. TASSAN-GOT,

Analyse du fonctionnement statistique
d'un codeur temps-numérique multistops
de précision 0.5 ns.

UNIVERSITÉ PARIS SUD

IPNO. 83-04

E. FESTA, R. SELLEM, L. TASSAN-GOT,

Analyse du fonctionnement statistique
d'un codeur temps-numérique multistops
de précision 0.5 ns.

E. FESTA, R. SELLEM, L. TASSAN-GOT

ANALYSE DU FONCTIONNEMENT STATISTIQUE D'UN CODEUR
TEMPS-NUMERIQUE MULTISTOPS DE PRECISION 0.5 nS.

Abstract :

This article describes a multistop TDC with a resolution of 0.5 nS and a dead time less than 40 nS. The broadening of measured distributions is analyzed and calculated for the real device having a discrepancy in channel width and working randomly with sliding scale effect.

I - INTRODUCTION

La spectrométrie de masse par temps de vol utilisant les phénomènes de désorption permet l'étude de la désorption simultanée de plusieurs molécules ainsi que l'étude de la fragmentation de certaines d'entre elles dans l'espace d'accélération. Cette méthode, dont l'intérêt a été souligné par divers auteurs^{1,2,3}, est basée sur la mesure précise des temps de vol, en particulier des temps de vol de masses corrélées (étude de fragmentation) et nécessite un convertisseur temps-numérique capable d'enregistrer après un signal de start plusieurs signaux de stop. La gamme de temps d'un tel convertisseur doit s'étendre sur plusieurs dizaines de microsecondes et son temps mort doit être aussi faible que possible afin de pouvoir détecter les masses présentes dans un même événement et dont les temps de vol sont très rapprochés.

D'autre part, la résolution de l'appareil doit être compatible avec la résolution de l'ensemble de l'équipement expérimental et le pas de quantification doit rester constant à mieux que 1%.

Deux convertisseurs temps-numérique de précision 0.650 nS [4] et 1 nS [5] ont été décrits récemment.

Dans cet article, nous décrivons un convertisseur temps-numérique de précision 0.5 nS et de temps mort inférieur à 40 nS basé sur les principes décrits en [5]. Après l'arrivée d'un signal de start, le convertisseur peut enregistrer jusqu'à 15 stops.

La différence de temps entre chaque stop d'un même événement et le start commun est fournie par l'appareil sur 17 bits (64 μ S au maximum), ce qui permet de constituer immédiatement les histogrammes de temps de vol dans une mémoire "add one".

II - RAPPEL DE LA METHODE UTILISEE

Un signal symétrique de période 8 nS est retardé de 0.5 nS, puis de 1 nS etc..., jusqu'à 4 nS, à l'aide de deux lignes à retard connectées aux deux sorties de l'étage symétriseur comme l'indique la fig. 1. On obtient ainsi, en code de Gray, 16 configurations adjacentes (fig. 2). Chacune de ces configurations correspond à un des 16 intervalles de temps dans lesquels a été divisée une période d'Horloge. Lorsque un signal de start ou de stop arrive, une de ces 16 configurations est immédiatement mémorisée dans 8 latches du type ECL 100150. Le huitième signal est utilisé (fig. 3) pour incrémenter un compteur synchrone dont le contenu est transféré à chaque période, donc toutes les 8 nS, dans des bascules D du type ECL 100151. Ce compteur fournit les valeurs 8 nS et ses multiples jusqu'à 64 μ S. Les caractéristiques des lignes à retard et des circuits de réglage des retards sont décrites aux paragraphes (3) et (4) de l'article cité [5], article auquel nous renvoyons également pour les explications concernant la correction de l'erreur d'une période, erreur qui peut se produire lorsque un signal de start ou de stop arrive à l'instant où le code rapide passe de la valeur 7.5 nS à la valeur ϕ .

III - CIRCUIT DOUBLEUR DE FREQUENCE

Le signal symétrique a été obtenu à partir d'un signal d'horloge à quartz de période 8 nS. Ce signal est appliqué à l'entrée "clock" d'un circuit Flip-Flop : en sortie de celui-ci, on obtient un signal symétrique de période 16 nS. Afin d'utiliser une Horloge de fréquence 125 MHz et de limiter à 16 le nombre de configurations de code de Gray, nous avons réalisé, en sortie du circuit symétriseur, un doubleur de fréquence qui ne modifie pas la forme du signal. La fig. 4 montre le principe sur lequel est basé le doubleur.

S_{16} et \bar{S}_{16} sont deux signaux symétriques complémentaires de période 16 nS, S'_{16} et \bar{S}'_{16} ces mêmes signaux retardés de 4 nS. La solution de l'équation logique

$$S_{16} \cdot S'_{16} + \bar{S}_{16} \cdot \bar{S}'_{16}$$

est un signal symétrique, S_8 , de période 8 nS. Notons que ce doubleur de fréquence utilise un seul circuit intégré ECL 100102 (fig. 5). Le gradient de température, pratiquement nul sur une même puce, contribue à minimiser les différences dans les variations des retards introduits par chaque porte. En principe, on devrait avoir toujours $T_1 = T'_1$, $T_2 = T'_2$, indépendamment de la précision sur le retard de 4 nS. Afin de compenser la différence entre T_1 et T_2 , il suffit alors de régler le seuil du circuit latch jusqu'à obtenir $T_1 = T_2$, comme il est montré dans la fig. 6. Ce réglage s'effectue en essayant d'égaliser le nombre N_0 de ϕ et le nombre N_1 de 1 ($N_0 + N_1 \approx 10^5$ coups environ) mémorisés par le circuit latch lorsque les signaux d'un générateur aléatoire viennent le verrouiller. Le seuil est fixé à une valeur telle que la différence $|N_0 - N_1|$ ne dépasse pas 5% de la valeur moyenne. Les largeurs W_0 et W_8 des canaux ϕ et 8 peuvent, de ce fait, s'écarter de la valeur moyenne du canal d'une quantité égale et de signe contraire (fig. 7). La valeur maximale de l'écart peut être estimée, d'après ce que nous venons de dire, à $\pm \frac{0.05}{2} \times 16 = 0.4$ canal. On constate, d'autre part, que les temps de montée de deux périodes successives ainsi que les temps de descente ne sont pas exactement les mêmes, ce qui s'explique par le fait que deux périodes successives ne sont pas générées par le même circuit (fig. 5). La périodicité réelle du signal d'Horloge est, donc, $2T = 16$ nS et, de ce fait, la méthode de mesure que nous venons de décrire conduit à égaliser, avec la précision indiquée, les sommes $T_1 + T'_1$ et $T_2 + T'_2$.

