ФЭИ-1507

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. С. ФЕДОТОВСКИЙ

Эффективные свойства гетерогенных сред со свободными недеформируемыми включениями при вибрационных воздействиях

Обнинск — 1984

УДК 533.6.013.42

В. С. Федотовский.

Эффективные свойства гетерогенных сред со свободными недеформируемыми включениями при вибрационных воздействиях.

ФЭИ-1507. Обнинск: ФЭИ, 1984. — 20 с.

Изучается динамическое поведение гетерогенных сред, образованных ньютоновскими жидкостями и недеформируемыми включениями, при вибрационных воздействиях, приложенных к жидкости. Рассмотрены малые одномерные поступательные колебания гетерогенных сред и, в соответствии с этим видом движения, — их эффективные свойства — трансляционные плотность и вязкость. Показано, что введение таких эффективных свойств целесообразно в том случае, когда колебательное число Рейнольдса, определенное по характерному размеру включений, не является малым. Рассмотрены конкретные виды гетерогенных сред со сферическими и цилиндрическими включениями, моделирующими, при определенных условиях, двухфазные пузырьковые среды и стержневые сборки, погруженные в жидкость. Проанализированы предельные случаи с легкими и тяжелыми включениями, дающие наиболее характерные зависимости эффективных свойств гетерогенных сред от свойств образующих их фаз.

Введение

Основная задача математического описания механического поведения гетерогенных сред заключается, как известно, в построении замкнутой системы уравнений движения при заданных свойствах каждой из фаз. Эта задача является значительно более сложной, чем аналогичная задача описания однофазных сред в связи с возникновением ряда новых эффектов, таких, например, как обмен импульсом и энергией между фазами, хаотическое или турбулентное движение дисперсной и сплошной фаз, столкновения дисперсных частиц и т.п. Поскольку гетерогенные среды могут быть весьма разнообразными, как по свойствам фаз, геометрическим формам включений, так и по характеру их движения, то в каждом конкретном случае основную роль играют различные процессы и в настоящее время не существует сколько-нибудь удовлетворительного общего подхода для их описания. В одной из работ Бреннера [I] отмечается, что такое состояние дел сохранится до тех пор, пока не будет достигнуто надлежащее объединение гидромеханики, статистической механики, механики сплошных сред и термодинамики необратимых процессов. Ясно однако, что развитие этой перспективной программы должно быть подкреплено менее фундаментальными, но более прикладными разработками, охватывающими определенные классы гетерогенных сред.

Для простейших гетерогенных сред, образованных вязкой ньютоновской жидкостью и взвешенными в ней недеформируемыми включениями, уравнениями движения фаз являются уравнения Навье-Стокса и Ньютона. В общем случае, в связи с известными трудностями решения уравнений Навье-Стокса, описание движения даже таких гетерогенных сред является феноменологическим. При этом, в уравнениях движения гетерогенной среды входят неизвестные члены, описывающие взаимодействие фаз. При некоторых ограничениях, однако, уравнения Навье-Стокса сводятся к уравнениям ползущего течения и описание движения гетерогенных сред становится возможным на основе решения микродинамических уравнений. Так, в частности, в реологии суспензий эффекты взаимодействия дисперсной и сплошной фаз могут быть вычислены через микропараметры, учитывающие гидродинамическую обстановку на уровне отдельных включений. Этот путь позволяет вычислять такие эффективные характеристики, как сдвиговая, объемная и вращательная вязкости суспензий.

В другом предельном случае, когда гетерогенная среда образована маловязкой жидкостью и достаточно крупными включениями, так, что их обтекание происходит при больших числах Рейнольдса, описание движения весьма затруднительно, если не введены какие-либо ограничения. Если, например, характер воздействий, наложенных на гетерогенную среду, будет таким, что смещения жидкости и включений окажутся малыми по сравнению с характерным размером включений, то обтекание включений будет безотрывным даже при больших числах Рейнольдса и описание станет возможным без привлечения статистической механики. Часто именно так обстоит дело, когда гетерогенные среды подвержены вибрационному воздействию. Существует большой класс задач о колебаниях систем, содержащих гетерогенные среды или окруженных ими. В качестве одного из примеров таких систем можно рассматривать двухфазные пузырьковые среды, протекающие в колеблющихся элементах конструкций энергетического, технологического и другого оборудования. В качестве анизотропных гетерогенных сред можно рассматривать системы стержневых тепловыделяющих элементов, окруженных экраном и корпусом реактора или пучки труб теплообменных аппаратов, обтекаемых потоком теплоносителя. Такие гетерогенные среды также целесообразно рассматривать как гомогенные анизотропные среды с некоторыми эффективными свойствами, которые определяли бы динамические характеристики контактирующих с ними различных упругих конструкций.

