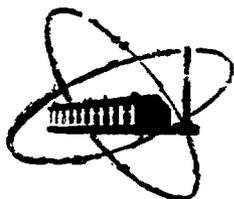


8118504564

ФЭИ-1528



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. С. ФЕДОТОВСКИЙ

**Континуальный подход к задачам динамики
резервуаров, содержащих пучки стержней
или группы частиц и жидкость,
при вибрационных воздействиях**

Обнинск — 1984

УДК 533.6.013

В. С. Федотовский.

Континуальный подход к задачам динамики резервуаров, содержащих пучки стержней или группы частиц и жидкость, при вибрационных воздействиях.

ФЭИ-1528. Обнинск: ФЭИ, 1984. — 34 с.

Рассмотрены колебания резервуаров с жидкостью и недеформируемыми цилиндрическими или сферическими включениями. Показано, что при расчете динамических характеристик таких систем целесообразно использовать континуальный подход, т. е. рассматривать гетерогенные среды, образованные жидкостью и взвешенными в ней включениями, как однородные среды с некоторыми эффективными или виброреологическими свойствами. На основе задачи о колебаниях резервуара, содержащего жидкость и локализованную в ней группу включений, рассмотрены колебания стержневой сборки в кассете и получены соотношения для присоединенной массы и коэффициента сопротивления, определяющие динамические характеристики таких систем. Рассмотрены также колебания резервуара с жидкостью, содержащей сферические включения. Полученные результаты использованы для расчета динамических характеристик трубопроводов с двухфазным потоком при пузырьковом и кольцевом режимах течения. Приведено сравнение теоретических соотношений с имеющимися экспериментальными данными.

Условные обозначения

- a - радиус цилиндрического или сферического включения;
- E - кинетическая энергия;
- dE/dt - скорость диссипации энергии;
- I - импульс;
- K - жесткость;
- M - собственная масса колебательной системы;
- m - присоединенная масса жидкости для включения;
- m_b - присоединенная масса жидкости для группы включений, присоединенная масса для цилиндра в гетерогенной среде;
- m_b^* - гидродинамическая масса резервуара с гетерогенной средой;
- Q - добротность колебательной системы;
- R_0 - радиус цилиндрического резервуара;
- R - радиус стержневого пучка, радиус области, занятой гетерогенной средой;
- S - поверхность оболочки;
- u - виброскорость резервуара;
- v - виброскорость гетерогенной среды;
- X - относительный шаг решетки стержней;
- α - угол между направлением линий тока осредненного движения и нормалью к границе раздела гетерогенных сред;
- β - угол между вектором плотности обобщенного импульса и нормалью к границе раздела анизотропных гетерогенных сред;
- Γ - коэффициент присоединенной массы для цилиндра в гетерогенной среде;
- γ - коэффициент присоединенной массы жидкости для включения;
- Δ - отношение плотностей материала включений и жидкости;
- δ - толщина колеблющегося пограничного слоя;
- θ - угол;
- μ - коэффициент динамической вязкости жидкости;
- μ^* - эффективная трансляционная вязкость гетерогенной среды;
- ν - коэффициент кинематической вязкости жидкости;
- Ξ - коэффициент сопротивления колебательному движению резервуара с гетерогенной средой или стержневого пучка;
- ζ - коэффициент сопротивления колебательному движению включения;
- ρ - плотность жидкости;
- ρ^* - эффективная трансляционная плотность гетерогенной среды (виброплотность);
- σ - поверхностная плотность обобщенного импульса;

Введение

Исследования по динамике твердых тел с полостями, заполненными жидкостью, а также упругих оболочек, заполненных или окруженных жидкостью или обтекаемых потоком, являются классическими проблемами механики деформируемых систем и гидроупругости.

Топливные баки, жидкостные ракеты, суда-танкеры, железнодорожные цистерны рассматриваются обычно с позиций этих областей механики [1, 2]. Эти проблемы, возникшие в связи с быстрым развитием и совершенствованием объектов авиационной, ракетной и космической техники, стали в последнее время актуальными и для атомной энергетики.

Корпуса атомных реакторов, тепловые экраны и т.п. конструктивные элементы также можно рассматривать как упругие оболочки, подверженные ударным, сейсмическим или вибрационным воздействиям. Здесь, однако, в отличие от ряда объектов авиационной и ракетной техники, наполнителем является не однородная жидкость, а сложная гетерогенная система, состоящая из большого числа однотипных элементов - тепловыделяющих сборок, регулирующих стержней, труб и т.п. В свою очередь кассеты с тепловыделяющими сборками являются резервуарами, заполненными гетерогенной системой тел, погруженных в жидкость или обтекаемых потоком теплоносителя. Аналогичными гетерогенными системами являются и корпуса теплообменных аппаратов, заполненные пучками труб и теплоносителем. В трубах парогенераторов реализуется течение двухфазной смеси, которую также можно рассматривать как гетерогенную среду.

Для подобных гетерогенных систем и сред целесообразно использовать континуальный подход т.е. рассматривать такие системы как резервуары, заполненные эквивалентной однородной средой с некоторыми эффективными свойствами. При таком подходе весьма широкий класс динамических задач о поведении гетерогенных сред и содержащих их резервуаров может быть сведен к уже изученным вопросам динамики резервуаров, содержащих однородную жидкость.

В работах [3 - 5] была предпринята попытка описания динамики наиболее простого класса гетерогенных сред со свободными недеформируемыми включениями при вибрационных воздействиях как континуума, имеющего эффективные или виброреологические свойства - трансляционную виброплотность и трансляционную вибровязкость. При достаточно больших частотах вибрационных воздействий, приложенных к гетерогенной среде с недеформируемыми включениями, виброплотность и вибровязкость выражаются соотношениями [5]

$$\rho_*^T = \rho \left[1 + \frac{(1+\gamma)(\Delta-1)\varphi}{\Delta+\gamma} \right], \quad (1)$$

$$\mu_*^T = \frac{\xi \varphi (1-\Delta)^2}{V_0 (\Delta+\gamma)^2}, \quad (2)$$

где ρ - плотность жидкости, $\Delta = \rho_0/\rho$ - отношение плотностей материала включений и жидкости, γ - коэффициент присоединенной массы для включения, φ - объемная концентрация включений, ξ - коэффициент сопротивления колебательному движению включения, V_0 - объем включений. Формулы (1), (2) описывают виброреологические свойства гетерогенных сред образованных вязкой жидкостью и включениями произвольной формы. В работе [5] приведены также частные соотношения для эффективных свойств гетерогенных сред со сферическими и цилиндрическими включениями.

Располагая эффективными свойствами гетерогенных сред легко вычислить динамические характеристики упругих тел содержащих или окруженных ими.

Если, например, полость тела массой M , образующего с некоторой упругой связью колебательную систему типа пружинного маятника, заполнена гетерогенной средой, то собственная частота такой системы определяется по формуле

$$\omega^2 = \frac{K}{M + \rho_*^T V} = \frac{\omega_0^2}{1 + \rho_*^T V/M}, \quad (3)$$

где K - жесткость пружины, V - объем полости, ω_0 - собственная частота колебаний пустого тела.

Из-за относительного колебательного движения включений и жидкости в последней существуют диссипативные потери, что макроскопически проявляется как вязкое трение колебательному движению. Коэффициент трения при этом определяется произведением эффективной трансляционной вязкости среды на объем

$$\xi = \mu_*^T V. \quad (4)$$

Если в системе отсутствуют какие-либо другие диссипативные процессы, то коэффициент динамичности при резонансе или добротность рас-

смаатриваемой системы находится по формуле

$$Q = \frac{(M + \rho_*^T V) \omega}{\Sigma} = \frac{M \omega_0}{V \mu_*^T} \sqrt{1 + \frac{\rho_*^T V}{M}} \quad (5)$$

Следует отметить, что формулы (3), (5) относятся к простейшим колебательным системам, совершающим поступательные колебания. Так, в частности, по этим формулам в [4] были рассчитаны динамические характеристики трубопровода с двухфазным пузырьковым потоком, совершающим изгибные колебания, а в работе [6] проведена их экспериментальная проверка.

Несколько иначе находятся динамические характеристики упругих оболочек контактирующих с гетерогенными средами. В этом случае инерционность и демпфирующее действие гетерогенной среды определяются не только эффективными свойствами ρ_*^T и μ_*^T , но и неоднородным полем скорости, зависящим от формы колебаний оболочки.