Soit 2δ la valeur absolue de la différence entre deux périodes successives et $2\delta'$ la valeur absolue de la différence entre deux demi-périodes équivalentes prises dans deux périodes successives. On voit facilement que les largeurs des canaux ϕ et 8 fluctuent de $\pm (\delta - \delta')$ et de $\pm \delta'$, par rapport à leurs largeurs moyennes respectives lorsqu'on passe d'une période d'Horloge à la suivante (fig. 8 et fig. 9). Or, une même différence de temps est calculée à partir de valeurs numériques différentes. L'effet d'échelle glissante qui en résulte [5] a pour conséquence de conserver le centre de gravité des distributions mesurées, même lorsque les largeurs de canaux ne sont pas identiques (appendice B). Les fluctuations δ et δ' n'affectent donc pas la position du centre de gravité. Elles contribuent à l'élargissement résultant du codage, comme nous le verrons plus loin. Avant d'examiner plus en détail ces effets

d'élargissement, nous allons apporter quelques précisions sur le fonctionnement statistique du codeur.

III.1 - FONCTIONNEMENT STATISTIQUE D'UN CODEUR IDEAL

Dans ce qui suit, l'unité de temps choisie est le $\frac{1}{16}$ de la période moyenne, c'est-à-dire 0.5 nS.

Les instants d'arrivée des impulsions de START et de STOP sont aléatoires par rapport au signal d'Horloge. De ce fait, si le codeur était idéal, c'est-à-dire si tous les canaux avaient la même largeur, une différence de temps " $n+x$ " (" n " entier, $0 \leq x < 1$) serait codée par un nombre " n " ou un nombre " $n+1$ ". Les probabilités P_n de coder n et P_{n+1} de coder $n+1$ sont des fonctions linéaires de x , comme le montre la fig. 10. Ceci se traduit par un élargissement des distributions mesurées, tandis que, quelle que soit la forme de ces distributions, la position du centre de gravité est conservée. Ainsi, une fonction de Dirac $\delta(n+x-t)$ est transformée, après codage, en une distribution répartie sur deux canaux de variance $\sigma^2 = x(1-x)$ toujours centrée en t_0 . D'une façon générale, dans le cas de fonctions lentement variables, c'est-à-dire de fonctions qui varient peu pour un accroissement de la variable égal au pas de quantification, la variance après codage est accrue d'une quantité égale à $\frac{1}{6}$. (voir appendice A).

III.2 - ELARGISSEMENT DU AU DOUBLEUR DE FREQUENCE ET A L'ECHELLE GLISSANTE

Afin de mesurer les élargissements des distributions dus au bruit et aux inégalités de largeur des canaux, nous avons codé 32 valeurs successives de différences de temps égales exactement à un nombre entier de canaux car, comme nous venons de le voir, de telles différences ne sont pas affectées par le fonctionnement statistique du codeur. La valeur de σ^2 obtenue pour chacune des 32 différences mesurées résulte alors de l'effet d'élargissement dû au bruit et aux inégalités de largeur des canaux.

Les mesures de σ^2 ont été faites en appliquant à l'entrée start du codeur un signal de générateur et à l'entrée stop ce même signal retardé. Le retard a été ajusté à l'aide d'une ligne à retard à air GENERAL RADIO Type 874-LK20 afin que le centre de gravité de la distribution mesurée coïncide exactement (à mieux que 1%/ σ_0) avec un nombre entier de canaux. La courbe donnant les variations de σ^2 en fonction de la différence de temps mesurée (fig. 11) présente deux minima, $\sigma_{M1}^2 = 0.03$ à $t = 160$ canaux et $\sigma_{M2}^2 = 0.24$ à $t = 176$ canaux. Or, pour ces deux valeurs de "t", l'élargissement des distributions serait nul si deux périodes successives du signal d'Horloge étaient identiques et s'il n'y avait pas de bruit, car la différence mesurée est exactement égale à un multiple entier de 16.

$\sigma_{M1}^2 = 0.03$ se trouve au canal 160, qui est un multiple pair de 16. La différence 160 est donc calculée avec deux valeurs identiques du code rapide prises dans deux périodes du signal d'Horloge de même parité. La mesure de cette différence n'est donc pas affectée par les inégalités entre deux périodes successives du signal d'Horloge ni par les inégalités des largeurs des canaux. L'élargissement est imputable uniquement au bruit : $\sigma_{M1}^2 = \sigma_{\text{BRUIT}}^2$. Par contre, le minimum $\sigma_{M2}^2 = 0.24$ se trouve au canal 176 qui est un multiple impair de 16. La différence est donc calculée avec deux valeurs du code rapide prises dans deux périodes du signal d'Horloge de parité différente. Or, ces deux valeurs ne sont pas toujours identiques car les largeurs des canaux ϕ et δ fluctuent d'une période à la suivante, comme nous l'avons indiqué au paragraphe 3. Le minimum σ_{M2}^2 résulte donc de la contribution du bruit et de ces fluctuations.

L'élargissement dû à celles-ci peut être calculé à partir des valeurs δ et δ' précédemment définies. Pour cela, considérons une échelle de temps infinie divisée en intervalles, ou canaux, indexés par K entier, de largeur $\dots W_{-1}, W_0, W_1, \dots, W_k, \dots$. Soit i l'intervalle correspondant à l'instant d'arrivée d'un signal de start, et f l'intervalle correspondant à l'instant d'arrivée d'un signal de stop. Soient enfin x_i et x_f respectivement, les distances entre le début des intervalles i et f et l'instant précis d'arrivée des signaux de start et de stop (fig. 12). f et x_f sont

fixés par i , x_i et par la différence de temps t entre le signal de stop et le signal de start .

On a :

$$x_f = t + x_i - \sum_{k=i}^{f-1} W_k \quad (1)$$

$$0 \leq x_i \leq W_f \quad (2)$$

Supposons t et i fixés et appelons $\Delta t \leq W_i$ la plage de temps pour laquelle le résultat du codage est $N = f - i$. La probabilité P_N de coder N est, par définition :

$$P_N = \frac{\Delta t}{W_i}$$

L'expression de Δt peut être établie facilement en remarquant que, lorsque $t > \sum_{k=i}^{f-1} W_k$ (fig.12bis), $\Delta t = \text{MIN}(W_i, \sum_{k=i}^{f-1} W_k - t)$, et que, lorsque $t < \sum_{k=i}^{f-1} W_k$ (fig.12ter), la valeur de Δt est diminuée de la quantité $\sum_{k=i}^{f-1} W_k - t$. L'expression générale de Δt devient donc :

$$\Delta t = \text{MIN}(W_i, \sum_{k=i}^{f-1} W_k - t) - \text{Max}(0, \sum_{k=i}^{f-1} W_k - t) \quad (3)$$

Si on connaît la largeur réelle de chaque intervalle, on peut calculer, à l'aide de (1), (2), (3) la probabilité d'obtenir pour chaque différence de temps une valeur de codage donnée, donc l'élargissement introduit par l'appareil.

Nous avons mesuré, avec une méthode statistique décrite en [5], les largeurs réelles des 16 intervalles de temps dans lesquels a été divisé une période du signal d'Horloge. Ces largeurs, exprimées en seizièmes de période, sont indiquées dans le tableau ci-contre. Δo et Δg sont en fait les largeurs moyennes des intervalles φ et δ obtenues en prenant les valeurs W_o et W_g dans deux périodes successives du signal d'Horloge.