В отличие от суспензий, для которых основную роль играют вязкостные эффекты и которые можно рассматривать в более широком смысле как гетерогенные вязкоупругие среды, рассматриваемые нами гетерогенные среды будем классифицировать как инерционноупруговязкие, имея ввиду, что основную роль играют инерционные эффекты. Поскольку включения, окруженные вязкой жидкостью могут рассматриваться в общем случае, как упругодеформируемые (например, пузырьки в двухфазной среде или стержни в сборках), то инерционные и вязкостные свойства таких сред должны быть, в общем случае связаны с их упругими свойствами.

Таким образом, основными свойствами инерционноупруговязких гетерогенных сред будут эффективная плотность и эффективная вязкость. Иногда вместо этих терминов используются виброплотность и вибровязкость. Исторически к этим понятиям привели, например, задачи о движении тела в колеблющейся среде с сопротивлением типа сухого трения (тело в сыпучей среде). При вибрациях сухое трение трансформируется для медленных движений тела в нелинейно-вязкое, причем, тело, которое при отсутствии вибраций либо покоилось, либо падало (всплывало) ускоренно, теперь движется с постоянной скоростью [2]. Интенсивно развивающийся в последнее время раздел механики, занимающийся изучением поведения систем под действием вибраций был назван виброреологией. В работе [3] виброреология определена как область механики, в которой изучается изменение реологических свойств тел (сред) под действием вибраций по отношению к медленным силам. Изучаемые же в настоящей работе эффективные свойства следует понимать как виброреологические свойства инерционноупруговязких гетерогенных сред по отношению к быстрым вибрационным воздействиям. Первыми в этом направлении были, по-видимому, работы Н.Л.Граната [4,5], в которых рассмотрены виброреологические свойства гетерогенной среды с малой объемной долей сферических включений. Здесь же рассматривается более общий случай с произвольной концентрацией включений, в частности, сферической и цилиндрической формы.

Предполагая, что, как и в гомогенных средах, произвольное движение может быть представлено суперпозицией поступательного, вращательного и деформационного движений (теорема Гельмгольца), каждому из них можно сопоставить соответствующие эффективные свойства - трансляционную, ротационную, сдвиговую и объемную виброплотность и вибровязкость.

В настоящей работе рассмотрены только малые одномерные колебательные движения гетерогенных сред и, в соответствии с этим видом движения, -их эффективные свойства - трансляционная плотность ρ_*^T и трансляционная вязкость μ_*^T.

I. Движение включений в колеблющейся жидкости.

Если гетерогенная среда подвержена действию поверхностных сил, приложенных к сплошной фазе, то при ускоренном движении элемента среды dV со скоростью $u(t)$ в сплошной фазе будет возникать градиент давления $dp/dx = -\rho\, du/dt$, создающий выталкивающую силу, подобную Архимедовой, действующей на включения в направлении ускорения сплошной среды. В неинерциальной системе координат, движущейся с ускорением du/dt, на включения действуют также силы инерции, направленные в противоположную сторону. Под действием этих сил каждое включение движется относительно сплошной фазы с некоторым ускорением и скоростью, причем, сплошная фаза сказывает на включения определенное инерционное и вязкостное действие. Инерционное действие определяется относительным ускорением и присоединенной массой, а вязкостное - относительной скоростью и коэффициентом вязкого трения. Уравнение движения включения относительно неподвижной системы координат, таким образом, имеет вид:

$$\left(M+m\right)\frac{d(v-u)}{dt} = \rho V\frac{du}{dt} - M\frac{du}{dt} - \xi(v-u), \qquad (I)$$

где $M = \rho_0 V$ – собственная масса включения объемом V,
ρ_0, ρ – плотности материала включений и жидкости,
$m = \chi\rho V$ – присоединенная масса, χ – коэффициент присоединенной массы, ξ – коэффициент вязкого трения.