В настоящей работе мы рассмотрим только поступательные колебания резервуаров, однако, в отличие от случая с равномерным распределением включений во всей полости, здесь распределение будет неоднородным, т.е. включения будут локализованы в некоторой области.

В реальных объектах распределение концентрации включений обычно не является однородным и, поэтому, важно знать как такая неоднородность повлияет на их динамические характеристики. Одним из примеров таких объектов может служить тепловыделяющая сборка в кассете, где стержневой пучок имеет меньший радиус, чем радиус оболочки. Или другой пример. При течении двухфазных сред в трубопроводах распределение фаз по сечению также не является однородным. В пузырьковых восходящих потоках повышенная концентрация пузырьков наблюдается в пристеночной области, а в нисходящем в ядре потока. Список аналогичных примеров с неравномерным распределением включений можно продолжать.

Для решения подобного рода задач с позиции механики сплошных сред необходимо установить граничные условия на поверхности контакта гетерогенных сред, имеющих различные эффективные свойства.

Кроме того, предполагая применение непрерывного подхода к динамическим задачам при условии больших колебательных чисел Рейнольдса, определенных по характерному размеру включений, можно считать, что основную роль играют инерционные свойства гетерогенных сред и их колебательное движение является макроскопически потенциальным.

I. Преломление линий тока и вектора плотности обобщенного импульса на границе раздела гетерогенных сред

Рассмотрим соприкасающиеся гетерогенные среды, образованные невязкой жидкостью и взвешенными в ней недеформируемыми включениями. Различие гетерогенных сред и их эффективных свойств будет обусловлено в этом случае тем, концентрация или форма включений в разных средах различна. Гетерогенные среды будем характеризовать эффективными виброреологическими свойствами - трансляционной плотностью

$$\rho_{*1}^T \text{ и } \rho_{*2}^T .$$

Пусть в некоторый момент времени виброскорость и виброускорение* элемента первой гетерогенной среды, находящегося вблизи границы раздела сред, направлена под некоторым углом α_1 к ее нормали (см. рис. 1). Такой же объем, второй гетерогенной среды, соприкасающийся с первой, будет двигаться под некоторым углом α_2 к нормали. При этом должны выполняться следующие условия:

1. Нормальные скорости элементов первой и второй сред равны

$$v_{n1} = v_{n2} . \quad (I.1)$$

2. Тангенциальные компоненты обобщенных импульсов элементов первой и второй сред равны

$$\rho_{*1}^T v_{\tau 1} = \rho_{*2}^T v_{\tau 2} . \quad (I.2)$$

Из условий (I.1), (I.2) следует, что отношение нормальных компонент обобщенного импульса в первой и второй средах равно

$$\frac{I_{n1}}{I_{n2}} = \frac{\rho_{*1}^T v_{n1}}{\rho_{*2}^T v_{n2}} = \frac{\rho_{*1}^T}{\rho_{*2}^T} , \quad (I.3)$$

а отношение тангенциальных компонент -

*/ Под скоростью (ускорением) элемента гетерогенной среды имеется в виду скорость границы выделенного представительного объема, внутри которого содержатся включения, движущиеся, в общем случае, в другом направлении и с другой виброскоростью (ускорением).

$$\frac{I_{\tau_1}}{I_{\tau_2}} = \frac{\rho_{*1}^T v_{\tau_1}}{\rho_{*2}^T v_{\tau_2}} = 1, \quad (I.4)$$

откуда

$$\frac{v_{\tau_2}}{v_{\tau_1}} = \frac{\rho_{*1}^T}{\rho_{*2}^T}. \quad (I.5)$$

Поскольку

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{v_{\tau_1}}{v_{n_1}}, \quad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{v_{\tau_2}}{v_{n_2}}, \quad (I.6)$$

то, с учетом (II) (I2) или (I.3), (I.4), имеем

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\rho_{*1}^T}{\rho_{*2}^T} \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (I.7)$$

Таким образом, при переходе из одной гетерогенной среды в другую линии тока преломляются, причем, при переходе из менее плотной среды в более плотную ($\rho_{*1}^T < \rho_{*2}^T$) вектор результирующей скорости (ускорение) уменьшается, а вектор плотности обобщенного импульса увеличивается.

Изменение вектора плотности обобщенного импульса $I = \rho_{*}^T v$ можно считать результатом наложения на поле импульса в области I некоторого поля, обусловленного поверхностным источником обобщенного импульса на поверхности раздела двух сред. Здесь имеет место аналогия с диэлектриками на границе которых возникает заряд поверхностная плотность которого равна

$$\sigma = E_{n_1} \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 \right), \quad (I.8)$$

где ϵ_1 , ϵ_2 - диэлектрические проницаемости соприкасающихся сред, E_{n_1} - нормальная компонента напряженности электрического поля в первой среде. Для аналогичной механической задачи поверхностная плотность источника обобщенного импульса равна

$$\sigma = I_{n_2} - I_{n_1} = \rho_{*1}^T v_n \left(\frac{\rho_{*2}^T}{\rho_{*1}^T} - 1 \right). \quad (I.9)$$

Из (I.8); (I.9) видно, что аналогом обобщенной плотности импульса является напряженность электрического поля, а аналогом эффективной трансляционной плотности - диэлектрическая проницаемость.

Итак, мы рассмотрели преломление линий тока и вектора плотности обобщенного импульса на границе двух изотропных гетерогенных сред. В этом случае в каждой из сред направление векторов \vec{v} и \vec{I} совпадают. Иначе обстоит дело в анизотропных гетерогенных средах.

Рассмотрим соприкасающиеся анизотропные гетерогенные среды, характеризующиеся тензорами эффективной плотности $\rho_{*ij}^T(1)$ и $\rho_{*ij}^T(2)$. Пусть главные оси тензоров совпадают с осями координат и лежат в плоскости контакта сред, нормаль которой направлена по оси x . Тогда при выполнении условий на границе контакта (предполагаем для простоты трансверсальную изотропию сред, т.е. $\rho_{*xy}^T = \rho_{*yz}^T = \rho_{*xz}^T \neq \rho_{*xx}^T = \rho_{*yy}^T$),

$$v_{n1} = v_{n2},$$

$$I_{\tau 1} = I_{\tau 2},$$

имеем закон преломления линий тока

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\rho_{*x\tau 1}^T}{\rho_{*x\tau 2}^T} \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (\text{I.10})$$

и закон преломления вектора плотности обобщенного импульса

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\rho_{*n1}^T}{\rho_{*n2}^T} \operatorname{tg} \beta_1. \quad (\text{I.11})$$

Из (I.10) и (I.11) видно, что для анизотропных сред линии тока и вектор плотности обобщенного импульса не совпадают и, при переходе из одной гетерогенной среды в другую, преломляются по-разному. Это различие обусловлено тем, что реакция включений на обтекающую их жидкость не совпадает с вектором "фильтрационной" скорости жидкости. Аналогичным образом в анизотропных диэлектриках вектор напряженности электрического поля не совпадает с вектором индукции.

2. Колебания резервуара с жидкостью, содержащей локализованную группу включений

Рассмотрим теперь колебательную систему, подобную той, которая была приведена во введении т.е. тело на упругой связи с полостью, заполненной жидкостью и локализованной в ней группой включений.

При непрерывном подходе эту систему следует представить как некоторую однородную среду с эффективными виброреологическими свойствами: ρ_*^T , μ_*^T , находящуюся в обычной жидкости, заполняющей полость резервуара.

Уравнение однородных колебаний такой системы запишем в виде

$$(M + \pi b^*) \ddot{x} + \Sigma \dot{x} + K x = 0, \quad (2.1)$$

где M - масса резервуара, πb^* - эффективная или гидродинамическая масса среды, содержащейся в полости резервуара.

Собственная частота и коэффициент динамичности такой системы определяются по формулам, аналогичным (3), (5).

$$\omega^2 = K / (M + \pi b^*) = \omega_0^2 / \left(1 + \frac{\pi b^*}{M}\right), \quad (2.2)$$

$$Q = (M + \pi b^*) \omega / \Sigma. \quad (2.3)$$

Здесь, однако, гидродинамическая масса πb^* и коэффициент сопротивления Σ не определяется произведением эффективной плотности или эффективной вязкости гетерогенной среды на объем, поскольку обтекание локализованной группы включений макроскопически неоднородно, в отличие от обтекания включений, равномерно распределенных во всем объеме жидкости.

