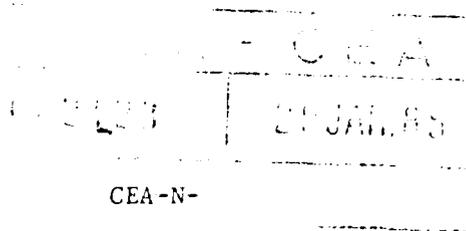


FR85C 1107

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE  
CENTRE D'ETUDES DE LIMFIL-VALENTON  
Département de MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES  
Service de Mathématiques et Codes Numériques  
B.P. n° 27  
94190 VILLENEUVE St GEORGES



PHOTONIQUE MONTE-CARLO DANS LES MILIEUX OPAQUES :  
METHODE DE FLECK AVEC "RANDOM WALK"

J. GIORLA - R. SENTIS

Novembre 1984

COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE  
CENTRE D'ETUDES DE LIMEIL-VALENTON  
Département de MATHEMATIQUES APPLIQUEES  
Service de Mathématiques et Codes Numériques  
B.P. n° 27  
94190 VILLENEUVE St GEORGES

NOTE - CEA	
002423	29 JAN. 85
CEA-N-	

PHOTONIQUE MONTE-CARLO DANS LES MILIEUX OPAQUES :  
METHODE DE FLECK AVEC "RANDOM WALK"

J. GIORLA - R. SENTIS

Novembre 1984

## RESUME

On approche l'équation de transfert radiatif de Fleck par une équation de diffusion grâce à la technique d'échelles multiples. Le domaine de validité de cette approximation, de même que certains paramètres, sont déterminés empiriquement par des essais numériques. L'équation de diffusion est ensuite utilisée dans la méthode de Monte-Carlo de Fleck pour déplacer directement les photons qui subissent un grand nombre de chocs. Cette méthode, appelée "Random Walk", permet de réduire considérablement le temps de calcul dans les zones opaques.

## ABSTRACT

We approximate Fleck's radiative transfer equation by a diffusion equation using the multiple scales technique. The validity criterium (and the value of a few parameters) are empirically evaluated by numerical computations. Then the diffusion equation is used in Fleck's Monte-Carlo method in order to move directly the photons in highly collisional medium. With this method, called "Random Walk", the computational time may be highly reduced in opaque medium.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION . . . . .	5
1 / METHODE DE MONTE-CARLO DE FLECK . . . . .	7
1.1 Problème posé . . . . .	7
1.2 Equation de transfert de FLECK . . . . .	10
1.3 Méthode de Monte-Carlo de FLECK et ses limites . . . . .	12
2 / APPROXIMATION DIFFUSION DE L'EQUATION DE TRANSPORT DE FLECK	13
2.1 Changement d'échelles . . . . .	15
2.2 Développement de $I_c$ à l'ordre 1. . . . .	16
2.3 Approximation de $I_c$ utilisée. . . . .	19
2.4 Etude du bilan d'énergie . . . . .	23
3 / SOLUTION EXPLICITE DE L'EQUATION DE DIFFUSION. . . . .	24
3.1 Equation de transfert pour une particule. . . . .	24
3.2 Estimateurs Monte-Carlo. . . . .	26
3.3 Equation de diffusion pour une particule. . . . .	28
3.4 Solution explicite. . . . .	30

4 /	DOMAINE DE VALIDITE DE L'APPROXIMATION DIFFUSION. . . . .	35
4.1	Caractéristiques des essais numériques . . . . .	35
4.2	Opacités constantes. . . . .	39
4.3	Opacités analytiques. . . . .	42
4.4	Critères de "RANDOM WALK". . . . .	53
5 /	METHODE DE FLECK ACCELEREE PAR "RANDOM WALK" . . . . .	55
5.1	Temps de sortie de la boule . . . . .	55
5.2	Modification de la méthode de Monte-Carlo. . . . .	58
6 /	RESULTATS . . . . .	63
7 /	CONCLUSION . . . . .	66
	ANNEXE A . . . . .	67
	ANNEXE B . . . . .	75
	ANNEXE C . . . . .	77
	ANNEXE D . . . . .	82

## INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans ce rapport aux problèmes de transfert radiatif hors équilibre et nous étudions une méthode de résolution numérique qui puisse s'appliquer indifféremment aux milieux transparents et opaques.

Nous excluons donc la diffusion Rosseland qui suppose l'équilibre rayonnement-matière et la méthode de Monte-Carlo classique qui donne de bons résultats dans le milieu transparents mais n'est pas applicable autrement. La méthode multigroupe grise /21/ nécessite, quant à elle, des relations de fermeture.

Une autre méthode est la méthode de Monte-Carlo de Fleck dont nous rappelons les principes dans le paragraphe 1. Elle permet, en effet, de traiter les milieux opaques en remplaçant une partie de l'émission-absorption des photons par un terme de pseudo-scattering approprié. Malheureusement, elle est extrêmement onéreuse pour ces milieux du fait du nombre élevé de chocs subis par les particules.

Le but de ce rapport est de modifier cette dernière méthode afin d'obtenir un temps de calcul raisonnable.

L'idée de la méthode (appelée "Random Walk" par FLECK et TANFIELD /10/) est de remplacer la trajectoire d'une particule qui subit de nombreux chocs par la trajectoire d'un mouvement brownien

dont on connaît les caractéristiques de façon explicite. On remplace ainsi une multitude de chocs très rapprochés par un saut unique de la particule déterminé grâce à l'équation de diffusion correspondant à ce mouvement brownien.

L'algorithme ainsi accéléré est beaucoup plus rapide que l'algorithme de Monte-Carlo de Fleck comme nous le montrons sur un exemple en fin de rapport.

Pour l'équation de diffusion associée au mouvement brownien nous effectuons un changement d'échelles sur l'équation de transport de Fleck en introduisant un petit paramètre  $\epsilon$  positif et nous écrivons la solution de cette équation sous la forme d'un développement limité en  $\epsilon$  (technique des échelles multiples). Nous obtenons ainsi une approximation de l'équation de transport de Fleck sous la forme d'une solution d'une équation de diffusion après avoir introduit la notion de couche limite et de longueur d'extrapolation. Cette technique d'approximation très précise est tout à fait différente de celle utilisée par Fleck et Canfield /10/ qui trouvent néanmoins le même coefficient de diffusion.

Nous appliquons cette approximation à la méthode de Monte-Carlo en considérant la plus grande boule inscrite dans la maille et dont le centre coïncide avec la position du photon. On connaît alors explicitement la loi de répartition de la particule au bout d'un intervalle de temps fixé à l'intérieur de la boule ainsi que la fonction de répartition du temps de sortie de cette boule, ce qui nous permet de déplacer directement la particule sans la suivre de choc en choc.

Afin de déterminer les critères de validité de l'approximation (ainsi que certains paramètres) nous avons effectué des tests comparatifs sur des boules en comparant avec les résultats de la méthode de Monte-Carlo.

## 1 / METHODE DE MONTE-CARLO DE FLECK

Cette méthode a été décrite dans /9/-/11/, aussi nous ne rappellerons que brièvement dans ce chapitre la démarche suivie.

### 1.1 Problème posé

-----

On veut résoudre un problème de transfert radiatif hors-équilibre dans un domaine ouvert  $D$  de  $R^3$ .

L'intensité radiative spécifique  $I(t, x, \Omega, \nu)$  vérifie l'équation de transfert suivante :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \Omega \frac{\partial I}{\partial x} + k_a I + k_s Q(I) = k_a b \Phi$$

où :  $t$  représente le temps ( $t \in [0, T]$ )  
 $x$  la position ( $x \in D$ )  
 $\Omega$  la direction des particules (photons) ( $\Omega \in S^2$ )  
 $\nu$  la fréquence ( $\nu \in R_+$ )  
 $\Phi = \frac{ac}{4\pi} T_m^4$  où  $T_m$  est la température ;  $\frac{ac}{4}$  est la constante

de STEPHAN - BOLTZMAN.

$k_s(\phi, \nu)$  le coefficient de scattering\* THOMSON.

$k_a(\phi, \nu)$  le coefficient d'absorption.

$Q$  l'opérateur de scattering THOMSON :

$$Q(I) = I(\Omega) - \int_{S^2} I(\Omega') \frac{3}{16\pi} [1 + (\Omega \cdot \Omega')^2] d\Omega'$$

$b = b(\phi, \nu)$  la fonction de PLANCK normalisée  $[\int_0^{\infty} b(\phi, \nu) d\nu = 1]$

$$b(\phi, \nu) = \frac{15}{\pi^4} \frac{\zeta^3}{e^\zeta - 1} \frac{h}{kT}, \quad \zeta = \frac{h\nu}{kT}.$$

On a  $b(\phi, \nu) = \frac{1}{\phi} B_\nu(\phi)$  où  $B_\nu$  est la fonction de PLANCK :

$$B_\nu(\phi) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^\zeta - 1}$$

Cette équation est couplée à l'équation de conservation de l'énergie qui s'écrit, en l'absence de terme de source :

$$\frac{\partial \mathcal{E}(\phi)}{\partial t} + \int_{S^2} d\Omega \int_0^{\infty} d\nu k_a I - 4\pi k_p \phi = 0,$$

où :  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\phi)$  est l'énergie interne spécifique,  
et  $k_p(\phi) = \int_0^{\infty} k_a(\phi, \nu) b(\phi, \nu) d\nu$  la moyenne de PLANCK.

---

\* Nous utilisons le terme anglais "scattering" car la traduction par diffusion nous semble inadéquate et prêterait à confusion dans le cadre de ce travail.

Pour que le problème soit bien posé il faut se donner les conditions initiales  $I(0, x, \Omega, \nu)$  et  $\Phi(0, x)$  et une condition au bord du domaine considéré c'est-à-dire la donnée de  $I(x, \Omega, \nu, t)$  pour  $x$  au bord du domaine et pour :  $n_x \cdot \Omega < 0$  où  $n_x$  est la normale extérieure en  $x$  à la frontière.

Dans la méthode de Monte-Carlo classique, on discrétise en espace et en temps et on résout l'équation de transfert par la méthode de Monte-Carlo sur le pas en temps  $[t^n, t^{n+1}]$  en supposant la température constante par maille. On résout ensuite séparément dans chacune des mailles l'équation de l'énergie en utilisant l'énergie absorbée estimée par la méthode de Monte-Carlo /5/. Cette méthode devient inutilisable dans les milieux opaques (car la variance sur la température tend vers l'infini).

La méthode introduite par FLECK et CUMMINGS /9/, que nous rappelons maintenant, permet de remédier à cela.

## 1.2 Equation de transfert de FLECK

-----

Pour obtenir l'équation de transfert de FLECK on tire une estimation de la "température"  $\phi^{n+1}$  à partir de l'équation de conservation de l'énergie. Pour cela on suppose que la "température" d'émission  $\phi$  sur le pas de temps  $[t^n, t^{n+1}]$  est donnée par :

$$\phi = \theta \phi^{n+1} + (1-\theta) \phi^n, \quad \theta \in [0, 1]$$

et on linéarise l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\mathcal{E}'}{\Delta t} (\phi^{n+1} - \phi^n) = \iint k_a I dv d\Omega - 4\pi k_p \phi^n - 4\pi k_p \theta (\phi^{n+1} - \phi^n) \quad (1)$$

où on a noté  $\mathcal{E}' = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \phi}(\phi^n) = \frac{4\pi}{4ac(T^n)^3} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}(\phi^n)$  .

On en tire donc :

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^n &= \frac{\Delta t \mathcal{E}'^{-1}}{1 + 4\pi\theta \Delta t \mathcal{E}'^{-1} k_p} \left[ \iint k_a I dv d\Omega - 4\pi k_p \phi^n \right] \\ &= \ell \Delta t \mathcal{E}'^{-1} \left[ \iint k_a I dv d\Omega - 4\pi k_p \phi^n \right] \\ &= (1-\ell) \left[ \iint \frac{k_a}{k_p} I dv \frac{d\Omega}{4\pi} - \phi^n \right] \end{aligned}$$

sachant que l'on a posé :

$$\ell = \left[ 1 + 4\pi\theta \Delta t \mathcal{E}'^{-1} k_p \right]^{-1} = \left[ 1 + \theta \Delta t c k_p \frac{\partial \mathcal{E}^{-1}}{\partial T}(\phi^n) 4a(T^n)^3 \right]^{-1} \quad (2)$$

En remplaçant  $\phi$  par  $\phi^n + \theta (\phi^{n+1} - \phi^n)$  dans l'équation du transfert on obtient alors :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \Omega \frac{\partial I}{\partial x} + (\sigma_a + \sigma_s) I + k_s Q(I) = \sigma_a(v) b(v) \phi^n + \iint \frac{\sigma_a(v) b(v)}{\sigma_p} \sigma_s(v') I(v') dv' d\Omega' \quad (3)$$

où  $b(v) = b(\phi^n, v)$

$$\sigma_a(v) = \ell k_a(\phi^n, v)$$

$$\sigma_s(v) = (1-\ell) k_a(\phi^n, v)$$

$$\sigma_p = \int \sigma_a(v) b(v) dv = \ell k_p$$

(notons également :  $\sigma_s(v' \rightarrow v) = \sigma_s(v') \frac{\sigma_a(v) b(v)}{\sigma_p}$  )

On doit résoudre cette équation sur un domaine où la température  $\phi$  est constante par mailles.

Et l'équation de conservation de l'énergie devient :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \int_{\Omega^2} \int_0^\infty \sigma_a I dv d\Omega - 4\pi \sigma_p \phi^n = 0 \quad (4)$$

Les équations (2), (3), (4) avec une condition au bord adéquate et les conditions initiales :

$$I(t^n, x, \Omega, v) = I^{in}(x, \Omega, v) \quad (2bis)$$

$$\phi(t^n, x) = \phi^n \quad (4bis)$$

sont à résoudre sur l'intervalle de temps  $[t^n, t^{n+1}]$ .

### 1.3 Méthode de Monte-Carlo de FLECK et ses limites

La méthode de Monte-Carlo de FLECK est une méthode de Monte-Carlo classique appliquée aux équations de FLECK (2) et (4). Elle diffère de la méthode habituelle par les points suivants :

- coefficient d'absorption plus faible  $\sigma_a = \rho k_a$ ,
- apparition d'un terme de scattering "FLECK" qui revient à absorber les particules selon le coefficient  $\sigma_s = (1-\rho) k_a$  et à les émettre aussitôt sur place suivant la loi d'émission en volume.

La méthode de FLECK a le mérite de diminuer les fluctuations sur la température et de permettre des pas en temps plus grands que la méthode classique /9/.

On remplace, en partie, l'absorption-émission des photons (qui est la cause principale des fluctuations) par le scattering "FLECK". Malheureusement, plus le coefficient d'absorption est grand, plus le libre parcours de scattering est petit et le nombre de chocs élevé, donc plus le calcul coûte cher. On voit que l'on ne pourra pas traiter des milieux très opaques, non pas parce que la méthode échoue, mais parce que le coût du calcul serait prohibitif.

2 / APPROXIMATION DIFFUSION DE L'EQUATION DE TRANSPORT DE FLECK.

Il est bien connu /14/-/15/ que, si le libre parcours est petit, les processus de transport peuvent être approchés par des diffusions (en effet, plus le libre parcours diminue, plus les trajectoires deviennent chaotiques et plus elles se rapprochent d'un mouvement BROWNIEN). C'est cette idée que nous allons mettre en forme dans ce paragraphe.

Considérons l'équation de transfert de FLECK sur un domaine  $\sigma$  sur lequel la température est constante (qui sera en pratique une sphère inscrite dans une maille) avec une condition de flux entrant nul et faisons les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\Delta}^{-1} \text{ est petit devant les dimensions caractéristiques de } \sigma \\ \sigma_{\Delta} \text{ est grand devant } \sigma_{\Delta} \text{ (c'est-à-dire } \lambda \text{ petit devant } l) \end{array} \right. \quad (5)$$

La solution de l'équation de transfert de FLECK décrit la densité de particules qui se meuvent linéairement entre 2 "chocs" et qui changent de directions et de fréquences lors de ces chocs.

Si (5) est vérifiée, le libre parcours moyen entre 2 chocs devient très petit et la répartition des particules par rapport aux directions et aux fréquences tend vers une répartition Planckienne indépendante de l'espace, alors que la densité en espace se rapproche de la densité d'un processus de diffusion. Ainsi, la solution  $I(x, \Omega, v, t)$  de l'équa-

tion de FLECK sera donc approchée par la solution d'une équation de diffusion en  $x$ .

Pour trouver cette approximation de façon rigoureuse nous allons faire un changement d'échelles dans l'équation de FLECK, en introduisant un petit paramètre  $\epsilon$  positif correspondant à (5), puis faire des développements limités de la solution (c'est la technique des échelles multiples).

Afin de "pousser" les développements limités en  $\epsilon$  suffisamment loin, nous devons étudier un problème de couche-limite (ce qui nous conduira à introduire une condition au bord avec une "longueur d'extrapolation") et d'autre part nous introduirons un terme de couche initiale (pour tenir compte du fait que l'intensité initiale n'est pas répartie selon  $b_{(v)}$ ). Pour ces techniques voir par exemple : PAPANICOLAON /19/, BENSOUSSAN - LIONS - PAPANICOLAOU /2/, SENTIS /20/, LARSEN - KELLER /15/, BARDOS - SANTOS - SENTIS /1/, LARSEN - POMRANING - BADHAM /16/.

Nous devons ensuite résoudre l'équation de l'énergie (4) en utilisant l'approximation de  $I(x, \Omega, \nu, t)$  trouvée.

Dans tout ce paragraphe on écrira  $[0, T]$  au lieu de  $[t^n, t^{n+1}]$  et  $\Phi$  au lieu de  $\Phi^n$ .

On utilise la notation :

$$\ll f \gg = \int_0^\infty \int_{S^2} f(\Omega, \nu) \frac{d\Omega}{4\pi} d\nu$$

de sorte que la densité d'énergie radiative à l'instant  $t$  est égale à  $\frac{4\pi}{c} \ll I(t, x) \gg$ , et que :  $\ll b \gg = 1$ . Posons

enfin :  $\partial\sigma_- = \{ (x, \Omega) / x \in \partial\sigma, n_x \cdot \Omega < 0 \}$ , où  $n_x$  est la normale extérieure en  $x$  à .

En tenant compte de la condition de flux entrant nul au bord, l'équation (2) de FLECK s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \Omega \frac{\partial I}{\partial x} + \sigma_a I - \sigma_a b \Phi + \sigma_s (I - b \frac{\ll \sigma_s I \gg}{\ll \sigma_s b \gg}) + k_s Q I = 0 \\ I(t, x, \Omega, \nu) = 0 \quad (x, \Omega) \in \partial\sigma_- \\ I(0, x, \Omega, \nu) = I^m(x, \Omega, \nu) \end{array} \right. \quad (6)$$

### 2.1 Changement d'échelles

D'après (5) on introduit un petit paramètre  $\varepsilon$  et on pose (avec  $\varepsilon > 0$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\nu) = \varepsilon \sigma_a(\nu) \\ q(\nu) = \frac{1}{\varepsilon} \sigma_a(\nu) \\ \omega = \varepsilon k_s \\ \hat{t} = \varepsilon c t \end{array} \right. \quad (7)$$

soit  $L$  l'opérateur (en  $\Omega$  et  $\nu$ ) définie par :

$$L f = \sigma f - \sigma b \frac{\ll \sigma f \gg}{\ll \sigma b \gg} + \omega Q f \quad \forall f / \sigma f \in L^2(S^2, R_+)$$

L'équation (6) se réécrit avec les nouvelles variables [en notant  $I_\varepsilon(\hat{t}, x, \Omega, \nu) = I(\frac{\hat{t}}{\varepsilon C}, x, \Omega, \nu)$ ] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial \hat{t}} + \frac{1}{\varepsilon} \Omega \frac{\partial I_\varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} L I_\varepsilon + q I_\varepsilon = q b \Phi \\ I_\varepsilon(\hat{t}, \cdot) \Big|_{\partial \sigma_-} = 0 \\ I_\varepsilon(0, \cdot) = I^{in} \end{array} \right. \quad (8)$$

Nous faisons tout d'abord un développement de  $I_\varepsilon$  à l'ordre 1 en  $\varepsilon$  (c'est-à-dire avec une erreur en  $O(\varepsilon^2)$ ) dans la section 2.2. puis nous verrons ce que l'on peut faire à l'ordre 2 (section 2.3).

Remarque :

Il est clair que ces approximations ne seront valables dans la pratique que lorsque les "petit paramètres" seront en dessous de certains seuils qu'il faudra déterminer par des tests. En particulier, toutes ces approximations ne seront valables que si le coefficient d'absorption  $k_a$  est "assez grand" et  $l$  "assez petit".

2.2 Développement de  $I_\varepsilon$  à l'ordre 1.

Nous allons introduire des variables supplémentaires en temps pour décrire la "couche initiale" et en espace pour décrire la "couche limite".

Posons donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = -\frac{x-\bar{x}}{\varepsilon} \eta_{\bar{x}} \\ \Delta = \hat{t}/\varepsilon^2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{où } \bar{x} \text{ est la projection de } x \\ \text{sur } \partial\sigma \end{array} \quad (9)$$

On a alors le résultat suivant (qui est démontré dans l'annexe A).

Proposition 1. Soit  $I_\varepsilon$  la solution de (8). Quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  on a :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\hat{t}, x, \alpha, \nu) = & b_\nu u_0(\hat{t}, x) + \varepsilon \left[ b_\nu u_1(\hat{t}, x) - \alpha \frac{b(\nu)}{\sigma(\nu)} \frac{\partial u_\varepsilon(\hat{t}, x)}{\partial x} \right] \\ & + \varphi\left(\frac{\hat{t}}{\varepsilon^2}, \alpha, \nu; x\right) + \varepsilon \psi_1\left(\frac{\bar{x}-x}{\varepsilon} \cdot \eta_{\bar{x}}, \alpha, \nu; x, \hat{t}\right) + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \quad (10)$$

avec :

$$\begin{array}{ll} \varphi(s, \cdot) \rightarrow 0 & \text{quand } s \rightarrow +\infty \\ \psi_1(\xi, \cdot) \rightarrow 0 & \text{quand } \xi \rightarrow +\infty \end{array}$$

sachant que  $u_0$  et  $u_1$  sont les solutions de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial \hat{t}} - \frac{1}{3\sigma_0} \Delta_x u_0 + q_P(u_0 - \phi) = 0, \quad x \in \sigma \\ u(\hat{t}, x) = 0, \quad x \in \partial\sigma \\ u(0, x) = \ll I^m(x) \gg. \end{array} \right. \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial \hat{t}} - \frac{1}{3\sigma_0} \Delta_x u_1 + q_P u_1 = 0, \quad x \in \sigma \\ u_1(\hat{t}, x) = -\varepsilon \frac{b_\varepsilon}{\sigma_0} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}(\hat{t}, x), \quad x \in \partial\sigma \\ u_1(0, x) = 0. \end{array} \right. \quad (12)$$

où

$$\sigma_0 = \ll \frac{b}{\sigma+w} \gg \quad q_P = \ll qb \gg \quad (13)$$

et  $L_0$  est une constante qui ne dépend que de  $\Phi$ ,  $\sigma$  et  $\tau$  <sup>(1)</sup>

On vérifie immédiatement que  $u_0 + \epsilon u_1 = u + O(\epsilon^2)$  avec  $u$ , solution de l'équation de diffusion avec une condition au bord de type ROBIN :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{3\sigma_0} \Delta_x u + q_p (u - \phi) = 0 \quad x \in \mathcal{O} \\ u + \epsilon \frac{L_0}{\sigma_0} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial \mathcal{O} \\ u(0, x) = \ll I^{-1}(x) \gg \end{array} \right. \quad (14)$$

Revenons maintenant à la variable  $t$  et posons :

$$\sigma_{RW}^{-1} = \ll \frac{b}{(1-l)k_u + k_s} \gg \quad (15)$$

on peut alors réécrire (14) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{3\sigma_{RW}} \Delta_x u + l k_p (u - \phi) = 0 \quad x \in \mathcal{O} \\ u + \frac{L_0}{\sigma_{RW}} \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad x \in \partial \mathcal{O} \\ u(0, x) = \ll I^{-1}(x) \gg \end{array} \right. \quad (16)$$

Remarque.1 :

Le coefficient  $\sigma_{RW}$  est légèrement différent en général de la moyenne de ROSSELAND. En effet, les principes d'approximation sont différents dans les 2 cas (ici : température constante en espace, pour ROSSELAND : température en équilibre avec le rayonnement).

