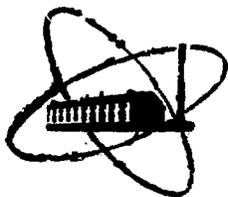


SUBBOA906

ФЭИ-1473



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

*В. С. ФЕДOTOVCKИИ*

**Гидродинамические силы, действующие  
на колеблющиеся сферические и цилиндрические  
включения**

Обнинск — 1983

УДК 533.6.013

**В. С. Федотовский.**

Гидродинамические силы, действующие на колеблющиеся сферические и цилиндрические включения.

ФЭИ-1473. Обнинск, 1983. — 28 с.

Рассмотрены малые колебания сферических и цилиндрических включений в жидкости. В предположении о безотрывном обтекании элементов с образованием тонкого пограничного слоя на их поверхностях получены выражения для гидродинамических сил, содержащих инерционную и вязкостную составляющие. Для систем с объемной концентрацией включений не очень близкой к предельной использована модель эквивалентных сферических и цилиндрических ячеек. Условие малости толщины пограничного слоя, возникающего на поверхностях сфер или цилиндров при больших колебательных числах Рейнольдса, использовано для определения инерционных сил в приближении потенциального обтекания тел жидкостью, а двумерность пограничного слоя — для расчета сил вязкого трения колебательному движению. Рассмотрены также системы с объемной концентрацией включений, близкой к предельной, и на основе простой схематизации течения жидкости в микроячейках получены выражения для гидродинамических сил. Сделана попытка определения гидродинамических сил для случая умеренных и малых колебательных чисел Рейнольдса.

## Введение

Гидродинамическое воздействие жидкости на колеблющиеся в ней тела исследовалось еще в классических работах Стокса, Ламба, Биркгофа, Буссинеска, Бассе и др., и описано во многих книгах [1 - 4]. В этих работах, как правило, рассматривался случай движения тела простейшей формы в безграничном объеме жидкости в рамках двух предельных теорий: теории потенциального течения идеальной жидкости и теории ползущего течения. В дальнейшем были получены решения для гидродинамических сил, действующих на группы из двух тел, цепочек и пространственных решеток тел в рамках тех же теорий [2, 5].

Исследование инерционных гидродинамических сил при потенциальном обтекании сводится к определению присоединенных масс, зависящих только от формы тел, плотности жидкости и близости окружающих тело твердых или свободных границ. При ползущем течении гидродинамические силы являются вязкостными и зависят от вязкой жидкости и также от формы тел и близости свободных или твердых границ.

В настоящее время имеется обширная литература, посвященная исследованию как инерционных, так и вязкостных гидродинамических сил, причем, задачи обтекания групп частиц при малых числах Рейнольдса занимают сейчас центральное место в реологии суспензий.

Для решения задач о движении частиц в жидкости были разработаны различные приближенные способы описания разбавленных и концентрированных систем частиц. Так, например, в разбавленных системах с весьма малой объемной концентрацией, гидродинамические силы, действующие на частицы, определялись без учета их взаимного влияния. Следующим шагом был учет взаимодействий первого порядка, а основным методом исследования был метод отражений.

Наибольший практический интерес представляют, однако, концентрированные дисперсные системы. Здесь метод отражений, хотя и применим в принципе, оказывается слишком сложным для практического использования. Более простой, но менее строгий подход к определению гидродинамических сил, действующих на концентрированные системы частиц, дают ячейочные модели. Модели ячеек учитывают, как известно, взаимодействие между центральной частицей и ее непосредственными соседями. Для определения размеров ячеек (обычно сферических или цилиндрических) нужны некоторые предположения. Несомненно лишь то, что с увеличением объемной концентрации частиц радиус ячейки должен уменьшаться.

Используя модели ячеек для решения различных задач механики ге-

гетерогенных сред, разные авторы используют те или иные соображения относительно связи радиуса ячейки с объемной концентрацией, а также задания граничных условий на ее поверхности. Наиболее разумным является предположение о том, что отношение объемов включения и ячейки равно объемной концентрации включений, и на внешней границе ячейки отсутствуют касательные напряжения [5].

В некоторых случаях имеет смысл выделить в особую группу гетерогенные системы с объемной концентрацией близкой к предельной. По причинам, которые будут изложены ниже, модель ячеек здесь иногда неприменима. К таким системам следует отнести, в частности, тесные пучки стержней и труб.

Следует отметить, что хорошо разработанные основы вязких течений в гетерогенных средах с включениями малых размеров, когда обтекание их жидкостью происходит при малых числах Рейнольдса, не могут быть использованы при описании динамики таких систем, как пучки стержней, погруженные в жидкость, а часто и двухфазные смеси с достаточно большими включениями (пузырьками или твердыми частицами), поскольку их обтекание происходит обычно при больших числах Рейнольдса.

В общем случае решение гидродинамических задач обтекания частиц при больших числах Рейнольдса представляет непреодолимые трудности в связи с нелинейностью уравнений Навье-Стокса. Однако, при существенном упрощении задач, связанным с ограничением пространственного движения, например, — ограничением амплитуды колебаний, гидродинамические силы могут быть сравнительно легко определены.

Во многих задачах динамики гетерогенных сред, при вибрационных и акустических воздействиях, как раз и реализуются такие условия, когда амплитуды колебаний несущей среды и включений существенно меньше характерного размера включений, а число Рейнольдса, определенное по размеру включений, может быть существенно больше единицы. Существенное упрощение состоит в том, что при малых амплитудах колебаний возникает безотрывное обтекание тела жидкостью, а колеблющийся пограничный слой на его поверхности, имеющий толщину  $\delta = (2\nu/\omega)^{1/2}$ , является величиной существенно меньшей характерного размера включения и может рассматриваться как локально плоский. Это допущение мы будем неоднократно использовать при вычислении гидродинамических сил, действующих на группы колеблющихся сфер и цилиндров. Прежде, однако, рассмотрим и проанализируем известное теоретическое решение для одиночной сферы, колеблющейся в безграничном объеме вязкой жидкости.

I. Малые колебания сферы в вязкой жидкости.

При малых поступательных гармонических колебаниях сферы радиусом  $a$  гидродинамическая сила равна [6]

$$-F = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \left(1 + \frac{9\delta}{2a}\right) \frac{du}{dt} + 6\pi \mu a \left(1 + \frac{a}{8}\right) u. \quad (1)$$

Здесь сомножитель перед ускорением частицы есть присоединенная масса жидкости, а сомножитель перед скоростью - коэффициент вязкого сопротивления. Каждый из сомножителей состоит из двух слагаемых; первое слагаемое в первом сомножителе - это присоединенная масса идеальной жидкости для сферы

$$m_0 = \frac{2}{3} \pi \rho a^3, \quad (2)$$

а второе - поправка, учитывающая влияние вязкости жидкости и частоты колебаний. В коэффициенте трения первое слагаемое - это коэффициент сопротивления Стокса для стационарного движения, а второе слагаемое учитывает нестационарность колебательного движения.

При стационарном движении сферы ( $\omega = 0$ ) формула (1) переходит в формулу Стокса  $-F = 6\pi \mu a u$ . При больших же частотах колебаний сферы, точнее при больших колебательных числах Рейнольдса  $Re_\omega = a^2 \omega / \nu$ , формула (1) дает

$$-F = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \frac{du}{dt} + 3\pi \rho a^2 \sqrt{2\nu\omega} u, \quad (3)$$

или

$$-F = m_0 \frac{du}{dt} + \xi_0 u,$$

где  $\xi_0 = 3\pi \rho a^2 \sqrt{2\nu\omega}$  - предельный коэффициент трения колебательному движению или коэффициент демпфирования колебаний.