Рассмотрим такое обтекание и найдем гидродинамическую массу πb^* и коэффициент сопротивления Σ для случая, когда группа включений локализована в цилиндрической области радиусом R , а жидкость, содержащая эту группу включений, ограничена цилиндрическим резервуаром радиусом R (см. рис. 2).

2.1. Гидродинамическая масса

При движении резервуара со скоростью U_0 потенциал поля скорости Ψ_2 в области занятой жидкостью ($R_0 > r > R$), и потенциал поля

скорости φ_1 в области, содержащей включения, т.е. в области гетерогенной среды ($r \leq R$), должны удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$ и граничным условиям

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = -u_0 \cos \theta, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=R}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = \frac{\rho_*^T}{\rho} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=R}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=0} \neq \infty. \quad (2.7)$$

Здесь (2.5), (2.6) отражают условие преломления линий тока на границах раздела сред (I.1), (I.2).

Записав потенциалы φ_1 и φ_2 в виде

$$\varphi_1(r, \theta) = \left(\frac{A}{r} + Br \right) \cos \theta, \quad (2.8)$$

$$\varphi_2(r, \theta) = \left(\frac{C}{r} + Dr \right) \cos \theta, \quad (2.9)$$

и удовлетворив граничным условиям (2.4) + (2.7), получим

$$A = \frac{u_0 R^2 \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right)}{\left(\frac{\rho_*^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right)}, \quad (2.10)$$

$$B = \frac{u_0 \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} + 1 \right)}{\left(\frac{\rho_*^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right)}, \quad (2.11)$$

$$C = \frac{2 u_0}{\left(\frac{\rho_*^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right)}, \quad (2.12)$$

$$D = 0. \quad (2.13)$$

Распределение скорости в однородной жидкости и в гетерогенной среде имеет вид

$$v_{r(2)}(r, \theta) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} = \frac{u_0 \left[\frac{R^2}{r^2} \left(\frac{\rho_1^T}{\rho} - 1 \right) - \left(\frac{\rho_1^T}{\rho} + 1 \right) \right]}{\left(\frac{\rho_1^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_1^T}{\rho} - 1 \right)} \cos \theta, \quad (2.14)$$

$$v_{\theta(2)}(r, \theta) = -\frac{\partial \varphi_2}{r \partial \theta} = \frac{u_0 \left[\frac{R^2}{r^2} \left(\frac{\rho_1^T}{\rho} - 1 \right) + \left(\frac{\rho_1^T}{\rho} + 1 \right) \right]}{\left(\frac{\rho_1^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_1^T}{\rho} - 1 \right)} \sin \theta, \quad (2.15)$$

$$v_{r(1)}(r, \theta) = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \frac{2 u_0}{\left(\frac{\rho_1^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_1^T}{\rho} - 1 \right)} \cos \theta, \quad (2.16)$$

$$v_{\theta(1)}(r, \theta) = -\frac{\partial \varphi_1}{r \partial \theta} = \frac{2 u_0}{\left(\frac{\rho_1^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_1^T}{\rho} - 1 \right)} \sin \theta. \quad (2.17)$$

Схематично линии тока и распределение скорости в системе показаны на рис. 2.

Вычисление кинетической энергии по распределению скорости в обеих областях дает

$$E = \frac{\rho_1^T}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R (v_{r(1)}^2 + v_{\theta(1)}^2) r dr d\theta + \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^{R_0} (v_{r(2)}^2 + v_{\theta(2)}^2) r dr d\theta = \quad (2.18)$$

$$= \frac{\pi \rho R_0^2 u_0^2}{2} \frac{\left(\frac{\rho_1^T}{\rho} + 1 \right) + \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_1^T}{\rho} - 1 \right)}{\left(\frac{\rho_1^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_1^T}{\rho} - 1 \right)}$$

Откуда гидродинамическая масса системы, отнесенная к единице длины резервуара, равна

$$\eta_0^* = \frac{2E}{u_0^2} = \pi \rho R_0^2 \frac{1 + \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T - \rho}{\rho_*^T + \rho} \right)}{1 - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T - \rho}{\rho_*^T + \rho} \right)} \quad (2.19)$$

Формула (2.19) дает гидродинамическую массу когда включения имеют произвольную форму и плотность, т.е. эффективная плотность здесь определяется общим соотношением (I).

Если, в частности, группа включений будет неподвижной, например, закрепленной каким-либо способом в неподвижной системе координат, то эффективная плотность гетерогенной среды ρ_*^T находится по формуле (I) для бесконечно тяжелых и, следовательно, неподвижных включений, т.е. при $\Delta \rightarrow \infty$. Из (I) следует в этом случае

$$\frac{\rho_*^T}{\rho} = 1 + (1+\gamma)\Psi. \quad (2.20)$$

Тогда выражение для гидродинамической массы (2.19) принимает вид

$$\eta_0^* = \pi \rho R_0^2 \frac{1 + \frac{R^2}{R_0^2} \left[\frac{(1+\gamma)\Psi}{2+(1+\gamma)\Psi} \right]}{1 - \frac{R^2}{R_0^2} \left[\frac{(1+\gamma)\Psi}{2+(1+\gamma)\Psi} \right]} \quad (2.21)$$

Определенный интерес представляет задача о колебаниях группы включений как колебательной системы в неподвижном резервуаре. При этом уравнение колебаний также имеет вид (2.1); динамические характеристики такой колебательной системы находятся по формулам (2.2), (2.3), однако, вместо гидродинамической массы η_0^* в этом случае должна быть взята присоединенная масса для группы включений η_0 .

2.2. Присоединенная масса для группы включений

Присоединенная масса для группы включений η_0 при ее колебаниях в неподвижном резервуаре связана с гидродинамической массой системы η_0^* с неподвижными включениями (см. формулу (2.21)) соотношением

$$\eta_0 = \eta_0^* - \pi \rho R_0^2 - \pi \rho R^2 \Psi. \quad (2.22)$$

После подстановки (2.21) в (2.22) и некоторых преобразований, получим

$$m_b = \pi r R^2 \psi \frac{\left[\frac{2\gamma}{(1+\gamma)\psi} - 1 \right] + \frac{R^2}{R_0^2}}{\left[\frac{2}{(1+\gamma)\psi} + 1 \right] - \frac{R^2}{R_0^2}} \quad (2.23)$$

Формула (2.23) дает присоединенную массу для микропористой локализованной в цилиндрической области группы включений, колеблющейся как единое целое. Форма и расположение самих включений или микроструктура такого пористого "тела" может быть произвольной, характеризующейся коэффициентом формы γ и объемной концентрацией включений ψ . Аналогичная формула легко может быть получена для присоединенной массы группы включений, локализованной, например, в сферической области.

Рассмотрим несколько предельных случаев, вытекающих из формулы (2.23).

1. Пусть форма включений и их объемная концентрация таковы, что область занятая ими является непроницаемой для жидкости. В этом случае коэффициент γ равен бесконечности, но ψ может отличаться от единицы. Из (2.23) имеем

$$m_b = \pi r R^2 \left(\frac{1 + \frac{R^2}{R_0^2}}{1 - \frac{R^2}{R_0^2}} + 1 - \psi \right) \quad (2.24)$$

Здесь первый член

$$\pi r R^2 \frac{1 + \frac{R^2}{R_0^2}}{1 - \frac{R^2}{R_0^2}} \quad (2.25)$$

есть присоединенная масса для сплошного цилиндра радиусом R находящегося в резервуаре радиусом R_0 , а второй член $\pi r R^2 (1 - \psi)$ это реальная масса жидкости, находящаяся между включениями, точнее - в объеме нетранспортных пор такого пористого тела.

2. Включения равномерно распределены во всей области занятой жидкостью ($R = R_0$). В этом случае из (2.23) получаем

$$m_b = \pi r R_0^2 \gamma \psi \quad (2.26)$$

Поскольку $\pi R^2 \psi$ - есть суммарный объем всех включений на еди-

ницу длины цилиндрического резервуара, то

$$m_0 = \sum m_i, \quad (2.27)$$

где m - присоединенная масса жидкости для одного включения.

Таким образом, только при однородном распределении включений по всему объему, занятому жидкостью, присоединенная масса группы включений равна сумме присоединенных масс всех включений.