Remarque.2 :

On peut envisager une approximation analogue avec une température constante par morceaux, mais les conditions de raccordement le long des discontinuités ne sont pas triviales.

---

<sup>(1)</sup> En fait, nous montrons ce résultat en supposant que  $I^{in}$  est une fonction régulière en  $x$ . Mais en utilisant une proposition analogue à celle-ci pour l'équation duale de (8), on en déduit (en utilisant encore la dualité) que l'on a une formulation faible de (9) qui est encore valable si  $I^{in}$  et une masse de Dirac en 0.

2.3 Approximation de  $I_\epsilon$  utilisée.

Si l'on veut avoir une bonne estimation de l'énergie absorbée (c'est-à-dire de la quantité :

$$\int_0^{\epsilon c T} \int_{\mathcal{O}} \ll q I_\epsilon(\hat{t}, x) \gg dx d\hat{t} \quad )$$

alors l'approximation de  $I_\epsilon(\tau, x, \Omega, v)$  par  $b_v u(\tau, x)$  [où  $u$  est solution de (16)] est assez grossière.

On peut voir cela en supprimant dans les équations (8) et (14) les termes de dépendance en espace et en prenant  $\Phi = 0$ . Alors la méthode précédente revient à approcher la solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial I_\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon^2} \mathcal{L} I_\epsilon + q I_\epsilon = 0 \\ I_\epsilon(0) = I^m \end{cases}$$

par  $b(v) u(t)$  où  $u$  est la solution de :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + q_p u = 0 \\ u(0) = \ll I^m \gg \end{cases}$$

or cette approximation en  $e^{-q_p t}$  est assez frustrée et peut être améliorée (en calculant le terme en  $\epsilon^2$  dans le développement limité :  $I_\epsilon = bu + \epsilon^2 I_2 + \dots$ ) ; on trouve alors  $e^{-q_p(1+\epsilon^2\alpha)t}$  (avec  $\alpha$  non négligeable en pratique) au lieu de  $e^{-q_p t}$ .

Nous avons donc voulu calculer le terme en  $\epsilon^2$  dans le développement limité analogue à (10). On trouve ainsi (voir les calculs dans l'annexe A) :

$$\begin{aligned} I_\epsilon(\hat{t}, x, \Omega, v) = & b_v u_0(\hat{t}, x) + \epsilon [ b_v u_1(\hat{t}, x) + \hat{I}_1 ] + \epsilon^2 [ b_v u_2(\hat{t}, x) + \bar{\chi} u_2(\hat{t}, x) + \\ & + \chi_{ij} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} + \hat{I}_2 ] + \epsilon \psi_1 \left( \frac{\bar{x}-x}{\epsilon} \eta_{\bar{x}}, \Omega, v; x, t \right) + \\ & + \varphi_0 \left( \frac{\hat{t}}{\epsilon^2}, \cdot \right) + \epsilon \varphi_1 \left( \frac{\hat{t}}{\epsilon^2}, \cdot \right) + \epsilon^2 \varphi_2 \left( \frac{\hat{t}}{\epsilon^2}, \cdot \right) + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (17)$$

sachant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_i(\lambda, \cdot) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \infty; \quad \varphi_j(\xi, \cdot) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \xi \rightarrow \infty \\ \varphi_0(\lambda, \cdot) = e^{L\lambda} (I^m - b \ll I^m \gg); \quad \int \varphi_1(\lambda, \cdot) d\Omega = 0 \quad (18) \\ \int \hat{I}_1(x) dx = \int \hat{I}_2(x) dx = 0; \quad \chi = q_p \left( \frac{b}{\sigma} - b \ll \frac{b}{\sigma} \gg \right); \quad \ll \chi_i \gg = \ll \chi_j \gg = 0. \end{array} \right.$$

et  $u_2$  est solution de l'équation (A.21) de l'annexe A avec la condition initiale donnée par (A.26) et, avec une condition au bord telle que la condition (A.22) soit satisfaite.

Introduisons les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta = q_p / \sigma_p; \quad \text{donc } \varepsilon^2 \zeta = l / i \cdot l; \\ \sigma_M^{-1} = \ll b / \sigma \gg; \quad k_M^{-1} = \ll b / k_a \gg; \\ \alpha^m(x) = \frac{\sigma_p}{\sigma_M} - \frac{\sigma_p}{\ll I^m \gg} \ll \frac{I^m}{\sigma} \gg = \frac{k_p}{k_M} - \frac{k_p}{\ll I^m \gg} \ll \frac{-i}{k_a} \gg. \end{array} \right. \quad (19)$$

En fait, nous simplifions légèrement l'équation (A.21) satisfaite par  $u_2$  et on l'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_2}{\partial \hat{t}} - \frac{1}{3\sigma_0} \Delta_x u_2 + q_p u_2 + q_p \zeta \left( 1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_M} \right) (u_0 - \phi) = 0, \\ u_2(\hat{t}, x) = 0, \\ u_2(0, x) = -\zeta \ll I^m \gg \alpha^m \end{array} \right. \quad (20)$$

En combinant (20) et (14) on obtient (rappelons que  $u = u_0 + \varepsilon u_1$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \hat{t}} (u + \varepsilon^2 u_2) - \frac{1}{3\sigma_0} \Delta_x (u + \varepsilon^2 u_2) + q_p (u + \varepsilon^2 u_2 - \phi) + q_p \varepsilon^2 \zeta \left( 1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_M} \right) (u_0 - \phi) = 0, \\ (u + \varepsilon^2 u_2) + \varepsilon \frac{L_v}{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial n} (u + \varepsilon^2 u_2) = 0, \quad x \in \partial\sigma \\ (u + \varepsilon^2 u_2)(0, x) = \ll I^m(x) \gg [1 - \varepsilon^2 \zeta \alpha^m] \end{array} \right.$$

On aura donc :  $u + \varepsilon^2 u_2 = \bar{u} + 0(\varepsilon^3)$  si  $u$  est la solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \hat{t}} - \frac{1}{3\sigma_0} \Delta_x \bar{u} + q_p [1 + \varepsilon^2 \zeta \left( 1 - \frac{\sigma_p}{\sigma_M} \right)] (\bar{u} - \phi) = 0, \\ \bar{u} + \varepsilon \frac{L_v}{\sigma_0} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\sigma \\ \bar{u}(0, x) = \ll I^m(x) \gg [1 - \varepsilon^2 \zeta \alpha^m(x)] \end{array} \right. \quad (21)$$

Ce qui nous interesse en fait, c'est  $\int \bar{I}_\varepsilon(t, x, \Omega, \nu) d\Omega$  on doit donc intégrer les deux membres de (17) par rapport à  $\Omega$ , pour obtenir cette quantité. Dans la pratique nous supprimerons le terme  $\chi_{ij} \partial^2 u_\nu / \partial x_i \partial x_j$ , et d'autre part on vérifie que le terme  $\varphi_2(t/\varepsilon^2)$  n'a pas d'importance (alors que le terme  $\varphi_\nu(t, \varepsilon^2)$  en a pour obtenir un bilan d'énergie correct), on utilisera donc l'approximation suivante pour  $x$  à l'intérieur de  $\sigma$ .

$$\int \bar{I}_\varepsilon(t, x, \Omega, \nu) \frac{d\Omega}{4\pi} = \bar{u}(\hat{t}, x) b_\nu + \varepsilon^2 \bar{\chi} [\bar{u}(\hat{t}, x) - \bar{\phi}] + \varphi_\nu\left(\frac{\hat{t}}{\varepsilon^2}, \cdot\right) \quad (22)$$

avec

$$\bar{\chi} = \eta_p \left( \frac{b}{\sigma} - \frac{b}{\sigma_m} \right)$$

$$\varphi_\nu(\cdot) = e^{-L\Delta} \left( \int I^m \frac{d\Omega}{4\pi} - b \ll I^m \gg \right)$$

où  $e^{-L\Delta}$  désigne le semi groupe engendré par  $(-L)$ .

Revenons maintenant à la variable originelle  $t$ . Et notons :

$$I_*(x) = 1 - \frac{l}{1-l} \alpha^m(x)$$

$$\tilde{b}_\nu = b_\nu + \frac{l}{1-l} k_\varepsilon \left( \frac{b_\nu}{k_a(\nu)} - \frac{b_\nu}{k_m} \right)$$

$$\tilde{\sigma}_P = l k_P \left[ 1 + \frac{l}{1-l} \left( 1 - \frac{k_P}{k_m} \right) \right]$$

Rappelons que :

$$\ll \tilde{b} \gg = 1$$

$$\ll \sigma_a b \gg = \sigma_P$$

$$\sigma_{RW}^{-1} = \ll \frac{b}{(1-l)k_a + k_s} \gg$$

L'équation (21) se réécrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{1}{3\sigma_{RW}} \Delta_x \bar{u} + \tilde{\sigma}_P (u - \phi) = 0 \\ \bar{u} + \frac{L_\nu}{\sigma_{RW}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} = 0 \\ \bar{u}(0, x) = \ll I^m(x) \gg I_* \end{array} \right. \quad (23)$$

et l'approximation (22) se réécrit :

$$\int \bar{I}(t, x, z, \nu) \frac{dz}{4\pi} = \bar{u}(t, x) \tilde{b}(\nu) + \phi(\tilde{b}(\nu) - b(\nu)) + e^{-Lct/\epsilon} (I^m - b \ll I^m \gg)_{(z, \nu)} \quad (24)$$

On a donc :

$$\ll I(t, x) \gg \approx \bar{u}(t, x) \quad (24 \text{ bis})$$

et pour évaluer l'énergie absorbée on se servira du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^T \ll \sigma_a (I(t, x) - \phi) \gg dt &= \sigma_P \int_0^T (\bar{u}(t, x) - \phi) dt + \frac{\epsilon^2}{c} \ll q \int_0^\infty e^{-Lz} (I^m - b \ll I^m \gg) dz \gg \\ &\approx \tilde{\sigma}_P \int_0^T (\bar{u}(t, x) - \phi) dt - \frac{\epsilon^2}{c} \ll q \ominus \gg \end{aligned}$$

où  $\ominus$  est défini par la formule de l'annexe A (A.24).

Donc d'après (A.25) on a :

$$\ll q \ominus \gg = \int \sigma_P \left( \ll \frac{I^m}{\sigma} \gg - \frac{\ll I^m \gg}{\sigma_M} \right) = - \int \alpha^m \ll I^m \gg$$

On en déduit :

$$\int_0^T \ll \sigma_a (I(t, x) - b \phi) \gg dt \approx \tilde{\sigma}_P \int_0^T (\bar{u}(t, x) - \phi) dt + \frac{1}{c} (1 - I_*) \ll I^m \gg \quad (25)$$

La formule (25) s'interprète en remarquant qu'il y a une énergie qui est absorbée de façon instantanée (c'est  $\frac{1}{c} (1 - I_*) I^{in}$ ) et une partie qui est absorbée continuellement par rapport au temps en supposant que le spectre de répartition des fréquences est :  $\tilde{b}(\nu)$

## 2.4 Etude du bilan d'énergie

Grâce au calcul précédent on voit que l'équation (4) donne immédiatement, pour un instant final T donné :

$$\mathcal{E}(\phi(T)) - \mathcal{E}(\phi) = \sigma_T \int_0^T (\bar{u}(t, x) - \phi) dt + \frac{4\pi}{c} (1 - I_*) \ll I^m \gg \quad (26)$$

D'autre part, en utilisant la formule de GREEN sur (23) intégrée sur  $\sigma$  on obtient :

$$\frac{1}{c} \int_{\sigma} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} dx + \tilde{\sigma}_T \int_{\sigma} (\bar{u} - \phi) dx = \frac{1}{3\sigma_{RW}} \int_{\sigma} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) dx$$

et en intégrant cette équation entre 0 et T, on obtient :

$$\frac{1}{c} \int_{\sigma} \ll I(T, x) \gg dx - \frac{I_0}{c} \int_{\sigma} \ll I^m \gg dx + \tilde{\sigma}_T \int_0^T \int_{\sigma} (\bar{u} - \phi) dx dt = \frac{-1}{3\sigma_{RW}} \int_0^T \int_{\sigma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| dx dt$$

On obtient donc en utilisant (26) :

$$\int_{\sigma} \left( \mathcal{E}(\phi(T)) + \frac{4\pi}{c} \ll I(T) \gg \right) dx = \int_{\sigma} \left( \mathcal{E}(\phi) + \frac{4\pi}{c} \ll I^m \gg \right) dx - \frac{1}{3\sigma_{RW}} \int_0^T \int_{\sigma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| dx dt$$

or on a:  $\frac{1}{3\sigma_{RW}} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(t, x) \right| = \frac{-1}{3\sigma_{RW}} \frac{\partial}{\partial n} \ll I(x, t) \gg$  , et cette

expression correspond justement à l'énergie radiative sortant par unité de temps et de surface, (c'est exactement l'expression du flux radiatif en approximation  $P_1$ ). Elle indique donc que le bilan d'énergie est respecté.

### 3 / SOLUTION EXPLICITE DE L'EQUATION DE DIFFUSION.

Pour accélérer la méthode de Monte-Carlo de FLECK dans les milieux opaques nous ne suivrons plus chaque particule de choc en choc.

Lorsque l'approximation diffusion sera valable (ce problème est traité au chapitre suivant) nous amènerons directement la particule Monte-Carlo au bord du domaine considéré. Pour cela, il nous faut connaître explicitement la solution de l'équation de diffusion.

#### 3.1 Equation de transfert pour une particule.

comme nous voulons utiliser l'approximation diffusion pour chaque particule prise isolément, il faut dans un premier temps écrire l'équation de transfert pour une particule. C'est l'équation générale (2) sans le terme de source:

$$k_a b \phi^n.$$

Pour déterminer l'intensité radiative initiale  $I^{in}$  nous supposons que la particule se trouve au point  $x_0$  à l'instant  $t_0 = 0$  et, pour simplifier, que son énergie radiative (ou poids) est normalisée :

$$\frac{1}{c} \int_{\sigma} dx \int_{S^2} d\Omega \int_0^{\infty} dv I^{in}(x, \Omega, \nu) = 1 .$$

La direction  $\Omega_0$  sera prise équirépartie sur  $S^2$  et la fréquence initiale répartie selon  $f(\nu)$  avec  $\int_0^{\infty} f(\nu) d\nu = 1$  .

La répartition  $f(\nu)$  peut-être :

- un Dirac en  $\nu_0$  (cas d'une particule existant au début du pas en temps).
- le spectre de PLANCK  $b(\nu)$  (nous verrons que cette distribution correspond aux particules qui sortent du "Random Walk"),
- la distribution  $\frac{\rho_a(\nu)b(\nu)}{k_p}$  (cas d'une particule émise en volume ou bien ayant subi un choc "FLECK").

L'intensité radiative initiale est donc :

$$I^{in}(x, \Omega, \nu) = \frac{c}{4\pi} \delta(x-x_0) f(\nu)$$

où  $\delta(\cdot)$  désigne la masse de Dirac à l'origine, dans  $\mathbb{R}^3$ .

L'équation de transfert que l'on obtient est :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \Omega \frac{\partial I}{\partial x} + k_a I + k_s Q(I) &= \iint_{\mathbb{S}^2} (v' \rightarrow \nu) I(\Omega', \nu') \frac{d\Omega'}{4\pi} d\nu' \\ I(0, x, \Omega, \nu) &= c \delta(x-x_0) f(\nu) \frac{1}{4\pi} \\ I &= 0 \quad \text{pour } (x, \Omega) \in \partial\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

### 3.2 Estimateurs Monte-Carlo.

Notons  $\mathcal{V} = \{R = (t, x, \Omega, v)\}$  l'espace des phases. La méthode de Monte-Carlo consiste à tirer  $R_0$  selon  $I(0, x, \Omega, v)$  puis à passer l'un choc  $R_{j-1}$  au choc suivant  $R_j$  selon la probabilité de transmission  $p(R_{j-1}, R_j)$  correspondant à ce problème de transfert /12/. Sur l'espace des chemins aléatoires  $\mathcal{C} = \{c = (R_0 \rightarrow R_1 \rightarrow R_2 \dots R_k)\}$  nous définissons les variables aléatoires suivantes :

Energie radiative (ou poids) au temps  $t_j$   
 .....j

On utilise la méthode du dépôt réparti :

$$e(t_j) = e(t_{j-1}) \exp[-\sigma_a(v_{j-1}) c(t_j - t_{j-1})]$$

$$e(t_0) = 1$$

$$e(t_j) = 0 \text{ si } x_j \notin \mathcal{O}$$

Compteur au temps  $t_j$   
 .....j

$$\xi(t_j) = 1 \text{ si } x_j \in \mathcal{O}$$

$$\xi(t_j) = 0 \text{ sinon}$$

Energie absorbée sur  $[0, t_j]$   
 .....j

$$e_{abs}(t_j) = e(t_0) - e(t_j) = \prod_{k=1}^j \left[ 1 - \exp(-\sigma_a(v_{k-1}) c(t_k - t_{k-1})) \right]$$

si  $x_j \in \mathcal{O}$

Lorsque la particule est sortie de  $\mathcal{O}$ ,  $e_{abs}(t_j)$  est constante et égale à la dernière valeur calculée.

Dire que la particule Monte-Carlo vérifie l'équation (27) signifie que pour toute fonction  $I$  sur  $\mathcal{V}$  il existe une variable aléatoire  $\eta$  sur  $\mathcal{C}$  telle que :

$$E[\eta] = \int_{\mathcal{V}} \Psi(R) I(R) dR$$

En particulier, les variables aléatoires définies ci-dessus ont pour espérance mathématique les grandeurs suivantes :

Energie radiative dans  $\mathcal{O}$  au temps  $t$   
 .....

$$E_r(t) = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{O}} dx \int_0^{\infty} \frac{dv}{s^2} \int d\Omega I(t, x, \Omega, \nu) = E[e(t)]$$

Energie absorbée dans  $\mathcal{O}$  sur  $[0, t]$   
 .....

$$E_{abs}(t) = \int_0^t ds \int_{\mathcal{O}} dx \int_0^{\infty} \frac{dv}{s^2} \int d\Omega \sigma_a(\nu) I(s, x, \Omega, \nu) = E[e_{abs}(t)]$$

Nombre moyen de particules dans  $\mathcal{O}$  au temps  $t$   
 .....

$$E_r^0(t) = \frac{1}{c} \int_{\mathcal{O}} dx \int_0^{\infty} \frac{dv}{s^2} \int d\Omega I^0(t, x, \Omega, \nu) = E[\bar{J}(t)]$$

où  $I^0$  est la solution du problème de transfert (27) où l'on a annulé de terme d'absorption :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I^0}{\partial t} + \Omega \frac{\partial I^0}{\partial x} + h_s Q(I^0) = \iint \sigma_s I^0 \frac{d\Omega'}{4\pi} d\nu' .$$

### 3.3 Equation de diffusion pour une particule.

Ecrivons l'approximation diffusion (23) du paragraphe 2 en l'adaptant à l'équation de transfert pour une particule. On introduit  $\bar{u}(t, x)$  solution de :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - \frac{1}{3 \nabla_{RW}} \Delta \bar{u} + \tilde{\nabla}_p \bar{u} &= 0 \\ \bar{u} + \frac{L_0}{\nabla_{RW}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} &= 0 \quad x \in \partial U \\ \bar{u}(0, x) &= I_* \ll I^{in} \gg = \frac{c}{4\pi} I_* \delta(x-x_0) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

avec :

$$\tilde{\nabla}_p = \nabla_p \left[ 1 + \frac{\rho}{1-\rho} \left( 1 - \frac{k_p}{k_M} \right) \right],$$

$$\nabla_{RW}^{-1} = \int_0^\infty \frac{b(\nu) d\nu}{(1-\rho)k_a(\nu) + k_s(\nu)},$$

$$\frac{\rho}{k_M}^{-1} = \int_0^\infty \frac{b(\nu) d\nu}{k_a(\nu)}$$

$L_0$  coefficient d'extrapolation définie en 2,

$$I_* = 1 - \frac{\rho}{1-\rho} \left[ \frac{k_p}{k_M} - k_p \int_0^\infty \frac{g(\nu) d\nu}{k_a(\nu)} \right].$$

L'intensité radiative, supposée isotrope, donnée par (24), s'écrit en supprimant le terme de couche limite  $e^{-L ct/\epsilon}$  :

$$\tilde{I}(t, x, \Omega, \nu) = \bar{u}(t, x) \tilde{b}(\nu) \quad \text{si } t \neq 0.$$

avec

$$\tilde{b}(\nu) = b(\nu) \left[ 1 + \frac{\rho}{1-\rho} \left( \frac{k_p}{k_a(\nu)} - \frac{k_p}{k_M} \right) \right].$$

Notons :

$$\tilde{u}(t, x) = \left( \frac{c}{4\pi} I_* \right)^{-1} e^{-\tilde{\nu}_p ct} \bar{u}(t, x)$$

et

$$\bar{\sigma} = \left\{ x ; d(x, \sigma) < \frac{L_0}{\nu_{RW}} \right\}, (\sigma \subset \bar{\sigma}).$$

On obtient alors :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \frac{1}{3\nu_{RW}} \Delta \tilde{u} &= 0 & x \in \bar{\sigma} \\ \tilde{u} &= 0 & \text{pour } x \in \partial \bar{\sigma} \\ \tilde{u}(0, x) &= \delta(x - x_0) & . \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

L'énergie radiative devient

$$\tilde{I}(t, x, \Omega, \nu) = \frac{c}{4\pi} I_* e^{-\tilde{\nu}_p ct} \tilde{b}(\nu) \tilde{u}(t, x) \quad \text{si } t \neq 0. \quad (30)$$

Cette dernière équation s'interprète de la façon suivante :

- le poids de la particule est  $e(t) = I_* e^{-\tilde{\sigma}_p ct}$ ,
- sa fréquence est répartie selon  $\tilde{b}(\nu)$  qui est, au premier ordre, le spectre de PLANCK  $b(\nu)$ ,
- sa position  $x$  au temps  $t$  est répartie selon  $\tilde{u}(t, x)$ .

