Ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции
Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

С.И. Крашенинников, В.В. Параил

ИАЭ-3854/6

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДРЕЙФОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ПОЛЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ И АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ ПЛАЗМЫ

Москва 1983

УДК 533.9

Ключевые слова: плазма, стохастизация, диффузия, резонанс.

Рассматривается механизм стохастической неустойчивости, приводящей к возникновению аномальной диффузии плазмы поперек магнитного поля. Получены оценки коэффициента диффузии в случае сильной турбулентности.

Хорошо известно, какую важную роль в энергобалансе плазмы играют процессы аномального переноса. Теоретическому исследованию механизмов такого переноса посвящено огромное количество работ (см., например, [1 – 3] и цитированную в них литературу) и в целом достигнуто удовлетворительное согласие между теоретическими представлениями и экспериментальными результатами. Однако ряд ключевых вопросов в теории аномальных процессов переноса остается не вполне ясным. Прежде всего это относится к механизму стохастизации движения частиц в электрических и магнитных полях неустойчивых колебаний. Нет полной ясности и в вопросе о том, как зависят коэффициенты аномального переноса от амплитуды флуктуирующих полей в случае сильно развитой турбулентности. Выяснению этих вопросов и посвящена данная работа.

Ниже будет рассмотрен процесс аномальной диффузии электронов поперек постоянного магнитного поля $\vec{B}_0$, возникающей под действием низкочастотных ($\omega \ll \omega_{Be} = eB_0/mc$) потенциальных колебаний с характерной длиной волны, превышающей ларморовский радиус электронов. В этом случае для описания поперечного, к внешнему магнитному полю $\vec{B}_0$, движения электронов применимо дрейфовое приближение:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{c}{B_0^2}\left(\vec{B}_0 \times \nabla \varphi(\vec{r},t)\right), \qquad (1)$$

где $\varphi(\vec{r},t)$ – потенциал электрического поля колебаний, который в общем случае может быть представлен в виде интеграла Фурье $\varphi(\vec{r},t) = \int \varphi_{\vec{k}\omega} e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}\, d\vec{k}\, d\omega$.

В режиме слабой турбулентности влияние колебаний на поведение электронов обычно описывается квазилинейным дрейфовым уравнением [1], которое в рассматриваемом случае может быть представлено следующим образом:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \int d\vec{K}\, d\omega \left| \varphi_{\vec{K},\omega} \right|^2 \frac{c^2 K_\perp^2}{B_0^2} \pi \delta(\omega - K_\parallel V_\parallel) \frac{\partial f_e}{\partial \vec{r}}, \tag{2}$$

где $f_e(\vec{r}, v_\parallel)$ – функция распределения электронов. Величина $|\varphi_{\vec{k},\omega}|^2$ зависит от конкретных механизмов возбуждения неустойчивых колебаний и их насыщения и в общем виде, естественно, найдена быть не может, поэтому в дальнейшем мы будем считать $\varphi_{\vec{k},\omega}$ известной функцией $\vec{k}$, ω.

Кроме того, при таком рассмотрении возникают и определенные трудности принципиального характера. Дело в том, что квазилинейное приближение подразумевает бесконечное время взаимодействия резонансной частицы с колебаниями, что приводит к появлению в (2) δ-функции (это эквивалентно бесконечному смещению частицы в поле волны). Ясно, однако, что характерная величина смещения частицы не может превышать длину волны. Эти трудности квазилинейной теории хорошо известны, и в ряде работ предпринимались попытки их устранения [2, 3]. Тем не менее вопросы эти до настоящего времени окончательно не выяснены.

1. Рассмотрим уравнение (1). Как было отмечено в [3, 4], при достаточно высокой интенсивности колебаний временной зависимостью потенциала $\varphi(\vec{r}, t)$ в первом приближении можно пренебречь и считать, что электроны движутся по уровням $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$. Полагая, что продольное электрическое поле $E_\parallel \sim k_\parallel \varphi$ достаточно мало и не сказывается на движении электронов вдоль магнитного поля, из (1) получаем соответствующий критерий "стационарности" потенциала $\varphi(\vec{r}, t)$:

$$\frac{c K_\perp^2 \varphi}{B_0 |\omega - K_\parallel V_\parallel|} \geqslant 1, \tag{3}$$

где $k_\perp$ – поперечный волновой вектор колебаний.