Следует отметить, что, в отличие от выталкивающей и собственно инерционной сил, гидродинамические силы (инерционная и вязкостная) в общем случае являются функциями не только ускорения и скорости, но существенно зависят от предыстории движения включений. Кроме того, гидродинамические силы зависят от формы включений, их ориентации относительно направления движения, объемной концентрации включений и их взаимного расположения. Здесь мы предполагаем, что ориентация включений такова, что в процессе их относительного движения гидродинамические моменты равны нулю и включения не вращаются. Далее, все включения будем считать одинаковыми и равномерно распределенными в сплошной среде. И хотя при вибрационных воздействиях, наложенных на гетерогенные среды, могут возникать различные нелинейные эффекты медленных по отношению к вибрационным воздействиям и однонаправленных движений, неравномерных равновесных распределений включений, мы в настоящей работе предполагаем, что эти эффекты отсутствуют из-за малости вибрационных сил и выравнивающего действия иных механизмов, например, межфазной турбулентности в двухфазных потоках.

Выявлению и изучению механизмов возникновения различных форм медленных движений и явлений локализации включений при вибрационных воздействиях, представляющих в настоящее время предмет нового направления в динамике многофазных сред, посвящены работы [6,7].

Итак, при гармонических колебаниях гетерогенной среды, параметром, учитывающим предысторию движения, будет частота колебаний. Вследствие линейности уравнения (I) колебания включений будут также гармоническими.

Задав движение элемента гетерогенной среды по закону $u(t) = u_0 \sin\omega t$, решение уравнения (I) ищем в виде

$$v(t) = v_0' \sin\omega t + v_0'' \cos\omega t \qquad (2)$$

Подстановка (2) в уравнение (I) дает

$$\frac{v_0'}{u_0} = \frac{1 + \dfrac{\rho V - M}{M+m} + \dfrac{\xi^2}{(M+m)^2\omega^2}}{1 + \dfrac{\xi^2}{(M+m)^2\omega^2}}, \qquad (3)$$

$$\frac{v_0''}{u_0} = \frac{\xi}{(M+m)\omega}\left[\frac{\dfrac{\rho V - M}{M+m}}{1 + \dfrac{\xi^2}{(M+m)^2\omega^2}}\right]. \qquad (4)$$

Кроме того, введем обозначение отношения плотностей включения и сплошной среды $\Delta = \rho_0/\rho$ и заметим, что параметр

$$\tau = (M+m)/\xi \qquad (5)$$

есть время релаксации включений.

В принятых обозначениях соотношения для амплитудных значений v_0' и v_0'' имеют вид

$$\frac{v_0'}{u_0} = \frac{\dfrac{1+\gamma}{\Delta+\gamma} + \dfrac{1}{(\omega\tau)^2}}{1 + \dfrac{1}{(\omega\tau)^2}}, \qquad (6)$$

$$\frac{v_c''}{u_0} = \frac{1}{\omega\tau} \cdot \frac{(1-\Delta)/(\Delta+\gamma)}{1 + \dfrac{1}{(\omega\tau)^2}}. \qquad (7)$$

Таким образом, при заданной частоте колебаний гетерогенной среды и заданных свойствах фаз, кинематика включений относительно их равновесного положения известна.

Рассмотрим теперь как возникающее колебательное движение включений относительно жидкости влияет на инерционность гетерогенной среды по отношению к вибрационным воздействиям.

2. Эффективная трансляционная плотность.

Если бы включения были неподвижны относительно сплошной среды, то плотность гетерогенной среды, независимо от характера её движения, определялась бы по правилу смесей

$$\rho_{см} = \rho(1-\varphi) + \rho_0\varphi, \tag{8}$$

где φ - объемная концентрация включений.