La discontinuité en  $t = 0$  correspond à un changement brusque du poids de la particule à l'instant initial (passage de  $e_0 = 1$  à  $I_*$ ). Il provient du traitement de la couche limite en temps et peut s'interpréter comme l'énergie (perdue ou gagnée) correspondant au passage du spectre initial  $f(\nu)$  au spectre  $b(\nu)$ . Le complément  $(1-I_*)$  est affecté à l'énergie absorbée comme le montre l'équation (25).

### 3.4 Solution explicite.

Pour calculer une solution explicite de (29) il faut restreindre les domaines  $\mathcal{O}$  aux boules de  $R^3$  centrées en  $x_0$ . Dans l'approximation diffusion on suppose que la température est constante sur tout le domaine. On prendra donc pour  $\mathcal{O}$  la plus grande boule de centre  $x_0$  contenue dans la maille correspondante. Nous noterons  $R_0$  le rayon de cette boule,  $\bar{R}_0$  le rayon de  $\bar{\mathcal{O}}$  ( $\bar{R}_0 = R_0 + L_0 \sigma_{RW}^{-1}$ ) et  $r$  la distance  $|x-x_0|$ .

En coordonnées sphériques, l'équation (29) s'écrit pour  $\tilde{u} = \tilde{u}(\tau, r)$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - \mathcal{D} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right] &= 0 \quad r \leq \bar{R}_0 \\ \tilde{u}(t, \bar{R}_0) &= 0 \\ \tilde{u}(0, r) &= \frac{1}{4\pi} \delta(r) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

où

$$\mathcal{D} = \frac{c}{3 \sigma_{RW}}$$

On peut montrer que la solution de (31) est :

$$\tilde{u}(t, r) = \frac{1}{2 \bar{R}_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{r} \sin\left(\frac{n\pi r}{\bar{R}_0}\right) \exp\left\{-\left(\frac{n\pi}{\bar{R}_0}\right)^2 \mathcal{D} t\right\} \quad (32)$$

Posons :

$$X = \frac{\pi r}{\bar{R}_0}, \quad \alpha = \mathcal{D} t \frac{\pi^2}{\bar{R}_0^2} = \frac{c t \pi^2}{3 \sigma_{RW} \bar{R}_0^2}, \quad A = e^{-\alpha}$$

et notons F la fonction définie par :

$$F(t, R) = \int_0^R \tilde{u}(t, r) 4\pi r^2 dr = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A^{n^2} \left( -X \cos nX + \frac{\sin nX}{X} \right) \quad (33)$$

et P la fonction :

$$P(t) = F(t, \bar{R}_0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} A^{n^2} = 2 \left[ A - A^4 + A^9 - A^{16} \dots \right] \quad (34)$$

$P(t)$  est le nombre moyen de particules présentes au temps  $t$  dans la boule  $\bar{O}$  et  $R \rightarrow \frac{F(t, R)}{P(t)}$  est la fonction de répartition des particules à l'intérieur de la boule au temps  $t$ .

Les courbes  $P(\tau)$  et  $\frac{F(t, R)}{P(\tau)}$  sont tracées, en variables réduites  $X$  et  $A$ , sur les figures 1 et 2.

Nombre moyen de particules dans  $\bar{O}$  au temps  $t$   
 .....

$$\tilde{E}_r^0(t) = \int_0^{R_0} \tilde{u}(t, r) 4\pi r^2 dr = F(t, R_0)$$

Energie radiative dans  $\bar{O}$  à l'instant  $t$   
 .....

$$\tilde{E}_r(t) = I_* e^{-\tilde{\sigma}_p c t} \int_0^{R_0} \tilde{u}(t, r) 4\pi r^2 dr = I_* e^{-\tilde{\sigma}_p c t} \tilde{E}_r^0(t)$$

Energie absorbée dans ..... sur  $[0, t]$   
 .....

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{abs}(t) &= \int_0^t ds \int_{\bar{O}} dx \int_0^{\infty} \frac{dv}{s^2} \int d\Omega \tilde{\sigma}_a \tilde{I} \\ &= (1 - I_*) + I_* \int_0^t c \tilde{\sigma}_p e^{-\tilde{\sigma}_p c s} \tilde{E}_r^0(s) ds \end{aligned}$$

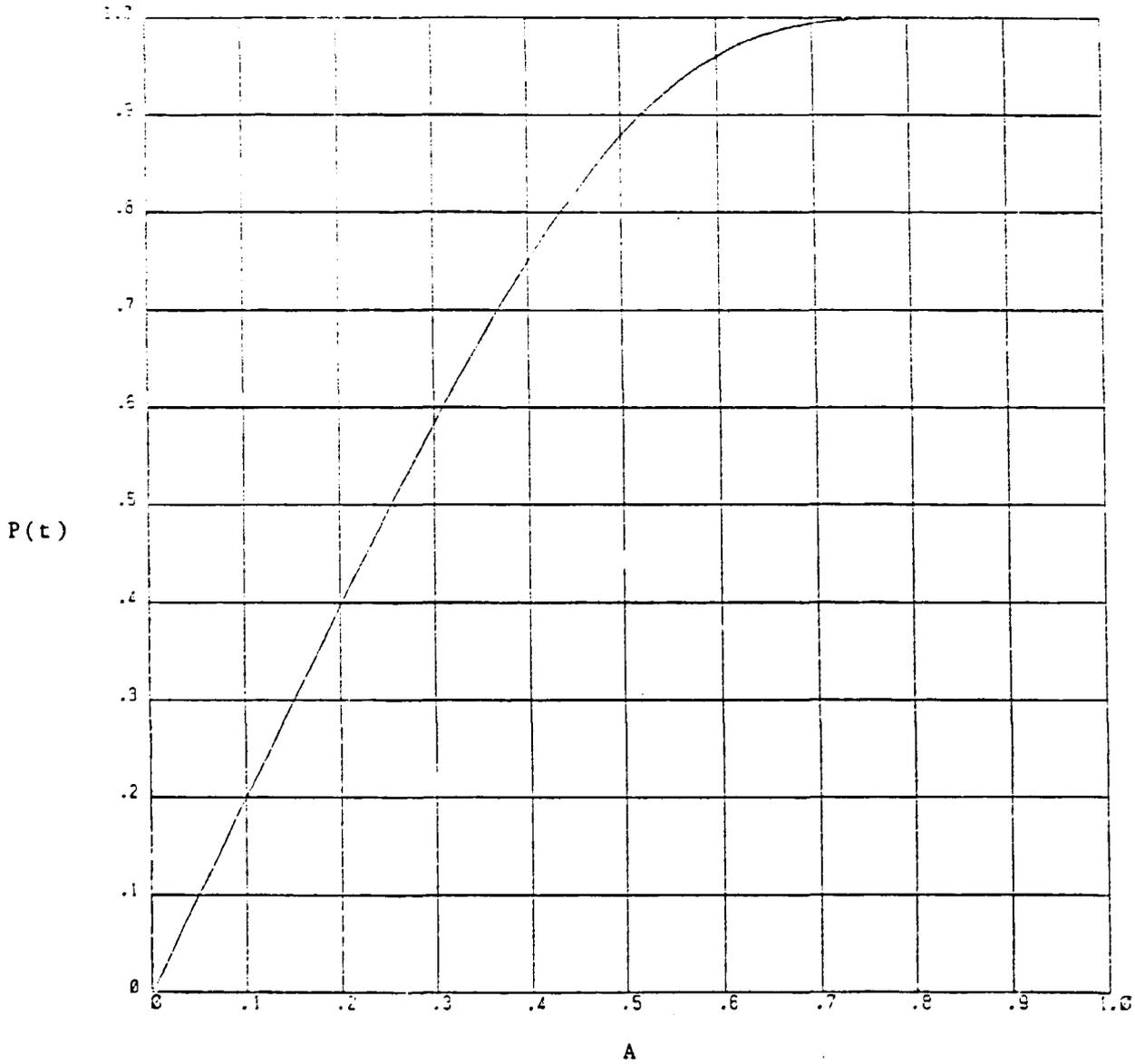
Rappelons que le premier terme  $(1 - I_*)$  provient du saut en  $t=0$  dans (30), c'est-à-dire de l'intégration du terme de couche limite en temps de (24).

Dans toute la suite nous confondrons  $\tilde{E}_r^0(t)$  (nombre de particules dans  $\bar{O}$ ) et  $P(\tau)$  (nombre de particules dans  $\bar{O}$ ). La différence entre ces deux quantités est très faible et  $P(\tau)$  a l'avantage de ne dépendre que d'un seul paramètre:

$$A = \frac{c t \pi^2}{3 \tilde{\sigma}_{RW} R_0^2} .$$

FIGURE 1

NOMBRE DE PARTICULES DANS LA BOULE  $\bar{\sigma}$



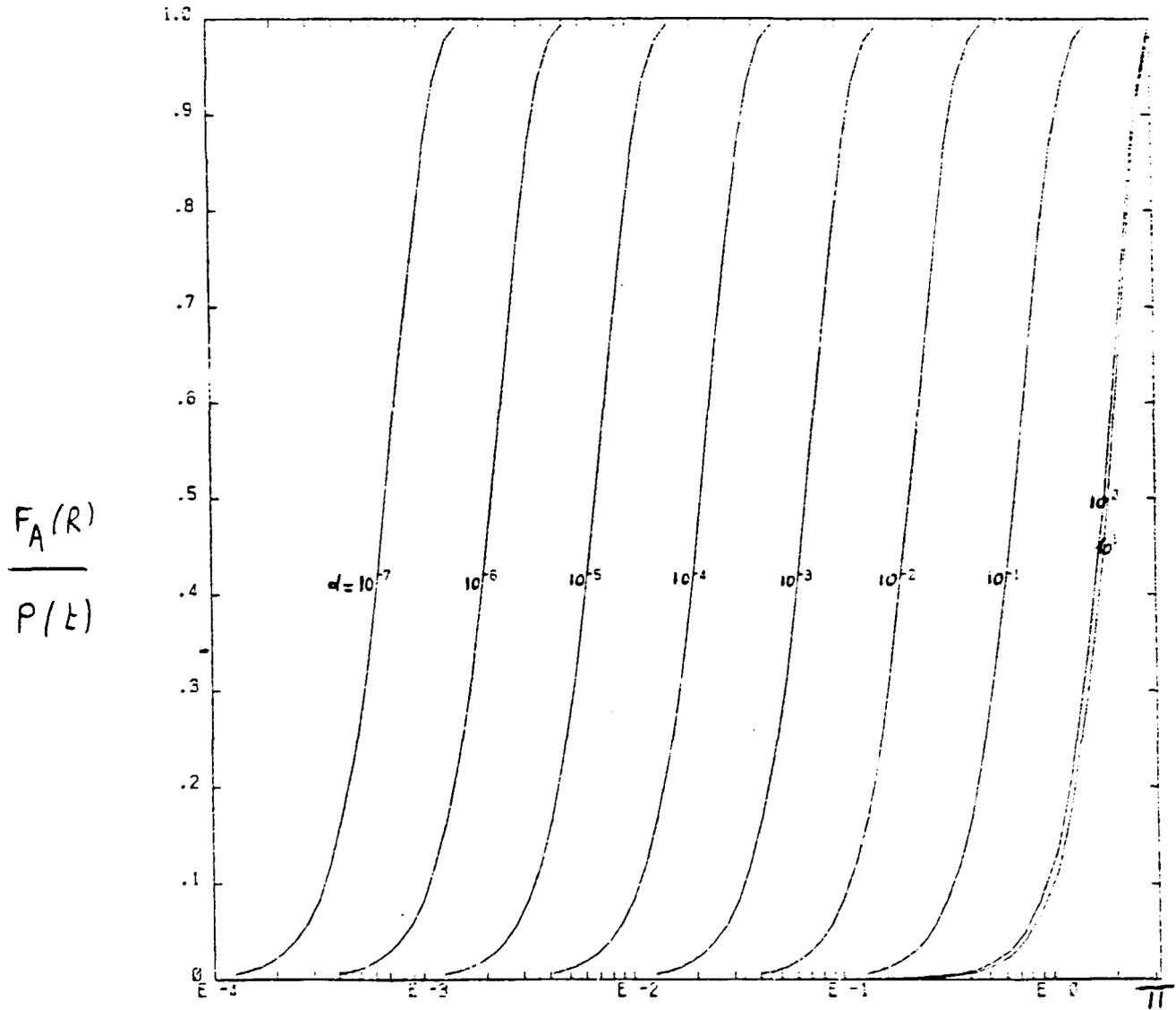
Variable réduite :

$$A = \exp \left\{ - \frac{D \pi^2}{R_0^2} t \right\} .$$

$$P(t) = \int_0^{\bar{R}_0} \tilde{u}(r, t) 4\pi r^2 dr = 2 \left[ A - A^4 + A^9 - A^{16} \dots \right]$$

FIGURE 2

FONCTION DE REPARTITION DES PARTICULES



$$X = \frac{\pi R}{R_0}$$

$$A = \exp \left\{ - \frac{D \pi^2}{R_0^2} t \right\} = \exp \{ -d \}$$

$$F_A(R) = \int_0^R \tilde{u}(r,t) 4\pi r^2 dr = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} A^{n^2} \left( -X \cos nX + \frac{\sin nX}{n} \right)$$

#### 4 / DOMAINE DE VALIDITE DE L'APPROXIMATION DIFFUSION.

Sous quelles conditions peut-on utiliser l'approximation diffusion de l'équation de transfert de FLECK ?

Pour répondre à cette question nous allons comparer les quantités  $\tilde{E}_r(t)$ ,  $\tilde{E}_{abs}(t)$ ..... obtenues à partir de l'équation de transfert (27) et les quantités diffusion  $\tilde{E}_r(t)$ ,  $\tilde{E}_{abs}(t)$ .... calculées explicitement.

Nous pouvons donner à priori la forme des conditions qui devront être vérifiées pour utiliser l'approximation.

- Le coefficient  $\lambda$  de FLECK doit être petit pour vérifier l'hypothèse  $\frac{\sigma s}{\sigma a}$  faible et justifier les développements limités en  $\epsilon$ .
- On doit observer le phénomène sur une échelle macroscopique et non plus microscopique, c'est-à-dire sur un temps assez long et dans une région suffisamment étendue. En particulier le rayon  $R_0$  de la boule doit être devant  $\sigma_{RW}^{-1}$ .

##### 4.1 Caractéristiques des essais numériques

Il s'agit de comparer les quantités  $E_R$ ,  $E_{abs}$ ,  $E_R^0$  évaluées grâce à une solution précise de (27) et ces mêmes quantités évaluées en utilisant l'approximation diffusion.

Pour obtenir une évaluation précise de la solution de (27) nous utiliserons une méthode de Monte-Carlo classique avec un grand nombre de particules (à l'instant initial les particules seront au centre de la boule de rayon  $R_0$ ).

Pour calculer explicitement les grandeurs "diffusion"  $\tilde{E}_r$ ,  $\tilde{E}_{abs}$  il faut connaître la longueur d'extrapolation  $L_0$ . Nous estimerons celle-ci empiriquement en juxtaposant à la courbe Monte-Carlo, la famille de courbes diffusion de paramètre  $L_0$ .

La méthode de Monte-Carlo utilisée revient donc à :

- tirer  $N$  particules
  - à l'instant initial  $t_0 = 0$ ,
  - au point  $x_0$ ,
  - de fréquence  $v_0$  répartie selon  $f(v)$
  - de direction  $\Omega_0$  équirépartie,
  - de poids  $e_0 = 1$ .
  
- poursuivre ces particules sur le pas en temps  $[0, t]$ , dans la boule de centre  $x_0$ , de rayon  $R_0$ .
  
- calculer les quantités suivantes au temps  $t$ .

Nombre moyen de particules restantes.  
.....

$$\xi_r^0(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta_i(t)$$

Energie radiative  
.....

$$\xi_r(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i(t)$$

Energie absorbée sur [0,t]  
.....

$$\xi_{abs}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_{abs_i}(t)$$

L'algorithme s'achève lorsque toutes les particules sont sorties de la boule, c'est-à-dire lorsque  $\xi_r^0(t) = 0$ . Le nombre de particules générées est  $N = 10\ 000$ .

En résumé, nous allons comparer les grandeurs Monte-Carlo  $\xi$  (qui sont des estimations des grandeurs transfert E) aux grandeurs diffusion  $\tilde{E}$ . Le tableau suivant résume les différentes quantités utilisées.

TABLEAU 1 : GRANDEURS COMPAREES

ESTIMATEUR MONTE-CARLO	QUANTITE A EVALUER	APPROXIMATION DIFFUSION
$\varphi_r(t) = \frac{1}{N} \sum e_i(t)$	Energie radiative $E_r(t)$	$\tilde{E}_r(t) = I_{\star} e^{-\tilde{\Sigma}_p c t} P(t)$
$\varphi_r^0(t) = \frac{1}{N} \sum \bar{f}_i(t)$	Nombre de particules $E_r^0(t)$	$\tilde{E}_r^0(t) = P(t)$
$\varphi_r(t) / \varphi_r^0(t)$	$E_r(t) / E_r^0(t)$	$I_{\star} e^{-\tilde{\Sigma}_p c t}$
$\varphi_{abs}(t) = \frac{1}{N} \sum e_{abs,i}(t)$	Energie absorbée $\bar{E}_{abs}(t)$	$\tilde{E}_{abs}(t)$

#### 4.2 Opacités constantes.

Nous évaluons tout d'abord les paramètres sous les hypothèses suivantes :

$$k_a(v) = 1 \quad v \in ]0, +\infty [$$

$$k_s = 0 \text{ (pas de diffusion Thomson).}$$

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } k_p = k_M = 1 \text{ d'où } \sigma_{RW} &= 1 - l, \\ \tilde{\sigma}_p &= \sigma_a = l, \\ I_* &= 1. \end{aligned}$$

Pour toutes les particules Monte-Carlo présentes dans la maille au temps  $t$  :  $e_i(t) = e^{-ct}$ , donc

$$\frac{\varphi_R(t)}{\varphi_R^0(t)} = e^{-ct} = I_{\gamma} e^{-\tilde{\sigma}_p ct} = \frac{\tilde{E}_R(t)}{\tilde{E}_R^0(t)}.$$

Les seules indéterminées sont le nombre moyen de particules dans la boule et le coefficient d'extrapolation  $L_0$ . On montre /6/ - /1/ que pour des opacités constantes  $L_0 = 0,71$ . Les essais effectués avec des boules de rayon  $R_0 = 5$  et  $10$   $\sigma_{RW}^{-1}$  sont en accord avec ce résultat (figures 3 et 4).

FIGURE 3

OPACITES CONSTANTES

$$k_a(v) = 1 \quad - \quad R_0 = 5 \sigma_{RW}^{-1}$$

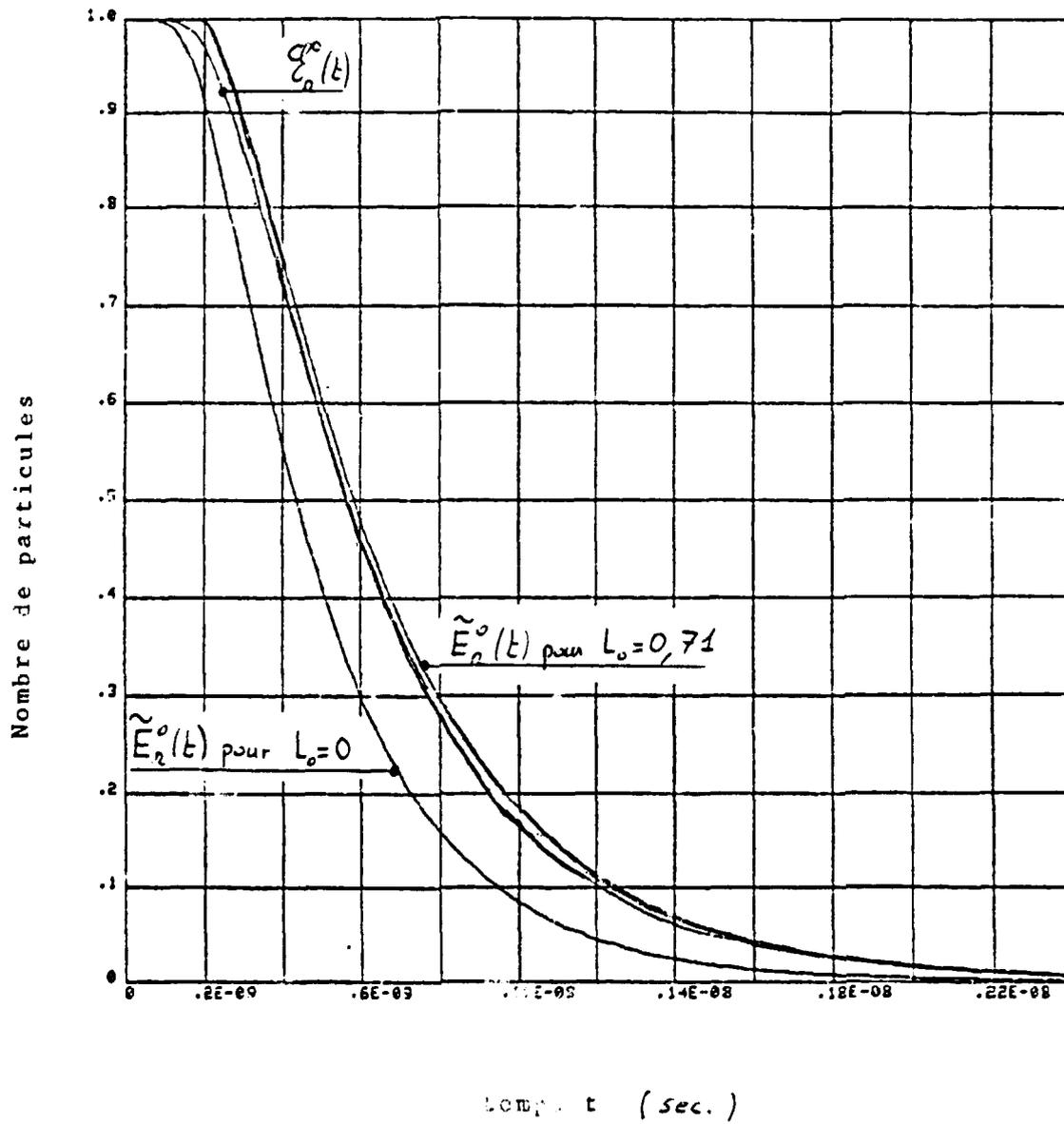
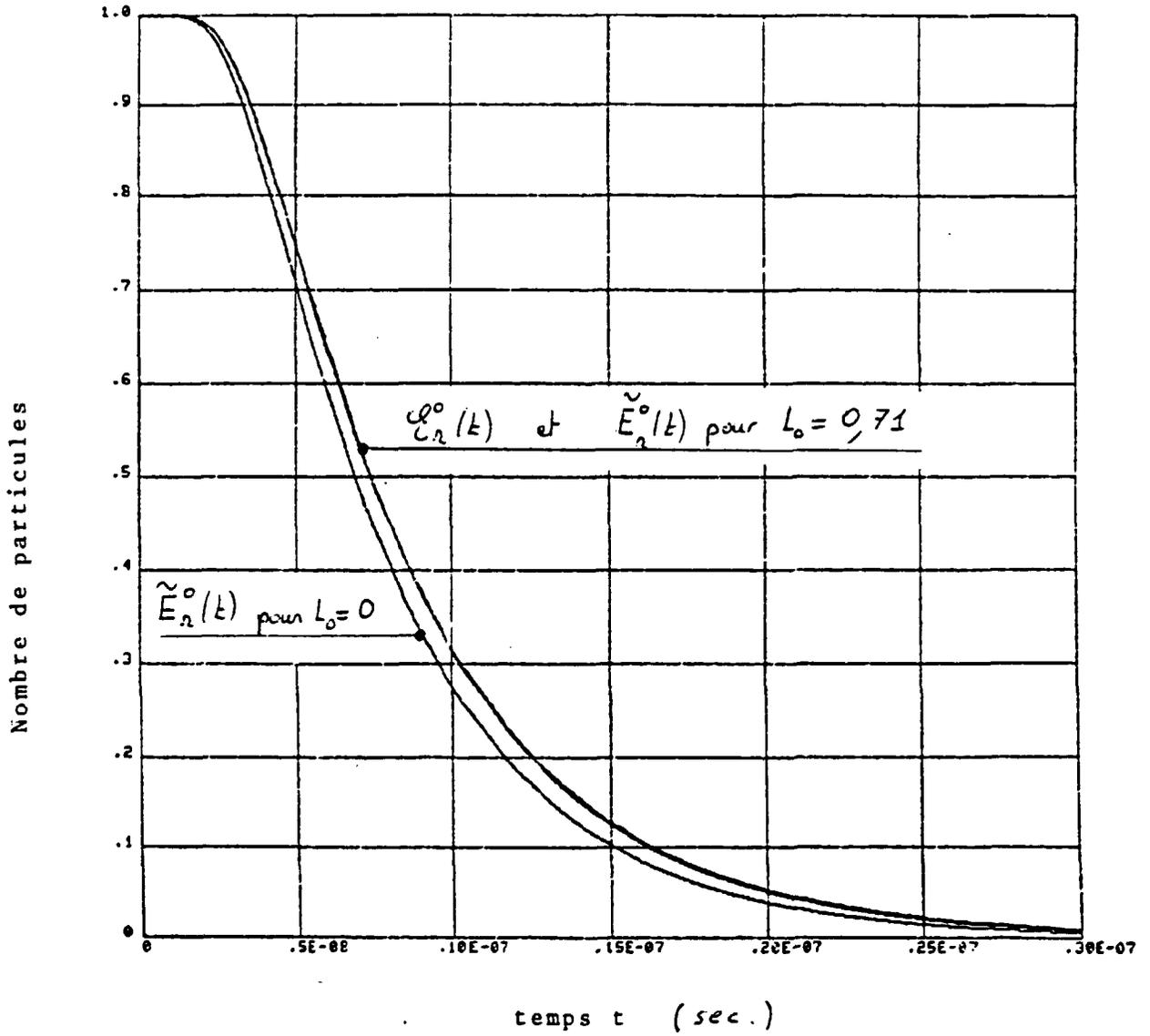