L'échelle de mesure est donc périodique avec une période de 32 intervalles : le calcul de l'élargissement introduit par l'appareil doit prendre en compte les largeurs réelles W_0, W_8, W_{16}, W_{24} estimées à partir des largeurs moyennes Δ_0 et Δ_8 et de leurs fluctuations respectives $\pm(\delta-\delta')$ et $\pm\delta'$ (fig. 13).

$\Delta_0 = 0.56$	$\Delta_8 = 1.34$
$\Delta_1 = 1.34$	$\Delta_9 = 0.93$
$\Delta_2 = 0.92$	$\Delta_{10} = 0.85$
$\Delta_3 = 1.08$	$\Delta_{11} = 0.98$
$\Delta_4 = 1.19$	$\Delta_{12} = 0.86$
$\Delta_5 = 1.02$	$\Delta_{13} = 0.93$
$\Delta_6 = 0.89$	$\Delta_{14} = 1.07$
$\Delta_7 = 1.01$	$\Delta_{15} = 1.01$

Largeurs moyennes réelles des 16 intervalles (canaux) dans lesquels a été divisé une période du signal d'Horloge.

Nous ne connaissons pas les valeurs de ces fluctuations car δ et δ' ne sont pas facilement accessibles à la mesure. Nous pouvons cependant, exprimer σ_{M2}^2 en fonction de δ et de δ' . On obtient facilement (voir appendice C) :

$$\sigma_{M2}^2 = \frac{|\delta| + |\delta - 2\delta'|}{2} = \text{Max}(\delta', \delta - \delta') \text{ avec } \delta > 0$$

Notons que les deux expressions $\sigma_{M2}^2 = \delta'$ et $\sigma_{M2}^2 = \delta - \delta'$ aboutissent, l'une et l'autre, à $\delta < 2\sigma_{M2}^2$.

On peut négliger la contribution du bruit ($\sigma_{BPUIT}^2 \simeq 0.03$) et considérer que σ_{M2}^2 est dûe uniquement aux fluctuations des largeurs Δ_0 et Δ_8 .

Ainsi, à partir de la mesure de σ_{M2}^2 , on peut obtenir différentes valeurs des couples de paramètres δ et δ' qui caractérisent, comme nous l'avons indiqué plus haut, les différences entre deux périodes successives du signal d'Horloge. Ces valeurs de δ et de δ' permettent de calculer les largeurs effectives des 32 canaux et de tracer la courbe de σ^2 calculée en fonction de la différence de temps mesurée.

Le résultat du calcul qui se rapproche le plus des valeurs de σ^2 mesurées est obtenu avec $\delta = 0.1$. Notons qu'on aboutit à des résultats sensiblement identiques en prenant $\delta' = \frac{\sigma^2}{M^2} = 0.24$, ou $\delta' = \delta - \frac{\sigma^2}{M^2} = -0.14$ (fig 14 et 14 bis)

Les courbes des figures 11, 14 et 14 bis ont été tracées sans tenir compte de l'effet d'élargissement dû au fonctionnement statistique du codeur. Une estimation de l'élargissement total introduit par celui-ci a été obtenue en effectuant les calculs de σ^2 avec un pas de quantification de 0.2 canal (100 pS dans notre cas). Nous avons pris pour les fluctuations les valeurs $\delta = 0,1$, $\delta' = 0.24$ et pour les largeurs moyennes des canaux les valeurs du tableau de la page 7 déjà utilisées dans les précédents calculs.

La courbe de σ^2 en fonction des différences de temps mesurées est symétrique par rapport à $\tau = 16$ canaux. Nous en avons représenté la première moitié (80 valeurs) dans la fig.16.

On constate que les variations de σ^2 en $x(1-x)$, visibles entre deux points cerciés dans la figure, sont d'autant plus accentuées que les effets dus à l'inégalité de largeur des canaux sont faibles. Ainsi, par exemple, entre le canal 0 et le canal 1, où les variations de σ^2 en $x(1-x)$ sont plus importantes que celles dues à l'inégalité de largeur des canaux, on trouve effectivement le maximum $\sigma^2_{MAX} = 0,25$ à 0,5 canal. Par contre, les variations de σ^2 dues au fonctionnement statistique du codeur ne sont plus en $x(1-x)$ et passent par un maximum nettement inférieur à 0,25 lorsque les effets dus à l'inégalité de largeur des canaux sont importants. Ainsi, dans l'exemple d'une différence égale à 13 canaux ($\sigma^2 \approx 0,28$) on trouve un maximum $\sigma^2_{MAX} \approx 0,32$ à 13,3 canaux, ce qui représente un accroissement de σ^2 de 0.04 seulement.

CONCLUSIONS

D'après la courbe de la Fig.16, l'élargissement introduit par le codeur est dû essentiellement à celle des deux causes (inégalité de largeur des canaux ou fonctionnement statistique) qui prédomine dans la mesure d'une différence de temps donnée. L'ordre de grandeur de l'accroissement de la variance dû au codeur est $0.16 \sigma^2_{codeur} < 0.32$, ($0,4 \sigma < 0,6$)

On peut considérer que cet élargissement est compatible avec les applications auxquelles ce convertisseur temps-numérique est destiné, comme le montrent les histogrammes des spectres de masse de la Fig.17. Ces spectres de molécule organique ont été obtenus avec le nouveau spectromètre de masse par temps de vol en fonctionnement à ORSAY. Ce spectromètre comprend un miroir électrostatique

et la résolution en masse $\frac{M}{\delta M}$ est environ de 2000 (6).

L'histogramme des masses 277, 317 et 319 par temps de vol est représenté dans le haut de la figure avec un pas de quantification de 4 nS. Les histogrammes de ces mêmes masses sont représentés dans le bas de la figure avec un pas de quantification de 0,5 nS. Les largeurs physiques à mi-hauteur des distributions mesurées étant de l'ordre de 15 canaux, on peut considérer que la contribution de l'appareil est tout-à-fait négligeable.

Remerciements

Nous tenons à remercier Monsieur D. DESVEAUX qui a conçu et réalisé l'implantation des circuits imprimés.