Неравенство (3) по сути является мерой резонансности электронов и означает, что частицы, имеющие достаточно малую расстройку $\delta\omega = |\omega - k_\parallel v_\parallel|$, за время порядка $1/\delta\omega$ успевают несколько раз обогнуть соответствующие "горы" и "озера" [4], образованные потенциалом $\varphi(\vec{r})$.

Выделим из потенциала $\varphi(\vec{r}, t)$ резонансную часть $\varphi_R(\vec{r}, t)$, удовлетворяющую соотношению (3). В первом приближении движение частиц в потенциале $\varphi_R(\vec{r}, t)$ происходит по уровням $\varphi_R(\vec{r}, t) = \mathrm{const}$. Однако временная зависимость потенциала $\varphi_R(\vec{r}, t)$ приводит к деформации, сдвигу линий уровней $\varphi_R(\vec{r}, t)$, что позволяет частицам переходить с одной траектории на другую и в конечном счете, как будет видно из дальнейшего, является причиной аномальной диффузии. Кроме того, частицы испытывают воздействие нерезонансной части потенциала $\varphi(\vec{r}, t)$: $\varphi_{NR}(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r},t) - \varphi_R(\vec{r},t)$.

2. Влияние нерезонансной части потенциала на движение частиц в поле $\varphi_R(\vec{r}, t)$ мы рассмотрим на простейшем примере, полагая,

$$\varphi_R = -\varphi_0 \sin k_x x \sin k_y y \,, \tag{4}$$

$$\varphi_{NR} = \varphi_1 \cos(\omega_0 t - k_x^{(0)} x - k_y^{(0)} y)\,. \tag{5}$$

Полагая также $k_x^{(0)} \ll k_y^{(0)} \ll k_x, k_y$, подставим (4) и (5) в (1):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c\varphi_0}{B_0}\frac{\partial}{\partial y}\sin k_x x \sin k_y y + \frac{c k_y^{(0)}\varphi_1}{B_0}\sin\omega_0 t,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{c\varphi_0}{B_0}\frac{\partial}{\partial x}\sin k_x x \sin k_y y\,. \tag{6}$$

Введем безразмерные переменные: $\tau = tc\varphi_0 k_x k_y/B_0$, $\tilde{x} = k_x x$, $\tilde{y} = k_y y$, $\Omega_0 = \omega_0 B_0/c\varphi_0 k_x k_y$, $\epsilon = k_y^{(0)}\varphi_1/k_y\varphi_0$; тогда (6) будет иметь следующий вид:

$$\frac{d\tilde{x}}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial\tilde{y}}\sin\tilde{x}\sin\tilde{y} + \varepsilon\sin\Omega_0\tau\,,$$
$$\frac{d\tilde{y}}{d\tau} = -\frac{\partial}{\partial\tilde{x}}\sin\tilde{x}\sin\tilde{y}\,. \tag{7}$$

Из (7) нетрудно видеть, что при $\epsilon = 0$ частицы движутся по замкнутым траекториям, расположенным в одной из ячеек $\tilde{x}\in(\pi n, \pi(n+1))$, $\tilde{y}\in(\pi m, \pi(m+1))$, где n, m – произвольные целые числа, причем траектория определяется значением интеграла движения H:

$$H = \sin\tilde{x}\sin\tilde{y}\ , \qquad \frac{dH}{d\tau} = 0 . \tag{8}$$

Следовательно, система (7) эквивалентна уравнению нелинейного осциллятора, находящегося под действием переменного возмущения. Как известно [5,6], в таких системах может возникать стохастическая неустойчивость, приводящая к диффузии частиц в конфигурационном пространстве. В рассматриваемом случае такая диффузия сопровождается стохастическим перемешиванием неустойчивых частиц между соседними ячейками, т.е. диффузией в координатном пространстве.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Перейдем, следуя [5,6], к новым каноническим переменным: действию I и углу θ, характеризующим невозмущенное движение. Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать поведение частицы вблизи сепаратрисы, то во избежание излишней громоздкости формул мы сразу ограничимсч малыми значениями гамильтониана $H = \sin\tilde{x}\sin\tilde{y}$, считая, для определенности $H > 0$. Опуская промежуточные выкладки, находим:

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint y\,dx = \frac{-1}{2\pi}\cdot(\pi^2 + 4H\ln H), \tag{9}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \Omega(I) = \frac{dH}{dI} = -\frac{\pi}{2}\ln^{-1}H . \tag{10}$$

В (9), (10) мы пренебрегли несущественными для дальнейшего численными множителями под знаком логарифма.