FIGURE 4

OPACITES CONSTANTES

$$k_a(\nu) = 1 \quad - \quad R_0 = 10 \sigma_{RW}^{-1}$$



### 4.3 Opacités analytiques.

Nous évaluons maintenant les paramètres avec des opacités analytiques qui sont au facteur  $(T)^{-1/2}$  près, proportionnelles aux opacités KRAMERS.

$$k_a(\nu) = \frac{D_a}{\nu^3} \left( 1 - \exp \left\{ - \frac{h\nu}{kT} \right\} \right) , \quad k_s = 0 .$$

Les calculs effectués en annexe B donnent :

- moyenne de PLANCK  $k_p = \frac{15 D'_a}{\pi^4} , \quad D'_a = D_a \left( \frac{h}{kT} \right)^3$
- moyenne de "FLECK"  $k_M = \frac{7 D'_a}{80 \pi^2} \simeq 5.75 \cdot 10^{-2} k_p .$

On a également :

$$\sigma_{RW} = (1-l) k_M ,$$

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\sigma_F} = \frac{\sigma_F}{\sigma_F} \left[ 1 + \frac{l}{1-l} \left( 1 - \frac{k_p}{k_M} \right) \right] \simeq l k_p \left[ 1 - 16.39 \frac{l}{1-l} \right]$$

Nous avons effectué des calculs Monte-Carlo avec des boules de rayon  $R_0 = 5, 10$  et  $20 \sigma_{RW}^{-1}$  et avec une des trois répartitions initiales en fréquence suivantes :

- $f_1(\nu) = b(\nu)$

On a alors :  $I_* = 1$

- $f_2(\nu) = \frac{k_a(\nu) b(\nu)}{k_p}$

$$I_* = 1 + \frac{l}{1-l} \left( 1 - \frac{k_p}{k_M} \right) \simeq 1 - 16.39 \frac{l}{1-l}$$

- $f_3(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$

$$I_{*} = 1 - \frac{\rho}{1-\rho} \left[ \frac{k_p}{k_M} - \frac{k_p}{k_a(\nu)} \right] .$$

a) Nombre de particules dans la boule (figures 5,6,7).

On s'aperçoit que la courbe  $\mathcal{E}_R^0(t)$  donnant le nombre moyen de particules dans la boule est située entre les courbes diffusion  $\tilde{E}_R(t)$  calculées avec  $L_0 = 2$  et  $L_0 = 3$  (figure 5). Il n'y a pas toutefois concordance exacte entre la courbe Monte-Carlo et une courbe diffusion comme dans le cas de l'opacité constante, et ceci, même pour des rayons  $R_0$  très grands (figure 6).

La figure 7 donne les courbes  $\mathcal{E}_R^0(t)$  pour différentes distributions initiales de la fréquence, toutes choses égales par ailleurs ( $R_0 = 5 \sigma_{RW}^{-1}$ ). Les répartitions initiales choisies sont un spectre de PLANCK, une répartition selon  $k_a(\nu) b(\nu)$ , et des masses de Dirac en  $\nu_0$  (toutes les particules ont initialement la fréquence  $\nu_0$ ). Nous avons pris  $\nu_0$  de tel sorte que  $k = \sigma_a(\nu_0)R_0$  (nombre de libres parcours absorption dans la boule) soit égal à 0,1 - 1 - 5 et 10 respectivement.

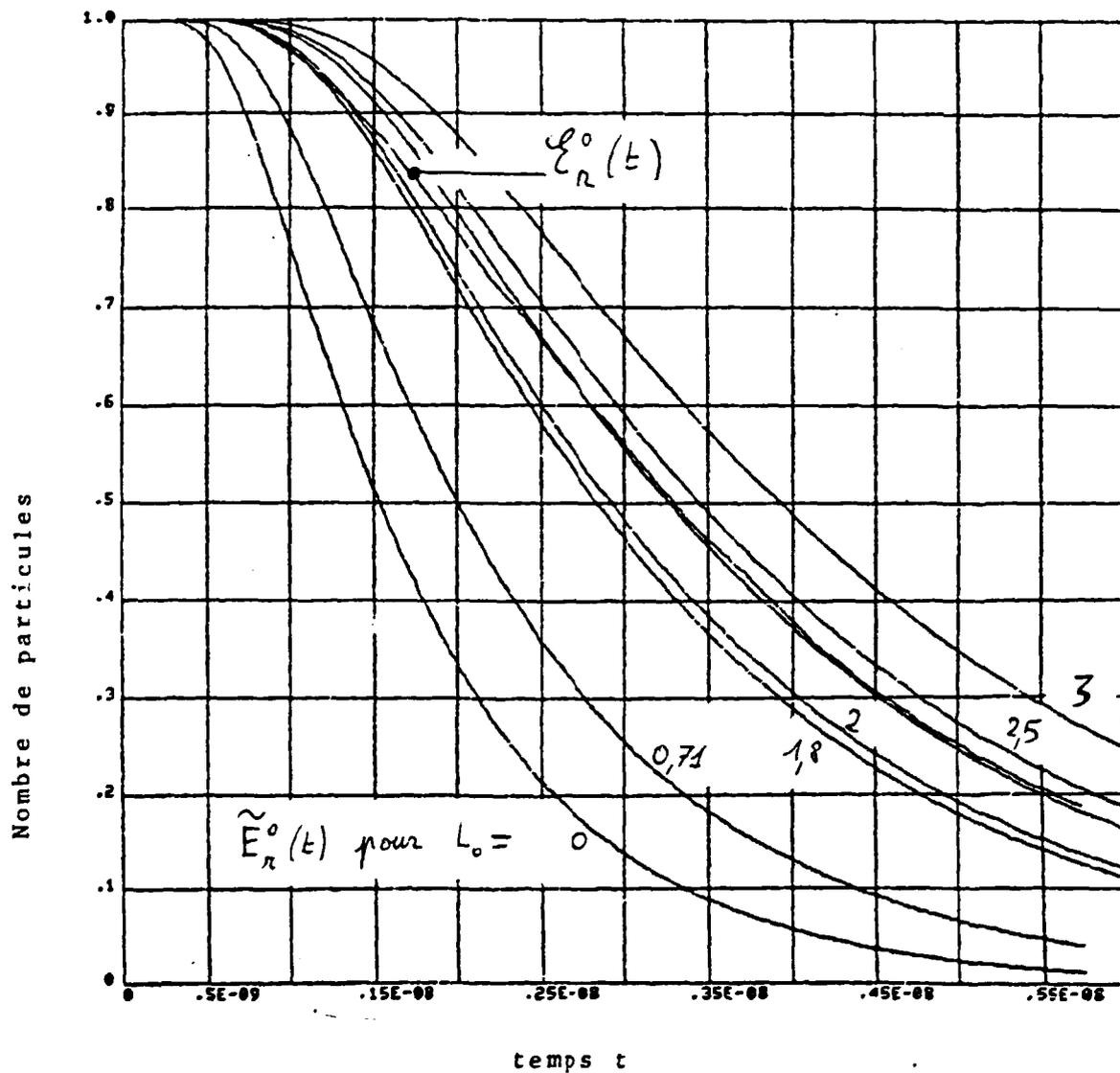
On s'aperçoit que la courbe diffusion  $\tilde{E}_R^0(t)$  correspondant à une longueur d'extrapolation de 2 coïncide avec les courbes  $\mathcal{E}_R^0(t)$  pour les répartitions :  $k_a(\nu) b(\nu)$ ,  $b(\nu)$ , et  $\delta(\nu-\nu_0)$  si  $k$  est supérieur à 5.

Notons que les figures 5 et 7 correspondent à deux valeurs différentes des coefficients d'opacité  $D_a$ .

Figure 5

OPACITES ANALYTIQUES

$$R_0 = 5 \kappa_{RW}^{-1}$$

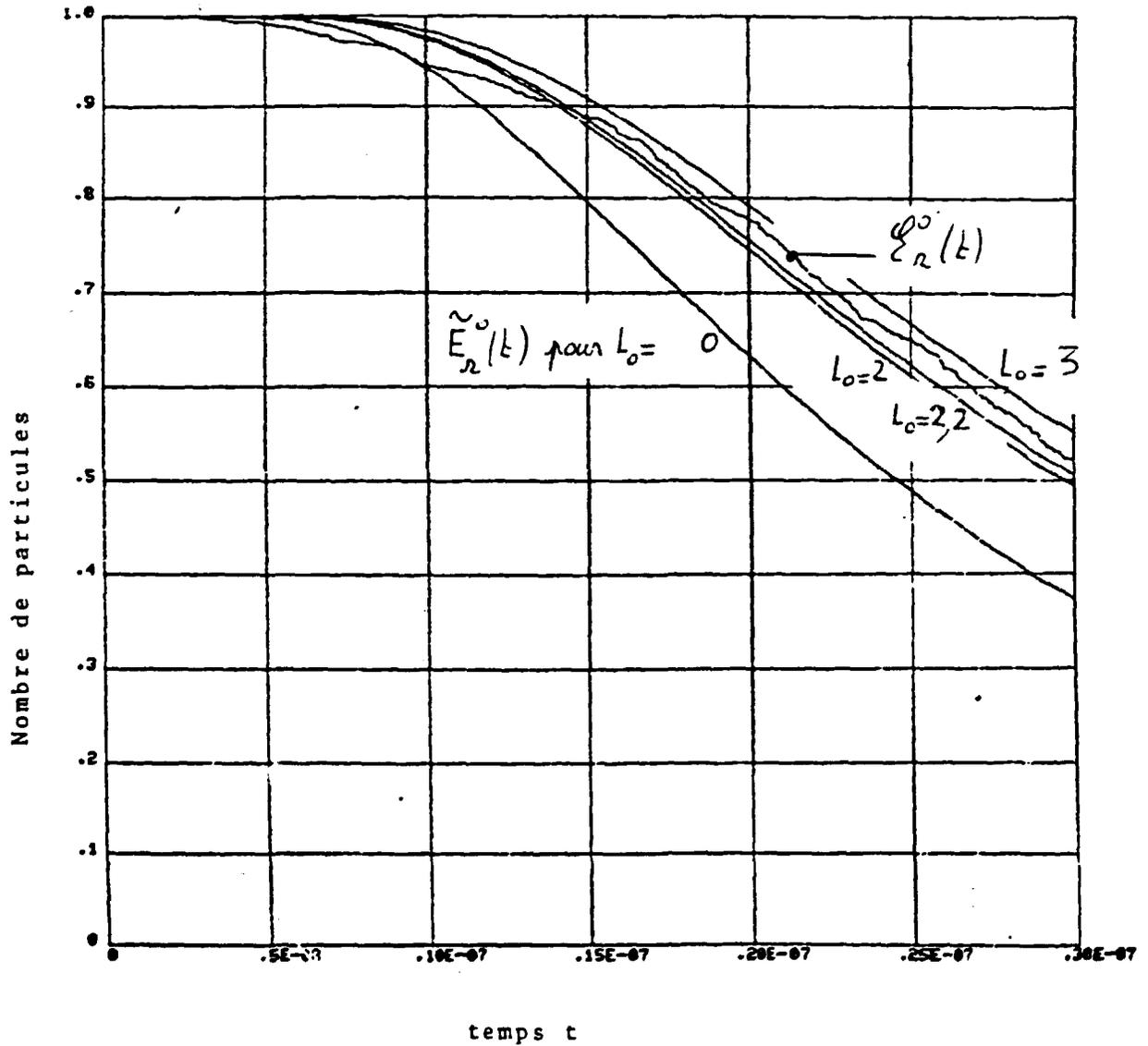


Répartition initiale en fréquence  $f(\nu) = \frac{k_a(\nu) b(\nu)}{k_p}$

Figure 6

OPACITES ANALYTIQUES

$$R_0 = 5 \tau_{RW}^{-1}$$

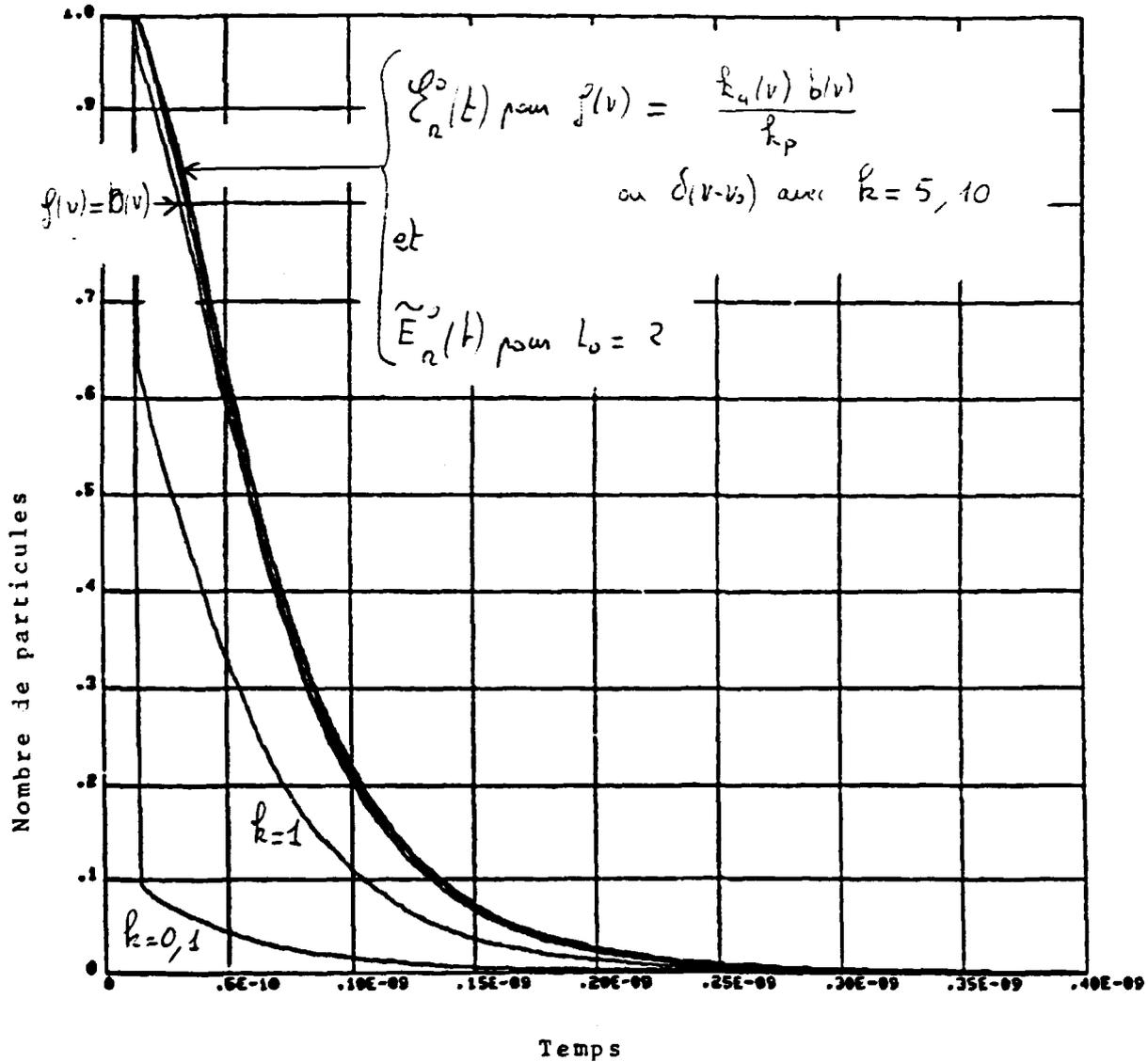


Répartition initiale en fréquence  $f(\nu) = \frac{k_a(\nu) b(\nu)}{k_p}$

Figure 7

CFACITES ANALYTIQUES

$$R_0 = 5 \sigma_{RW}^{-1}$$



Répartition initiale en fréquence

$$f(v) = \begin{cases} \frac{k_a(v) b(v)}{k_p} \\ b(v) \\ \delta(v-v_0) \end{cases}$$

$$k = \sigma_a(v_0) R_0$$

: nombre de libres parcourus absorption dans la boule

b) Energie radiative (figures 8 à 12)

Si nous imposons une loi de renvoi sur le bord de la boule ( $P(\tau) = 1$  et  $R_0 = +\infty$ ), l'approximation diffusion donne l'énergie radiative suivante :

$$\tilde{E}_r(t) = I_* e^{-\tilde{\sigma}_p ct} .$$

Sur les figures 8 et 9 nous comparons les courbes  $\xi_r^0(t)$  pour une répartition initiale de la fréquence selon  $b(v)$  et  $k_a(v) b(v)$ , aux courbes diffusion  $e^{-\tilde{\sigma}_p ct}$  et  $e^{-\sigma_p ct}$ . On voit que l'approximation diffusion est assez bonne pour  $\lambda = 0,01$  (figure 8) mais plus pour  $\lambda = 0,05$  (figure 9).

La figure 10 montre que les photons, initialement répartis selon  $k_a(v) b(v)$  sont distribués selon le spectre de PLANCK comme l'indique l'approximation diffusion après un temps très court ( $t = 0,5 \cdot 10^{-9}$  sec).

Pour les boules finies ( $P(\tau) \neq 1$ ), on a une très bonne concordance entre l'estimation Monte-Carlo  $\xi_r(t)$  et l'approximation diffusion calculée avec  $L_0 = 2$  (figure 11).

La figure 12 montre l'influence du terme  $I_*$ . On voit que la courbe Monte-Carlo  $\xi_r / \xi_r^0$  coïncide exactement avec l'approximation diffusion  $I_* e^{-\tilde{\sigma}_p ct}$ .