Итак, мы рассмотрели инерционные характеристики гетерогенных систем, содержащих жидкость и группу включений, проявляющиеся при колебаниях резервуаров или при колебаниях группы включений в неподвижном резервуаре. Эти инерционные характеристики определяют, как уже отмечалось, собственные частоты колебаний таких систем.

Другой важной характеристикой, определяющей динамичность колебательных систем, является коэффициент сопротивления ζ .

2.3. Гидродинамическое демпфирование колебаний резервуара с группой включений

При колебаниях резервуара с амплитудной скоростью u_0 , коэффициент сопротивления ζ определяется средней за период колебаний скоростью диссипации энергии в системе $\langle dE/dt \rangle$ по формуле

$$\zeta = - \frac{2 \langle dE/dt \rangle}{u_0^2}. \quad (2.28)$$

В рассматриваемой задаче диссипативные потери обусловлены двумя составляющими - диссипацией в гетерогенной среде $\langle dE/dt \rangle_1$ и диссипацией в однородной жидкости $\langle dE/dt \rangle_2$.

Диссипативные потери в единице объема гетерогенной среды определяются эффективной трансляционной вязкостью μ_*^T и скоростью гетерогенной среды $v(t)$

$$dE/dt = - \mu_*^T v^2(t), \quad (2.29)$$

откуда средняя за период колебаний скорость диссипации энергии в единице объема равна

$$\langle dE/dt \rangle = - \mu_*^T v_0^2/2, \quad (2.30)$$

где $v_0^2 = v_{r(1)}^2(r, \theta) + v_{\theta(1)}^2(r, \theta)$.

Интегрируя (2.30) по области, занятой гетерогенной средой, найдем первую составляющую диссипативных потерь

$$\langle dE/dt \rangle_1 = - \frac{\mu_*^T}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v_0^2(r, \theta) r dr d\theta = - \frac{2\pi \mu_*^T R^2 u_0^2}{\left[\left(\frac{\rho_*^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right) \right]^2} \quad (2.31)$$

Вычислим теперь вторую составляющую диссипативных потерь.

При условии малости толщины пограничного слоя δ по сравнению с величиной зазора $R_0 - R$, следуя аналогичной задаче о колебаниях цилиндра в концентрической оболочке [6], запишем

$$\langle dE/dt \rangle_2 = - \frac{\mu}{2\delta} \int_0^{2\pi} v_{\theta(2)}^{*2}(R, \theta) R \psi d\theta - \frac{\mu}{2\delta} \int_0^{2\pi} v_{\theta(2)}^{*2}(R_0, \theta) R_0 d\theta. \quad (2.32)$$

Здесь первое слагаемое это диссипативные потери в слое δ на поверхности группы включений, а второе - диссипативные потери в пограничном слое на поверхности резервуара. В отличие от аналогичной задачи для сплошного цилиндра, элемент поверхности в первом слагаемом записан в виде $R \psi d\theta$, т.е. с учетом несплошности поверхности "тела" включений.

Относительные тангенциальные составляющие скорости жидкости на поверхности $r = R$ и $r = R_0$ равны

$$v_{\theta(2)}^*(R, \theta) = \frac{2 u_0 \frac{\rho_*^T}{\rho} \sin \theta}{\left(\frac{\rho_*^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right)}, \quad (2.33)$$

$$v_{\theta(2)}^*(R_0, \theta) = \frac{2 u_0 \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right) \sin \theta}{\left(\frac{\rho_*^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right)}. \quad (2.34)$$

Подставляя (2.33) и (2.34) в (2.32), получим

$$\langle dE/dt \rangle_2 = - \frac{2\pi\mu\alpha_0^2 \left[R\psi \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} \right)^2 + \frac{R^4}{R_0^3} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right)^2 \right]}{\delta \left[\left(\frac{\rho_*^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right) \right]^2}. \quad (2.35)$$

Суммируя (2.31) и (2.35) запишем коэффициент сопротивления для колеблющегося резервуара (2.28)

$$\boxed{\gamma} = \frac{4\pi\mu \left[\frac{R\psi}{\delta} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} \right)^2 + \frac{R^4}{\delta R_0^3} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right)^2 + \frac{M_*^T R^2}{\mu} \right]}{\left[\left(\frac{\rho_*^T}{\rho} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_*^T}{\rho} - 1 \right) \right]^2}. \quad (2.36)$$

Следует отметить, что в формулу (2.36), так же, как в формулу (2.19) для гидродинамической массы резервуара, входят эффективные свойства гетерогенных сред, определяемые общими соотношениями (1), (2) с произвольной плотностью включений.

В обращенной же задаче о колебаниях локализованной группы включений в неподвижном резервуаре коэффициент сопротивления очевидно будет таким же, как и для колеблющегося резервуара с неподвижными или бесконечно тяжелыми включениями, поскольку поля относительных скоростей в обеих задачах при этом одинаковы.

Таким образом, полученные соотношения для гидродинамической массы M^* , присоединенной массы M_0 и коэффициента сопротивления $\boxed{\gamma}$ позволяют, при известных параметрах фаз, образующих гетерогенные среды, рассчитывать динамические характеристики подобных колебательных систем.

В следующих разделах эти соотношения конкретизируются для систем, содержащих гетерогенные среды с цилиндрическими и сферическими включениями, моделирующими стержневые или трубные системы, а также диспергированные в жидкости пузырьки, капли или твердые частицы.

3. Колебания пучка стержней в жидкости, окруженной цилиндрическим корпусом

При колебаниях стержневого пучка в жидкости присоединенная масса m_0 совместно с собственной массой пучка M , определяют его собственную частоту

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + m_0/M}, \quad (3.1)$$

где ω_0 - собственная частота колебаний пучка стержней в вакууме.

Если стержневой пучок не является слишком плотным, то коэффициент присоединенной массы γ для одного стержня в пучке равен [7]

$$\gamma = \frac{1 + \varphi}{1 - \varphi}. \quad (3.2)$$

Из формулы (2.20) имеем в этом случае

$$m_0 = \pi p R^2 \varphi \cdot \frac{R_0^2 + R^2 \varphi}{R_0^2 - R^2 \varphi}. \quad (3.3)$$

Используя связь между объемной концентрацией цилиндрических включений и относительным шагом пучков с треугольной и квадратной решетками

$$\varphi_{\Delta} = \frac{0,955}{X^2} \quad \text{и} \quad \varphi_{\square} = \frac{0,778}{X^2}, \quad (3.4)$$

получим соотношения для радиусов сплошных цилиндров, эквивалентных по присоединенным массам радиусам стержневых пучков.

$$R_* = \frac{0,95}{X} R \quad \text{или} \quad R_* = \frac{0,815}{X} R. \quad (3.5)$$

На рис.3 представлена зависимость

$$\frac{m_0}{\pi p R_*^2} = \frac{R_0^2 + R_*^2}{R_0^2 - R_*^2}. \quad (3.6)$$

и экспериментальные данные, полученные для 18, 28 и 37 стержневых пучков [8]. Видно, что эти результаты удовлетворительно согласуются с теоретической зависимостью (3.6).

Следует отметить, что в работе [8] экспериментальные данные по присоединенной массе приведены в тех же координатах, что и (3.5), т.е. в зависимости от эквивалентного радиуса пучка R_* . При этом наилучшее совпадение с формулой (3.6) получено при выборе $R_* = 0,945R/\chi$, что практически не отличается от $R_* = 0,95R/\chi$, найденного нами теоретически.

Найдем теперь коэффициент сопротивления для колеблющегося стержневого пучка по общей формуле (2.36).

Необходимые соотношения для эффективной плотности ρ_*^T и эффективной вязкости μ_*^T имеют вид [5].

$$\frac{\rho_*^T}{\rho} = 1 + (1+\gamma)\varphi \quad (3.7)$$

или, с учетом (3.2)

$$\frac{\rho_*^T}{\rho} = \frac{1+\varphi}{1-\varphi} \quad (3.8)$$

и

$$\frac{\mu_*^T}{\mu} = \frac{4\varphi}{a\delta(1-\varphi)^2}, \quad (3.9)$$

где a - радиус цилиндрического включения, $\delta = \sqrt{2\eta/\omega}$ - толщина колеблющегося пограничного слоя.