REFERENCES

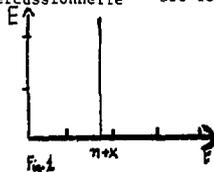
- (1) TORGERSON D.F., SKOWRONSKI R.P., MACFARLANE R.D., Biochem. Biophys. Res. Commun 60 (1974) 616-621
- (2) Y. LE BEYEC et ALII, Revue de Physique Appliquée (15) 1980-1651-1657
- (3) DELLA NEGRA et ALII, NIM, à paraître
- (4) SIPPACH et ALII, Anal. Chem. 1980-52-1923-1928
- (5) E. FESTA, R. SELLEM, NIM 188 (1981) 99-104
- (6) S. DELLA NEGRA - Y. LE BEYEC, à paraître dans NIM

APPENDICE A

Soit un codeur statistique dont la réponse percussionnelle est telle qu'à une grandeur à coder à l'entrée (fig. 1)

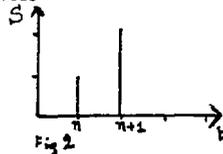
$$E = \delta(n+x-t)$$

avec $\begin{cases} n \text{ entier} \\ 0 \leq x < 1 \end{cases}$



correspond la distribution en sortie la plus probable (fig. 2)

$$S = (1-x) \delta(n-t) + x \delta(n+1-t)$$



Si la distribution à l'entrée est $f(t)$ (fig. 3), on peut écrire

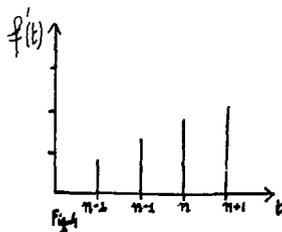
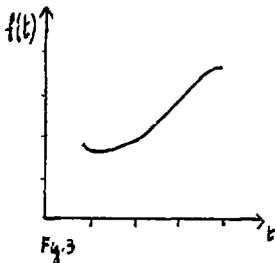
$$f'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \delta(\theta-t) d\theta = \sum_n \int_0^1 f(n+x) \delta(n+x-t) dx$$

alors la distribution la plus probable en sortie sera :

$$f'(t) = \sum_n \left[\int_0^1 [(1-x) f(n+x) + x f(n+1+x)] dx \right] \cdot \delta(n-t)$$

On suppose $f(t)$ normalisée, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

On recherche quelles sont les erreurs introduites par le codeur sur la position du centre de gravité et sur la valeur de l'écart-type de la distribution la plus probable $f'(t)$ après codage (fig. 4).



1) Erreur sur le centre de gravité

Le centre de gravité à l'entrée est :

$$\langle m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$$

et le centre de gravité à la sortie :

$$\begin{aligned} \langle m' \rangle &= \sum_n \left[n \int_0^1 (1-x) f(n+x) dx + (n+1) \int_0^1 x f(n+x) dx \right] \\ &= \sum_n \int_0^1 [n(1-x) + (n+1)x] f(n+x) dx \\ &= \sum_n \int_0^1 (n+x) f(n+x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \end{aligned}$$

$$\langle m' \rangle = \langle m_1 \rangle$$

Le codeur restitue donc, de façon la plus probable, le centre de gravité de toute distribution.

2) Erreur sur l'écart-type

Le moment d'ordre 2 à l'entrée est :

$$m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$$

et le moment d'ordre 2 à la sortie :

$$\begin{aligned} m'_2 &= \sum_n \left[n^2 \int_0^1 (1-x)^2 f(n+x) dx + (n+1)^2 \int_0^1 x^2 f(n+x) dx \right] \\ &= \sum_n \int_0^1 [n^2(1-x)^2 + (n+1)^2 x^2] f(n+x) dx \\ &= \sum_n \int_0^1 (n+x)^2 f(n+x) dx + \sum_n \int_0^1 x(1-x) f(n+x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt + \sum_n \int_0^1 x(1-x) f(n+x) dx \end{aligned}$$

$$m'_2 = m_2 + \sigma^2$$

$$\sigma^2 = \sum_{\pi}^{\text{avec}} \int_0^1 x(1-x) f(n+x) dx$$

σ^2 représente l'accroissement le plus probable de variance de la distribution dû au codeur.

Applications :

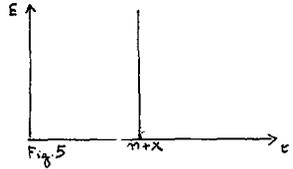
* Calcul de la variance de la distribution en sortie du codeur pour :

a) Un "Dirac à l'entrée" (fig. 5)

$$f(t) = E \delta(n+x-t)$$

$$\sigma^2 = \int_0^1 x(1-x) \delta(n+x-t) dx$$

$$\sigma^2 = x(1-x)$$

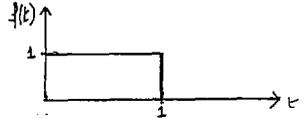


b) Un échelon unité à l'entrée (fig. 6)

$$f(t) = 1 \quad \text{pour } 0 \leq x < 1$$

$$\sigma^2 = \int_0^1 x(1-x) dx$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}$$



* Calcul approché de la variance de la distribution en sortie du codeur pour une fonction à l'entrée lentement variable

Faisons une approximation en trapèzes de la distribution $f(t)$ à l'entrée (fig. 7) :

$$f(t) = \sum_{\pi} a_n + b_n x$$

$$0 \leq x < 1$$

et supposons les variations de $f(t)$ "lentes" par rapport au pas de quantification.

On a :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \sum_n \int_0^1 x(1-x) (a_n + b_n x) dx \\ &= \frac{1}{6} \sum_n a_n + \frac{1}{12} \sum_n b_n\end{aligned}$$

or $\sum_n a_n \sim 1$
 $\sum_n b_n$

puisque $f(t)$ est normalisée.

est petit par rapport à $\sum_n a_n$ par hypothèse.

Donc :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\sim \frac{1}{6} \\ \sigma &\sim 0.4\end{aligned}$$

En conclusion, le codeur statistique étudié élargit quadratiquement de 0.4 canal toute fonction "lentement" variable

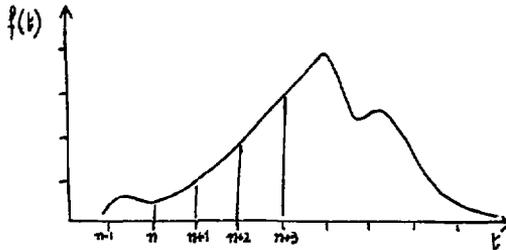


Fig. 7

APPENDICE B

a) Soit un codeur statistique dont la réponse percussive est telle qu'à une grandeur à coder à l'entrée (fig. 1)

$$E = \delta(\theta - t)$$

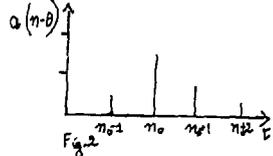


correspond la distribution en sortie la plus probable (fig. 2)

$$S = \sum_n a(n-\theta) \delta(n-t)$$

avec

$$\begin{cases} \sum a(n-\theta) = 1 \\ \sum n a(n-\theta) \equiv 0 \end{cases}$$



Alors, à la distribution quelconque $f(t)$ à l'entrée

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) \delta(\theta - t) d\theta$$

correspondra la distribution la plus probable en sortie

$$f'(t) = \sum_n \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) a(n-\theta) d\theta \right] \delta(n-t)$$

$$\langle m' \rangle = \sum_n n \int_{-\infty}^{+\infty} f(\theta) a(n-\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_n n a(n-\theta) \right] f(\theta) d\theta$$

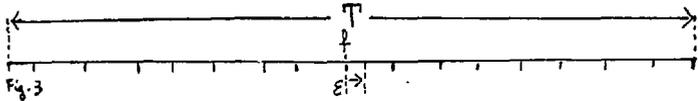
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta f(\theta) d\theta = \langle m \rangle$$

Le codeur statistique restitue donc, de façon la plus probable, le centre de gravité de toute distribution.

b) Soit un codeur statistique réel dont la période T de l'échelle glissante (qu'on supposera égale à l'unité) est divisée en intervalles de temps inégaux quelconques.