Figure 8

OPACITES ANALYTIQUES

$$R_0 = +\infty$$

$$l = 0.01$$

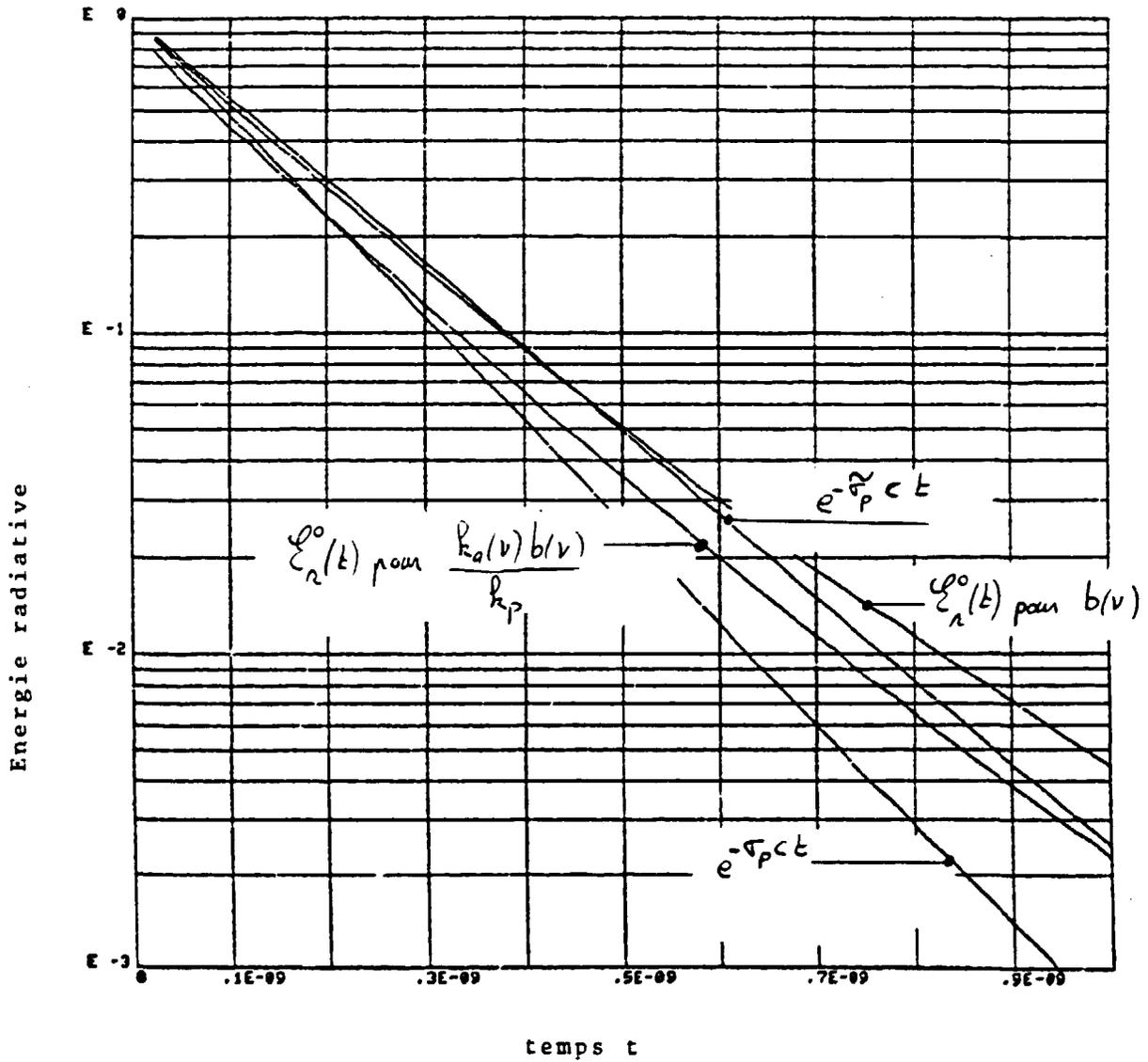


Figure 9  
OPACITES ANALYTIQUES

$R_0 = +\infty$        $p = 0.05$

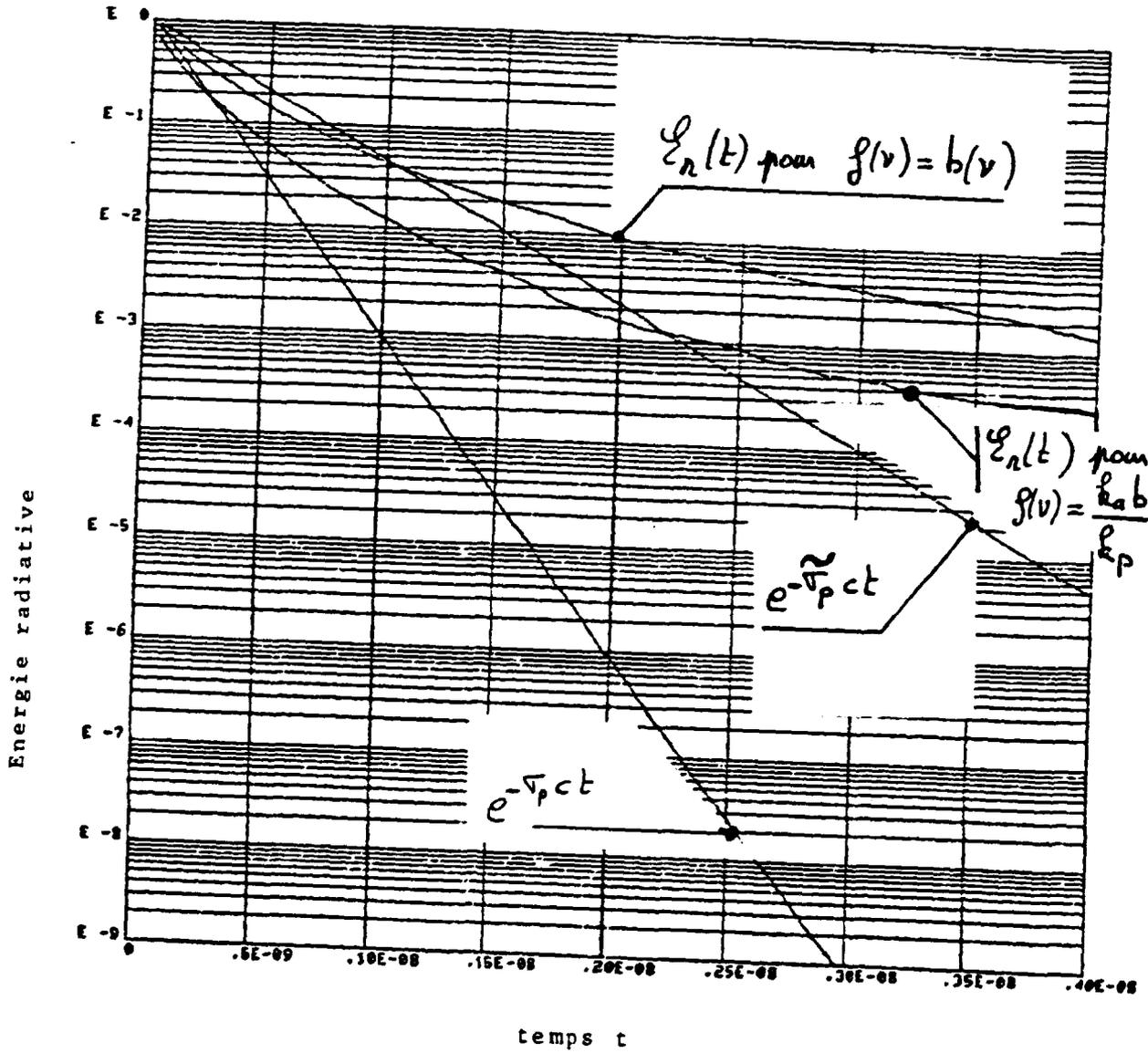


Figure 10

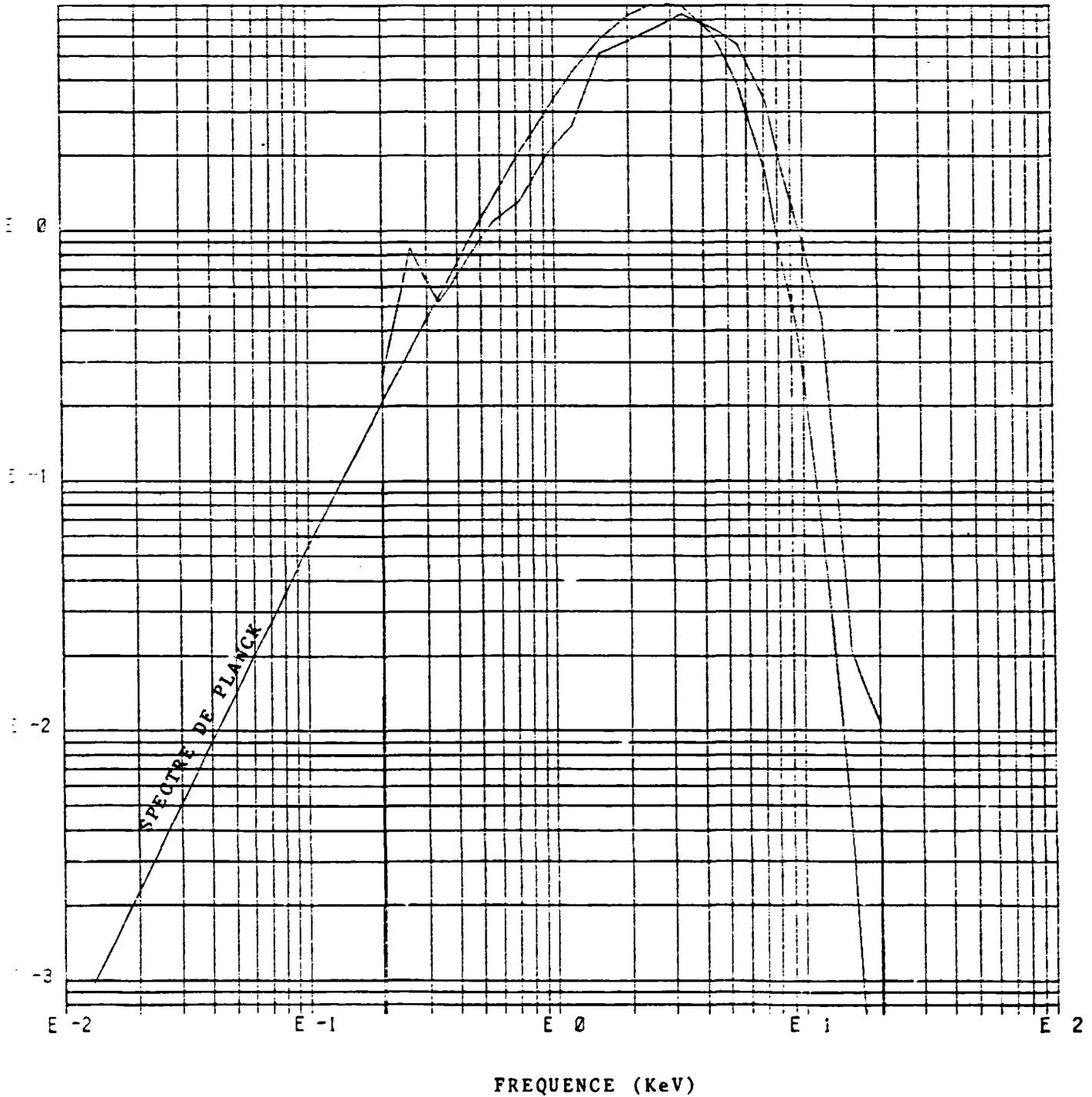
OPACITES ANALYTIQUES

REPARTITION SPECTRALE DE L'ENERGIE

$R_0 = +\infty$

$\rho = 0.005$

$t = 0.5 \cdot 10^{-9}$  sec.



Répartition initiale en fréquence

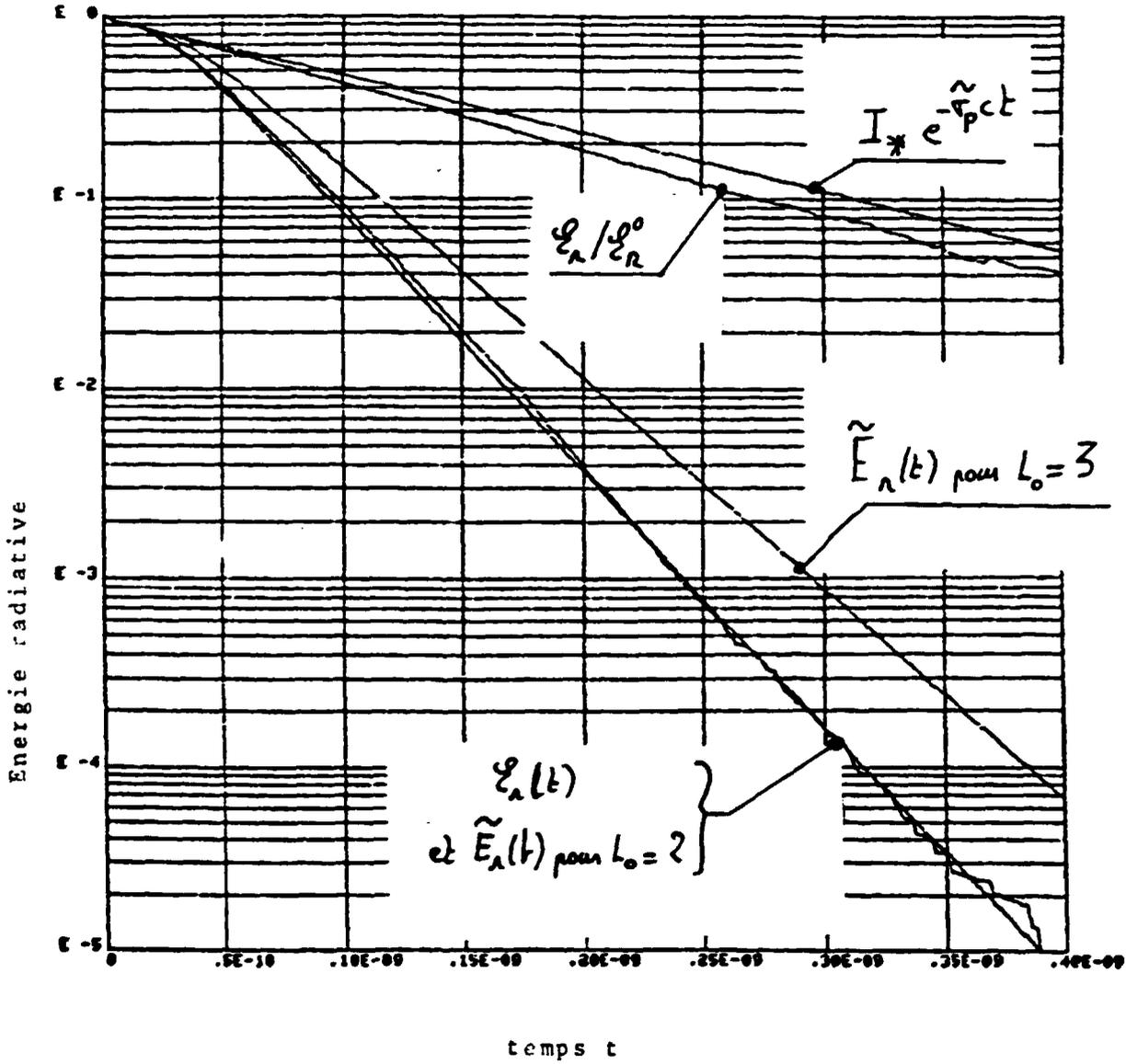
$$f(\nu) = \frac{h_a(\nu) b(\nu)}{h_p}$$

Figure 11

OPACITES ANALYTIQUES

$$R_0 = 5 \sigma_{RW}^{-1}$$

$$P = 0.001$$

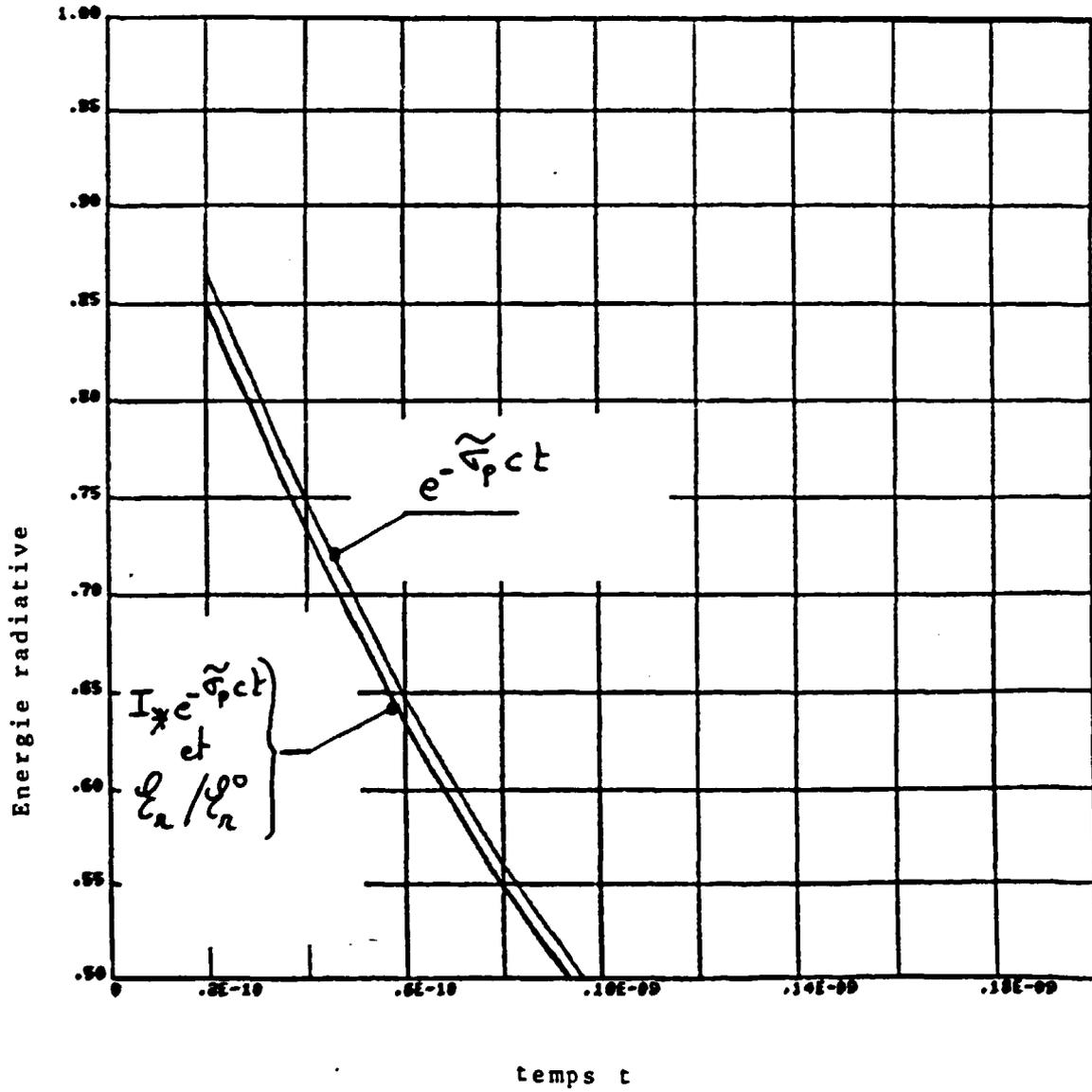


Répartition initiale en fréquence

$$f(\nu) = \frac{k_a(\nu) b(\nu)}{k_p}$$

OPACITES ANALYTIQUES

$$R_0 = 20 \tau_{RW}^{-1} - P = 0.005 - I_* = 0.98$$



Répartition initiale en fréquence

$$f(\nu) = \frac{k_a(\nu) b(\nu)}{k_p}$$

c) Energie absorbée dans la boule.

La figure 13 montre que l'erreur commise sur l'énergie absorbée est inférieure à 2 % de l'énergie initiale.

4.4 Critères de "RANDOM WALK".

En conclusion on peut dire que dans le cas où :

$$k_a(\nu) = \frac{D_a}{\nu^3} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{h\nu}{kT} \right\} \right) \quad \text{et} \quad k_s = 0$$

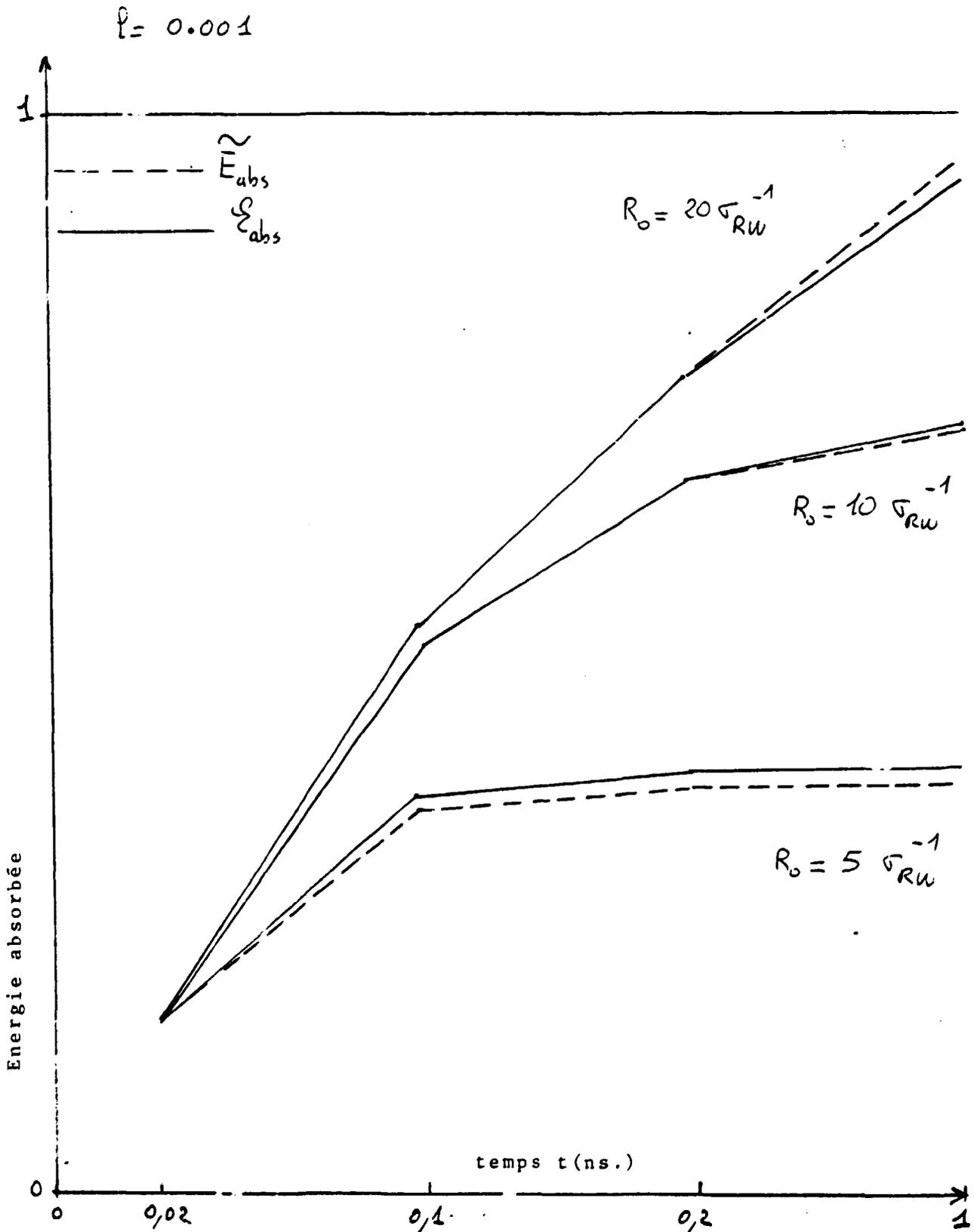
l'approximation diffusion (29) (30) prise avec une longueur d'extrapolation  $L_0 = 2$  est satisfaisante si les critères suivants sont vérifiés :

$$l \leq 0.01$$

$$R_0 \gg 5 \sigma_{RW}^{-1}$$

et si :  $f(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$  alors  $R_0 \gg 5 \sigma_a^{-1}(\nu_0)$  .

OPACITES ANALYTIQUES



Répartition initiale en fréquence  $f(\nu) = \frac{k_a(\nu) b(\nu)}{k_p}$

$$\tilde{E}_{abs}(t) = (1 - I_{\star}) + I_{\star} \int_0^t \frac{1}{c \sigma_p} e^{-\tilde{\nu}_p c b} P(\lambda) d\lambda$$

5 / METHODE DE FLECK ACCELEREE PAR "RANDOM WALK"

Nous connaissons maintenant une approximation explicite de l'intensité radiative  $I$  dans la boule  $\mathcal{O}$  et nous savons dans quels cas elle est valable (pour des opacités analytiques). Il ne reste plus qu'à déplacer les particules en utilisant la solution  $\tilde{u}(t, x)$ . Le nombre moyen de particules dans  $\mathcal{O}$  à l'instant  $t$  est :

$$P(t) = \int_{\mathcal{O}} \tilde{u}(t, x) dx$$

et, par conséquent,  $F(t) = 1 - P(t)$  est la fonction de répartition du temps de sortie de  $\mathcal{O}$ .

L'algorithme de "RANDOM WALK" consiste à amener la particule Monte-Carlo au bord de la boule en tirant le temps de sortie selon  $F(t)$ . Lorsque le temps de sortie échantillonné est supérieur à la fin du pas en temps  $T$  on tire la position de la particule dans la boule selon  $\tilde{u}(T, x)$ . Nous allons donner ci-après une démonstration probabiliste de ce résultat. On trouvera dans l'annexe C une démonstration différente due à B. MERCIER.

5.1 Temps de sortie de la boule

Nous allons rappeler ci-dessous quelques notions sur le mouvement Brownien dans un domaine  $\mathcal{O}$ .

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace de probabilité.

Un mouvement Brownien  $B$  pour  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  est une famille de variables aléatoires  $\{B_t\}_{t \in \mathbb{R}^+}$  de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$B_t : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \text{Boreliens})$$

$$\omega \longmapsto B_t(\omega)$$

vérifiant :

- les trajectoires  $t \rightarrow B_t(\omega)$  sont continues pour tout  $\omega$ ,
- $B_t$  est une gaussienne centrée ( $E[B_t]=0$ ) de variance  $t$

$$E[B_t^2] = t$$

- $B_t$  est à accroissements indépendants :

pour tout  $t_0=0 < t_1 < t_2 \dots < t_k$  les variables aléatoires

$$(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{i=1, \dots, k} \text{ sont 2 à 2 indépendantes.}$$

On sait qu'il existe un tel mouvement Brownien /8/, /13/.