В рассматриваемом нами случае скорость включений при колебаниях среды отличается от скорости несущей жидкости. При $\Delta > 1$ колебательная скорость включений будет меньше, а при $\Delta < 1$ - больше, чем колебательная скорость несущей жидкости. При этом, перемещение центра массы некоторого выделенного объема гетерогенной среды всегда будет меньше, чем перемещение границы этого объема (для простоты будем считать, что граница выделенного объема проходит только по сплошной фазе). Поскольку эффективную плотность гетерогенной среды мы соотносим с кинематическими характеристиками движения границы выделенного объема dV, т.е. с его скоростью $u(t)$, то импульс этого элемента запишем в виде

$$I(t) = \rho_*^{T}\, u(t)\, dV, \tag{9}$$

где ρ_*^{T} - эффективная трансляционная плотность, которую необходимо выразить через известные параметры гетерогенной среды. С другой стороны, импульс (9) состоит из двух составляющих - импульса включений $I_в$ и импульса жидкости $I_ж$

$$I_в = \rho_0\,\varphi\, v(t)\, dV \tag{10}$$

$$I_ж = \rho\int v_ж(r,t)\,d^3r, \tag{11}$$

где скорость $v(t)$ одинакова для всех включений, находящихся в объеме dV, а скорость жидкости $v_ж(r,t)$ является функцией микрокоординат в пределах элементарного объема среды dV. Интегрирование в (11) должно проводиться по объему жидкости, находящемуся в элементе dV и равному $(1-\varphi)dV$. Непосредственное интегрирование (11) невозможно без информации о микроструктуре поля скорости жидкости $v_ж(r,t)$ */

---

*/В более ранней работе автора [8] вычисление импульса для двухфазной пузырьковой смеси проводилось на основе схематизации течения жидкости в окрестности каждого пузырька по модели сферических ячеек с известным распределением скорости $v_ж(r,t)$.

Импульс жидкости, однако, легко находится по скорости движения её центра массы $v_ж^*$

$$I_ж = \rho v_ж^* (1-\varphi) dV. \quad (12)$$

Прежде, чем определять $v_ж^*$, отметим, что при колебаниях элемента объема dV по закону $u(t) = u_0 \sin \omega t$, полный импульс и, следовательно, его составляющие $I_в$ и $I_ж$ также должны изменяться по синусоидальному закону. Это означает, что в расчёт импульса включений должна быть взята только синфазная составляющая их скорости v_0' (см. формулу 6).

Из закона сохранения импульса следует, что амплитудные значения скоростей u_0, v_0' и $v_ж^*$ связаны соотношением

$$(u_0 - v_ж^*)\rho(1-\varphi) - (v_0' - u_0)\rho\varphi = 0, \quad (13)$$

означающим, что в системе координат, движущейся со скоростью центра массы жидкости, её импульс равен нулю. Другими словами, в этой системе движение жидкости есть суперпозиция переноса " замороженной" в элементе dV жидкости со скоростью u_0 в одну сторону и переноса объема жидкости, вытесненного включениями, в противоположном направлении со скоростью v_0'.

Из (13) следует

$$v_ж^* = \frac{u_0 - v_0'\varphi}{1-\varphi}. \quad (14)$$

Таким образом, имеем амплитудные значения импульсов

$$I_ж = \rho(u_0 - v_0'\varphi) dV, \quad (15)$$

$$I_в = \rho_0 v_0' \varphi dV. \quad (16)$$

Амплитудное значение суммарного импульса элемента гетерогенной среды dV равно

$$I = \rho_*^т u_0 dV = \rho(u_0 - v_0'\varphi)dV + \rho_0 v_0'\varphi dV \quad (17)$$

откуда следует

$$\rho_*^т = \rho\left(1 - \frac{v_0'}{u_0}\varphi\right) + \rho_0 \frac{v_0'}{u_0}\varphi \quad (18)$$

или

$$\frac{\rho_*^T}{\rho} = 1 + \left[\frac{\frac{1+\gamma}{\Delta+\gamma} + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}} \right] (\Delta-1)\varphi . \qquad (19)$$

Таким образом, соотношение (19) дает искомую эффективную трансляционную плотность гетерогенной среды. Это инерционное свойство, как видно из формулы, зависит от ряда параметров (γ , Δ , τ, φ), характеризующих свойства фаз, а также от частоты ω наложенных вибрационных воздействий.

3. Анализ предельных случаев.