Для многих задач предельные соотношения для гидродинамических сил типа формулы (3) могут служить достаточно хорошим приближением.

Так, например, при колебаниях частиц радиусом 1 см в воде ( $\nu = 10^{-2} \text{ см}^2/\text{с}$ ) с частотой 10 Гц, поправка на вязкость в инерционном члене формулы (1) составляет не более 10%, а сопротивление Стокса составляет лишь 2% от силы сопротивления колебательному движению. В связи с этим соотношения типа (3) для групп сферических частиц или частиц другой формы представляют определенный практический интерес, тем более, что для включений, образующих концентрированные гетерогенные среды, получить более общие аналитические ре-

чения типа формулы (I) не представляется возможным.

Б. Гидродинамические силы, действующие на круглые стержни при больших колебательных числах Рейнольдса

а. Редкие пучки круглых стержней

Рассмотрим сначала колебания пучков цилиндрических стержней радиусом  $a$ , образующих правильные треугольную и квадратную решетки. Если относительный шаг расположения стержней в пучке не очень мал, то для определения гидродинамической силы можно воспользоваться моделью ячеек. Согласно этой модели заменим шестиугольную или квадратную ячейку жидкости (для соответствующих типов решеток), относящуюся к одному стержню, на эквивалентную по площади цилиндрическую ячейку радиусом  $b$ , так, чтобы объемная концентрация цилиндрических вclusions составила  $\varphi = (a/b)^2$ .

Поскольку при больших колебательных числах Рейнольдса на поверхности стержня образуется тонкий пограничный слой  $\delta$ , то течение жидкости почти во всей области будет определяться силами инерции и может быть найдено в потенциальном приближении. Присоединенную массу жидкости, определяющую инерционную составляющую гидродинамической силы, найдем по известной формуле Стокса для цилиндра, окруженного концентрической оболочкой

$$m = \pi \rho a^2 \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}, \quad (4)$$

или, учитывая, что  $(a^2/b^2 = \varphi)$ , запишем

$$m = \pi \rho a^2 \frac{1 + \varphi}{1 - \varphi}. \quad (5)$$

Часто в качестве геометрического параметра стержневых систем используется относительный шаг пучка  $X = S/2a$ , где  $S$  — расстояние между центрами стержней. При этом эквивалентные радиусы ячеек

$b_{\Delta}$ ,  $b_{\square}$  для пучков с треугольной и квадратной упаковками стержней будут соответственно равны

$$b_{\Delta} = \sqrt{\frac{3,464}{\pi}} aX, \quad b_{\square} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} aX, \quad (6)$$

а формула для присоединенной массы (4) примет следующий вид

$$m_{\Delta} = \pi \rho a^2 \frac{1 + 0,905/X^2}{1 - 0,905/X^2} \quad (7)$$

для пучков с треугольной решеткой или

$$m_{\square} = \pi \rho a^2 \frac{1 + 0,785/X^2}{1 - 0,785/X^2} \quad (8)$$

для пучков с квадратной решеткой.

Используя модель ячеек можно определить и вязкостную составляющую гидродинамической силы. Приняв на поверхности эквивалентной ячейки условие отсутствия касательных напряжений в связи с непрерывностью производных скорости жидкости на границах реальных ячеек и вычислив диссипативные потери в тонком пограничном слое на поверхности стержня, получим формулу для коэффициента вязкого трения колебательному движению [7]

$$\xi = \frac{4\pi \mu a v^4}{\delta (v^2 - a^2)^2} = \frac{2\pi \rho a \sqrt{2\nu\omega}}{(1-\varphi)^2} \quad (9)$$

Используя соотношение (6) для радиусов эквивалентных ячеек формулу (9) можно записать также в виде зависимости от относительного шага  $X$  (аналогично формулам (7), (8)).

Таким образом, объединяя (5) и (9), запишем полную гидродинамическую силу, действующую на единицу длины одного стержня синфазно колеблющегося бесконечного пучка

$$-F = \pi \rho a^2 \left( \frac{1+\varphi}{1-\varphi} \right) \frac{du}{dt} + \frac{2\pi \rho a \sqrt{2\nu\omega}}{(1-\varphi)^2} u. \quad (10)$$

При  $\varphi = 0$  из (10) получается формула для гидродинамической силы, действующей на одиночный круговой цилиндр, колеблющийся в безграничном объеме жидкости

$$-F = \pi \rho a^2 \frac{du}{dt} + 2\pi \rho a \sqrt{2\nu\omega} u, \quad (11)$$

Этот результат является аналогом формулы (3) для сферической частицы.

Формула (10), хотя и учитывает стесненный характер движения жидкости в межстержневом пространстве, все же не может быть справедливой при объемных концентрациях цилиндрических включений, близких к предельным значениям ( $\varphi_{\Delta}^* = 0,905$  и  $\varphi_{\square}^* = 0,785$  для пучков с треугольной и квадратной решетками). В самом деле, при плотной упаковке стержней формула (10) дает конечную величину гидродинамической силы, хотя в этом случае, очевидно, она должна обращаться в бесконечность из-за полной непроницаемости пучков. В связи с этим рассмотрим отдельно колебания таких стержневых систем.

#### б. Тесные пучки круглых стержней

Пусть, например, пучок с треугольной упаковкой стержней колеблется вдоль биссектрисы угла треугольника, образованного центрами стержней. В системе координат, связанной со стержнями, линии тока жидкости показаны на рис. 1а. Видно, что шестиугольная ячейка, окружающая каждый стержень, состоит из 12 микроячеек, которые можно разбить на три группы, отличающиеся характером течения (микроячейки типа 1, 2, 3).

В рассматриваемой обращенной задаче обтекания пучка колеблющимся потоком с амплитудной скоростью  $U_0$ , средняя расходная скорость жидкости в минимальном сечении микроячейки 1 будет равна

$$U = \frac{U_0}{X-1} \quad (12)$$

В минимальных сечениях микроячеек 2 и 3 скорости жидкости равны, очевидно,  $U/2$ . Следовательно, плотность кинетической энергии жидкости в минимальных сечениях этих ячеек будет в 4 раза меньше, чем в минимальном сечении микроячейки 1. Так как при  $X \approx 1$  основной вклад в кинетическую энергию дают области, лежащие вблизи минимальных сечений, то предположим, что кинетическая энергия в микроячейках 2 и 3 также будет в 4 раза меньше, чем в микроячейке 1. Тогда суммарная кинетическая энергия в шестиугольной ячейке будет равна  $6E_1$ , где  $E_1$  — кинетическая энергия в микроячейке 1.

Присоединенная масса жидкости, равная удвоенной кинетической энергии, деленной на квадрат скорости, будет равна

$$m = \frac{12 E_1}{U_0^2} \quad (13)$$

Следует отметить, что в определении присоединенной массы кинетическая энергия берется в неподвижной системе координат. Поскольку, однако, кинетические энергии в разных системах отличаются приблизительно в  $X$  раз, то в асимптотическом случае  $X \rightarrow 1$  получится верный результат.