Un mouvement Brownien sur  $\mathbb{R}^3$  est un triplet  $X=(X^1, X^2, X^3)$  où  $X^i$ ,  $i = 1, 2, 3$  sont trois mouvements Browniens réels indépendants. Nous considérons dans la suite un mouvement Brownien de  $\mathbb{R}^3$  centré en  $x_0$  ( $X_0(\omega)=x_0$ ) centre de la boule  $\mathcal{O}$ .

Les trajectoires  $t \rightarrow X_t(\omega)$  peuvent être assimilées aux trajectoires de particules issues de  $X_0(\omega)=x_0$ .

Un évènement  $\omega$  correspond donc à une particule.

On définit le temps de sortie  $\tau$  de l'ensemble  $\mathcal{O}$  par :

$$\tau(\omega) = \inf \{ t ; X_t(\omega) \notin \mathcal{O} \} .$$

Pour chaque évènement  $\omega$ ,  $\tau$  est le premier temps de sortie du domaine  $\mathcal{O}$ . C'est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Le théorème suivant relie mouvement Brownien et équation de diffusion sur  $\sigma$  /13/.

THEOREME : soit  $\varphi(t, x)$  solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi = 0 \\ \varphi = 0 \text{ sur } \partial \sigma \\ \varphi(0, x) = \delta(x - x_0) \end{array} \right.$$

alors  $\mathbf{P}(X_t = x \text{ et } \tau > t) = \varphi(t, x)$

Le théorème montre que la probabilité pour qu'une particule soit en  $x$  à l'instant  $t$  sans être sortie de la boule est exactement  $\varphi(t, x)$ . On a donc :

$$P(\tau > t) = P(X_t \in \sigma \text{ et } \tau > t) = \int_{\sigma} \varphi(t, x) dx$$

Ce qui prouve que la fonction de répartition du temps de sortie est :

$$F(t) = P(\tau \leq t) = 1 - \int_{\sigma} \varphi(t, x) dx$$

Dire que les particules ont une densité de répartition solution d'une équation de diffusion signifie donc que leurs trajectoires sont exactement les trajectoires du mouvement Brownien que l'on arrête lorsqu'elles sortent du domaine considéré.

Rappelons que nous nous plaçons sur un intervalle de temps  $[t^n, t^{n+1}]$  pour résoudre l'équation de transport de FLECK.

Nous nous intéressons à une particule Monte-Carlo située

au centre de la boule  $\sigma$  au temps  $t_{in} \in [t^n, t^{n+1}]$ . Comme on doit arrêter celle-ci à la fin du pas en temps  $t^{n+1}$ , on introduit le temps d'arrêt :

$$\mathbb{T}(\omega) = \inf\{\tau(\omega), T\} \quad \text{où : } T = t^{n+1} - t_{in} .$$

Nous voulons amener la particule directement soit sur le bord du domaine, soit à la fin du pas en temps, ce qui est équivalent à échantillonner le processus  $X$  arrêté au temps  $\mathbb{T}$  :  $X_{\mathbb{T}(\omega)}(\omega)$ .

Les distributions de  $\mathbb{T}$  et  $X_{\mathbb{T}}$  sont données par :

$$P(\mathbb{T} \leq t) = \begin{cases} F(t) & \text{si } t < T \\ 1 & \text{si } t \geq T \end{cases}$$

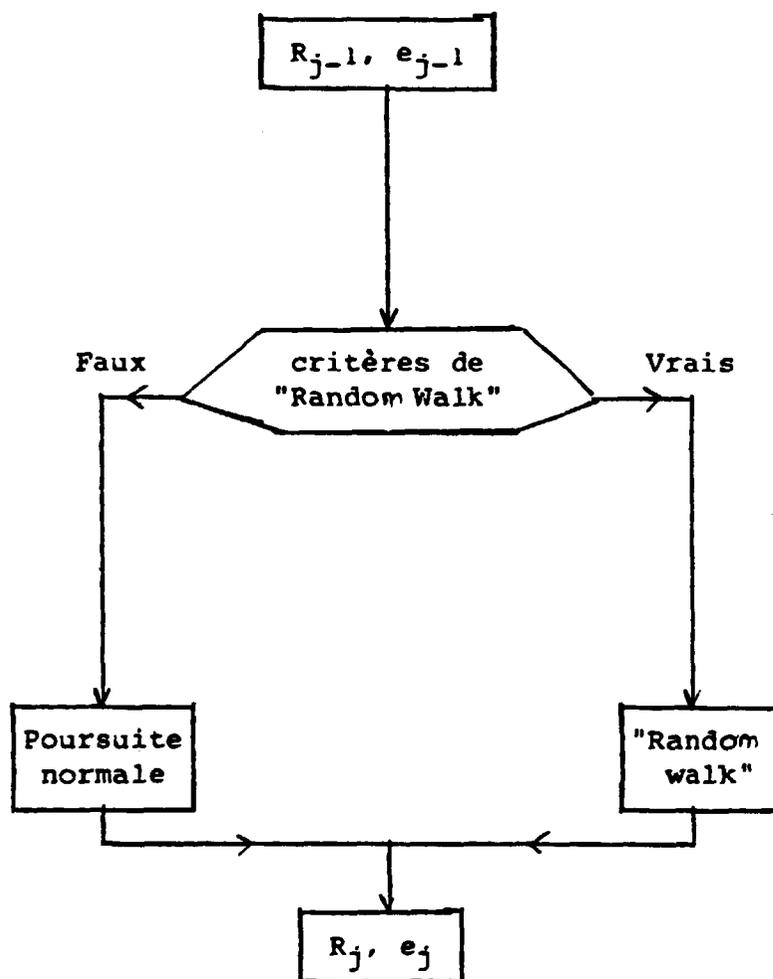
$$P(X_{\mathbb{T}} = x \text{ connaissant } \mathbb{T}) = \begin{cases} \varphi(T, x) & \text{si } \mathbb{T} = T \\ \frac{\sigma_{\infty}(x)}{4\pi R_0^3} & \text{si } \mathbb{T} < T \end{cases}$$

(c'est-à-dire que  $X_{\mathbb{T}}$  est uniformément réparti sur le bord si on sort avant  $T$ )

## 5.2 Modification de la méthode de Monte-Carlo.

Nous considérons ici que l'algorithme Monte-Carlo scalaire. Il est néanmoins possible d'insérer la méthode du "RANDOM WALK" dans un algorithme Monte-Carlo vectorisé /3/.

La méthode de Fleck accélérée par "Random Walk" ne modifie que la poursuite des particules, c'est-à-dire le passage pour chaque "particule" du point  $R_{j-1} = (\tau_{j-1}, x_{j-1}, \Omega_{j-1}, v_{j-1})$  de l'espace des phases, associé au poids  $e_{j-1}$ , au point  $R_j = (\tau_j, x_j, \Omega_j, v_j)$  associé à  $e_j$ .



La poursuite accélérée par "Random Walk" consiste essentiellement lorsque les critères sont vérifiés, à échantillonner  $\mathbb{T}$  et  $X_{\mathbb{T}}$ . On utilise pour cela les distributions de  $\mathbb{T}$  et  $X_{\mathbb{T}}$  données au paragraphe précédent.

• Les critères de RANDOM WALK ne sont pas vérifiés. On poursuit la particule selon la méthode de Monte-Carlo de FLECK.

Lorsque les critères sont vérifiés, on tire le temps de sortie  $\tau$  de la boule de rayon  $R_0$  selon la fonction de répartition  $\tilde{F}(\tau) = 1 - P(\tau)$  où  $P(\tau)$  est donné par la formule (34). Le temps de sortie "absolu" de la boule est :

$$\theta = t_{j-1} + \tau.$$

• Si  $\theta < t^{n+1}$  on amène la particule sur le bord de la boule :

$$t_j = \theta$$

$x_j$  équiréparti sur  $\partial\sigma$

$v_j$  réparti selon  $b(v)$  (on néglige le terme au 1er ordre de  $\tilde{b}(v)$ )

$$e_j = e_{j-1} I_* e^{-\tilde{\sigma}_p} c(t_j - t_{j-1})$$

On a pris  $\Omega_j$  réparti selon la loi de LAMBERT /4/ par rapport à la normale extérieure à  $\sigma$ , loi qui correspond à une intensité radiative  $I(\Omega)$  constante pour  $\Omega$  sur la demi-sphère.

• Si  $\theta > t^{n+1}$  on arrête la particule à l'instant  $t^{n+1}$   
 $t_j = t^{n+1}$

On tire  $R$  selon la fonction de répartition  $\frac{F(t^{n+1} - t_{j-1}, \cdot)}{P(t^{n+1} - t_{j-1}, \cdot)}$

(voir (34)) définie sur  $(0, \bar{R}_0)$  et on accepte  $R$  seulement si  $R < R_0$  (méthode du rejet).

On tire alors  $x_j$  de manière équirépartie sur la boule de rayon  $R$ .

$$\begin{aligned} v_j & \text{ réparti selon } b(v) \\ \Omega_j & \text{ équiréparti sur } S^2 \\ e_j & = e_{j-1} I_* e^{-\tilde{\sigma}_p c(t_j - t_{j-1})}. \end{aligned}$$

La figure 14 résume les trois cas possibles.

L'estimateur de l'énergie absorbée est  $(e_j - e_{j-1})$ . Vérifions maintenant que pour une particule partant de  $t_0 = t^n$  avec une fréquence  $v_0$ , au point  $x_0$  (centre d'une boule  $\mathcal{O}$ ) et un poids  $e_0 = 1$ , l'estimateur de l'énergie absorbée entre  $t^n$  et  $t^{n+1}$  dans la boule  $\mathcal{O}$  (sachant que la particule est arrêtée lorsqu'elle sort de  $\mathcal{O}$ ) a pour espérance mathématique la quantité suivante (voir paragraphe 3.4) :

$$\tilde{E}_{abs} = 1 - I_* + I_* \int_0^{t^{n+1} - t^n} c \tilde{\sigma}_p e^{-\tilde{\sigma}_p c t} P(t) dt$$

En effet en posant  $T = t^{n+1} - t^n$  la quantité  $t_1 - t_0$  est répartie selon la mesure  $\mu$  définie par :

$$\begin{aligned} \mu[0, t] &= F(t) = 1 - P(t) & \text{si } t \leq T \\ &= 1 & \text{si } t \gg T \end{aligned}$$

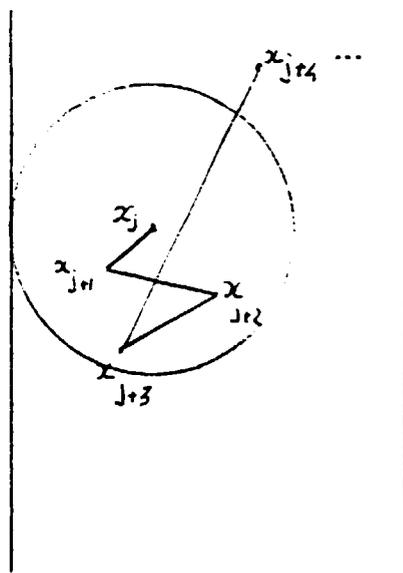
On en déduit donc :

$$\begin{aligned} E[e_1 - e_0] &= \int_0^\infty (1 - I_* e^{-\tilde{\sigma}_p c t}) \mu(dt) \\ &= \int_0^T (1 - I_* e^{-\tilde{\sigma}_p c t}) F'(t) dt + (1 - I_* e^{-\tilde{\sigma}_p c T}) P(T) \end{aligned}$$

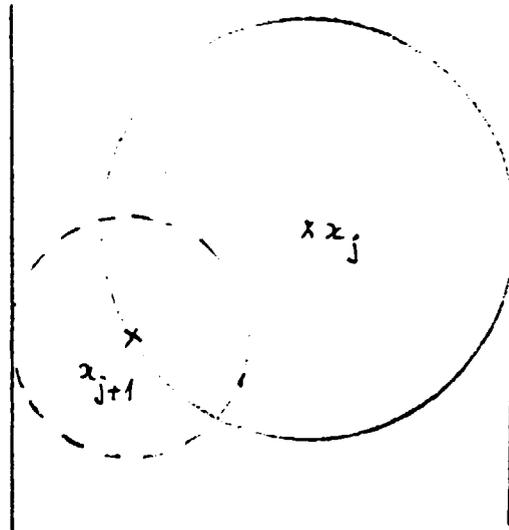
en intégrant par partie on obtient :

$$E[e_{abs}] = (1 - I_*) + I_* \int_0^T c \tilde{\sigma}_p e^{-\tilde{\sigma}_p c t} P(t) dt$$

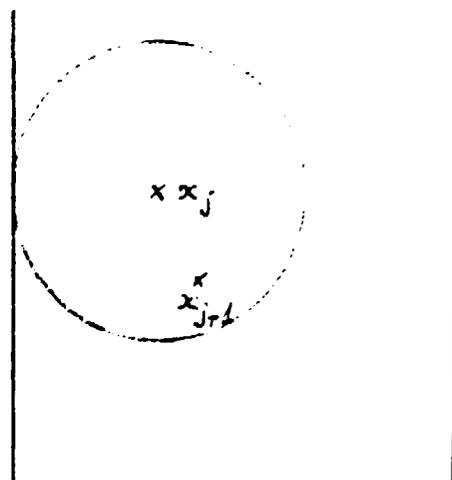
Critères non vérifiés : poursuite normale



Critères vérifiés. Temps de sortie  $t \leq t^{n+1}$ .  $x_j \in \partial\mathcal{D}$



Temps de sortie  $t > t^{n+1}$ . La particule est encore dans  $\mathcal{D}$  à  $t^{n+1}$



6 / RESULTATS

Nous avons testé la méthode de FLECK accélérée par "RANDOM WALK" sur le problème monodimensionnel plan suivant proposé par FLECK /9/.

Géométrie : 10 couches d'épaisseur 0,4 cm

Opacité :  $k_s = 0$   
 $k_a = \frac{27}{v^3} [1 - e^{-v/T}]$  (où  $v$  et  $T$  sont en Kev) sauf dans la couche 6 où on multiplie l'opacité par 1000 :  
 $k_a = \frac{27\ 000}{v^3} (1 - e^{-v/T})$

Conditions aux limites :

Emission de corps noir à 1 Kev en  $x_0 = 0$   
vide en  $x = 4$  cm  
 $I(t = 0) = 0$   
 $T_0 = 10^{-3}$  Kev

Equation d'état

Gaz parfait :  $\epsilon_m = \beta T$   $\beta = 6,9913 \cdot 10^6$  cgs.

La figure 15 donne l'évolution de la température en fonction du temps dans les couches 1, 6 et 7 pour les trois calculs suivants :

- Calcul implicite (méthode de FLECK sans RANDOM WALK)
- RANDOM WALK avec un rayon minimal des boules égal à  $(5 \sigma_{RW}^{-1})$  et une longueur d'extrapolation  $L_0 = 2$ .
- RANDOM WALK avec un rayon minimal égal à  $(20 \sigma_{RW}^{-1})$  sans longueur d'extrapolation (dans ce cas, en effet, la longueur d'extrapolation devient négligeable devant le rayon de la boule).

L'expérience montre que si l'on n'utilise pas de longueur d'extrapolation, les températures obtenues sont mauvaises avec un rayon minimal des boules égal à  $(5 \sigma_{RW}^{-1})$ . Le coefficient  $l$  étant très faible ( $l = 5 \cdot 10^{-4}$ ) dans la couche 6, les grandeurs  $\tilde{\sigma}_p$  et  $I_*$  sont très voisines de  $\sigma_p$  et  $l$  respectivement.

Les températures sont interpolées pour les tirages des fréquences comme indiqué dans l'annexe D.

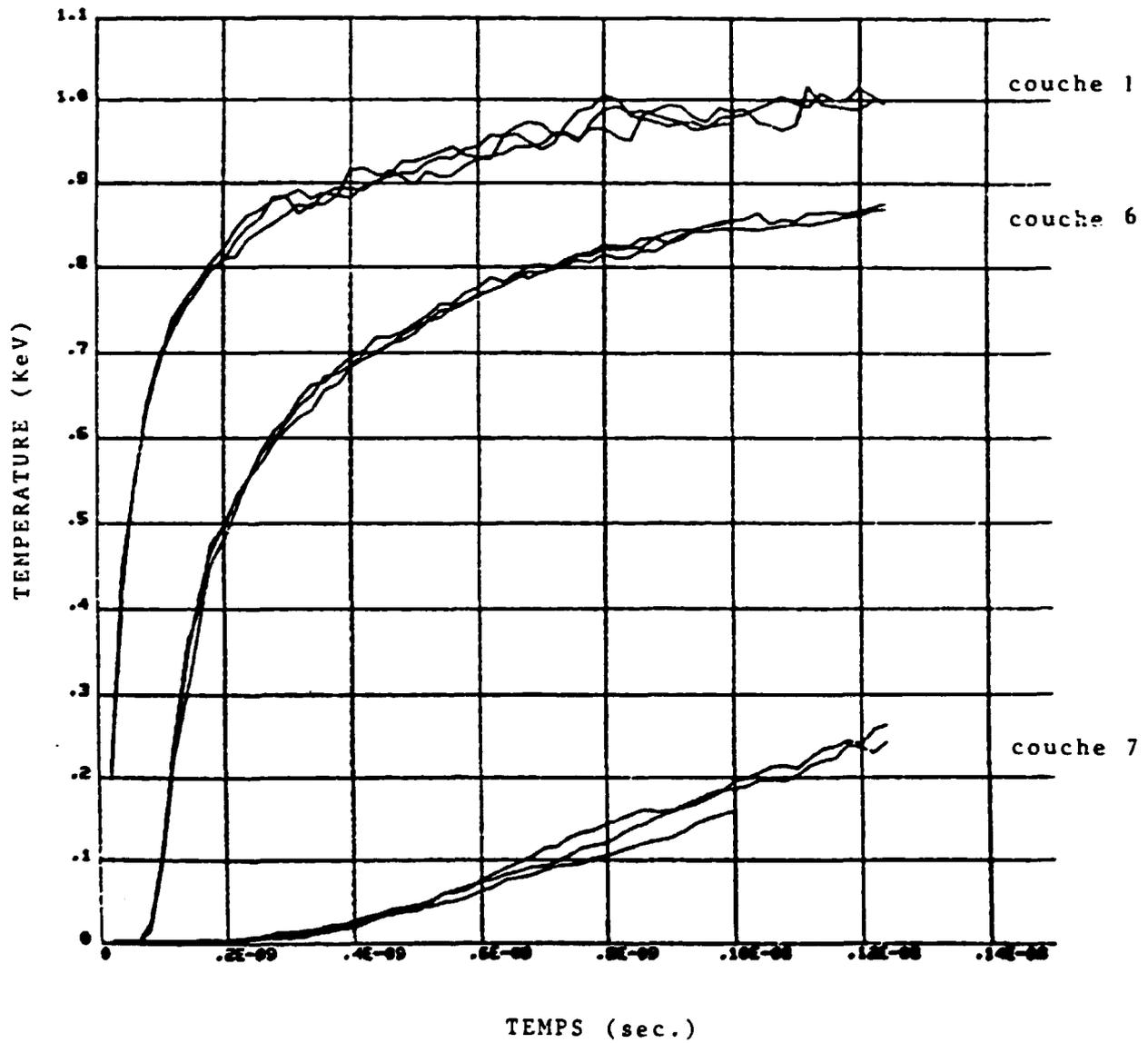
Les caractéristiques des trois calculs sont les suivantes :

Cas	Implicite	$R_{\min. 5 \sigma_{RW}^{-1}}$	$R_{\min. 20 \sigma_{RW}^{-1}}$
temps de calcul* (CRAY 1)	3 h 04 mn	6 mn	22 mn
Nbre de particules*	13 233	13 381	13 355
Nbre de chocs FLECK*	379 $10^6$	11 $10^6$	44 $10^6$
Nbre de RANDOM WALK*	0	89 000	56 000

\* : au temps  $t = 1$  ns.

Figure 15

Cas "Fleck et Cummings" avec une couche opaque



Comparaison entre : Monte-Carlo Fleck

Random Walk avec des boules de 5 et  $L_0 = 2$

Random Walk avec des boules de 20

7 / CONCLUSION

Nous avons obtenu par la technique des échelles multiples une approximation diffusion de l'équation de transfert de FLECK qui a été très bien vérifiée par les essais numériques effectués. Cette approximation permet de réduire considérablement le coût de la méthode de Monte-Carlo de FLECK dans les milieux opaques en déplaçant les particules directement selon la solution de l'équation de diffusion.

Les critères donnés peuvent certainement être affaiblis pour les calculs de transfert radiatif habituels et l'étude des critères doit être poursuivie en utilisant des opacités plus réalistes.

Cette méthode pourra servir de référence pour les problèmes de transfert dans des milieux d'opacités différentes. Elle peut bien sûr être couplée avec la diffusion ROSSELAND, la ligne de couplage entre les deux zones pouvant être reportée à l'intérieur du milieu opaque.