Подставив (3.8) и (3.9) в (2.36), получим

$$\boxed{Z} = \frac{4\pi\mu R\varphi}{\delta\left(1-\frac{R^2}{R_0^2}\varphi\right)^2} \left[\frac{R}{a} + \left(\frac{1+\varphi}{2}\right)^2 + \frac{R^3}{R_0^3}\varphi \right]. \quad (3.10)$$

Из этой формулы видно, что для многостержневых пучков первый член в квадратных скобках всегда существенно больше второго и третьего. Поэтому при $R/a \gg 1$ запишем окончательно коэффициент сопротивления в виде

$$\boxed{Z} = \frac{4\pi\mu R^2\varphi}{a\delta\left(1-\frac{R^2}{R_0^2}\varphi\right)^2}. \quad (3.11)$$

При равенстве радиусов резервуара и стержневого пучка, т.е. при однородном заполнении полости гетерогенной средой, из (3.11) получим

$$\zeta = \frac{4\pi\mu R_0^2 \psi}{a\delta(1-\psi)^2} \quad (3.12)$$

Сопоставляя этот результат с формулой для эффективной вязкости (3.9), легко видеть, что коэффициент сопротивления (3.12), отнесенный к единице длины цилиндрического резервуара, равен произведению эффективной вязкости на объем

$$\zeta = \mu_*^T \pi R_0^2, \quad (3.13)$$

что соответствует формуле (4).

Рассмотрим теперь другой предельный случай колебаний стержневого пучка в безграничном объеме жидкости.

Присоединенная масса в этом случае равна

$$m_0 = \pi \rho R^2 \psi \quad (3.14)$$

а коэффициент сопротивления -

$$\zeta = \frac{4\pi\mu R^2 \psi}{a\delta} \quad (3.15)$$

Сравнивая эти формулы с аналогичными формулами для присоединенной массы и коэффициента сопротивления для сплошного цилиндра радиусом R [8]

$$m = \pi \rho R^2, \quad (3.16)$$

$$\zeta = \frac{4\pi\mu R}{\delta}, \quad (3.17)$$

легко установить следующие условия эквивалентности.

1. Присоединенная масса жидкости для стержневого пучка радиусом R с объемной концентрацией стержней ψ равна присоединенной массе для сплошного цилиндра радиусом

$$R_* = R\sqrt{\psi}. \quad (3.18)$$

2. Коэффициент сопротивления для стержневого пучка \overline{N} равен коэффициенту сопротивления для сплошного цилиндра радиусом $R_{**} = R^2\psi/a$ или, с учетом того, что $R^2\psi/a^2$ равно количеству стержней в пучке N ,

$$R_{**} = Na. \quad (3.19)$$

В заключение этого раздела отметим одно интересное свойство, присущее не очень тесным пучкам стержней. Перепишав формулы для присоединенной массы (3.3) и коэффициента сопротивления (3.11) в форме

$$M_0 = \pi\rho R_0^2 \frac{\frac{R^2\psi}{R_0^2} \left(1 + \frac{R^2\psi}{R_0^2}\right)}{\left(1 - \frac{R^2\psi}{R_0^2}\right)}, \quad (3.20)$$

$$\overline{N} = \frac{4\pi\mu R_0^2}{a\delta} \cdot \frac{\frac{R^2\psi}{R_0^2}}{\left(1 - \frac{R^2\psi}{R_0^2}\right)^2}, \quad (3.21)$$

видим, что при колебаниях пучков в оболочке радиусом R_0 при постоянном значении комплекса $R^2\psi/R_0^2 = \text{const}$ величины M_0 и \overline{N} являются постоянными. Это обусловлено тем, что при уплотнении или разрежении некоторого N - стержневого пучка, т.е. при увеличении или уменьшении объемной концентрации ψ в области им занятой, происходит пропорциональное уменьшение (увеличение) квадрата его радиуса.

4. Колебания цилиндра в гетерогенной среде.

Рассмотрим колебания цилиндра радиусом R в гетерогенной среде, ограниченной цилиндрическим корпусом радиусом R_0 (см. рис. 3).

В аналогичной задаче о колебаниях цилиндра в гомогенной жидкости присоединенная масса выражается известным соотношением (2.25). Гетерогенная же среда, характеризующаяся эффективной трансляционной плотностью (Γ), оказывает на колеблющийся цилиндр иное инерционное действие.

Присоединенная масса гетерогенной среды для колеблющегося цилиндра равна

$$m_0 = \pi \rho_*^T R^2 \frac{R_0^2 + R^2}{R_0^2 - R^2}. \quad (4.1)$$

Пусть, например, гетерогенной средой является жидкость с неподвижными цилиндрическими стержнями, оси которых параллельны оси колеблющегося цилиндра. В этом случае эффективная трансляционная плотность выражается соотношением (3.8) и формула (4.1) дает

$$m_0 = \pi \rho R^2 \left(\frac{1+\varphi}{1-\varphi} \right) \left(\frac{R_0^2 + R^2}{R_0^2 - R^2} \right). \quad (4.2)$$

При колебаниях цилиндра в безграничном объеме такой гетерогенной среды присоединенная масса равна

$$m_0 = \pi \rho R^2 \frac{1+\varphi}{1-\varphi} \quad (4.3)$$

или коэффициент присоединенной массы для цилиндра

$$\Gamma = \frac{m_0}{\pi \rho R^2} = \frac{1+\varphi}{1-\varphi}. \quad (4.4)$$

Интересно отметить, что такой же результат получен для одного цилиндрического стержня в синфазно колеблющемся пучке (см. формулу (3.2)). Равенство коэффициентов присоединенных масс (4.4) и (3.2) является следствием применения ячеечной модели и приблизительно выполняется лишь для не слишком тесных пучков. В тесных же пучках коэффициент Γ имеет более сильную чем (3.2) зависи-

мбсть от концентрации ψ [7]и, вследствие этого, коэффициент γ несколько больше, чем Γ .

Коэффициент трения при колебаниях цилиндра в гетерогенной среде определяется диссипативными потерями в самой гетерогенной среде и в пограничных слоях на поверхностях колеблющегося цилиндра и корпуса по формуле (2.28).

Ограничимся и здесь случаем гетерогенной среды с неподвижными цилиндрическими включениями.

При движении цилиндра с амплитудной скоростью u_0 распределение скорости в гетерогенной среде (в данном случае это распределение фильтрационной скорости) имеет вид

$$v_r(r, \theta) = - \frac{u_0 R^2}{R_0^2 - R^2} \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2} \right) \cos \theta, \quad (4.5)$$

$$v_\theta(r, \theta) = \frac{u_0 R^2}{R_0^2 - R^2} \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right) \sin \theta. \quad (4.6)$$

откуда распределение квадрата скорости будет

$$v^2(r, \theta) = v_r^2 + v_\theta^2 = \frac{u_0^2 R^4}{(R_0^2 - R^2)^2} \left[1 - 2 \frac{R_0^2}{r^2} \cos 2\theta + \frac{R_0^4}{r^4} \right]. \quad (4.7)$$

Используя формулу для эффективной трансляционной вязкости (3.10) и распределение квадрата скорости (4.7) найдем скорость диссипации энергии в гетерогенной среде по (2.26). Интегрирование по области, занятой гетерогенной средой дает

$$\langle dE/dt \rangle_1 = - \frac{\mu_*}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^{R_0} v^2(r, \theta) r dr d\theta = - \frac{2\pi \mu \psi u_0^2 R^2 (R_0^2 + R^2)}{(1-\psi)^2 a \delta (R_0^2 - R^2)}. \quad (4.8)$$

Рассчитаем теперь диссипативные потери в пограничных слоях на поверхностях колеблющегося цилиндра и корпуса.