Для определения  $E_1$  схематизируем задачу следующим образом. Будем считать, что скорость жидкости в любом сечении по радиусу микрочастицы  $I$  постоянна. Учитывая увеличение сечения с ростом угла по формуле

$$h(\theta) = \frac{a(X - \cos \theta)}{\cos \theta}, \quad (14)$$

получим среднюю расходную скорость в любом сечении

$$v(\theta) = \frac{u_0 \cos \theta}{X - \cos \theta}. \quad (15)$$

Вычислив  $E_1 = \frac{\rho}{2} \int_0^{\pi/2} v^2(\theta) h(\theta) a d\theta$  и подставив результат в (13), получим

$$m_\Delta = 6\rho a^2 \sqrt{\frac{2}{X-1}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{X-1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}\right). \quad (16)$$

Для пучков с квадратной упаковкой стержней легко получить аналогичное соотношение [8]. Схема линий тока для этого случая также показана на рис. 16. Вычисления дают

$$m_\square = 4\rho a^2 \sqrt{\frac{2}{X-1}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{X-1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}\right). \quad (17)$$

При  $X \rightarrow 1$  из (16) и (17) получаются следующие асимптотические соотношения для треугольной и квадратной упаковок стержней, соответственно

$$m_\Delta = 3\sqrt{2} \pi \rho a^2 (X-1)^{-1/2}, \quad (18)$$

$$m_\square = 2\sqrt{2} \pi \rho a^2 (X-1)^{-1/2}. \quad (19)$$

Из формул (18) и (19) видно, что при  $X \rightarrow 1$  присоединенные массы стремятся к бесконечности по степенному закону  $m \sim (X-1)^{-3/2}$  и их численные значения при одинаковом лаге отличаются в 1,5 раза.

Определим теперь коэффициент вязкого трения  $\xi$ , предполагая, что толщина колеблющегося пограничного слоя  $\delta$  мала по сравнению с минимальным зазором между стержнями.

Так же, как для кинетической энергии, основной вклад в диссипацию энергии дают области жидкости вблизи узких сечений микрочеек. Поэтому для пучков с треугольной упаковкой стержней средняя за период колебания скорость диссипации энергии в ячейке, окружающей каждый стержень, будет равна

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = 6 \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_1, \quad (20)$$

где  $\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_1$  - средняя за период колебания скорость диссипации энергии в микрочейке 1. Так как средняя скорость диссипации энергии в пограничном слое на единице поверхности равна

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = -\frac{M U_s^2}{2\delta}, \quad (21)$$

где  $U_s$  - амплитудное значение скорости на внешней границе слоя, то

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle_1 = -\frac{M}{2\delta} \int_0^{2\pi} v^2(\theta) a d\theta. \quad (22)$$

Подставляя в (22) распределение скорости (15) и определив коэффициент вязкого трения как  $\xi = -2 \langle dE/dt \rangle / U_s^2$ , получим при  $X \rightarrow 1$

$$\xi_0 = \frac{3}{2} \pi r a \sqrt{\nu \omega} (X-1)^{-3/2}. \quad (23)$$

Для квадратной упаковки стержней получается аналогичная формула

$$\xi_0 = \pi r a \sqrt{\nu \omega} (X-1)^{-3/2}. \quad (24)$$

Из формул (23) и (24) видно, что при  $X \rightarrow 1$  коэффициенты вязкого трения стремятся к бесконечности, однако, показатель степени

здесь  $-3/2$  в отличие от  $-1/2$  для присоединенных масс. Отношение же коэффициентов трения (23) и (24), как и присоединенных масс, для пучков с треугольной и квадратной решетками равно 1,5.

Следует отметить, что, несмотря на определенный выбор схем обтекания пучков, показанных на рис. 1, результаты остаются теми же и для любых других направлений колебаний правильных пучков стержней [9]. В этом смысле правильные пучки круглых стержней обладают свойством изотропии и в соотношении для гидродинамической силы присоединенная масса и коэффициент вязкого трения являются скалярными величинами. В общем же случае присоединенные массы и коэффициенты трения являются тензорами второго ранга, а компоненты гидродинамической силы имеют вид

$$-F_l = m_{lk} \frac{du_k}{dt} + \xi_{lk} u_k. \quad (25)$$

Так, например, обстоит дело для пучков круглых стержней с отличающимися относительными шагами в двух направлениях или для пучков стержней некруглого поперечного сечения. Оценки компонент тензоров  $m_{lk}$  и  $\xi_{lk}$  в этих случаях можно провести на основе модели эллиптических ячеек с отношением осей, равным отношению шагов в продольном и поперечном направлениях.

Для пучков с относительными шагами близкими к единице можно воспользоваться схемами обтекания, аналогичными рассмотренным выше.

### 3. Гидродинамические силы, действующие на сферические частицы при больших колебательных числах Рейнольдса

Рассмотрим теперь колебания группы сферических частиц и вычислим гидродинамическую силу на основе модели эквивалентных сферических ячеек при тех же предположениях, что и для пучков цилиндрических стержней. Присоединенная масса невязкой несжимаемой жидкости для сферической частицы радиусом  $a$ , окруженной концентрической оболочкой радиусом  $b$ , выражается соотношением

$$m = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \frac{2a^3 + b^3}{b^3 - a^3} \quad (26)$$

Учитывая, что радиусы частицы и оболочки связаны с объемной концентрацией  $\varphi$  соотношением  $(a/b)^3 = \varphi$ , формулу (26) запишем в виде

$$m = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \frac{2\varphi + 1}{1 - \varphi} \quad (27)$$

Соотношение (27) использовалось Зубером [12] при исследовании двухфазных потоков. Вейнгарден [13], учтя взаимодействие сферы с ближайшими соседями получил формулу  $\eta = \frac{2}{3} \pi r a^3 [1 + 2,78\varphi + O(\varphi^2)]$ , согласующуюся с (27) при малых  $\varphi$  и дающую меньшие значения при больших  $\varphi$ . Представляется, однако, что формула (27) более точно учитывает эффект взаимодействия или стесненный характер обтекания сфер.

Для вычисления коэффициента вязкого трения предположим, что на поверхности ячейки отсутствуют касательные напряжения и все диссипативные потери имеют место только в пограничном слое на поверхности сферической частицы.

Используя распределение относительной тангенциальной составляющей скорости на поверхности сферы, колеблющейся с амплитудной скоростью  $U_0$ ,

$$v(a, \theta) = \frac{3U_0 \sin \theta}{2[1 - (\alpha/\delta)^2]} = \frac{3U_0}{2(1 - \varphi)} \sin \theta, \quad (28)$$

в качестве распределения скорости на внешней границе пограничного слоя ( $U_s$ ), и интегрируя (21) по поверхности сферы, получим среднюю за период колебаний скорость диссипации энергии в ячейке

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = - \frac{\mu}{2\delta} \int_0^\pi v^2(a, \theta) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = - \frac{3\pi r a^2 \sqrt{2}\omega}{\sqrt{2}(1 - \varphi)^2} U_0^2. \quad (29)$$

Коэффициент вязкого трения при колебаниях будет равен

$$\xi = - \frac{2 \left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle}{U_0^2} = \frac{3\pi r a^2 \sqrt{2}\omega}{(1 - \varphi)^2}. \quad (30)$$

Таким образом, используя (27) и (30), запишем полную гидродинамическую силу, действующую на каждую сферическую частицу

$$-F = \frac{2}{3} \pi r a^3 \left( \frac{2\varphi + 1}{1 - \varphi} \right) \frac{dU}{dt} + \frac{3\pi r a^2 \sqrt{2}\omega}{(1 - \varphi)^2} U. \quad (31)$$

При  $\varphi = 0$ , как видно из этой формулы, получается сила, действующая на одиночную сферическую частицу, колеблющуюся в безгранич-

ном объеме жидкости, т.е. формула (3).