Annexe A

CALCULS ASYMPTOTIQUES

Nous démontrons ici la proposition 1 (sans entrer dans tous les détails) et nous donnons quelques idées sur les résultats du paragraphe 2.3

Nous faisons un développement de  $I_\varepsilon$  à l'ordre 3 en  $\varepsilon$  (pour la proposition 1) ou à l'ordre 4 (pour le paragraphe 2.3) et nous posons donc (1).

$$\begin{aligned}
 I_\varepsilon = & \bar{I}_0 + \varepsilon \bar{I}_1 + \varepsilon^2 \bar{I}_2 + \varepsilon^3 \bar{I}_3 + \varepsilon \bar{I}_4 + \bar{I}_{\text{int}} && \text{Termes "intérieurs"} \\
 & + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 && \text{Termes de "couche limite"} \\
 & + \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2 && \text{Termes de "couche initiale"}
 \end{aligned}$$

$$\text{où } \left\{ \begin{array}{l} \bar{I}_i = \bar{I}_i(x, \Omega, \nu), \\ \psi_i = \psi_i(\xi, \Omega, \nu), \\ \varphi_i = \varphi_i(s, x, \Omega, \nu), \end{array} \right. \quad s = \hat{t}/\varepsilon^2.$$

Rappelons que l'on a :

$$(A1) \left\{ \begin{array}{l} Lb = 0 \\ \ll Lf \gg = 0 \end{array} \right. \quad \text{pour tout } f$$

et qu'une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que  $Lu + f = 0$  une solution  $u$  est que  $f = 0$

-----  
 (1) Ici nous n'écrirons plus la variable  $t$  de temps. On écrira  $f = f(x, \nu)$  pour signifier que  $f$  dépend de  $x$  et  $\nu$  (et non de  $\Omega$ ) etc. Pour  $x \in \partial\Omega$  fixé on notera :

Les différentes équations que doivent satisfaire les  $I_i$  sont les suivantes :

$$(A2) \quad L I_0 = 0 \quad \text{donc : } I_0 = b_0 u_0 \quad \text{où } u_0 = u_0(x)$$

$$(A3) \quad L I_1 + \Omega \frac{\partial I_0}{\partial x} = 0$$

$$(A4) \quad L I_2 + \Omega \frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{\partial I_0}{\partial t} + q I_0 - q b \phi = 0$$

$$(A5) \quad L I_3 + \Omega \frac{\partial I_2}{\partial x} + \frac{\partial I_1}{\partial t} + q I_1 = 0$$

$$(A6) \quad L I_4 + \Omega \frac{\partial I_3}{\partial x} + \frac{\partial I_2}{\partial t} + q I_2 = 0$$

De (A3) on tire :

$$I_1 = - \frac{b}{\sigma + \omega} \Omega \frac{\partial u_0}{\partial x} + b u_1 \quad \text{où } u_1 = u_1(x)$$

Donc la CNS pour que (A4) admette une solution est :

$$\ll - \frac{\partial}{\partial x} \Omega \otimes \Omega \frac{b}{\sigma + \omega} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \Omega b \frac{\partial u_1}{\partial x} \gg + \frac{\partial u_0}{\partial t} + \ll q b \gg (u_0 - \phi) = 0$$

Comme  $\ll \Omega \otimes \Omega \gg = \frac{1}{3}$  (ou  $\mathbf{1}$  est la matrice unité) et

$\ll \Omega b \gg = 0$ , cela s'écrit :

$$(A7) \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{1}{3\sigma_0} \Delta u_0 + q_p (u_0 - \phi) = 0$$

Et la solution  $I_2$  de (A4) sera donc [en utilisant la

convention  $\alpha_{ij} \beta_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} \beta_{ij}$  ] :

$$(A8) \quad \bar{I}_2 = \chi_{ij} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} + (u_0 - \phi) \bar{\chi} - \frac{b}{\sigma + \omega} \Omega \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 b, \quad \text{ou } u_2 = u_2(x)$$

et où la matrice  $\chi$  et la fonction  $\bar{\chi}$  sont les solutions de :

$$L\chi = \left( \frac{b}{\sigma + \omega} \Omega \otimes \Omega - b \ll \frac{b}{\sigma + \omega} \Omega \otimes \Omega \gg \right), \quad L\bar{\chi} + qb - b \ll qb \gg = 0$$

vérifiant :

$$\ll \chi_{ij} \gg = 0, \quad \ll \bar{\chi} \gg = 0$$

Comme  $\Omega \otimes \Omega$  est une fonction paire de  $\Omega$ , on peut montrer que les  $\chi_{ij}$  sont aussi des fonctions paires de  $\Omega$  (voir par exemple /20/ et que  $\ll \chi_{ij} \Omega \gg = 0$ . D'autre part on a :

$$\bar{\chi} = q_p \left( \frac{b}{\sigma} - b \ll \frac{b}{\sigma} \gg \right), \quad \ll \bar{\chi} \Omega \gg = 0$$

Donc une C.N.S. pour que (A5) admette une solution est que :

$$(A9) \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{1}{3\sigma_0} \Delta_x u_1 + q_p u_1 = 0$$

• Avant de poursuivre l'analyse sur  $I_3$  et  $I_4$  étudions le terme de couche limite  $\Psi_1$ .

On doit avoir pour chaque  $x$  fixé sur  $\partial\Omega$  ( $x$  étant un paramètre nous ne l'écrivons pas)

$$\begin{cases} (A10) & -\mu \frac{\partial \Psi_1}{\partial \xi} + L\Psi_1 = 0 \\ (A10bis) & \Psi_1(0, \mu, \nu) = -\left( b u_1 + \frac{b}{\sigma + \omega} \mu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \quad \text{pour } \mu > 0 \end{cases}$$

La condition (10bis) doit être réalisée pour que  $I_{rest}|_{\partial\Omega} = O(\epsilon^2)$ .

Et il s'agit de trouver la constante  $u_1 = u_1(x)$  telle que

$$(A.11) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Psi_1(\xi, \mu, \nu) = 0$$

Or on a le résultat suivant (dont la démonstration est analogue à celle qui est faite dans /1/).

Lemme 1 Il existe une fonction  $p_0 = p_0(\mu, \nu)$  (qui dépend seulement de  $b, \frac{\sigma}{\sigma+\omega}, \frac{\omega}{\sigma+\omega}$  vérifiant  $\int_0^1 \int_0^1 p(\mu, \nu) d\mu d\nu = 1$ ) telle que pour tout  $f = f(\mu, \nu)$  il existe une solution bornée unique  $z = z(\xi, \mu, \nu)$  de :

$$\begin{cases} \mu \frac{\partial z}{\partial \xi} + Lz = 0 \\ z(0, \mu, \nu) = f(\mu, \nu) \end{cases}$$

et on a :

$$z(\xi, \mu, \nu) \rightarrow \int_0^1 \int_0^1 f(\mu', \nu') d\mu' d\nu' \quad \text{quand } \xi \rightarrow \infty$$

Remarquons que

$$\int_0^1 \int_0^1 b(\nu') p_0(\mu', \nu') d\mu' d\nu' = 1$$

Donc (A11) sera réalisé si et seulement si :

$$(A12) \quad u_x = -\frac{L_0}{\sigma_0} \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \text{ou } L_0 = \int_0^1 \int_0^1 p(\mu, \nu) \mu \frac{b}{\sigma+\omega} \ll \frac{b}{\sigma+\omega} \gg^{-1} d\mu d\nu$$

• Regardons maintenant les termes de couche initiale  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  (comme  $x$  est ici un paramètre fixé, nous l'écrirons en indice).

On doit avoir :

$$(A13) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_{0,x}}{\partial \lambda} + L\varphi_{0,x} = 0 \\ \varphi_{0,x}(0, \Omega, \nu) = I^m(x, \Omega, \nu) - b_\nu u_0^m(x) \end{cases}$$

$$(A14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi_{1,x}}{\partial \lambda} + L\varphi_{1,x} = -\Omega \frac{\partial \varphi_{0,x}}{\partial x} \\ \varphi_{1,x}(0, \Omega, \nu) = \frac{b}{\sigma+\omega} \Omega \frac{\partial u_0}{\partial x} - b_\nu u_1^m(x) \end{cases}$$

Il s'agit de trouver les paramètres  $u_0^m(x)$  et  $u_1^m(x)$  de telle sorte que  $\forall x$  on ait :

$$(A15) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_{0,x}(s, \cdot) = 0$$

$$(A16) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_{1,x}(s, \cdot) = 0$$

Or on a le lemme suivant :

Lemme 2 Soit  $f = f(\Omega, v)$  donné. Alors l'équation

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + L \varphi = 0 \\ \varphi(0, \Omega, v) = f(\Omega, v) \end{cases}$$

admet une solution unique :  $\varphi(s, \cdot) = T_s f$

où  $T_s$  est le semi groupe engendré par  $(-L)$ . Et on a :

$$(A17) \quad T_s f \longrightarrow b \ll f \gg \quad \text{dans } L^2(S^2 \times \mathbb{R}_+) \quad \text{quand } s \rightarrow +\infty$$

Remarquons que  $T_s b = b \quad \forall s \geq 0$

Donc pour obtenir (A15) il faut et il suffit que

$$(A18) \quad u_0^m(x) = \ll I^m(x) \gg$$

Et on a :

$$\varphi_0(s) = T_s (I^m - b \ll I^m \gg)$$

$$\varphi_1(s) = T_s \left( \frac{b}{\sigma} \Omega \frac{\partial u_0}{\partial x} - b u_1^m \right) + \int_0^s T_{s-s'} \left( -\Omega \frac{\partial \varphi_0(s')}{\partial x} \right) ds'$$

$$\varphi_1(s) \longrightarrow \left( u_1^m - \ll \frac{b}{\sigma} \Omega \frac{\partial u_0}{\partial x} \gg \right) b \quad \text{quand } s \rightarrow +\infty.$$

En effet si  $\ll f_s \gg = 0$  et  $f_s \rightarrow 0$  quand  $s \rightarrow \infty$  alors

$$\int_0^s T_{s-s'} f(s') ds' \longrightarrow 0 \quad \text{quand } s \rightarrow +\infty;$$

donc pour avoir (A16) il faut et il suffit que :

$$(A18bis) \quad u_1^{in}(x) = 0$$

On a ainsi montré que  $u_0$  et  $u_1$  doivent satisfaire les équations (A11) et (A12) du paragraphe 2.

Pour achever la démonstration de la proposition 1 il suffirait d'écrire l'équation satisfaite par  $I_{nest} = I_\varepsilon - (I_0 + \varepsilon I_1 + \varphi_0 + \varepsilon \varphi_1 + \varepsilon^2 \varphi_2)$

et de montrer que

$$I_{nest} = O(\varepsilon^2)$$

• Nous allons maintenant regarder ce qui se passe à l'ordre suivant (pour les résultats du paragraphe 2.3).

Et tout d'abord déterminons  $I_3$ . Comme (A9) est satisfait, on a :

$$\begin{aligned} L I_3 - \left( b \frac{\Omega \Theta \Omega}{\sigma + \omega} - b \frac{1}{3\sigma_0} \right) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i \partial x_j} + b \Omega \frac{\partial u_2}{\partial x} + \chi \Omega \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x} \\ + \bar{\chi} \Omega \frac{\partial u_0}{\partial x} + (qb - b q_p) u_1 - \frac{1}{\sigma + \omega} q b \Omega \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \end{aligned}$$

On aura donc en faisant les mêmes remarques que pour  $I_2$  :

$$(A19) \quad I_3 = \chi_{ij} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{b}{\sigma + \omega} \Omega \frac{\partial u_2}{\partial x} + \chi_1 \frac{\partial \Delta u_0}{\partial x} + \chi_2 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \bar{\chi} u_1 - \chi_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} + b u_3$$

$$\text{où : } u_3 = u_3(x)$$

et où  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  et  $\chi_3$  sont les vecteurs solutions des équations :

$$(A20) \quad \begin{aligned} L \chi_1 + \chi \Omega &= 0 \\ L \chi_2 + \bar{\chi} \Omega &= 0 \\ L \chi_3 - \frac{1}{\sigma + \omega} q b \Omega &= 0 \end{aligned}$$

Et en reportant les expressions de  $I_2$  et  $I_3$  données par (A8) et (A19) la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution  $I_4$  de (A6) s'écrit :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \langle \bar{\chi} \rangle \frac{\partial u_0}{\partial t} + \langle \chi_{ij} \rangle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} + q_p u_2 + \langle q \bar{\chi} \rangle (u_0 - \phi) + \langle q \chi_{ij} \rangle \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} +$$

$$- \frac{1}{3\sigma_0} \Delta u_2 + \langle \Omega \chi_1 \rangle \Delta \Delta u_0 + \langle \Omega \chi_2 \rangle \Delta u_0 - \langle \Omega \chi_3 \rangle \Delta u_0 = 0$$

Comme  $\langle \bar{\chi} \rangle = \langle \chi_{ij} \rangle = 0$  et  $\langle q \chi_{ij} \rangle = 0$  si  $i \neq j$ , cette relation peut s'écrire sous la forme suivante (avec  $\alpha_1, \alpha_2$  des constantes)

$$(A21) \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{1}{3\sigma_0} \Delta u_2 + q_p u_2 + \langle q \bar{\chi} \rangle (u_0 - \phi) + \alpha_1 \Delta u_0 + \alpha_2 \Delta \Delta u_0 = 0$$

Or :

$$\langle q \bar{\chi} \rangle = \frac{q_p}{\sigma_p} \left( 1 - \sigma_p \langle \frac{b}{\sigma} \rangle \right)$$

• En écrivant l'équation que devrait satisfaire  $\phi_2$ , on pourrrait trouver (en utilisant le lemme 1) la valeur de  $u_2(x)$  pour  $x \in \partial\Omega$  telle que :

$$(A22) \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi_2(\xi, \mu, \nu) = 0$$

• Etudions maintenant le terme  $\phi_{2,x}$ . On doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi_{2,x}}{\partial s} + L \psi_{2,x} = -\Omega \frac{\partial \psi_{0,x}}{\partial x} - q \psi_{0,x} \\ \psi_{2,x}(0) = -u_2^m(x) b + \frac{b}{\sigma + \omega} \Omega \frac{\partial u_2^m}{\partial x} + \bar{\chi} (u_0^m - \phi) + \chi_{ij} \frac{\partial^2 u_0^m}{\partial x_i \partial x_j} \end{array} \right.$$

Comme  $\langle \frac{b\Omega}{\sigma + \omega} \rangle = 0$ ,  $\langle \bar{\chi} \rangle = \langle \chi_{ij} \rangle = 0$

on voit que lorsque  $s \rightarrow +\infty$ ,  $\psi_{2,x}(s)$  a même limite que :

$\psi_x^0(s) + \psi_x^1(s) + \psi_x^2(s)$ , où :

$$(A23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_x^0(s) = -u_2^m(x) T_s b = -u_2^m(x) b \\ \psi_x^1(s) = \int_0^s T_{s-s'} \left( -\Omega \frac{\partial \psi_{0,x}}{\partial x}(s') \right) ds' \rightarrow 0 \\ \psi_x^2(s) = -\int_0^s T_{s-s'} \left( q T_{s'}(I^m) - qb \langle I^m \rangle \right) ds' \end{array} \right.$$

Or on peut vérifier immédiatement que la fonction  $f$  définie par :

$$f(s) = q T_s(I^m) - qb \ll I^m \gg$$

tend vers 0 de façon exponentielle quand  $s \rightarrow \infty$ . en utilisant (A17) on peut vérifier que :

$$\int_0^s T_{s-s'} f(s') - b \ll f(s) \gg ds' \rightarrow 0 \quad \text{quand } s \rightarrow \infty.$$

c'est-à-dire que :

$$(A24) \quad \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_2^2(s) = - \int_0^\infty b \ll f(s) \gg ds' = b \int_0^\infty \ll b T_s(b \ll I^m \gg - I^m) \gg ds \\ = b \ll q \Theta \gg$$

$$\text{où } \Theta = \int_0^\infty T_s(b \ll I^m \gg - I^m) ds$$

Donc  $\Theta$  est aussi la solution de

$$\begin{cases} \sigma \Theta - \sigma b \frac{\ll \sigma \Theta \gg}{\ll \sigma b \gg} = b \ll I^m \gg - I^m \\ \ll \Theta \gg = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\Theta = \ll I^m \gg \frac{b}{\sigma} - \frac{I^m}{\sigma} - b \left[ \ll \frac{b}{\sigma} \gg \ll I^m \gg - \ll \frac{I^m}{\sigma} \gg \right]$$

(A25)

$$\ll q \Theta \gg = q_P \left( - \ll I^m \gg \ll \frac{b}{\sigma} \gg + \ll \frac{I^m}{\sigma} \gg \right)$$

La condition  $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_{2,x}(s) = 0$  pour tout  $x$ , impliquera donc :

(A26)

$$u_2^m(x) = q_P \left( - \ll I^m \gg \frac{1}{\sigma_M} + \ll \frac{I^m}{\sigma} \gg \right)$$

en notant :

$$\sigma_M^{-1} = \ll \frac{b}{\sigma} \gg$$

**Annexe B**

**CALCULS DE  $k_p$  ET  $k_M$  DANS LE CAS ANALYTIQUE**

$$k_a(\nu) = K \frac{1 - e^{-x}}{x^3} \quad x = \frac{h\nu}{kT}$$

**B.1 Moyenne de Planck  $k_p$**

$$k_p = \int_0^{\infty} k_a(\nu) b(\nu) d\nu, \quad b(\nu) = \frac{15}{\pi^4} \frac{x^3}{e^x - 1}$$

d'où  $k_p = \frac{15}{\pi^4} K \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \frac{15 K}{\pi^4}$

**B.2 Calcul de  $I_k = \int_0^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{e^x - 1} dx$**

$$I_k = \int_0^{\infty} x^{2k-1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{2k-1} e^{-nx} dx$$

$$I_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!}{n^{2k}} = (2k-1)! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

$$I_k = (2k-1)! B_k \frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}$$

Où  $B_k$  est la suite de Bernoulli (cf. /7/)

donc  $I_k = B_k \frac{(2\pi)^{2k}}{4k}$

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30} \dots$$

Application

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = B_2 \frac{(2\pi)^4}{8} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} \frac{x^5}{e^x - 1} dx = B_3 \frac{(2\pi)^6}{12} = \frac{8}{63} \pi^6$$

B.3 Moyenne de "Fleck"  $k_M$

$$l_{k_M}^{-1} = \int_0^{\infty} l_{k_0}^{-1}(v) b(v) dv = \frac{15}{\pi^4} K^{-1} \int_0^{\infty} \frac{x^6 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

or :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^6 e^x}{(e^x - 1)^2} dx = 6 \int_0^{\infty} \frac{x^5}{e^x - 1} dx = 6 I_3$$

d'où

$$l_{k_M}^{-1} = \frac{15}{\pi^4} K^{-1} \frac{16}{21} \pi^6 = K^{-1} \frac{80}{7} \pi^2$$

et l'on en déduit :

$$l_{k_M} = \frac{7}{80 \pi^2} K = \frac{7 \pi^2}{1200} l_{k_P} \approx 5,757 \cdot 10^{-2} l_{k_P}$$

Annexe C

METHODE DE MONTE-CARLO POUR UN PROCESSUS DE DIFFUSION

Nous utilisons ici le formalisme défini par B. MERCIER dans /17/. Nous allons voir qu'en fait la méthode de "Random Walk" est exactement la méthode de Monte-Carlo appliquée à un problème de diffusion.

C.1 Définition du problème

On considère l'équation de diffusion par le domaine  $\sigma$  :

$$(C.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \\ u = 0 \text{ pour } x \in \partial\sigma, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases}$$

On sait que si  $u_0$  est positif alors  $u \geq 0$  et  $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\sigma} \leq 0$ .

$u(t, x)$  s'interprète comme la distribution de particules au temps  $t$  sachant que la distribution initiale est  $u_0$ . Soit  $\tau$  fixé. Nous voulons connaître la distribution des particules dans  $O$  au temps  $\tau$  (c'est-à-dire  $u(\tau, x)$ ) et la distribution des particules qui

sortent de  $O$  avant  $\tau$  (c'est-à-dire  $\frac{\partial u}{\partial n}(x, t), t \leq \tau, x \in \partial\sigma$ ).

Nous sommes donc amenés à considérer l'application :

$$S : L^1(\sigma) \longrightarrow L^1(\sigma) \times L^1([0, \tau] \times \partial\sigma)$$

$$u_0 \longmapsto \{u(\tau), g\}$$

$$\text{cà } g = -\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\sigma}.$$

$$\text{Notons } \|u, g\|_1 = \|u\|_{L^1} + \|g\|_{L^1} \quad \forall u \in L^1(\sigma), \forall g \in L^1([0, \tau] \times \partial\sigma)$$

C.2 Probabilités de transition

Montrons tout d'abord que  $\|S\|_1 = 1$ .

D'après la formule de Green :

$$\int_{\sigma} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\sigma} v \cdot \Delta u dx = \int_{\partial\sigma} v \frac{\partial u}{\partial n} d\Gamma$$

On obtient en intégrant (C.1) par rapport à t et x :

$$(C.2) \quad \int_{\sigma} u(z, x) dx + \int_0^z dt \int_{\partial\sigma} g(t, x) d\Gamma = \int_{\sigma} u_0(x) dx$$

d'où, d'après la positivité de u et g :

$$\|Su\|_1 = \|u_0\|_1 .$$

Etudions à présent l'adjoint  $S^*$  de S.

$$S^* : L^{\infty}(\sigma) \times L^{\infty}([0, z] \times \partial\sigma) \longrightarrow L^{\infty}(\sigma)$$

$$(\varphi, \psi) \longrightarrow S^*(\varphi, \psi)$$

$S^*$  est défini par :

$$\int_{\sigma} S^*(\varphi, \psi) u_0 dx = \int_{\sigma} u(T, x) \varphi(x) dx + \int_0^z dt \int_{\partial\sigma} g \psi d\Gamma \quad \forall u_0 \in L^1(\sigma)$$

Montrons que l'on a :  $S^*(\varphi, \psi) = u^*(0)$

où  $u^*$  est la solution du problème suivant sur  $\sigma$  :

$$(C.1)^* \quad \begin{cases} -\frac{\partial u^*}{\partial t} - \Delta u^* = 0 \\ u^* = \psi \quad \text{sur } \partial\sigma \\ u^*(z) = \varphi \end{cases}$$

En effet en appliquant la formule de Green 2 fois on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} (u^* u)(z) dx - \int_{\sigma} (u^* u)(0) dx &= \int_0^z dt \int_{\sigma} \left( u \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u}{\partial t} \right) dz \\ &= \int_0^z dt \int_{\sigma} (-u \Delta u^* + u^* \Delta u) dx \\ &= \int_0^z dt \int_{\partial\sigma} \left( \frac{\partial u}{\partial n} u^* - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right) d\Gamma . \end{aligned}$$

On en déduit :

$$(C.3) \quad \int_{\sigma} u^*(0) u_0 dx = \int_{\sigma} u(z) \varphi dz + \int_0^z dt \int_{\partial\sigma} g \psi d\Gamma ,$$

et par conséquent  $u^*(0) = S^*(\varphi, \psi)$ .

Comme  $\|S^*\|_{\infty} = 1$ , il existe une probabilité de transition  $p: \sigma \times \mathfrak{B} \rightarrow [0, 1]$  où  $\mathfrak{B}$  désigne les boréliens de  $\sigma \otimes ([0, z] \times \partial\sigma)$  vérifiant :

$$p(A \otimes ([t_1, t_2] \times A'); x) = u^*(0, x)$$

pour tout borélien  $A$  de  $\sigma$  et tout borélien  $A'$  de  $\partial\sigma$ , où  $u^*$  est la solution du problème adjoint (C.1)\* avec :

$$\varphi = 1_A$$

$$\psi = 1_{A' \times [t_1, t_2]} .$$

On a donc :

$$\int_{A \otimes [t_1, t_2] \times A'} S(u_0) dx = \int_{\sigma} p(A \otimes ([t_1, t_2] \times A'); x) u_0(x) dx$$

et en particulier :

$$\int_A u(\tau, x) dx = \int_{\sigma} p_1(A; x) u_0(x) dx \quad ,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{A'} \left(-\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\Gamma = \int_{\sigma} p_2([t_1, t_2] \times A'; x) u_0(x) dx \quad .$$

### C.3 Echantillonnage de S(u<sub>0</sub>)

Prenons maintenant le cas particulier qui nous intéresse où u<sub>0</sub> est une masse de Dirac en x<sub>0</sub> (u<sub>0</sub> = δ<sub>x<sub>0</sub></sub>).