Исходя из его соотношения (19), рассмотрим различные предельные случаи, в которых эффективная плотность проявляется особенно отчетливо.

Если сплошная фаза является весьма вязкой жидкостью а частота колебаний и размеры включений достаточно малы, так, что $(\omega\tau)^{-2} \gg 1$, то включения будут практически неподвижны относительно сплошной фазы и эффективная плотность будет равна истинной плотности (8). Такая ситуация имеет место в реологии суспензий, где вопрос об эффективной плотности не возникает.

Если же сплошная среда является маловязкой жидкостью а частота колебаний и размеры включений достаточно велики, так что $(\omega\tau)^{-2} \ll 1$, то в этом случае формула (19) принимает вид

$$\frac{\rho_*^T}{\rho} = 1 + \frac{(1+\gamma)(\Delta-1)\varphi}{\Delta+\gamma} \qquad (20)$$

Это предельное соотношение для эффективной плотности имеет весьма широкий диапазон применимости. Можно считать, что это соотношение справедливо при колебательных числах Рейнольдса, определенных по характерному размеру включений существенно больших единицы $(Re_\omega = a^2\omega/\nu \gg 1)$. Для многих вибрационных задач это условие соблюдается. Рассмотрим теперь некоторые типы гетерогенных сред с заданными свойствами включений при выполнении условия

а. Гетерогенная среда со сферическими включениями.

I. Пусть включениями являются сферические частицы с нулевой плотностью ($\Delta = 0$). Этот случай соответствует двухфазной пузырьковой смеси. Используя для коэффициента присоединенной массы γ соотношение

$$\gamma = \frac{1+2\varphi}{2(1-\varphi)}, \qquad (21)$$

вытекающее из модели эквивалентных сферических ячеек [8], из формулы (20) получим

$$\frac{\rho_*^{T}}{\rho} = \frac{1-\varphi}{1+2\varphi}. \qquad (22)$$

Этот частный результат был получен ранее автором в работе [8] и экспериментально подтвержден в [9]. Из формулы (22) видно, что эффективная плотность двухфазной пузырьковой смеси в $(1+2\varphi)$ раз меньше истинной плотности.

2. Рассмотрим случай, когда плотность материала включений произвольной формы существенно больше плотности сплошной фазы. При $\Delta = \rho_0/\rho \to \infty$ включения будут неподвижными а колеблющаяся жидкость будет фильтроваться через пористое "тело", образованное неподвижными включениями. Из формулы (20) имеем в этом случае

$$\rho_*^{T}/\rho = 1 + (\gamma+1)\varphi. \qquad (23)$$

Это соотношение для эффективной плотности было получено ранее в работе [10] при анализе фильтрационного течения жидкости через неподвижную стержневую сборку. Следует отметить, что при рассмотрении динамики гетерогенных сред в рамках теории потенциального течения невязкой жидкости снимаются ограничения на характер движения. Для вязкой же жидкости характер движения имеет существенное значение. Для дальнейшей конкретизации формулы (23) следует задаться каким-либо соотношением для коэффициента присоединенной массы.

В случае со сферическими включениями подстановка (21) в (23) дает

$$\frac{\rho_*^{T}}{\rho} = \frac{1+\varphi/2}{1-\varphi}. \qquad (24)$$

Эта предельная зависимость показана на рис. 1. линией 5. На этом же рисунке показаны так же зависимости для динамической плотности гетерогенных сред со сферическими включениями при отношении плотностей материала сферических включений и жидкости равном 0,5 ; 1; 2 (соответственно кривые 2,3,4).

6. Гетерогенная среда с цилиндрическими включениями.

Если же в качестве включений рассматривать стержневые элементы, ориентированные в одном направлении и образующие, таким образом, анизотропную гетерогенную среду, то эффективная плотность будет выражаться тензором второго ранга. В простейшем случае цилиндрических стержней, образующих правильную решетку, гетерогенная среда является трансверсально изотропной, т.е. при поперечном обтекании стержневой сборки коэффициент присоединенной массы не зависит от её угловой ориентации [11]. Для не очень тесных пучков (относительный шаг $X \geqslant 1{,}2$) коэффициент присоединенной массы выражается соотношением [12].

$$\gamma = (1+\varphi)/(1-\varphi). \tag{25}$$

В этом случае формула (23) дает

$$\rho_*^T/\rho = (1+\varphi)/(1-\varphi). \tag{26}$$

Эта зависимость показана на рис.2. кривой 1.