В случае, когда $\epsilon \neq 0$, величины I, Ω (I) уже не являются интегралами движения и при $\epsilon \ll 1$ могут быть найдены из следующего уравнения:

$$\frac{dI}{d\tau} = \frac{1}{\Omega(I)}\left[\frac{\partial H}{\partial\tilde{x}}\frac{d\tilde{x}}{d\tau} + \frac{\partial H}{\partial\tilde{y}}\frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right] = \\ = -\frac{\epsilon}{\Omega(I)}\left(\frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right)_0 \sin\Omega_0\tau , \tag{11}$$

где $(d\tilde{y}/d\tau)_0$ – $\tilde{y}$-я составляющая скорости невозмущенного движения.

Поскольку $(dy/d\tau)_0$ – периодическая функция времени с периодом $T(I) = 2\pi/\Omega\,(I)$, то она может быть разложена в ряд Фурье. Если частота возмущения Ω_0 попадает в резонанс с некоторой S-й гармоникой частоты $\Omega(I_s)$, то, как хорошо известно из теории нелинейных колебаний, линии $I(\tau)$ образуют островную структуру некоторой ширины $\delta I_s(\epsilon)$ $(\delta I_s(\epsilon) \sim \epsilon^{1/2})$. При достаточно сильном возмущении островные структуры соседних резонансов перекрываются и частица может переходить от одного резонанса к другому, причем ее движение в этом случае носит стохастический характер. Критерий возникновения такой стохастической неустойчивости движения частицы можно, таким образом, представить в виде [5,6]

$$\frac{\delta I_s(\varepsilon)}{\Delta I_s} \gtrsim 1 , \quad \Delta I_s = | I_{s+1} - I_s | , \tag{12}$$

где $s\Omega(I_s) = \Omega_0$.

Найдем величину ΔI_s. Используя выражения (9), (10) для $I(H)$ и $\Omega(I)$ и определение ΔI_s, после несложных выкладок, которые для краткости мы здесь опускаем, получим:

$$H_s = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{s}{\Omega_0}} , \quad \frac{H_s - H_{s+1}}{H_s} = 1 - e^{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\Omega_0}} , \tag{13}$$

$$\Delta I_s = \frac{s}{\Omega_0} e^{-\frac{\pi}{2}\frac{s}{\Omega_0}} \left| 1 - e^{-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\Omega_0}\left(1 + \frac{1}{s}\right)} \right| . \tag{14}$$

Определим теперь ширину островной структуры $\delta I_s(\epsilon)$ при достаточно малых ϵ, для чего обратимся к уравнению (11).

Зависимость $\tilde{y}$-й составляющей скорости невозмущенного движения $(d\tilde{y}/d\tau)_0$ от времени может быть найдена из (7). При малых значениях H:

$$\left(\frac{d\tilde{y}}{d\tau}\right)_0 = cn\left(\tau + \beta, 1/(1 - H^2)^{1/2}\right) , \tag{15}$$

где $cn(x, \kappa)$ – эллиптическая функция Якоби; β – константа, определяемая начальными условиями.

Разлагая $cn(x, \kappa)$ в ряд Фурье [7] и подставляя (15) в (11), с учетом $H \ll 1$ имеем

$$\frac{dI}{d\tau} = -4\varepsilon \sin\Omega_0\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{n-1/2}}{1+q^{2n-1}} \cos[(2n-1)\Omega(I)(\tau+\beta)] , \tag{16}$$

где $q = e^{-\pi\Omega(I)}$.

Поскольку $\Omega_0 = \omega_0 B_0/ck_{\perp}^2 \varphi_0$ характеризует частоту нерезонансной части потенциала, то, следовательно, $\Omega_0 \gtrsim 1$. В этом случае, как следует из (13), $\Delta H_S/H_S \lesssim 1$, поэтому вплоть до пересечения островных структур соседних резонансов изменение $\delta H_S(\epsilon)$, соответствующее $\delta T_S(\epsilon)$, можно считать малым. Тогда, удерживая в (16) только резонансную гармонику и раскладывая Ω (I) в ряд около резонансного значения I_S, получаем следующую оценку $\delta I_S(\epsilon)$:

$$\delta I_S(\varepsilon) \simeq \left(\frac{4\varepsilon}{\pi} \; \frac{H_S \ln^2 H_S \, e^{-\frac{\pi}{2}\Omega_0}}{\Omega_0} \right)^{1/2} . \qquad (17)$$