Располагая распределением тангенциальных фильтрационных скоростей на поверхностях цилиндра и оболочки (4.6) при $r = R$ и $r = R_0$, запишем соответствующие распределения относительных действительных скоростей

$$v_\theta^*(R, \theta) = \frac{v(R, \theta)}{1-\psi} + u_0 \sin \theta = u_0 \frac{2R_0^2 - (R_0^2 - R^2)\psi}{(1-\psi)(R_0^2 - R^2)} \sin \theta, \quad (4.9)$$

$$v_{\theta}^*(R_0, \theta) = u_0 \frac{2R^2 \sin \theta}{(1-\varphi)(R_0^2 - R^2)}. \quad (4.10)$$

Далее, интегрируя локальные диссипативные потери $\mu v_{\theta}^{*2}/2\delta$ по поверхностям цилиндра и оболочки, получим

$$\langle dE/dt \rangle_2 = - \frac{\mu}{2\delta} \int_0^{2\pi} v_{\theta}^{*2}(R, \theta) R d\theta - \frac{\mu}{2\delta} \int_0^{2\pi} v_{\theta}^{*2}(R_0, \theta) R_0 d\theta = \quad (4.11)$$

$$= - \frac{2\pi\mu R u_0^2}{\delta(1-\varphi)^2} \left[\frac{R_0^4 + R^3 R_0}{(R_0^2 - R^2)^2} - \frac{R_0^2 \varphi}{R_0^2 - R^2} + \varphi^2 \right].$$

Подставив сумму (4.8) и (4.11) в (2.8), получим формулу для коэффициента сопротивления

$$\Xi = \frac{4\pi\mu R}{\delta(1-\varphi)^2} \left[\frac{R\varphi}{a} \left(\frac{R_0^2 + R^2}{R_0^2 - R^2} \right) + \frac{R_0^4 + R^3 R_0}{(R_0^2 - R^2)^2} - \frac{R_0^2 \varphi}{R_0^2 - R^2} + \varphi^2 \right]. \quad (4.12)$$

При колебаниях цилиндра в безграничном объеме гетерогенной среды ($R_0 \rightarrow \infty$) из (4.12) следует

$$\Xi = \frac{4\pi\mu R}{\delta(1-\varphi)^2} \left[\frac{R\varphi}{a} + 1 - \varphi + \varphi^2 \right]. \quad (4.13)$$

Если радиус колеблющегося цилиндра существенно более радиуса включений ($R \gg a$) как это и следует принимать при непрерывном подходе к описанию динамики гетерогенных сред, то в формуле (4.12) можно сохранить только первый член в квадратных скобках. Тогда

$$\Xi = \frac{4\pi\mu R^2 \varphi}{a\delta(1-\varphi)^2} \cdot \frac{R_0^2 + R^2}{R_0^2 - R^2}, \quad (4.14)$$

или при $R_0 \rightarrow \infty$,

$$\bar{M} = \frac{4\pi MR^2 \varphi}{a\delta(1-\varphi)^2} \quad (4.15)$$

Сравнивая последнюю формулу с соответствующей формулой для коэффициента сопротивления при колебаниях цилиндра в гомогенной жидкости

$$\xi = \frac{4\pi MR}{\delta}, \quad (4.16)$$

отметим, что в гетерогенной среде коэффициент сопротивления существенно (в $R\varphi/a(1-\varphi)^2$ раз) больше, чем в гомогенной.

Интересно также отметить, что коэффициент сопротивления при колебаниях цилиндра в безграничном объеме гетерогенной среды (4.15) оказывается равным коэффициенту сопротивления при колебаниях стержневой обертки в цилиндрическом резервуаре такого же радиуса (см. формулу 3.12).

5. Колебания трубопровода с двухфазной смесью

Применим полученные в разделе 2 соотношения для расчета гидродинамической массы и коэффициента сопротивления при колебаниях трубопровода с двухфазной смесью.

5.1. Гидродинамическая масса

Пусть в трубопроводе радиусом R_0 распределение объемной концентрации включений и, следовательно, эффективной плотности ρ_*^T и вязкости M_*^T задано ступенчатой функцией

$$\begin{aligned} \rho_*^T(r) &= \rho_{*1}^T, & M_*^T(r) &= M_{*1}^T, & R_0 > r > 0, \\ \rho_*^T(r) &= \rho_{*2}^T, & M_*^T(r) &= M_{*2}^T, & R_0 > r > R_0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Формула для гидродинамической массы такой системы вложенных одна в другую гетерогенных сред имеет тот же вид, что и (2.19), где вместо плотности однородной жидкости нужно подставить эффективную плотность гетерогенной среды ρ_{*2}^T .

$$m_0^* = \pi \rho_{*2}^T R_0^2 \frac{1 + \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_{*1}^T - \rho_{*2}^T}{\rho_{*1}^T + \rho_{*2}^T} \right)}{1 - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_{*1}^T - \rho_{*2}^T}{\rho_{*1}^T + \rho_{*2}^T} \right)}. \quad (5.2)$$

Для иллюстрации влияния неоднородности гетерогенной среды на гидродинамическую массу рассмотрим два числовых примера с двухфазной пузырьковой смесью, имеющей следующее распределение объемной концентрации пузырьков по сечению трубы.

Пусть в первом случае

$$\begin{aligned} \Psi(r) &= \Psi_1 = 0,4 & \text{при} & & R_0/\sqrt{2} > r > 0, \\ \Psi(r) &= \Psi_2 = 0,2 & \text{при} & & R_0 > r > R_0/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Во втором случае положим $\Psi_1 = 0,2$, $\Psi_2 = 0,4$. (5.4)

При таких распределениях $\Psi(r)$, имеющих максимумы в центре трубы или в пристаночной области, среднее по всему сечению трубы объемное газосодержание одинаково и равно $\langle \Psi \rangle = 0,3$.

Эффективная плотность гетерогенной среды с безмассовыми сферическими включениями, моделирующими газовые пузыри, выражается формулой [5].

$$\frac{\rho_*^T}{\rho} = \frac{1 - \Psi}{1 + 2\Psi}. \quad (5.5)$$

Подставляя в (5.5) численные значения ψ , получим в первом случае - $R_{1,1} = 0,834 \rho$, $R_{1,2} = 0,878 \rho$; и во втором случае - $R_{2,1} = 0,878 \rho$, $R_{2,2} = 0,834 \rho$.

Расчет гидродинамической массы, или средней эффективной плотности $\langle \rho_*^T \rangle = \Pi \rho / \pi R_0^2$ дает в первом и втором случаях

$$\langle \rho_*^T \rangle_1 = 0,438 \rho, \quad (5.6)$$

$$\langle \rho_*^T \rangle_2 = 0,436 \rho. \quad (5.7)$$

При равномерном же распределении истинного объемного газосодержания по сечению трубы $\psi(r) = 0,3$ расчет по формуле (5.5) дает эффективную плотность

$$\rho_*^T = 0,437 \rho, \quad (5.8)$$

что практически не отличается от значений (5.6) и (5.7).

Для сравнения отметим, что истинная плотность двухфазной смеси, равная $\rho_{см} = (1 - \psi) \rho = 0,7 \rho$, в данном случае существенно отличается от эффективной плотности.

Таким образом, из приведенных примеров следует, что неоднородность распределения по сечению трубопровода весьма слабо влияет на гидродинамическую массу и, следовательно, на собственные частоты колебаний трубопровода.

Естественным обобщением рассмотренной двухслойной системы является N -слойная система гетерогенных сред, моделирующая ступенчатым образом любое скалярное распределение объемного газосодержания по сечению трубы. В этом случае следует считать, что область, занятая парями от центра трубы $N - I$ слоем и имеющая некоторую среднюю эффективную плотность $\langle \rho_*^T \rangle_{N-1}$ окружена N -м слоем гетерогенной среды с эффективной плотностью ρ_{*N}^T . Тогда средняя плотность N -слойной системы будет выражаться через эффективную плотность N -го слоя ρ_{*N}^T и среднюю плотность $n-1$ слойной внутренней подсистемы $\langle \rho_*^T \rangle_{N-1}$. Формула (5.1) принимает вид

$$\langle \rho_*^T \rangle_n = \frac{\pi n^2}{\pi R_0^2} = \rho_{*N}^T \frac{1 + \frac{R_{N-1}^2}{R_N^2} \left(\frac{\langle \rho_*^T \rangle_{N-1} - \rho_{*N}^T}{\langle \rho_*^T \rangle_{N-1} + \rho_{*N}^T} \right)}{1 - \frac{R_{N-1}^2}{R_N^2} \left(\frac{\langle \rho_*^T \rangle_{N-1} - \rho_{*N}^T}{\langle \rho_*^T \rangle_{N-1} + \rho_{*N}^T} \right)}, \quad (5.9)$$

где $R_n = R_0$ - внешний радиус n -го слоя гетерогенной среды.

Таким образом, по рекуррентной формуле (5.9) можно вычислить среднюю эффективную плотность ρ - слойной системы и, следовательно, гидродинамическую массу m_0^* при произвольном осесимметричном распределении эффективных свойств гетерогенной среды.

Если распределение истинного объемного газосодержания по сечению трубы принять крайне неоднородным, т.е. положить $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 1$, то мы получим кольцевую структуру двухфазной среды.