Для тесных пучков стержней ($X < 1{,}2$) коэффициент присоединенной массы зависит не только от объемной концентрации включений φ, но и от типа решетки (треугольная или квадратная). Используя полученные в работе [13] соотношения

$$\gamma_\Delta = \frac{6}{\pi}\sqrt{\frac{2}{X-1}}\,\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{X-1}}\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right), \tag{27}$$

$$\gamma_\square = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{2}{X-1}}\,\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{X-1}}\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right), \tag{28}$$

по формуле (23) можно рассчитать эффективную плотность гетерогенной среды с неподвижными цилиндрическими включениями, образующими треугольную и квадратную решетки. Результаты расчётов показаны на рис.2 пунктирными линиями 3 и 4. Использование соотношений (27) и (28) для коэффициентов присоединенных масс дает правильную асимптотику для эффективной плотности при объемных концентрациях близких к предельным ($\varphi_\Delta^* = 0{,}905$, $\varphi_\square^* = 0{,}785$). В предельно концентрированных средах эффективная плотность обращается в бесконечность. Ещё раз напомним, что этот результат относится только к случаю с неподвижными цилиндрическими включениями.

Формулами (26) или (23) совместно с (27) или (28) определены, таким образом, два диагональных элемента тензора эффективной плотности $\rho^{T}_{*xx} = \rho^{T}_{*yy}$. Третий диагональный элемент ρ^{T}_{*zz} также определяется по формуле (23) при подстановке в неё γ_{zz}.

Коэффициент присоединенной массы γ_{zz} для цилиндрических включений легко находится в приближении потенциального обтекания [I2].

$$\gamma_{zz} = \varphi/(1-\varphi). \tag{29}$$

Из формулы (23) имеем тогда

$$\rho^{T}_{*zz}/\rho = 1/(1-\varphi) \tag{30}$$

Эта зависимость представлена на рис. 2 кривой 2.

Следует отметить, что анизотропия эффективных инерционных свойств гетерогенной среды с цилиндрическими включениями может быть весьма существенной. Из сравнения формул (26) и (30) видно, что "поперечная" эффективная плотность $\rho^{T}_{*xx}=\rho^{T}_{*yy}$ в $1+\varphi$ раз больше "продольной" эффективной плотности ρ^{T}_{*zz}. Для более концентрированных стержневых систем ($X < 1,2$) отношение "поперечной" и "продольной" плотностей ещё больше и при $X \to 1$ стремится к бесконечности.

В заключение этого раздела отметим, что аналогичная, но несколько менее выраженная, анизотропия инерционных свойств будет иметь место и в случае со свободными включениями, т.е. когда плотность материала включений не равна бесконечности.

Рассмотрим теперь вязкостные свойства гетерогенных сред при одномерных колебаниях под действием вибрационных воздействий.

4. Эффективная трансляционная вязкость.

При колебаниях гетерогенной среды включения перемещаются относительно несущей их сплошной фазы. В результате такого относительного движения в гетерогенной среде возникают диссипативные потери, обусловленные микронеоднородными течениями вязкой жидкости в окрестности включений. Эти диссипативные потери связаны с вязкостью сплошной фазы а также с инерционными и геометрическими характеристиками дисперсной фазы.

При колебаниях включений относительно жидкости с относительной скоростью $W(t)=W_0\sin(\omega t+\theta)$ в общем случае не совпадают по фазе со скоростью $u(t)=u_0\sin\omega t$, каждое из включений испытывает гидродинамическую силу вязкого трения

$$F_0(t) = \xi W(t) \tag{31}$$

Средняя за период колебания скорость диссипации энергии в жидкости, отнесенная к одному включению, равна работе силы трения

$$\langle dE/dt\rangle = \xi\,\overline{W^2(t)} = \xi W_0^2/2 . \tag{32}$$

Поскольку в единице объема гетерогенной среды содержится φ/V включений, то диссипативные потери в нем составляют

$$\langle dE/dt\rangle = \xi W_0^2 \varphi/2V . \tag{33}$$

Сила вязкого трения, действующая на единичный объем гетерогенной среды движущийся со скоростью $u(t)$ при этом будет равна

$$F(t) = \frac{2\langle dE/dt\rangle}{u_0^2}\,u(t) = \frac{\xi W_0^2\varphi}{V u_0^2} = \mu_*^T u(t) \tag{34}$$