Nous allons montrer que $\sum_n a(n-\theta) \equiv 0$
 et donc que le codeur restitue le centre de gravité de toute distribution.

Supposons en effet, une partition de la période T telle que $\sum_n a(n-\theta) \equiv \theta$ (fig. 3):



Déplaçons de ϵ une frontière f séparant deux intervalles consécutifs quelconques dans T. Pour ce nouveau découpage de T, la réponse percussionnelle du codeur devient :

$$S = \sum_n a'(n-\theta) \delta(n-t)$$

Si n_θ et n'_θ sont respectivement les mesures entières de θ fournies par le codeur lorsque le stop ou le start de la durée à mesurer coïncide avec f, alors :

$$a'(n_\theta - \theta) = a(n_\theta - \theta) + \epsilon \quad (1)$$

$$a'(n_\theta + 1 - \theta) = a(n_\theta + 1 - \theta) - \epsilon \quad (2)$$

$$a'(n'_\theta - \theta) = a(n'_\theta - \theta) + \epsilon \quad (3)$$

$$a'(n'_\theta - 1 - \theta) = a(n'_\theta - 1 - \theta) - \epsilon \quad (4)$$

et pour $n \neq n_\theta$, $n \neq n_\theta + 1$, $n \neq n'_\theta$, $n \neq n'_\theta + 1$, on a :

$$a'(n - \theta) = a(n - \theta)$$

Or, la somme des expressions (1) et (2), (3) et (4) est nulle. On a donc :

$$\sum_n a'(n - \theta) = \sum_n a(n - \theta) \equiv \theta$$

Nous connaissons au moins une partition de la période T telle que :

$$\sum_n a (n - \theta) \equiv 0$$

C'est celle du codeur idéal où tous les intervalles sont égaux (voir Appendice A). Or, par déplacement successif de chacune des frontières de la partition du codeur idéal, il est possible de réaliser une partition quelconque donnée. On a ainsi démontré que l'identité

$$\sum_n a' (n - \theta) \equiv 0$$

est vérifiée pour toute partition de la période T de l'échelle glissante.

Ces conclusions sont en accord avec les résultats expérimentaux. La courbe de la fig. 15 montre, dans les limites de la précision de mesure ($\approx \pm 5$ pS = $\frac{1}{100}$ de canal), que la position du centre de gravité suit les variations du retard "stop-start". Les distributions mesurées ont été obtenues en envoyant sur l'entrée start un signal de générateur et sur l'entrée stop ce même signal retardé. Les variations du retard, dont le pas est de 60 ± 5 pS, ont été obtenues avec la ligne à air mentionnée au paragraphe III.2.

APPENDICE C

Supposons que :

a) le temps t est un nombre entier : $t = n$

b) pour tout i , on a :
$$\sum_{k=i+1}^{i+n} W_k = n + \varepsilon_i \quad (C1)$$

avec $\text{MAX} (|\varepsilon_i|) < \text{MIN} (W_k)$

On peut vérifier facilement, au moyen des relations (1) et (2) du paragraphe III.2, que les seules valeurs de codage possibles sont $n-1$, n , $n+1$. Les plages de temps correspondant à ces valeurs peuvent être calculées par (3) du paragraphe III.2 en remplaçant $\sum_{k=i}^{i+n-1} W_k - t$, par ε_{i-1} . On obtient :

$$\Delta t_{n-1} = \text{MAX} (0, \varepsilon_{i-1})$$

$$\Delta t_{n+1} = \text{MAX} (0, -\varepsilon_i)$$

$$\Delta t_n = W_i - \Delta t_{n-1} - \Delta t_{n+1}$$

i étant le canal dans lequel arrive le signal de start. On sait (voir appendice B), que la valeur moyenne du résultat du codage, prise sur tous les instants d'arrivée du signal de start, est strictement égale au temps mesuré, donc égale à n . Puisque seules 3 valeurs de codage sont possibles ($n-1$, n , $n+1$), les probabilités P_{n-1} et P_{n+1} d'obtenir $n-1$ et $n+1$ sont égales. On a $\sigma^2 = 2 P_{n+1}$.

Or, l'échelle de canaux est périodique avec une période de 32 canaux. Pour calculer l'élargissement introduit par l'appareil, il suffit donc de considérer dans chacun des 32 canaux la plage de temps pendant laquelle la mesure d'une différence n donne comme résultat $n + 1$ et de sommer ces plages. Soit S cette somme.

On a :

$$S = \sum \Delta t_{n+1} = \sum_{\epsilon_i < 0} |\epsilon_i| \quad (C2)$$

et

$$P_{n+1} = \frac{S}{32}, \text{ donc } \sigma^2 = \frac{S}{16}$$

Cette somme est facile à effectuer lorsque le temps à mesurer n est égal à 16. En effet, pour les différences de temps exactement égales à 16, on a, d'après (C1) :

$$16 + \epsilon_i = \sum_{k=i+1}^{i+16} W_k \quad (C3)$$

Or, puisque $\sum_{k=i+1}^{i+16} \Delta_k = 16$ (Δ_k = valeur moyenne de la largeur d'un canal mesurée sur deux périodes), ϵ_i est nul si deux périodes successives du signal d'Horloge sont identiques. Si elles ne le sont pas, les canaux ϕ , pris dans ces deux périodes, ont des largeurs différentes, ainsi que les canaux 8 (fig. 13), et pour toute valeur de n égale à un multiple impair de 16, on a $\epsilon_i \neq 0$.

On a :

$$\begin{aligned} \text{pour } k = 8 \text{ et } k \neq 0 : W_k &= W_k + 16 = \Delta_k \\ \text{pour } k = \phi, k = 8, k = 16, k = 24 : W_\phi &= \Delta_0 - (\delta - \delta') \\ W_8 &= \Delta_8 + \delta' \\ W_{16} &= \Delta_0 + (\delta - \delta') \\ W_{24} &= \Delta_8 - \delta' \end{aligned}$$

Afin d'évaluer la somme S définie en (C2), nous allons chercher quelles sont les plages où ϵ_i est constant. On a, d'après (C3) :

$$\begin{aligned} 16 + \epsilon_{i+1} &= \sum_{k=i+2}^{i+17} W_k \\ 16 + \epsilon_i &= \sum_{k=i+1}^{i+16} W_k \end{aligned}$$

La différence entre ces deux expressions est :

$$\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i = (W_{i+2} + \dots + W_{i+17}) - (W_{i+1} + \dots + W_{i+16}) =$$

$$W_{i+17} - W_{i+1}$$

Cette différence est donc nulle ($\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i$) dans chaque région de l'échelle de 32 canaux où $W_{i+17} = W_{i+1}$. Dans notre cas, ces régions sont au nombre de quatre et on peut écrire :