Les deux dernières égalités deviennent :

$$(C.4) \quad p_1(A; x_0) = \int_A u(\tau, x) dx \quad ,$$

$$(C.5) \quad p_2([0, t] \times A'; x_0) = \int_0^t dt \int_{A'} g d\Gamma$$

En particulier, pour A' = ∂σ, la formule (C.2) appliquée à l'instant t donne :

$$(C.6) \quad p_2([0, t] \times \partial\sigma; u_0) = \int_0^t dt \int_{\partial\sigma} g d\Gamma = 1 - \int_{\sigma} u(t, x) dx \quad ,$$

et on retrouve bien p<sub>1</sub>(σ; x<sub>0</sub>) + p<sub>2</sub>([0, t] × ∂σ; x<sub>0</sub>) = 1

La probabilité pour qu'une particule soit encore dans σ au temps τ est :

$$p_1(\sigma; x_0) = \int_{\sigma} u(\tau, x) dx \quad .$$

La formule (C.4) montre qu'alors la position de la particule a pour densité de probabilité :

$$p_1(dx; x_0) = u(z, x) dx .$$

La probabilité pour qu'une particule soit sortie avant le temps  $t < \tau$ , (c'est-à-dire la fonction de répartition du temps de sortie de  $\sigma$ ) est :

$$p_2([0, t] \times \partial\sigma; x_0) = 1 - \int_{\sigma} u(t, x) dx .$$

La densité de probabilité correspondant à une particule sortie de  $\partial\sigma$  s'écrit, d'après (C.5) :

$$p_2(dt \times d\Gamma; x_0) = \left( -\frac{\partial u}{\partial n} \right) dt d\Gamma .$$

Dans le cas où  $\sigma$  est une boule de centre  $x_0$  on peut calculer explicitement  $u(t, x)$  et  $\frac{\partial u}{\partial n}$  est constant sur le bord  $\partial\sigma$ . Il est alors facile de montrer que la méthode du "Random Walk" revient exactement à échantillonner  $s(u_0)$  suivant la probabilité de transition  $p$ .

En effet, le tirage de  $(t, x)$  suivant l'algorithme de "Random Walk" revient exactement à :

- tirer  $t$  sur  $]0, +\infty[$  suivant  $p_2([0, t] \times \partial\sigma; x_0) = 1 - \int_{\sigma} u(t, x) dx$
- si  $t > \tau$ , tirer  $x$  suivant  $p_1(dx; u_0) = u(z, x) dx$  et prendre  $t = \tau$
- si  $t < \tau$ , tirer  $x$  suivant  $\left( -\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma$  c'est-à-dire de manière équirépartie sur  $\partial\sigma$ .

## Annexe D

### TIRAGE DES FREQUENCES DANS LA METHODE DE FLECK

L'algorithme de Monte-Carlo sur lequel nous avons testé la méthode de Random Walk utilisait un coefficient de scattering correspondant à une température constante par maille. Les premiers essais numériques ont montré que cela peut introduire un biais important sur la répartition spectrale : la fréquence de certaines particules peut être moins élevée qu'elle ne devrait être, ce qui peut entraîner une surestimation de la température.

Ainsi certains essais mettent en évidence une évolution de la température qui dépasse la température maximale physiquement admissible, lorsqu'il y a juxtaposition d'une maille transparente et d'une maille opaque. Avec la méthode de Fleck classique les photons qui subissent un choc "Fleck" dans la maille 6 près de l'interface sont répartis selon  $\sigma_V b_V(T_{\text{opaque}})$ . Le spectre des particules passant du milieu opaque au milieu transparent est donc plus mou que le spectre physique (qui correspondrait à  $b_V(T_*)$  où  $T_*$  serait la température physique à l'interface).

Ce phénomène a été mis en évidence sur le cas plan avec opacités multigroupes suivant : on a une température d'émission de 1 KeV en  $x = 0$  puis 5 couches de milieu transparent jusqu'à  $x = 3$  cm et enfin un milieu opaque. La température matière est fixée à  $0,5 \cdot 10^6$  °K et on n'émet pas de particules en volume. Les coefficients d'absorption des deux milieux valent respectivement 0,01 et  $100 \text{ cm}^{-1}$  environ pour le groupe de fréquence correspondant au maximum de la planckienne à 1 KeV. Nous nous intéressons uniquement à la répartition spectrale à la fin du premier pas en temps de 0,25 ns.

La figure D1 montre le spectre des particules issues de la source à 1 KeV qui retournent de la couche 6 à la couche 5 au cours du premier pas en temps. On remarque que la forme de la répartition correspond à un spectre de Planck à  $0,5 \text{ M}^\circ\text{K}$ , mais l'énergie renvoyée est beaucoup plus importante qu'un corps noir à cette température. La figure D2 donne le spectre des particules dans la couche 5 à la fin du pas en temps. Celui-ci présente deux bosses dues à la Planckienne à 1 KeV provenant de l'émission à gauche et au spectre des photons revenant de la couche 6.

Dans le problème décrit au chapitre 3, ce phénomène apparaît également pour un pas en temps de 0,25 ns. L'évolution de la température dans différentes couches est tracée sur la figure D3. La température dans la maille 5 dépasse 1 KeV (valeur physique maximale).

Pour remédier à cela, nous avons interpolé la température entre deux mailles pour le tirage des fréquences de l'émission en volume, du scattering Fleck et du Random Walk : à la frontière entre deux mailles on prend le maximum des deux températures matière et on interpole linéairement jusqu'au centre de la couche où l'on retrouve la température de la maille. L'algorithme ainsi modifié conduit à des températures inférieures à 1 KeV comme on le voit sur la figure D4.

Figure D1

SPECTRE DES PARTICULES TRAVERSANT L'INTERFACE 6-5 AU COURS DU  
PAS EN TEMPS

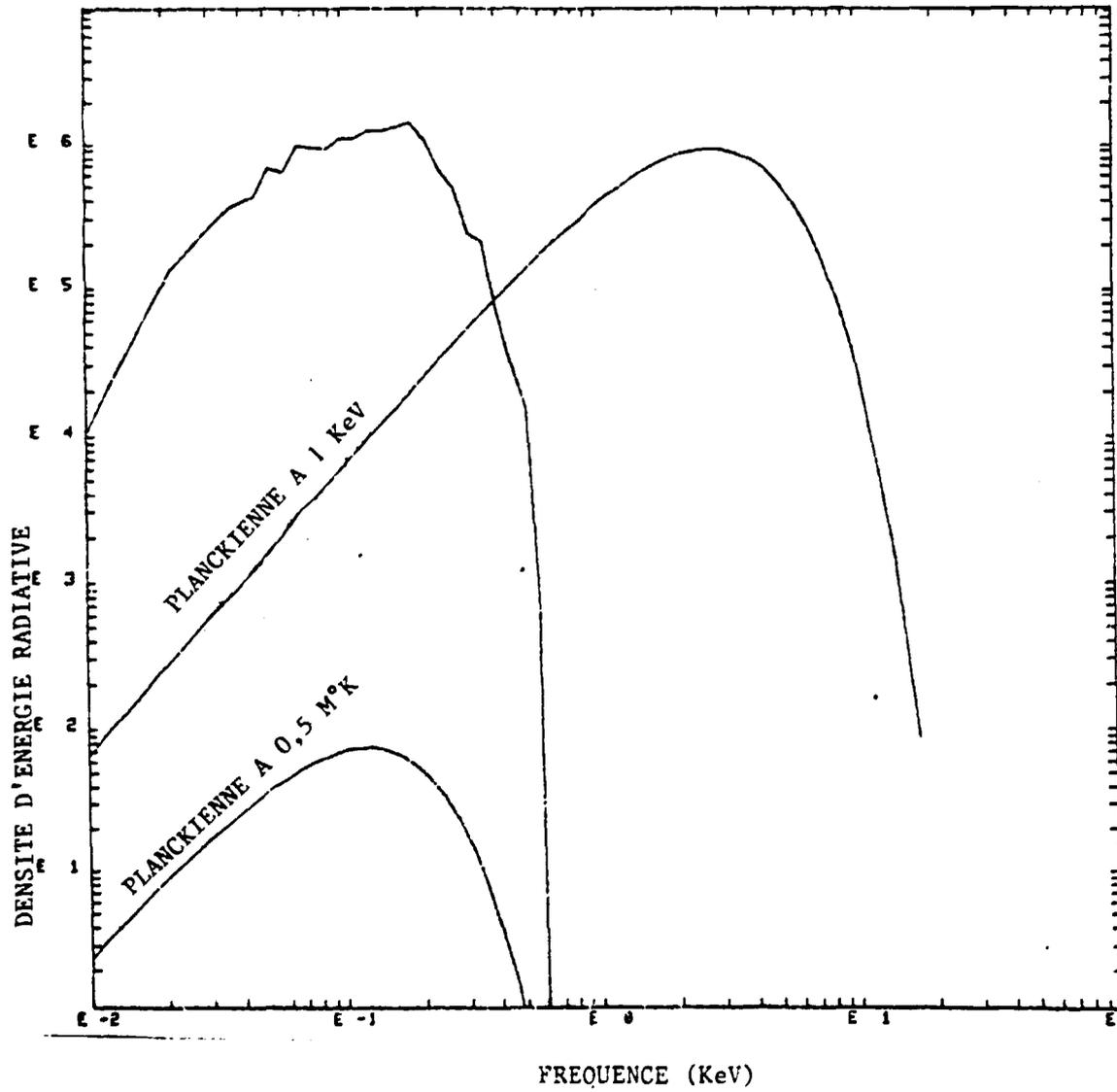


Figure D2

SPECTRES DES PARTICULES DE LA MAILLE 5 à  $0,25 \cdot 10^{-9}$  sec.

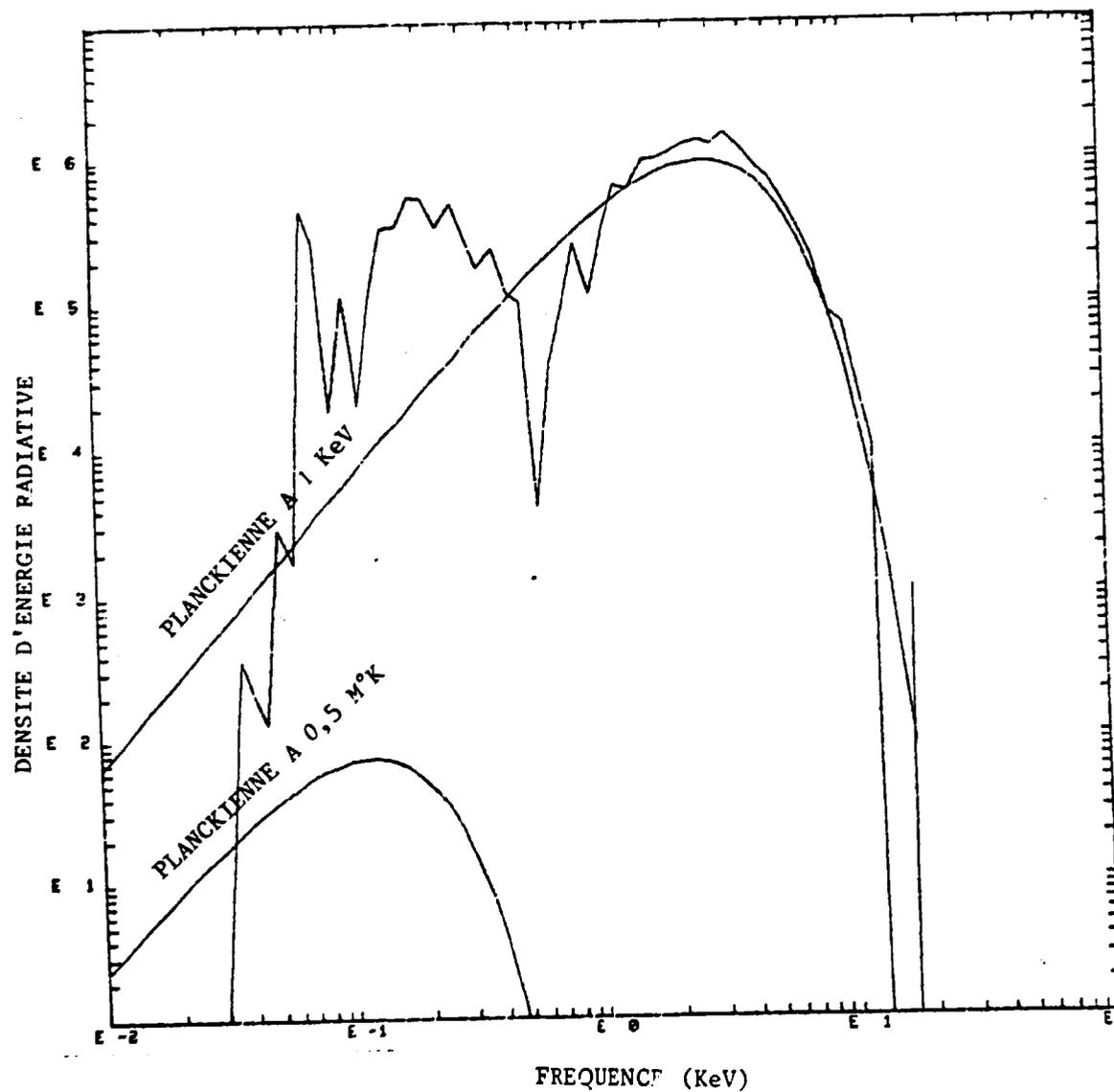


Figure D3

EVOLUTION DES TEMPERATURES

(Tirage des fréquences avec une température constante par maille)

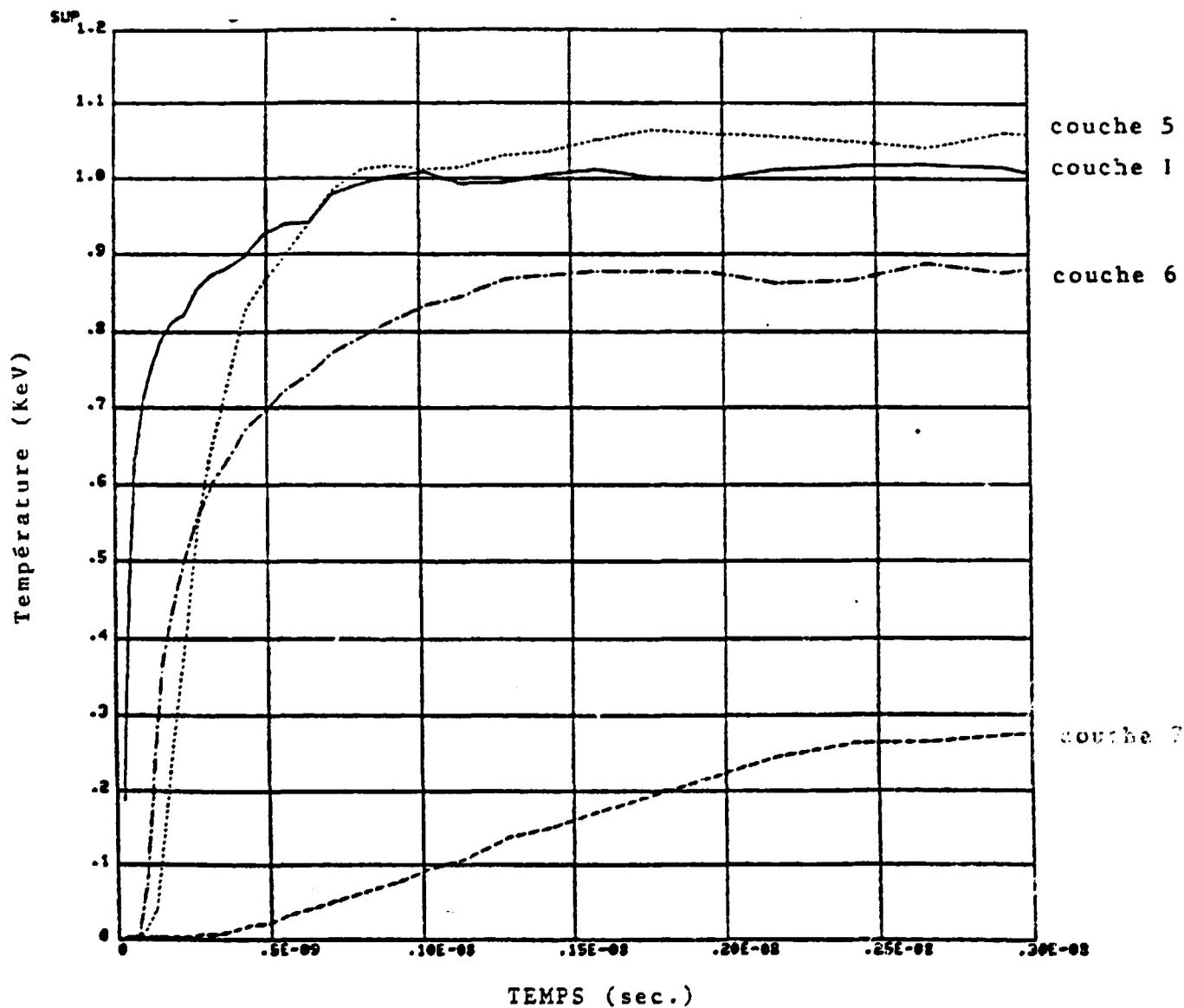
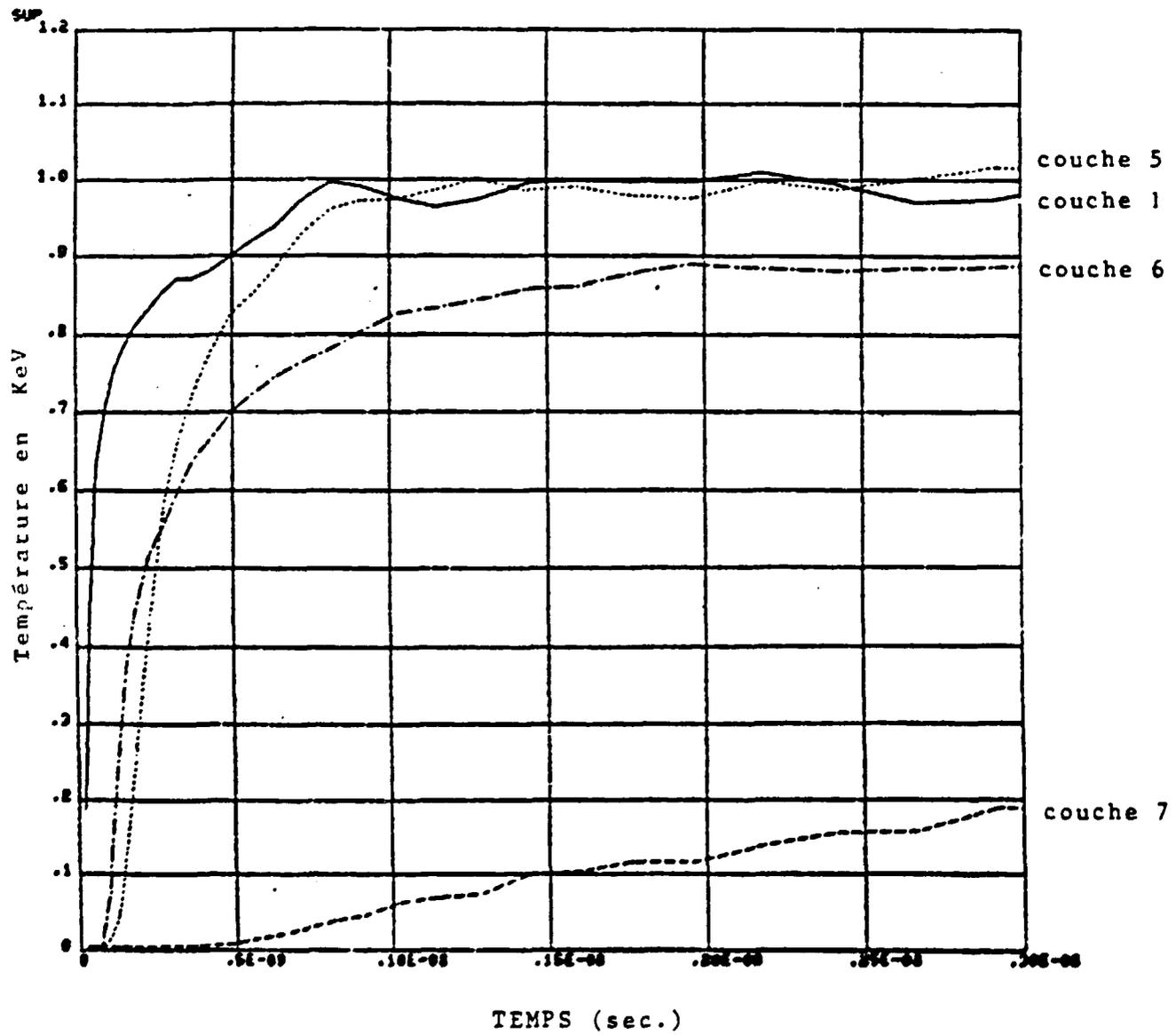


Figure D4

EVOLUTION DES TEMPERATURES

(Tirage des fréquences avec des températures interpolées en espace)



REFERENCES

- /1/ BAIRDOS C., R. SANTOS, R. SENTIS  
Diffusion approximation and computation of the critical size.  
Transactions of the A.M.S., 1984
- /2/ BENSOUSSAN A., J.L. LIONS, G.C. PAPANICOLAOU  
Bondary layers and homogenization of transport process.  
J. Dull. R.I.M.S. Kyoto Univ. 15 (1979) p. 53-157
- /3/ BROBOWICZ F.W., J.E. TABOR, K.J. FUHER, J.E. LYNCH  
Vectorized Monte-Carlo photons transport
- /4/ BRUHAT G. Thermodynamique  
Masson et Cie, Paris
- /5/ CAMPBELL P.M., R.G. NELSON  
Numerical methods for non linear radiations transport calculations  
UCRL 7838 (Septembre 1964)
- /6/ CHANDRASEKHAR S.  
Radiative Transfer  
Dover, New York (1950)
- /7/ DIEUDONNE J.  
Calcul infinitésimal  
Hermann, Paris (1968)
- /8/ DYNKIN E.B.  
Markov process  
Springer, Berlin (1965)
- /9/ FLECK J.A., Jr. and J.D. CUMMINGS  
An implicit Monte-Carlo scheme for calculating time and frequency dependant non liner radiation transport  
Journal of Computational Physics, 8, p.313-342 (1971)
- /10/ FLECK J.A., E.H. CANFIELD  
A Random Walk procedure for improving the computational efficiency of the implicit Monte-Carlo method  
Journal of Computational Physics (1984)
- /11/ GIORLA J.  
Résolution de l'équation de transfert radiatif par la méthode de Monte-Carlo de Fleck et Cummings  
Rapport interne CEA
- /12/ GIORLA J.  
Etude de techniques de réduction de variance en photonique Monte-Carlo : zones d'importance, splitting et roulette russe

Rapport interne CEA

- /13/ GUIKHMANN L., A. SKOROKHOD  
Stochastic Differential equations  
Springer, Berlin (1972)
- /14/ KASHMINSKII  
On diffusion processes with a small parameter  
J. Akad. Nant. USSR. Sev. Math. 27. p. 1280-1300 (1963)
- /15/ LARSEN E.W., J. KELLER  
Asymptotic solution of neutron transport problems for small  
mean free paths  
J. Maths Phys. 15 (1974) p. 75-81
- /16/ LARSEN E.W., G.C. POMRANING, V.C. BADHAM  
J. quant. Spectrosc. Radiat. Transfert 29 (1983) p. 285-310
- /17/ MERCIER B.  
Introduction à la méthode de Monte-Carlo  
Note CEA-N-2415 Août 1984
- /18/ MEURANT G., M. PATRON, J. TASSART  
Rapport interne CEA
- /19/ PAPANICOLAOU G.C.  
Asymptotic analysis of transport process,  
Bull A.M.S. 81 (1975) p. 330-392
- /20/ SENTIS R.  
Study of the corrector of the eigenvalue of a transport operator  
SIAM J. Math. Anal. (1985)
- /21/ The VERA system of Radiation Hydrodynamics Codes  
Vol. I. System, Science and Software  
Report DASA 2250-1 (1969)  
La Jolla California