Возможно, что при объемной концентрации сфер близкой к предельной (для ромбовидрической упаковки  $\varphi_{\Delta}^* = 0,7405$ , для кубической -  $\varphi_{\square}^* = 0,524$ ) модель сферических ячеек будет грубой, однако, здесь, в отличие от пучков цилиндрических стержней, гидродинамическая сила сопротивления должна быть конечной величиной даже при  $\varphi \rightarrow \varphi^*$ , как это и дает модель ячеек.

#### 4. Гидродинамические силы при умеренных и малых колебательных числах Рейнольдса

##### а. Сферические частицы

Рассмотрим, наконец, возможность получения приближенных выражений для гидродинамических сил более общего вида, чем (3), т.е. выражений типа (1).

Исходя из определения присоединенной массы через кинетическую энергию жидкости

$$m = \frac{2E}{u^2}, \quad (32)$$

заметим, что в колеблющемся пограничном слое  $\delta$  на поверхности сферы жидкость заторможена и толщина слоя потери кинетической энергии  $\Delta$ , определяемая из уравнения баланса

$$\frac{\Delta}{T} \int_0^T u_x^2 \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^{\Delta} u^2(y, t) dy dt, \quad (33)$$

равна [10]

$$\Delta = \delta/2. \quad (34)$$

Здесь  $T$  - период колебаний,  $u_x$  - амплитудная скорость на внешней границе пограничного слоя,  $u(y, t)$  - мгновенная скорость в пограничном слое на расстоянии  $y$  от поверхности тела

$$u(y, t) = u_x \exp\left(-\frac{y}{\delta}\right) \cos\left(\frac{y}{\delta} - \omega t\right). \quad (35)$$

Таким образом, можно считать, что колебания сферы радиусом  $a$  в вязкой жидкости энергетически эквивалентны колебаниям сферы радиусом  $a + \delta/2$  в идеальной жидкости и колебаниям "прилипшей" к сфере массы жидкости в слое  $\delta/2$  на поверхности сферы, равной  $2\pi a^2 \delta$ .

Полная кинетическая энергия жидкости, вовлеченной в движение, будет, таким образом, равна

$$E = \frac{\rho}{2} \int v^2 dV + \pi r a^2 \delta u_0^2, \quad (36)$$

где  $U$  - распределение скорости в идеальной жидкости, возникающее при движении в ней сферы радиусом  $a + \delta/2$  со скоростью  $U_0$ ; интегрирование в (36) проводится по объему жидкости вне сферы радиусом  $a + \delta/2$ . Этот интеграл, очевидно, равен  $m^* u_0^2 / 2$ , где  $m^*$  - присоединенная масса идеальной жидкости для сферы радиусом  $a + \delta/2$

$$m^* = \frac{2}{3} \pi \rho \left(a + \frac{\delta}{2}\right)^3 \approx \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \left(1 + \frac{3\delta}{2a}\right). \quad (37)$$

Подставив полную кинетическую энергию (36) в (32), получим присоединенную массу для сферы, колеблющуюся в вязкой жидкости

$$m = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \left(1 + \frac{9\delta}{2a}\right). \quad (38)$$

Поправка  $9\delta/2a$ , полученная таким способом, в точности соответствует второму слагаемому инерционного члена формулы (I).

Если этот способ применить к группе сферических частиц, описываемых моделью ячеек, то в качестве  $m^*$  следует взять присоединенную массу идеальной жидкости для сферы радиусом  $a + \delta/2$ , колеблющуюся в концентрической оболочке радиусом  $b$  (см. формулу (25)), и прибавить к ней величину  $2\pi r a^2 \delta$ . В результате вычислений получим присоединенную массу вязкой жидкости с точностью до членов с  $(\delta/a)^2$

$$m = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \left[ \left(1 + \frac{3\delta}{2a}\right) \frac{2\varphi\left(1 + \frac{3\delta}{2a}\right) + 1}{1 - \varphi\left(1 + \frac{3\delta}{2a}\right)} + 3 \frac{\delta}{a} \right], \quad (40)$$

переходящую в предельных случаях  $\varphi = 0$  и  $\delta/a = 0$  в формулы (38) и (27).

Следует отметить, что формула (40) применима лишь к разбавленным системам, когда расстояние между поверхностями частиц существенно превосходит толщину пограничного слоя  $\delta$ . В концентрирован-

ных же системах поправка на непотенциальность обтекания частиц должна играть относительно малую роль по сравнению с эффектом стесненности.<sup>\*\*/</sup>

Теперь о силе вязкого трения. Если воспользоваться тем формальным обстоятельством, что в формулу (1) составляющая силы вязкого трения состоит из суммы сопротивлений Стокса и сопротивления колебательному движению, и предположить, что для концентрированных систем это также справедливо, то используя какую-либо известную формулу для силы сопротивления, действующую на сферические частицы при их движении с малыми числами Рейнольдса и формулу (30) для трения колебательному движению, можно попытаться "сконструировать" соотношение для гидродинамической силы общего вида.

В рамках модели ползущего течения в эквивалентной сферической ячейке такая формула получена Хаппелем [5].

$$-F = 6\pi\mu a u K(\varphi), \quad (41)$$

где

$$K(\varphi) = \frac{1 + \frac{2}{3}\varphi^{2/3}}{1 - \frac{3}{2}\varphi^{2/3} + \frac{3}{2}\varphi^{5/3} - \varphi^2} \quad (42)$$

Таким образом, соотношение для гидродинамической силы, действующей на сферу, колеблющуюся вместе с другими сферическими частицами, запишем в виде

$$-F = \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \left[ \left(1 + \frac{3\sigma}{2a}\right) \frac{1 + 2\varphi \left(\frac{3\sigma}{2a}\right)}{1 - \varphi \left(1 + \frac{3\sigma}{2a}\right)} + 3\frac{\sigma}{a} \right] \frac{du}{dt} + 6\pi\mu a \left[ K(\varphi) + \frac{a}{\delta(a-\varphi)^2} \right] u. \quad (43)$$

Выражения в квадратных скобках в инерционном и вязкостном членах (43) является, таким образом, поправками на вязкость, колебательную нестационарность и стесненность движения сферических частиц. Из формулы видно, что стесненность движения сфер, описываемая моделью ячеек, приводит к весьма существенному росту инерционной гидроди-

---

а/ Так, например, в случае колебаний тесных пучков стержней, замена почти плоского профиля в узких зазорах между стержнями в потенциальном течении на параболический, характерный для вязкого течения, дает увеличение кинетической энергии жидкости и, следовательно, присоединенной массы не более, чем на 20%.