$0 \leq i \leq 7$	$\varepsilon_i = \delta' + (\delta - \delta') = \delta$
$8 \leq i \leq 15$	$\varepsilon_i = (\delta - \delta') - \delta' = \delta - 2\delta'$
$16 \leq i \leq 23$	$\varepsilon_i = -\delta' - (\delta - \delta') = -\delta$
$24 \leq i \leq 31$	$\varepsilon_i = -(\delta - \delta') + \delta' = -(\delta - 2\delta')$

On obtient facilement, d'après (C2) :

$$s = 8|\delta| + 8|\delta - 2\delta'|$$

D'où :

$$\sigma^2 = \frac{s}{16} = \frac{|\delta| + |\delta - 2\delta'|}{2}$$

Notons qu'on peut toujours, en changeant l'origine des temps, choisir $\delta > 0$. On obtient alors facilement :

$$\sigma^2 = \text{MAX} (\delta', \delta - \delta')$$

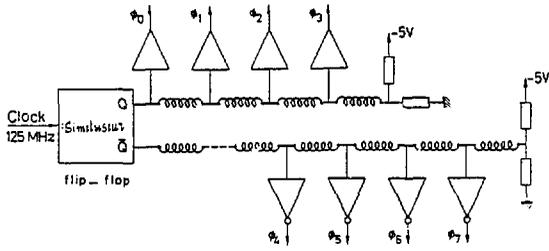


Fig. 1

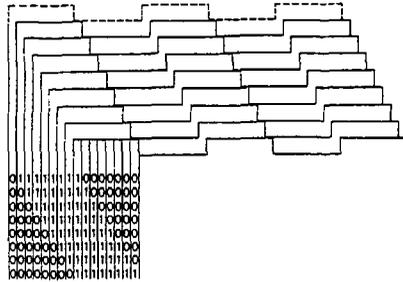


Fig. 2

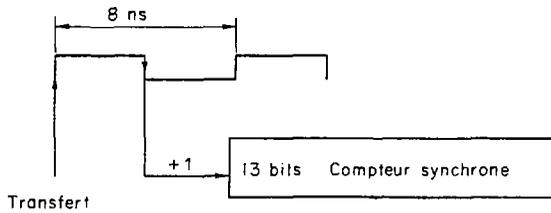


Fig. 3

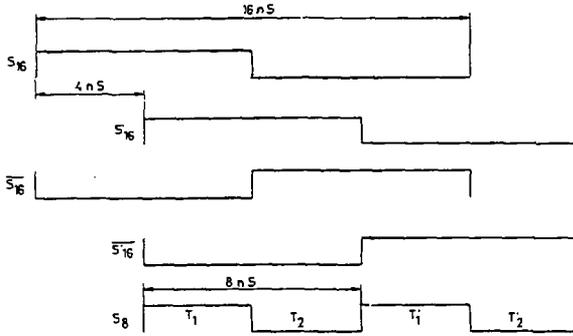


FIG. 4

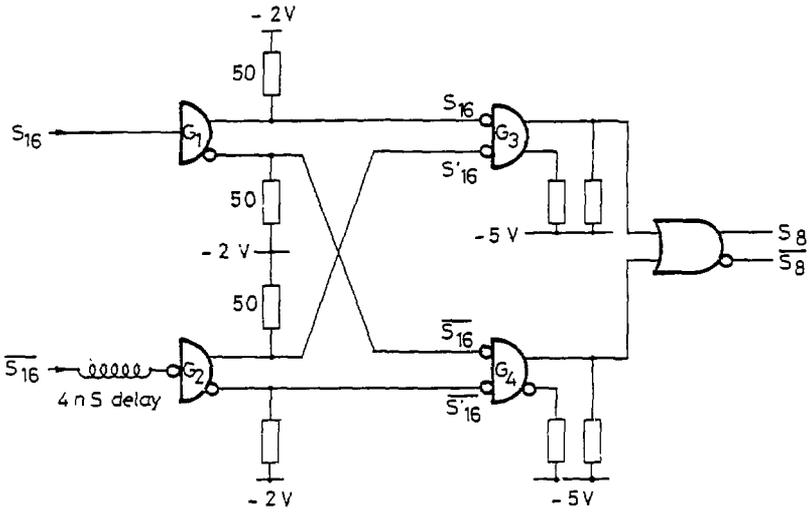


Fig. 5

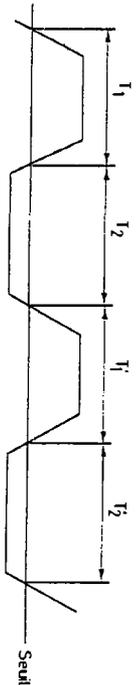
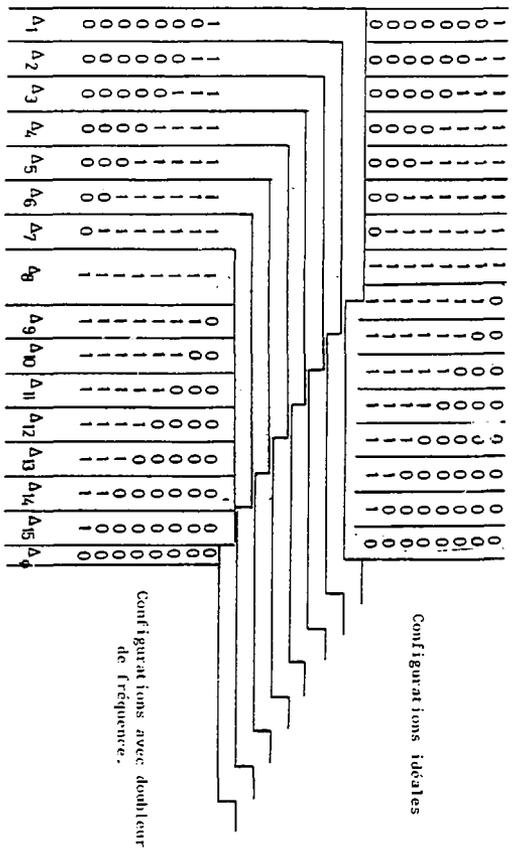