Коэффициент пропорциональности между поверхностной силой и скоростью единичного элемента гетерогенной среды назовем эффективной трансляционной вязкостью

$$\mu_*^T = \frac{\xi W_0^2 \varphi}{V u_0^2} \tag{35}$$

Амплитудное значение относительной скорости включений W_0 найдем по её составляющим v_0' и v_0'' (см. соотношения (6) и (7)).

$$W_0^2 = (v_0' - u_0)^2 + v_0''^2 = u_0^2\,\frac{\left(\frac{1-\Delta}{\Delta+\gamma}\right)^2}{1+\frac{1}{(\omega\tau)^2}} \tag{36}$$

Подставив (36 в (35) и учтя (5), получим

$$\mu_*^T = \frac{\rho\varphi(1-\Delta)^2}{\tau(\Delta+\gamma)\left[1+\frac{1}{(\omega\tau)^2}\right]} \tag{37}$$

Из формулы видно, что эффективная трансляционная вязкость, так же как и эффективная плотность, зависит от ряда параметров, характеризующих свойства фаз и от частоты вибрационных воздействий.

Введенная таким образом эффективная вязкость имеет размерность $[ML^{-3}T^{-1}]$, отличающуюся от размерности сдвиговой вязкости. Рассмотрим теперь несколько типов гетерогенных сред с включениями сферической и цилиндрической формы и конкретизируем для них формулу (38).

а. Гетерогенная среда со сферическими включениями.

Ограничимся случаем больших колебательных чисел Рейнольдса. В работе [14] было получено выражение для коэффициента вязкого трения колебательному движению в виде

$$\xi = \frac{6\pi\mu a^2}{\delta(1-\varphi)^2}, \tag{39}$$

где $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$.

Время релаксации сферических включений в этом случае равно

$$\tau = \frac{2a\delta(\Delta+\gamma)(1-\varphi)^2}{9\nu} \tag{40}$$

а формула для эффективной трансляционной вязкости принимает вид

$$\mu_*^T = \frac{9\mu\varphi\,(1-\Delta)^2}{2a\delta(\Delta+\gamma)^2(1-\varphi)^2}$$

или

$$\frac{\mu_*^T}{\mu}a\delta = \frac{9\varphi\,(1-\Delta)^2}{2\,(1-\varphi)^2(\Delta+\gamma)^2} \tag{41}$$

Используя выражение (21) для коэффициента присоединенной массы формулу (41) перепишем в виде

$$\frac{\mu_*^T}{\mu}a\delta = \frac{18\varphi\,(1-\Delta)^2}{[2\Delta(1-\varphi)+(1+2\varphi)]^2} \tag{42}$$

Если в качестве включений рассматривать безмассовые сферические частицы ($\Delta = 0$), то из (42) получим эффективную вязкость двухфазной пузырьковой смеси

$$\frac{\mu_*^T}{\mu} a\delta = \frac{18\varphi}{(1+2\varphi)^2}. \qquad (43)$$

Зависимость (43) показана на рис.3 кривой I. В другом предельном случае весьма тяжелых включений ($\Delta \to \infty$) формула (42) принимает вид

$$\frac{\mu_*^T}{\mu} a\delta = \frac{9\varphi}{2(1-\varphi)^2}. \qquad (44)$$

Эта зависимость показана на рис.3 кривой 4. Интересно отметить что рассмотренные предельные случаи дают наибольшие значения эффективной трансляционной вязкости. Если же включения имеют промежуточную плотность, то эффективная вязкость оказывается существенно меньшей. На рис.3 для сравнения показаны зависимости для случаев $\Delta = 0{,}5$ и $\Delta = 2$ (кривые 2,3). При $\Delta = 1$, т.е. в случае равноплотных включений, их относительное движение отсутствует и эффективная трансляционная вязкость такой среды равна нулю.