намической силы с увеличением концентрации даже в предельном случае  $\xi/a = 0$ . С увеличением параметра  $\delta/a$  или уменьшением  $Re_{\omega}$ , зависимость инерционной составляющей силы от  $\varphi$  становится еще более сильной. Следует учитывать, однако, что применимость формулы (40) ограничена условием малости объемной концентрации. Если предположить, что она дает приемлемую точность при  $\delta < 2\ell$ , где  $\ell$  - расстояние между поверхностями сфер, то условие применимости формулы (40) по объемной концентрации имеет вид

$$\varphi < \frac{\varphi^*}{\left(\frac{\ell}{a} + 1\right)^3} = \frac{0,74}{\left(2\frac{\delta}{a} + 1\right)^3}. \quad (44)$$

При таком условии формула (40) эквивалентна более простому выражению

$$m = \frac{2}{3} \pi r a^3 \left(1 + \frac{9\delta}{2a}\right) \left(\frac{1+2\varphi}{1-\varphi}\right). \quad (45)$$

На рис. 2 представлена зависимость коэффициента присоединенной массы

$$\delta = \frac{m}{\left(\frac{4}{3}\right) \pi r a^3} = \left(\frac{1}{2} + \frac{9\delta}{4a}\right) \left(\frac{1+2\varphi}{1-\varphi}\right) \quad (46)$$

от объемной концентрации сфер при различных значениях параметра  $\frac{\delta}{a}$  (или колебательных чисел Рейнольдса  $Re_{\omega} = 2(a/\delta)^2$ ). Граничная линия  $\varphi = 0,74 / \left(2\frac{\delta}{a} + 1\right)^2$ , ниже которой предполагается приемлемая точность формулы (40), показана тонкой линией. Из общих соображений ясно, что действительная зависимость коэффициента присоединенной массы в области выше граничной линии, должна иметь вид, показанный на рисунке пунктирными линиями.

Аналогичным образом обстоит дело и с вязкостной составляющей гидродинамической силы. На рис. 3 показана зависимость "поправки" к закону Стокса, т.е. зависимость выражения

$$\alpha = K(\varphi) + \frac{a}{\delta(1-\varphi)^2} \quad (47)$$

от объемной концентрации при различных значениях колебательных чисел Рейнольдса. Из рисунка видно, что по мере увеличения числа Рейнольдса, эта поправка быстро возрастает за счет второго слагаемого  $a / \delta(1-\varphi)^2$  при относительно невысоких концентрациях. Для концентриро-

ванных систем первое слагаемое поправки, т.е. величина  $K(\varphi)$ , может быть соизмеримым со вторым. Поскольку обычно в подвижных гетерогенных средах со сферическими включениями объемная концентрация редко бывает больше 0,4, то, несколько сузив диапазон применимости, вместо функции (42) запишем

$$K(\varphi) \approx \frac{(1+4\varphi)^2}{(1-\varphi)^4}. \quad (48)$$

Эта функция представлена на рис.3 пунктирной линией.

Таким образом, с учетом изложенного, запишем формулу для гидродинамической силы в виде

$$-F = \frac{2}{3} \pi r a^3 \left(1 + \frac{9\delta}{2a}\right) \frac{(1+2\varphi)}{(1-\varphi)} \frac{du}{dt} + \frac{6\pi m a}{(1-\varphi)^2} \left[ \frac{(1+4\varphi)^2}{(1-\varphi)^2} + \frac{a}{\delta} \right] u. \quad (49)$$

#### б. Пучки цилиндрических стержней

Аналогичным образом можно "сконструировать" формулу для пучков цилиндрических стержней.

Поправку к присоединенной массе определим так же, как и в случае сфер, т.е. радиус цилиндра увеличим на толщину потери энергии  $\Delta = \delta/2$  и к "присоединенной массе" увеличенного цилиндра прибавим "прилипшую" массу  $\pi r a \delta$ . С точностью до членов  $(\delta/a)^2$  получим

$$\begin{aligned} m &= \pi r \left(a + \frac{\delta}{2}\right)^2 \frac{\left(a + \frac{\delta}{2}\right)^2 + b^2}{b^2 - \left(a + \frac{\delta}{2}\right)^2} + \pi r a \delta = \\ &= \pi r a^2 \left(1 + \frac{\delta}{a}\right) \frac{1 + \varphi \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)}{1 - \varphi \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)} + \pi r a \delta. \end{aligned} \quad (50)$$

Или приближенно

$$m \approx \pi r a^2 \left(1 + \frac{2\delta}{a}\right) \frac{(1+\varphi)}{(1-\varphi)}. \quad (51)$$

В случае колебаний одиночного цилиндра в безграничном объеме вязкой жидкости из (50) или (51) следует

$$m = \pi r a^2 \left(1 + \frac{2\delta}{a}\right). \quad (52)$$

Этот результат был получен и проверен экспериментально в работе [10] в широком диапазоне частот колебаний стержней и вязкости жидкости.

К вязкостному члену силы трения колебательному движению в (31) нужно добавить соответствующую квазистационарную силу трения, аналогичную (41). Такое решение для силы трения, действующей на единицу длины цилиндра, движущегося в цилиндрической ячейке вязкой жидкости при условии отсутствия трения на ее внешней поверхности, известно [11]

$$-F = \frac{4\pi\mu u}{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} - \frac{1}{2}(\ln\varphi - 1)} \quad (53)$$

Объединяя (53) с силой трения колебательному движению и учитывая (52), запишем окончательно

$$-F = \pi r a^2 \left(1 + \frac{2\delta}{a}\right) \left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right) \frac{du}{dt} + 4\pi\mu \left[ \frac{1}{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} - \frac{1}{2}(\ln\varphi - 1)} + \frac{a}{\delta(1-\varphi)^2} \right] u. \quad (54)$$

Зависимости для присоединенной массы

$$\gamma = \left(1 + 2\frac{\delta}{a}\right) \left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi}\right) \quad (55)$$

и сомножителя в квадратных скобках в вязкостном члене (54)

$$\kappa = \frac{1}{\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2} - \frac{1}{2}(\ln\varphi - 1)} + \frac{a}{\delta(1-\varphi)^2} \quad (56)$$

представлены на рис. 4, 5. Все соображения, приведенные для групп сфер, относятся также и к пучкам цилиндров.

Следует отметить, что формула (53) не дает предельного перехода на случай движения цилиндра в безграничном объеме жидкости. Как известно, решение уравнений Стокса для цилиндра не существует, в отличие от случая движения сферы. Этот факт известен как парадокс Стокса; его возникновение продемонстрировано из элементарных соображений, например, в книге [11]. Для получения первого приближения должно использоваться уравнение Озеена, а не Стокса. В озееновском приближении решение для цилиндра имеет вид [2]

$$-F = \frac{4\pi\mu u}{\frac{1}{2} - c - \ln\left(\frac{uap}{4\mu}\right)}, \quad (57)$$

где  $C = 0,577$  - постоянная Эйлера.

Двумерные задачи обтекания тел жидкостью, частично ограниченной на бесконечности, имеют, однако, конечные решения в стоксовом приближении. Одним из таких решений как раз и является формула (53).

Рассмотрим теперь колебания цилиндрических стержней с объемной концентрацией близкой к предельной при малых колебательных числах Рейнольдса.

Схему течения жидкости в межстержневом пространстве примем такой же, как на рис. I, с той разницей, что линии тока в микроячейке I будем относить не к потенциальному течению с плоским профилем скорости, как раньше, а к ползущему течению с параболическим профилем скорости.

$$v^*(y, \theta) = \frac{3}{2} \bar{v}(\theta) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{y}{h(\theta)} \right)^2 \right], \quad (58)$$

где  $\bar{v}(\theta)$  - средняя скорость жидкости, определяемая формулой (15),  $y$  - расстояние от поверхности цилиндра.

Кинетическая энергия жидкости в микроячейке I для системы, образующей треугольную решетку в этом случае равна

$$E_1^* = \frac{\rho}{2} \int_0^{\frac{1}{2}h(\theta)} \int_0^{\frac{1}{2}h(\theta)} v^{*2}(y, \theta) a \, dy \, d\theta = \frac{\rho}{2} E_1, \quad (59)$$

где  $E_1$  - кинетическая энергия в микроячейке при потенциальном течении жидкости.