FIG. 6



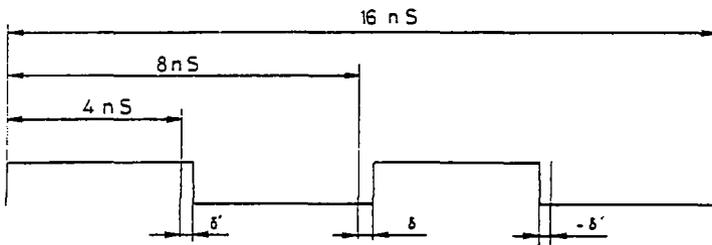


FIG. 8

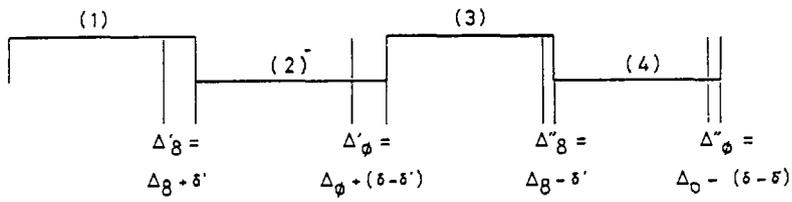


FIG. 9

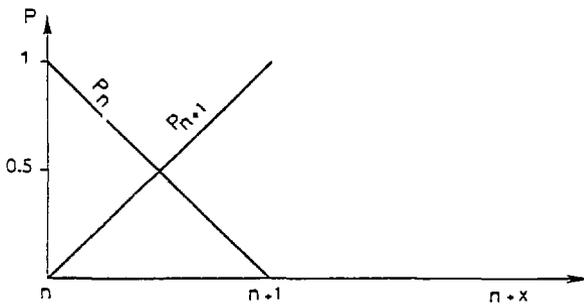
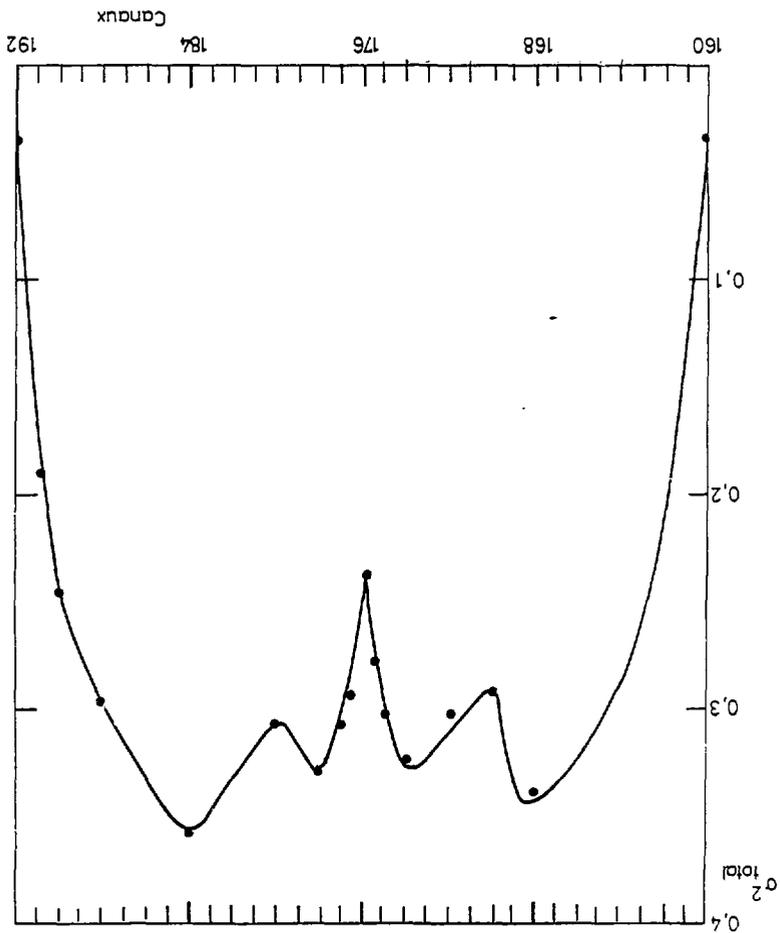


FIG. 10

FIG. 11.