Подставляя (14), (17) в (12), находим граничное значение H, при котором возникает стохастическая неустойчивость:

$$H \lesssim \frac{4\varepsilon}{\pi} \Omega_0 e^{-\pi\Omega_0} , \quad \Omega_0 \gg 1 . \qquad (18)$$

Уменьшение области стохастической неустойчивости с ростом Ω_0 связано с уменьшением удельного веса высокочастотных гармоник скорости $(d\tilde{y}/d\tau)_0$, пропорционального $e^{-\pi/\alpha_S\Omega(I)}$ (16).

3. Рассмотрим теперь движение частицы в поле резонансной части потенциала $\varphi_R(\vec{r}, t)$. В этом случае, как уже указывалось выше, в первом приближении можно считать, что частица движется по замкнутым траекториям линий уровня $\varphi_R(\vec{r}, t)$. Выделим ячейку, ограниченную сепаратрисой, внутри которой находится пробная частица, и перейдем к переменным действие – угол. Учтем теперь изменение потенциала $\varphi_R(\vec{r}, t)$ во времени. Потенциал $\varphi_R(\vec{r}, t)$ удовлетворяет условию (3), что в безразмерных переменных, введенных в разд. 2, соответствует частоте возмущения $\Omega_0 \lesssim 1$. То есть мы имеем дело с осциллятором с медленно меняющимися параметрами. Но тогда действие I есть адиабатический инвариант, представляющий собой в данном случае площадь фигуры на плоскости $\vec{r} = (\tilde{x}, \tilde{y})$, ограниченной линией уровня $\varphi_R(\vec{r}, t)$. Исключением является лишь та малая доля частиц, находящаяся в узком слое $|H| \lesssim e^{-a/\Omega_0}$ (a – некоторый численный множитель порядка единицы), частота вращения которых Ω (I) меньше или порядка Ω_0.

Для того чтобы частица могла переходить из одной ячейки в другую с неэкспоненциально малой вероятностью, необходимо, чтобы ячейки существенно меняли свою площадь. В этом случае те частицы, чье действие I уже не вписывается в изменяющиеся размеры ячейки, попадают в область Ω (I) $\lesssim \Omega_0$ и I уже не является адиабатическим инвариантом. Поскольку частота вращения основной массы частицы Ω (I) $\gg \Omega_0$, то к моменту пересечения резонансной области фаза частицы будет порядка $\Omega(I)/\Omega_0 \gg 1$, т.е. практически случайной, а значит, будет случайна и соседняя ячейка, в которую переходит частица.

Если в процессе эволюции ячейки, изменяясь по форме, слабо меняют свою площадь, то частицы с Ω (I) $\gg \Omega_0$ будут двигаться вместе с ячейкой. В этом случае стохастичность их движения может быть обусловлена стохастичностью самих колебаний.

В предположении сильного изменения площади ячейки $\Delta s/s \simeq 1$ за время $\Delta\tau \sim 1/\Omega_0$, учитывая, что переход частицы осуществляется между соседними ячейками, т.е. на расстояние порядка $1/\kappa_\perp$, коэффициент диффузии частиц в поле резонансной части потенциала $\varphi_R(\vec{r}, t)$ можно оценить как

$$D \simeq \omega_R / K_\perp^2 , \tag{19}$$

где ω_R – характерная частота $\varphi_R(\vec{r}, t)$.

К аналогичной зависимости приводит и стохастичность колебаний, если считать, что корреляционное время $\varphi_R(\vec{r}, t)$ порядка $1/\omega_R$. Что касается диффузии частиц под действием нерезонансной части потенциала, то, как следует из (18), она будет экспоненциально малой.