Используя формулу (13), получим присоединенную массу в случае  $\delta/a \rightarrow \infty$  (или  $Re_\omega \rightarrow 0$ ) в 6/5 раза большую, чем присоединенная масса (13) для случая  $\delta/a = 0$ . Аналогичный результат получается и для системы стержней, образующих квадратную решетку.

Коэффициент вязкостного трения в случае  $Re_\omega \rightarrow 0$  определим по средней за период колебания скорости диссипации энергии

$$\xi_s = - \frac{2 \langle dE/dt \rangle}{u_0^2} = - \frac{12 \langle dE/dt \rangle_1}{u_0^2}, \quad (60)$$

где

$$\langle \frac{dE}{dt} \rangle_1 = - \frac{\rho}{2} \int_0^{\frac{1}{2}h(\theta)} \int_0^{\frac{1}{2}h(\theta)} \left( \frac{dv^*(y, \theta)}{dy} \right)^2 a \, dy \, d\theta = \frac{3}{2} \rho u_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}h(\theta)} \frac{\cos^3 \theta \, d\theta}{(X - \cos \theta)^3}. \quad (61)$$

Численное интегрирование дает следующее приближенное выражение

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos \theta d\theta}{(X - \cos \theta)^3} \approx 0,8 (X-1)^{-\frac{5}{2}} \quad (62)$$

Следует отметить, что из-за быстрой сходимости при  $X \rightarrow 1$  интегрирование в пределах от 0 до  $\pi/6$  или  $\pi/4$  дает практически один и тот же результат, удовлетворительно аппроксимирующийся степенной функцией. Так, например, при  $X = 1,01$  степенная функция лишь на 4% занижает, а при  $X = 1,1$  - на 5% завышает значение интеграла.

Таким образом, из (60) получаем для стержневых систем с треугольной решеткой

$$\xi \approx 15 \mu (X-1)^{-\frac{5}{2}} \quad (63)$$

Для систем с квадратной решеткой основной вклад в диссипацию дают 4 микроячейки типа I, поэтому

$$\xi \approx -\frac{8 \langle dE/dt \rangle}{u^2} \approx 10 \mu (X-1)^{-\frac{5}{2}} \quad (64)$$

Объединяя инерционные (18), (19) и вязкостные члены сопротивления (23), (24) и (63), (64), запишем общее выражение для гидродинамической силы

$$-F = 3\sqrt{2} \pi r a^2 (X-1)^{-\frac{3}{2}} \frac{du}{dt} + \left[ \frac{3}{\sqrt{2}} \pi \mu \frac{a}{\delta} (X-1)^{-\frac{3}{2}} + 15 \mu (X-1)^{-\frac{5}{2}} \right] u, \quad (65)$$

$$-F = 2\sqrt{2} \pi r a^2 (X-1)^{-\frac{3}{2}} \frac{du}{dt} + \left[ \sqrt{2} \pi \mu \frac{a}{\delta} (X-1)^{-\frac{3}{2}} + 10 \mu (X-1)^{-\frac{5}{2}} \right] u. \quad (66)$$

Из этих соотношений видно, что при  $X \rightarrow 1$  все члены гидродинамической силы стремятся к бесконечности по степенным законам. По мере увеличения относительного шага  $X$ , или уменьшения объемной концентрации включений, инерционный и вязкостный члены силы сопротивления в (65) и (66) уменьшаются и, в диапазоне  $X = 1,1 - 1,3$  или  $\varphi = 0,45 - 0,75$ , становятся равными соответствующим составляющим (54), найденным по модели эквивалентных леек.

В связи с тем, что ползущие течения представляют определенный интерес для задач фильтрации жидкости через пористые материалы с волокнистой структурой (волокна цилиндрической формы), приведем здесь

выражения для коэффициентов проницаемости или постоянных Дарси, вытекающие из формул (59) и (60).

Если цилиндрические включения неподвижны, а жидкость протекает с фильтрационной скоростью  $u$ , то силу, действующую на цилиндр  $i$ , следовательно, относящуюся к одной ячейке, следует приравнять градиенту давления, умноженному на объем ячейки.

Таким образом, запишем

$$F = \xi u = V \frac{dP}{dx},$$

или в виде общепринятого уравнения фильтрации

$$u = - \frac{K}{\mu} \frac{dP}{dx},$$

где  $K$  - постоянная Дарси.

Учитывая, что объемы ячеек для пучков с треугольной и квадратной решетками равны  $3,464 a^2 X^2$  и  $4a^2 X^2$ , или приближенно для  $X \approx 1$   $V = 3,464 a^2$  и  $V = 4a^2$ , получим

$$K_{\Delta} \approx 0,23 a^2 (X-1)^{\frac{3}{2}},$$

$$K_{\square} \approx 0,4 a^2 (X-1)^{\frac{3}{2}}.$$

### 5. Продольное обтекание пучков цилиндрических стержней

Для полноты предпринятого описания гидродинамических сил рассмотрим колебания пучков цилиндрических стержней в направлении их осей, здесь возможны два подхода. Стержни пучка можно рассматривать в некоторой ограниченной системе, так, что их торцы не контактируют с жидкостью. Схематично такая ситуация показана на рис. 6а. Можно, однако, стержневые элементы рассматривать как длинные, но окруженные со всех сторон жидкостью включения. Такая ситуация схематично показана на рис. 6б.

Рассмотрим сначала первый случай.

#### а. Бесторцевые пучки стержней

Естественно, что в приближении тонкого пограничного слоя, т.е. при весьма больших числах  $Re_{\omega}$ , выражение для гидродинамической силы будет содержать только силу трения колебательному движению, а инерционная сила будет равна нулю. Определяя среднюю скорость диссипации энергии на поверхности стержня по (21) и коэффициент трения как

$$\xi = - \frac{2 \langle dE/dt \rangle}{u_0^2} = \frac{2\pi m a}{\delta}, \quad (67)$$

получим

$$-F = \xi u = 2\pi m \frac{a}{\delta} u. \quad (68)$$

При не очень высоких колебательных числах Рейнольдса следует учесть влияние пограничного слоя на возникновение присоединенной массы. В данном случае масса "прилипла" к стержню жидкости в слое  $\Delta$  и есть присоединенная масса

$$m = 2\pi r a \Delta = \pi r a^2 \frac{\delta}{a}. \quad (69)$$

Так же, как и раньше, при качественном описании в таком приближении, к силе трения (68) следует прибавить стационарную силу трения при вязкостном обтекании. Воспользовавшись решением Халпеля для течения жидкости внутри кольцевого канала с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$  ( $a^2/b^2 = \varphi$ ) при условии отсутствия трения на его внешней поверхности [5]

$$-F = \frac{8\pi\mu(1-\varphi)}{4\varphi - \varphi^2 - 3 - 2\ln\varphi} u, \quad (70)$$

запишем гидродинамическую силу в виде

$$-F = \pi r a^2 \frac{\delta}{a} \frac{du}{dt} + 2\pi\mu \left[ \frac{4(1-\varphi)}{4\varphi - \varphi^2 - 3 - 2\ln\varphi} + \frac{a}{\delta} \right] u. \quad (71)$$

Из формулы (69) видно, что присоединенная масса неограниченно возрастает с ростом параметра  $\delta/a$ . В действительности же здесь, как и в ранее рассмотренном случае при  $\delta/a \rightarrow \infty$  и  $\varphi \neq 0$ , присоединенная масса должна быть конечной величиной. Приведем оценку этой величины для тесных пучков стержней. В этом случае радиус эквивалентной ячейки мало отличается от радиуса стержня и вязкое течение в ячейке можно рассматривать как течение в плоской щели с граничным условием прилипания на одной поверхности и отсутствием трения на другой, т.е. с параболическим распределением скорости. Рассчитав кинетическую энергию жидкости в ячейке на единицу длины стержня, по-

лучим

$$m = \frac{2E}{u^2} = \frac{2}{5} \pi r a^2 (\varphi^{-\frac{1}{2}} - 1). \quad (72)$$

Например, для пучков с объемной концентрацией включений  $\varphi = 0,5$  присоединенная масса составляет 14% от массы жидкости, вытесненной стержнем.