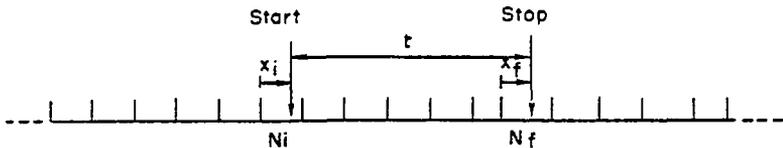


Fig. 12

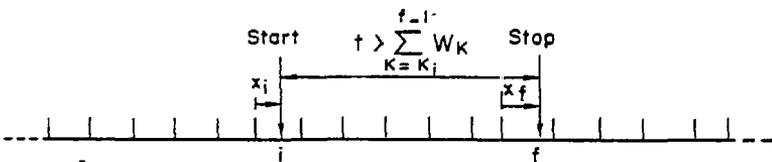


Fig. 12bis

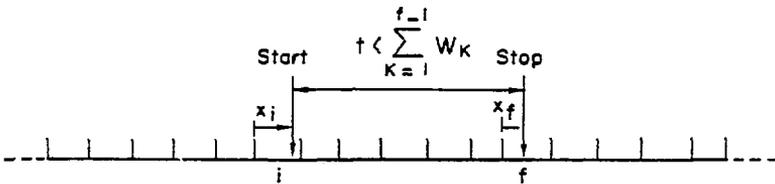


Fig. 12ter

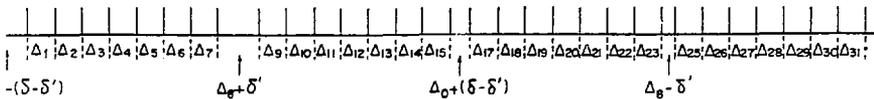


Fig. 13

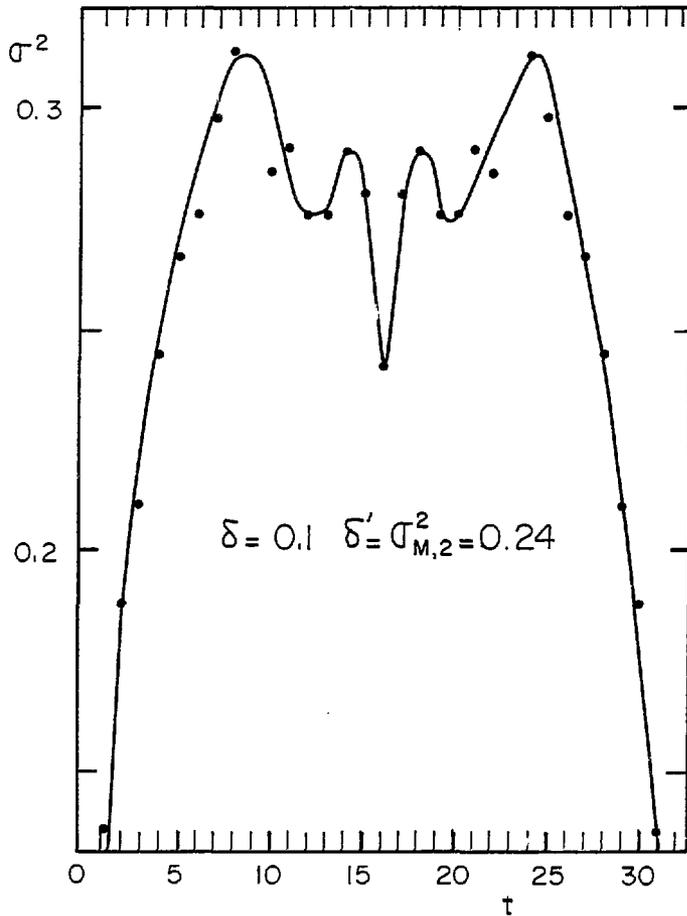


Fig. 14

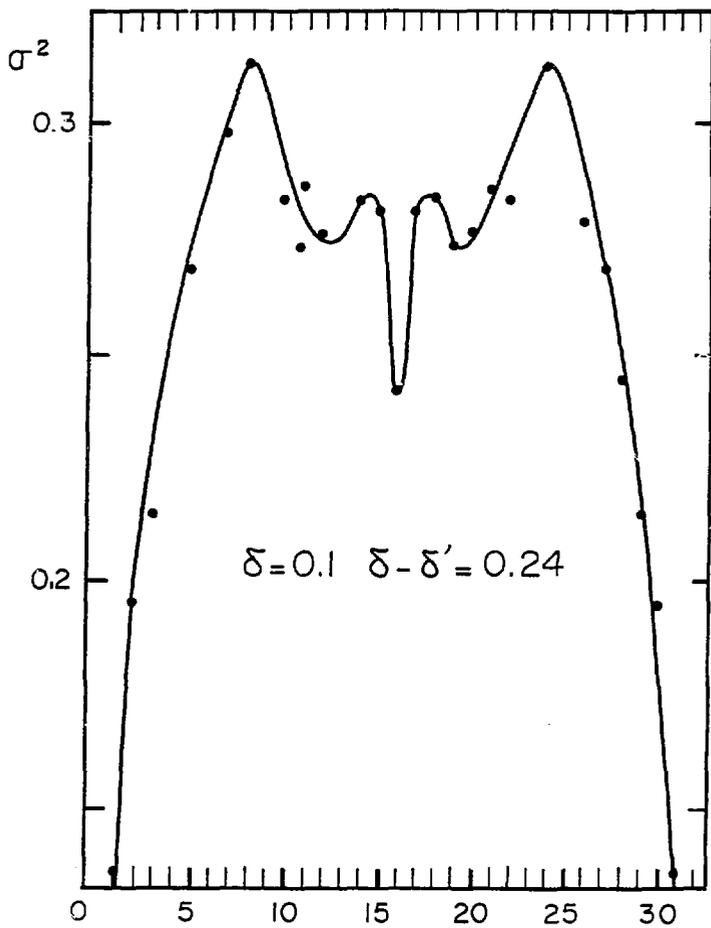


Fig. 14bis

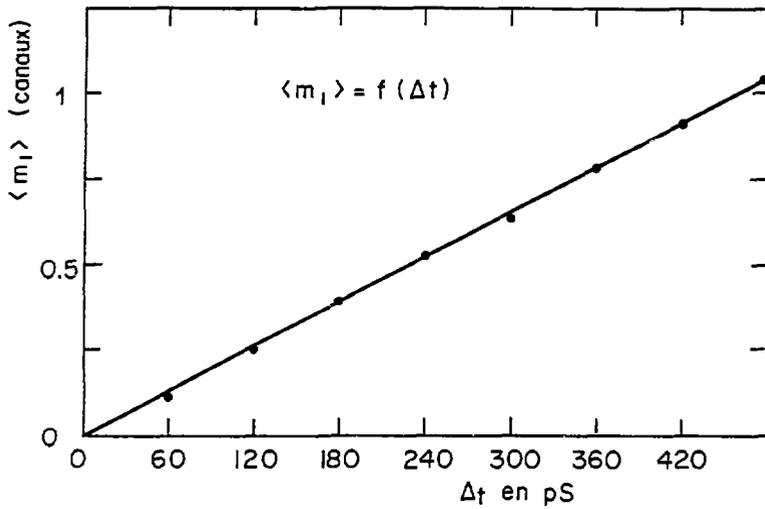


Fig. 15

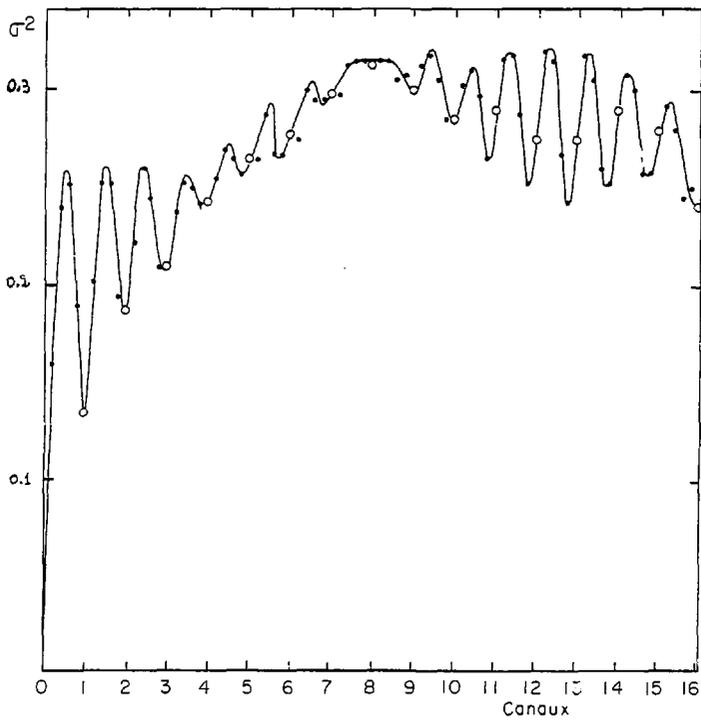


Fig.16

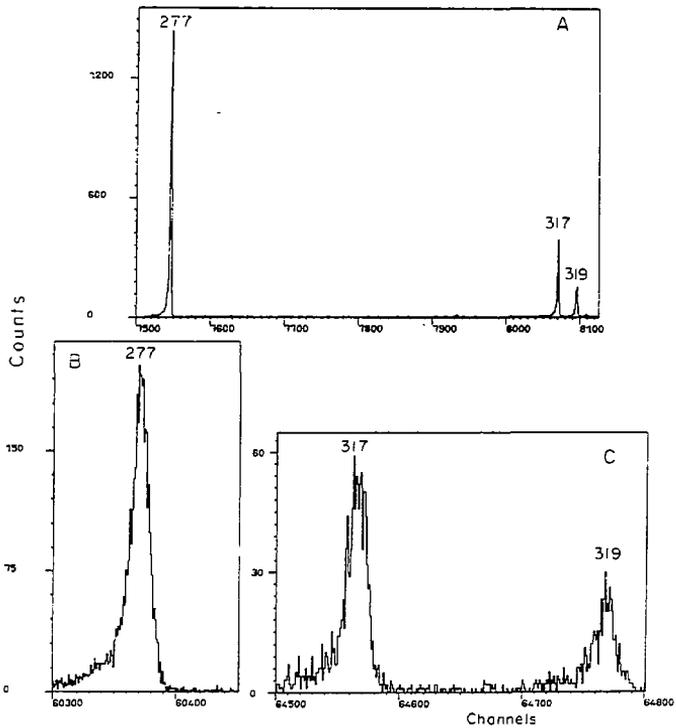


Fig. 17