4. Рассмотрим теперь некоторый волновой пакет, имеющий характерный волновой вектор $\kappa_\perp$ и частотный интервал ширины $\Delta\omega$, так что

$$\langle \varphi^2(\vec{r},t) \rangle = \int |\varphi_\omega|^2 d\omega \simeq \overline{\varphi}^2 \Delta\omega . \tag{20}$$

Выделим из него низкочастотную составляющую, которая удовлетворяет неравенству (3). При достаточно большой интенсивности колебаний, когда

$$\left(\frac{c K_\perp^2}{B_0} \right)^2 \overline{\varphi^2} > \Delta\omega , \tag{21}$$

неравенство (3) выполняется для всего пакета и, следовательно, $\omega_R \simeq \Delta\omega$, а коэффициент диффузии оценивается (19) как

$$D \simeq \Delta\omega / K_\perp^2 . \tag{22}$$

Если выполняется неравенство, обратное (21), то величины φ_R, ω_R можно оценить из (3), представляя φ_R в виде $\varphi_R^2 \simeq \overline{\varphi}^2 \omega_R$:

$$\begin{aligned} \varphi_R &\simeq c K_\perp^2 \overline{\varphi^2} / B_0 , \\ \omega_R &\simeq \left(\frac{c K_\perp^2}{B_0} \right)^2 \overline{\varphi^2} . \end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя выражение для ω_R в (19), получаем следующую оценку коэффициента диффузии:

$$D \simeq \left(\frac{c K_\perp}{B_0} \right)^2 \overline{\varphi^2} . \tag{24}$$

Следует заметить, что в этом случае, кроме резонансной части потенциала, можно учесть также и влияние нерезонансного потенциала $\varphi_{NR}(\vec{r}, t)$, усредненного по высокочастотным осцилляциям. Однако поскольку смещение частиц $\Delta R^{\sim}$ в поле таких колебаний по определению φ_{NR} меньше длины волны $1/\kappa_\perp$, то и вклад $\varphi_{NR}(\vec{r}, t)$ в коэффициент диффузии будет мал.

Нетрудно видеть, что выражение (24) представляет собой обычный квазилинейный коэффициент диффузии (2). При соответствующей модификации формулы (22), (24) могут быть представлены в единой форме. Учитывая, что δ – функция в квазилинейном выражении является таковой с точностью до членов $\omega_R/\Delta\,\omega$, имеем

$$\begin{aligned} D &\simeq \left(\frac{c K_\perp}{B_0} \right)^2 \int \frac{d\omega\, |\varphi_\omega|^2\, \omega_R}{\omega^2 + \omega_R^2} \simeq \\ &\simeq \left(\frac{c K_\perp}{B_0} \right)^2 \int \frac{d\omega\, |\varphi_\omega|^2 (c K_\perp^2 / B_0)^2\, |\varphi_{\omega=0}|^2}{\omega^2 + (c K_\perp^2 |\varphi_{\omega=0}|^2 / B_0)^2} . \end{aligned} \tag{25}$$

В режиме слабой турбулентности, когда $D \simeq (c\kappa_\perp / B_0)^2 |\varphi_{\omega=0}|^2$ (24), выражение (25) можно представить в виде

$$D \simeq \left(\frac{c K_\perp}{B_0} \right)^2 \int \frac{d\omega\, |\varphi_\omega|^2 K_\perp^2 D}{\omega^2 + (K_\perp^2 D)^2} . \tag{26}$$

что совпадает с результатом, полученным в [2] на основе ренормализованной теории возмущения.

5. Таким образом, процесс аномальной диффузии можно представить следующим образом. Резонансные для данной частицы колебания, т.е. колебания, удовлетворяющие неравенству (3), образуют достаточно сложную ячеистую структуру в плоскости, перпендикулярной магнитному полю $\vec{B}_0$, конфигурация которой зависит от времени. Изменение площадей ячеек во времени приводит к нарушению адиабатического инварианта $I \sim \iint dxdy$, переходу частицы из одной ячейки в другую и, следовательно, к диффузии частицы поперек магнитного поля $\vec{B}_0$.

Авторы благодарят О.П. Погуце за ценные советы.

Список литературы

1. Кадомцев Б.Б. Вопросы теории плазмы./Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1964, вып. 4, с. 299.
2. Dupree T.H., Tetreault D.J. – Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 425.
3. Parail V.V., Pogutse O.P. – In: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, 1980, v. 1, p. 67.
4. Kadomtsev B.B., Pogutse O.P. – Ibidem, 1978, v. 1, p. 649.
5. Заславский Г.М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970.
6. Заславский Г.М., Чириков Б.В. – УФН, 1971, т. 105, с. 3.
7. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971, 643с.

Редактор Л.И. Кирюхина
Технический редактор Н.И. Мазаева
Корректор В.П. Горячева

Т-12721. 18.05.83. Формат 60х90/16. Уч.-изд.л. 0,6
Тираж 123. Индекс 3624. Заказ 1492

Отпечатано в ИАЭ

Препринт ИАЭ-3854/6. М., 1983