Рассмотрим теперь второй случай.

б. Цилиндрические включения, окруженные жидкостью

При движении цилиндрических включений со скоростью  $u$ , вытесняющее действие их торцов создает течение жидкости в межстержневом пространстве со средней скоростью

$$v = u \frac{\varphi}{1-\varphi}. \quad (73)$$

При течении невязкой жидкости с плоским профилем скорости ее кинетическая энергия в ячейке на единицу длины стержня будет равна

$$E = \frac{1}{2} \pi r a^2 u^2 \frac{\varphi}{1-\varphi} \quad (74)$$

и присоединенная масса

$$m = \frac{2E}{u^2} = \pi r a^2 \frac{\varphi}{1-\varphi}. \quad (75)$$

При  $\varphi = 0$ , как и следовало ожидать, присоединенная масса невязкой жидкости равна нулю. При  $\varphi \neq 0$  формула (75) дает конечное значение  $m$ , в отличие от случая с "бесторцевыми" цилиндрами, где  $m = 0$  при  $\delta/a = 0$ .

Поправку на вязкость к формуле (75) определим исходя из того, что пограничный слой, возникающий на поверхности стержня, в системе координат, движущейся со средней скоростью жидкости  $v = u\varphi/(1-\varphi)$ , имеет кинетическую энергию

$$E = 2\pi r a \delta \frac{(v+u)^2}{2} = \pi r a^2 \frac{\delta u^2}{2a(1-\varphi)^2}. \quad (76)$$

Эта энергия приводит к дополнительному слагаемому к присоединенной массе (75)

$$\frac{2E}{u^2} = \pi \rho a^2 \frac{\delta}{a(1-\varphi)^2} \quad (77)$$

Таким образом, в схеме течения с вытесняющим действием торцов, кроме присоединенной массы невязкой жидкости (75) имеется поправка (77), отличающаяся от (69) в  $(1-\varphi)^{-2}$  раз.

Можно показать, что при такой схеме течения сила трения колебательному движению и сила трения для ползущего течения также должна быть в  $(1-\varphi)^{-2}$  раз больше, чем силы (68) и (70), поскольку в этом случае скорость жидкости относительно стержня увеличилась в  $(1-\varphi)^{-1}$  раз и, следовательно, диссипативные потери - в  $(1-\varphi)^{-2}$  раз.

С учетом изложенного, выражение для полной гидродинамической силы, действующей на единицу длины цилиндрического включения, колеблющегося в направлении оси, принимает вид

$$-F = \pi \rho a^2 \left[ \frac{\varphi}{1-\varphi} + \frac{\delta}{a(1-\varphi)^2} \right] \frac{du}{dt} + 2\pi \eta \left[ \frac{1}{\left(\varphi - \frac{1}{4}\varphi^2 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\ln\varphi\right)(1-\varphi)} + \frac{a}{\delta(1-\varphi)^2} \right] u \quad (78)$$

Здесь, как и в соотношении (54) для колебаний стержней в направлении нормальном к их осям, составляющая сила вязкого трения не дает предельного перехода при  $\varphi = 0$  (тот же порядок Стокса). Кроме того, поправка к присоединенной массе в инерционном члене сопротивления также должна быть ограниченной при  $\varphi \neq 0$ . Можно показать, что, например, для достаточно концентрированных стержневых систем присоединенная масса вязкой жидкости в асимптотическом случае

$(\delta/a) \rightarrow \infty$  будет лишь на 20% больше присоединенной массы невязкой жидкости ( $\delta/a = 0$ ).

#### Заключение

Соотношения для гидродинамических сил, типа формулы (1) для одиночной сферы, являются фундаментальной основой для многих задач динамики гетерогенных сред при вибрационных воздействиях.

При достаточно больших колебательных числах Рейнольдса и объемных концентрациях сферических или цилиндрических включений не очень близких к предельным, полученные соотношения (3) и (10) могут слу-

жить достаточно хорошим приближением при решении различных задач динамики гетерогенных сред со сферическими и цилиндрическими включениями.

При малых колебательных числах Рейнольдса, особенно в концентрированных системах, и полученным соотношениям (43), (49), (54) следует относиться скорее как качественным результатам и применять их с известной осторожностью.

Определенный интерес представляют выражения для гидродинамических сил общего вида особенно для задач фильтрации жидкости в пористых средах при умеренных числах Рейнольдса, когда справедливость закона Дарси нарушается за счет существенной роли инерционных сил, обусловленных искажением линий тока и изменением направления движения жидкости в извилистых каналах пористых сред даже без перехода в турбулентный режим течения в поровом пространстве.

Литература

1. Седов А.И. Механика сплошной среды. т. I. М.: "Наука", 1970.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.
3. Милн Томсон Л.Н. Теоретическая гидродинамика. М.: "Мир", 1964.
4. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. т. I. М.: Гостехтеориздат, 1948.
5. Хаппель Дж., Бренер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: "Мир", 1976.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: ГИТТЛ, 1953.
7. Синявский В.Ф., Федотовский В.С., Кухтин А.Б. Инерционные характеристики и гидродинамическое демпфирование колебаний круговых цилиндров в жидкой среде. - Прикладная механика, 1980, № 4, с. II5.
8. Федотовский В.С. Приближенный способ расчета присоединенных масс и коэффициентов гидродинамического демпфирования колебаний тесных пучков стержней: Препринт ФЭИ-1072, Обнинск, 1980.
9. Вознякевич Е.В., Федотовский В.С. О независимости присоединенной массы и коэффициента демпфирования от направления колебаний бесконечной стержневой сборки: Препринт ФЭИ-1105, Обнинск, 1980.
10. Синявский В.Ф., Федотовский В.С., Кухтин А.Б. О колебаниях цилиндра в вязкой жидкости. - Прикладная механика, 1980, № I, с. 62.
11. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955.
12. Zuber N. On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime. - Chem. Eng. Sci., 19 (1964), p. 897-917.
13. Wijnjaarden L. Hydrodynamic interaction between gas bubbles in liquid. - J. Fluid Mech., 1976, 77, n1, p 27-44.