Расчет гидродинамической массы по формуле (5.2) при $\rho_{*1}^T = 0$ и $\rho_{*2}^T = \rho$ дает

$$m_0^* = \pi \rho R_0^2 \frac{1 - \frac{R^2}{R_0^2}}{1 + \frac{R^2}{R_0^2}}. \quad (5.9)$$

Учитывая, что отношение R^2/R_0^2 в этом случае есть истинное объемное газосодержание, запишем

$$m_0^* = \pi \rho R_0^2 \frac{1 - \psi}{1 + \psi}, \quad (5.10)$$

или для средней эффективной плотности среды в трубе

$$\langle \rho_*^T \rangle = \frac{m_0^*}{\pi R_0^2} = \rho \frac{1 - \psi}{1 + \psi}. \quad (5.11)$$

Таким образом, формулами (5.5) и (5.11) описываются эффективные инерционные свойства двухфазных сред в двух режимах течения - пузырьковом и кольцевом, реализующихся при малых и больших объемных газосодержаниях. Можно, по-видимому, предполагать, что при других режимах течения двухфазного потока, например, при снарядном, эффективная плотность будет иметь промежуточное значение.

5.2. Гидродинамическое демпфирование

Используя соотношение для эффективной плотности двухфазной пузырьковой среды (5.5) и соотношение для эффективной трансляционной вязкости [5]

$$\frac{\mu_*^T}{\mu} = \frac{18 \psi}{a \delta (1 + 2\psi)^2}, \quad (5.12)$$

получим коэффициент сопротивления для колеблющегося трубопровода с пузырьковой смесью при ступенчатом распределении эффективных свойств (5.1) или объемного газосодержания (5.3).

При колебаниях трубопровода с амплитудной скоростью U_0 распределения скоростей в двухфазной смеси описывается соотношениями (2.14) + (2.17), где ρ_*^T и ρ - эффективные плотности пузырьковой смеси в центральной и в пристеночной областях, т.е. $\rho_*^T = \rho_{*1}^T$, $\rho = \rho_{*2}^T$.

Основываясь на результатах, полученных в предыдущих разделах и на их анализе, отметим, что основная доля диссипативных потерь будет иметь место в самой гетерогенной среде; диссипативные потери в пограничном слое на поверхности трубопровода будут пренебрежимо малы при условии, что размеры пузырьков существенно меньше радиуса трубы. Такое условие является, в сущности, условием применимости континуального подхода и задачам динамики гетерогенных сред.

Таким образом, скорость диссипации энергии в гетерогенной среде, имеющей распределение эффективных свойств (5.1), будет

$$\langle dE/dt \rangle = - \frac{M_{*1}^T}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^R v_{(1)}^2(r, \theta) r dr d\theta - \frac{M_{*2}^T}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} v_{(2)}^2(r, \theta) r dr d\theta. \quad (5.13)$$

Подставляя в (5.13) соответствующие распределения квадратов скоростей гетерогенных сред в первой и второй областях $v_{(1)}^2 = v_{r(1)}^2 + v_{\theta(1)}^2$, $v_{(2)}^2 = v_{r(2)}^2 + v_{\theta(2)}^2$, и проведя вычисления, получим коэффициент сопротивления $\Sigma = -2 \langle dE/dt \rangle / U_0^2$

$$\Sigma = \frac{4\pi M_{*1}^T R^2 + \pi M_{*2}^T (R_0^2 - R^2) \left[\left(\frac{\rho_{*1}^T}{\rho_{*2}^T} + 1 \right)^2 + \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_{*1}^T}{\rho_{*2}^T} - 1 \right)^2 \right]}{\left[\left(\frac{\rho_{*1}^T}{\rho_{*2}^T} + 1 \right) - \frac{R^2}{R_0^2} \left(\frac{\rho_{*1}^T}{\rho_{*2}^T} - 1 \right) \right]^2}. \quad (5.14)$$

В случае равномерного распределения объемного газосодержания по сечению трубопровода в формуле (5.14) следует принять одно из условий - $R = R_0$; $R = 0$; или $\rho_{*1}^T = \rho_{*2}^T$ и $M_{*1}^T = M_{*2}^T$. При этом из (5.14) следует

$$\Sigma = \pi M_*^T R_0^2 = \frac{18\pi M_*^T R_0^2 \varphi}{a\delta(1+2\varphi)^2}. \quad (5.15)$$

Проиллюстрируем теперь влияние неоднородности пузырьковой смеси на коэффициент сопротивления на численных примерах со ступенчатым распределением объемной концентрации дисперсной фазы по сечению трубопровода (5.3) и (5.4).

Подставив в формулу (5.14) соответствующие значения эффективных свойства M_{*1}^T , M_{*2}^T , ρ_{*1}^T и ρ_{*2}^T , вычисленные по формулам (5.12) и (5.5), получим, что в первом случае коэффициент сопротивления будет на 5% меньше, а во втором - на 10% больше, чем при равномерном распределении Φ по всему сечению трубопровода.

Таким образом, влияние неоднородности пузырьковой смеси на сопротивление оказывается несколько большим, чем на гидродинамическую инерционность. Здесь мы рассмотрели случай достаточно сильной неравномерности распределения объемной концентрации по сечению. Если же распределение концентрации будет не слишком сильно отличаться от равномерного, то влиянием неравномерности на коэффициент сопротивления и, тем более, на гидродинамическую инерционность можно пренебречь.

Заключение

В настоящей работе приведены примеры континуального подхода к задачам динамики резервуаров, содержащих жидкость и недеформируемые включения. Рассмотрен лишь простейший случай, когда в процессе поступательных колебаний резервуаров или трубопроводов группа включений сохраняет свою форму. Такая ситуация имеет место для стержневых пучков, где стержни каким-либо образом связаны между собой и их взаимное расположение не меняется в процессе колебаний. Для "свободно взвешенных" же включений, например, для пузырьков в двухфазной смеси такое допущение является весьма сильным упрощением. Если даже предположить, что пузырьки при поступательных колебаниях являются сферами постоянного объема, то возникает вопрос об устойчивости первоначально заданного распределения концентрации пузырьков по сечению резервуара, поскольку при их колебаниях относительно несущей жидкости возникают силы взаимного притяжения. Возможно, что при достаточно сильных вибрационных воздействиях на резервуар (трубопровод) из-за такой неустойчивости возникает вращение двухфазной смеси и локализация пузырей в центре трубопровода или даже вибротурбулизация смеси. Ясно, что описание таких эффектов должно основываться на существенно нелинейных уравнениях.

При относительно слабых вибрационных воздействиях развиваемый нами подход будет весьма полезным для расчета динамических харак-

теристик резервуаров с гетерогенными средами. На это указывает, в частности, хорошее согласие результатов настоящей работы и имеющихся экспериментальных данных по инерционным и демпфирующим характеристикам стержневых сборок и трубопроводов с двухфазной пузырьковой смесью.

Следует отметить, что принятое условие недеформируемости включений ограничивает область применимости полученных соотношений не только по интенсивности вибраций, но и по их частоте. Действительно, поскольку такие включения как стержни и трубы, образующие гетерогенные среды, являются упругими элементами, имеющими ряд собственных частот, то при вибрационных воздействиях на этих частотах эффективные свойства (вibroплотность и vibровязкость) таких инерционноупруговязких гетерогенных сред должны иметь резонансный характер. Аналогичным образом в двухфазных пузырьковых смесях при поступательных колебаниях пузырьков могут возбуждаться их оболочечные колебания и, следовательно, должны проявляться резонансные свойства пузырьковых сред на соответствующих частотах вибрационных или акустических воздействий.

Отметим еще одно важное обстоятельство. В настоящей работе предполагалось, что количество включений в той или иной системе достаточно велико, с тем, чтобы континуальный подход был правомочным. Поскольку на практике часто встречаются системы с не очень большим числом включений, то важно знать чем ограничен континуальный подход. В этом случае континуальный подход, по-видимому, должен быть дополнен анализом локальных взаимодействий жидкости, включений и ограничивающих систему стенок резервуаров или оболочек.