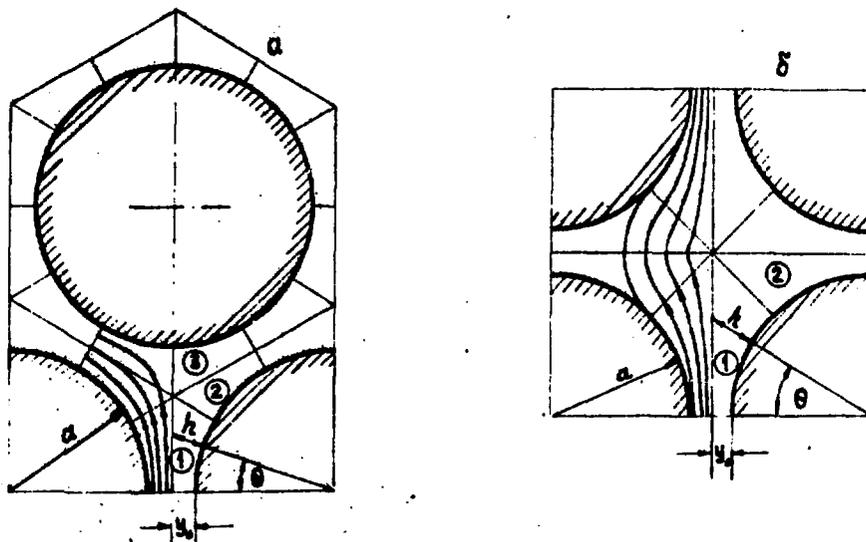


Рис. I. Схемы обтекания тесных пучков цилиндров, образующих правильные треугольную (а) и квадратную (б) решетки.

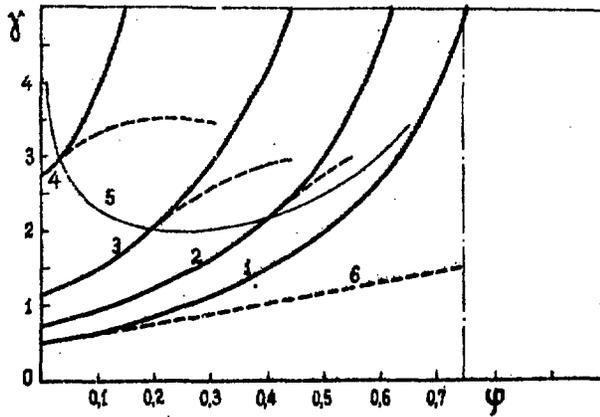


Рис.2. Зависимость коэффициента присоединенной массы от объемной концентрации сфер при различных колебательных числах Рейнольдса

1- $\delta/a=0$  ( $Re_{\omega}=\infty$ ); 2- $\delta/a=0,1$ ; 3- $\delta/a=0,3$ ; 4- $\delta/a=1$  ( $Re_{\omega}=2$ );  
5- границная линия (44); 6- формула Вейнгардена [13].

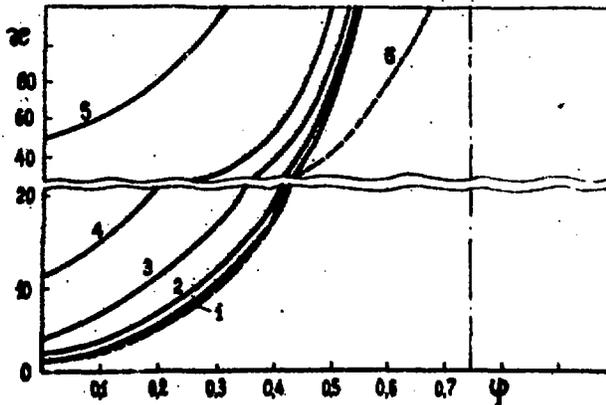


Рис.3. Зависимость (47) от объемной концентрации сфер при различных колебательных числах Рейнольдса

1- $a/\delta=0$  ( $Re_{\omega}=0$ ); 2- $a/\delta=1$ ; 3- $a/\delta=3,3$ ; 4- $a/\delta=10$ ; 5- $a/\delta=50$  ( $Re_{\omega}=5000$ ); 6- формула (48).

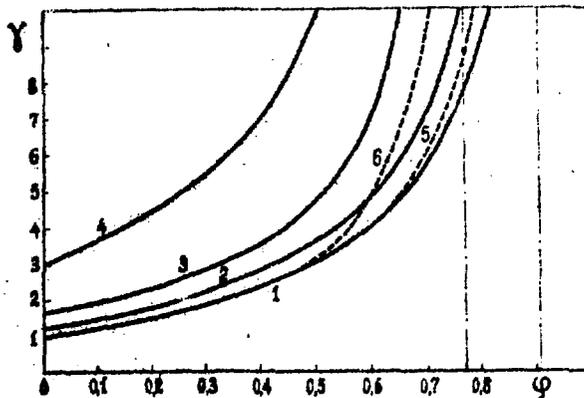


Рис. 4. Зависимость коэффициента присоединенной массы от объемной концентрации цилиндрических включений при различных колебательных числах Рейнольдса  
1- $\delta/a=0$  ( $Re_{\infty}$ ); 2- $\delta/a=0,1$ ; 3- $\delta/a=0,3$ ; 4- $\delta/a=1$  ( $Re_2$ );  
5,6- расчет по (16), (17).

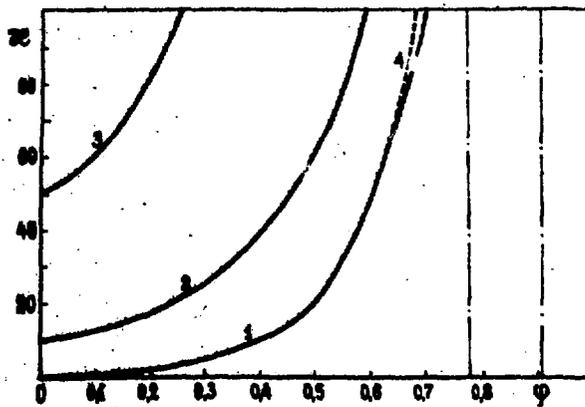


Рис. 5. Зависимость (56) от объемной концентрации цилиндрических включений  
1- $a/b=\infty$  ( $Re_0$ ); 2- $a/b=3,3$ ; 3- $a/b=50$  ( $Re_{5000}$ ); 4- расчет для тесных пучков с квадратной упаковкой стержней.

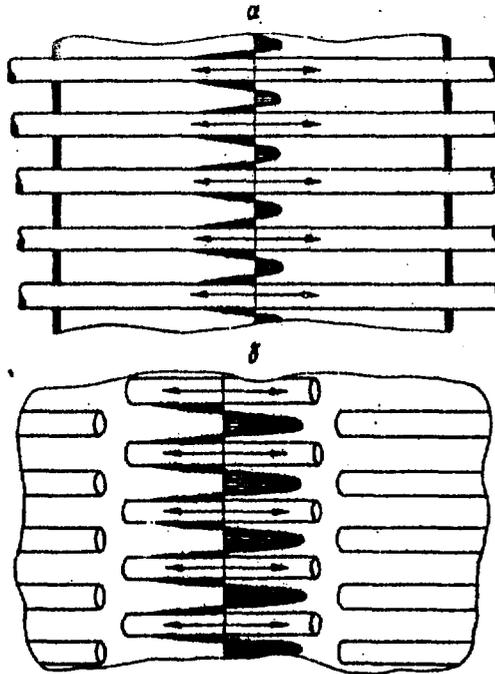


Рис. 6. Схемы колебаний цилиндрических включений:  
а- бесторцевые пучки стержней,  
б- включения, окруженные жидкостью.

Технический редактор Н. П. Герасимова.

---

Подписано к печати 11.08.1983 г. Т-17381 Формат 60×90 1/16  
Офсетная печать Усл. п. л. 1,75 Уч. изд. л. 1,25 Тираж 78 экз.  
Цена 21 коп. ФЭИ-1473 Индекс 3624

---

Отпечатано на ротапринтере ФЭИ, г. Обнинск.

21 коп.

Индекс 3624

Гидродинамические силы, действующие на колеблющиеся  
сферические и цилиндрические включения.  
ФЭИ-1473, 1983, 1-28.