Список литературы

1. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968.
2. Вольтер А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. М.: Наука, 1979.
3. Федотовский В.С. Динамические свойства системы тело-газожидкостная суспензия. - Прикладная механика, 1980, №5.
4. Федотовский В.С. Об инерционных и демпфирующих свойствах двухфазной пузырьковой смеси, содержащей поверхностно-активные вещества: Препринт ФЭМ-1104, Обнинск, 1980.
5. Федотовский В.С. Эффективные свойства гетерогенных сред со свободными недеформируемыми включениями при вибрационных воздействиях: Препринт ФЭМ-1507, Обнинск, 1983.
6. Федотовский В.С., Спиров В.С., Кухтин А.Б. Инерционное и демпфирующее действие двухфазного потока на колеблющийся трубопровод: Препринт ФЭМ-1176, Обнинск, 1981.
7. Федотовский В.С. Гидродинамические силы, действующие на колеблющиеся сферические и цилиндрические включения: Препринт ФЭМ-1473, Обнинск, 1983.
8. Снялевский В.Ф., Федотовский В.С., Кухтин А.В. О колебаниях цилиндра в вязкой жидкости. - Прикладная механика, 1980, №1.
9. Carlucci L.N. Flow vibration in vertical two-phase flow fuel channels. Part A: Hydrodynamics mass and fluid damping of fuel bundles vibrating in confined water and air-water mixtures. AECL, 1976, oct.

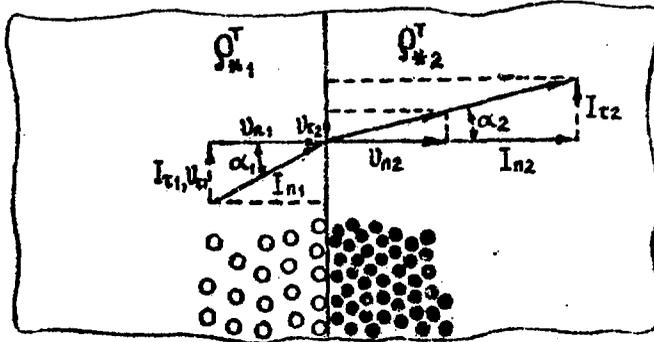


Рис.1. Преломление линий тока и вектора плотности обобщенного импульса на границе раздела гетерогенных сред.

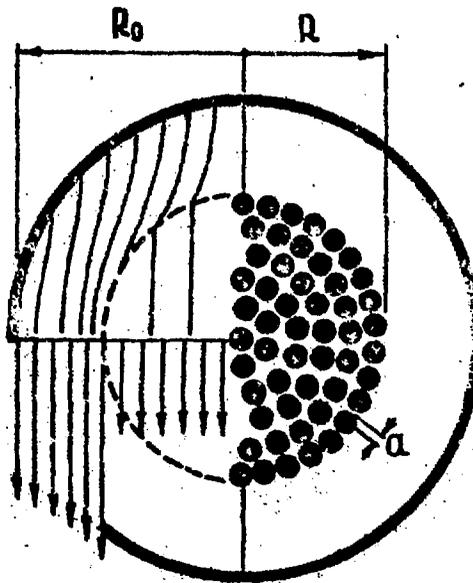


Рис.2. Линии тока и распределение скорости при колебаниях резервуара, содержащего жидкость и локализованную группу включений (стержневую сборку).

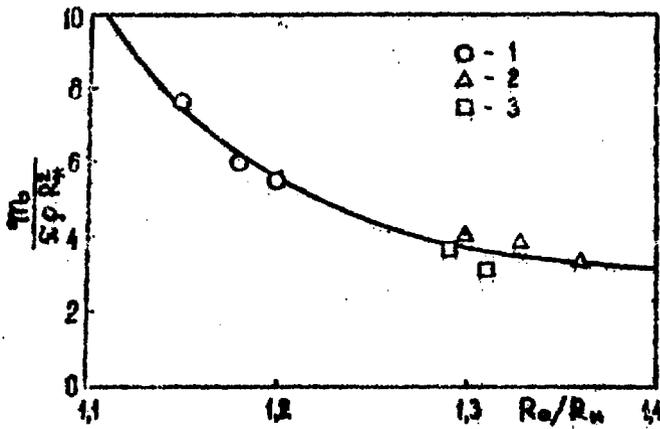


Рис.3. Зависимость присоединенной массы стержневого пучка в жидкости, ограниченной цилиндрическим корпусом. — расчет по формуле (3.6); 1,2,3 — эксперимент [9] для 18, 28, 37 стержневых пучков.

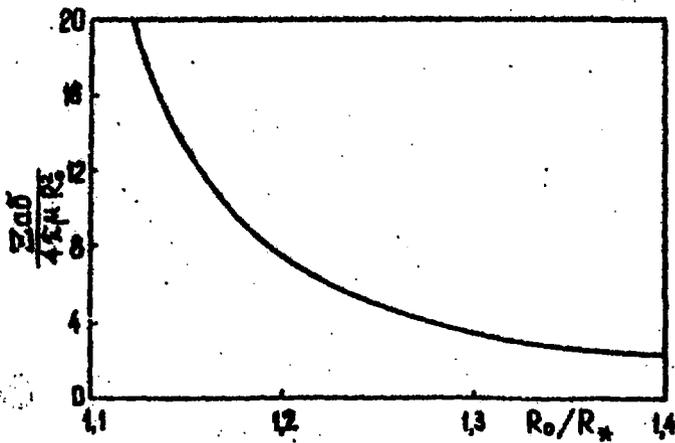


Рис.4. Зависимость коэффициента сопротивления колебательному движению стержневых пучков (расчет по формуле 3.2I).

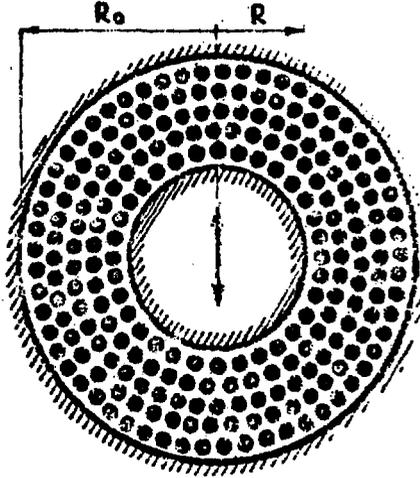


Рис. 5. Колебания цилиндра в гетерогенной среде, ограниченной цилиндрическим корпусом.

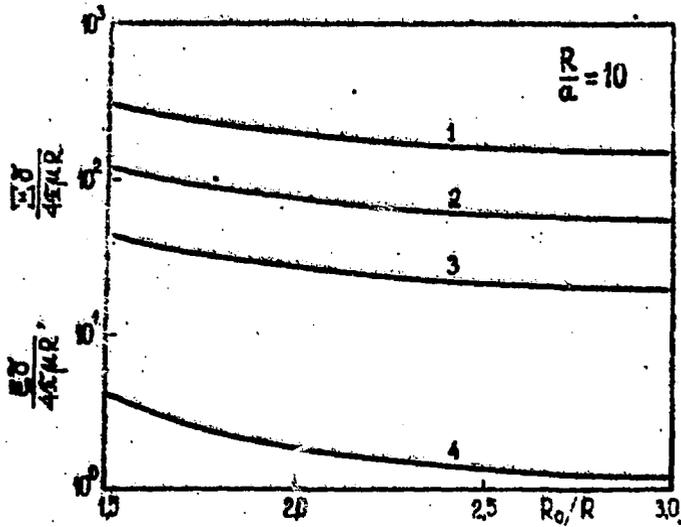


Рис. 6. Зависимость коэффициента сопротивления (4.14) для цилиндра, колеблющегося в гетерогенной среде с объемной концентрацией цилиндрических включений: 1- $\psi=0,75$ ($X_{\Delta}=1,1$), 2- $\psi=0,63$ ($X_{\Delta}=1,2$), 3- $\psi=0,4$ ($X_{\Delta}=1,5$). 4- коэффициент сопротивления для цилиндра в однородной жидкости.

Технический редактор Н.П.Герасимова.

Подписано к печати 01.03.1984 г. Т-07403 формат 60x90 1/16
Офсетная печать Усл. п. л. 2,25 Уч.-изд.л. 1,5 Тираж 93 экз.
Цена 23 коп. ФЭМ-1528 Индекс 3624 6063.

Отпечатано на ротационной ФЭМ, г. Обнинск.

23 коп.

Индекс 3624

**Континуальный подход к задачам динамики резервуаров, содержащих пучки стержней или группы частиц и жидкость, при вибрационных воздействиях.
ФЭИ-1528, 1984, 1-34.**