б.Гетерогенная среда с цилиндрическими включениями.

Рассмотрим здесь также колебания при больших числах Рейнольдса. Кроме того, так же как для эффективной трансляционной плотности ограничимся случаем неподвижных цилиндрических включений, т.е. положим $\Delta = \infty$. Используя для коэффициента вязкого трения формулу [12],

$$\xi = \frac{4\pi\mu a}{\delta(1-\varphi)^2}, \qquad (45)$$

полученную для не очень тесных пучков стержней и производя аналогичные преобразования, получим формулу для эффективной трансляционной вязкости

$$\frac{\mu_*^T}{\mu} a\delta = \frac{4\varphi}{(1-\varphi)^2}. \qquad (46)$$

Следует отметить, что для систем с цилиндрическими включениями, образующими правильные решетки, свойство трансверсальной изотропии справедливо для эффективной трансляционной вязкости также как и для эффективной инерционности.

Формула (46) определяет таким образом два диагональных элемента тензора эффективной трансляционной вязкости μ^T_{*xx} μ^T_{*yy}.
Третий диагональный элемент μ^T_{*zz} определим исходя того, что

коэффициент вязкого трения колебательному движению цилиндрических включений в направлении их осей равен [12]

$$\xi = \frac{2\pi\mu a}{\delta(1-\varphi)^2}.$$

При этом имеем

$$\frac{\mu^{T}_{*zz}}{\mu} a\delta = \frac{2\varphi}{(1-\varphi)^2} \qquad (47)$$

Из сравнения соотношений (46) и (47) видно, что "поперечная" эффективная вязкость в 2 раза больше "продольной" вязкости (см. рис.4). Отметим, что полученное выше отношение "поперечной" и "продольной" плотностей равно $1+\varphi$, т.е. меньше двух. Это означает, что анизотропия вязкостных свойств гетерогенных сред с цилиндрическими включениями более сильная, чем анизотропия инерционных свойств.

Для более концентрированных стержневых систем ($\chi < 1{,}2$) выражение для коэффициента вязкого трения имеет вид [13]

$$\xi_{\Delta} = \frac{3\mu a}{2\delta}\left[\frac{1}{(\chi-1)(\chi-\cos\frac{\pi}{6})} + \left(\frac{2}{\chi-1}\right)^{3/2} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{\chi-1}}\, \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}\right)\right],$$

$$\xi_{a} = \frac{\mu a}{\delta}\left[\frac{1}{(\chi-1)(\chi-\cos\frac{\pi}{4})} + \left(\frac{2}{\chi-1}\right)^{3/2} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{\chi-1}}\, \operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

для треугольной и квадратной решетки соответственно. Результаты расчёта эффективной трансляционной вязкости, основанные на этих соотношениях, показаны на рис. 4 пунктирными линиями 3 и 4.

Заключение

Развиваемый в настоящей работе подход к описанию динамики гетерогенных сред основан на представлении о них как о некоторых однородных средах с эффективными свойствами. В отличие от известной идеи описания движения гетерогенных сред несколькими взаимопроникающими и взаимодействующими континуумами, этот подход представляется целесообразным для решения ряда задач динамики различных колебательных систем, содержащих гетерогенные среды или окруженных ими. В работе рассмотрена простейшая модель гетерогенных сред с недеформируемыми монодисперсными включениями при поступательных колебаниях. Полученные зависимости для эффективных свойств - трансляционной плотности и вязкости - позволяют находить реакцию гетерогенной среды на виброускорение и виброскорость колеблющихся объектов. Эффективные свойства определяют, таким образом, динамические характеристики колебательных систем, контактирующих с гетерогенными средами.

Так, например, для определения собственных частот колебаний трубопровода с гетерогенной средой достаточно учесть эффективную массу $m_* = \pi \rho_*^T R^2$ на единицу длины трубопровода

$$\omega^2 = \omega_0^2 \frac{M}{M + m_*},$$

где ω_0 - собственная частота колебаний пустого трубопровода, M - его масса на единицу длины. Демпфирование колебаний трубопровода, обусловленное диссипативными потерями в гетерогенной среде, равно произведению эффективной вязкости μ_*^T на объем $\pi R^2 \cdot 1$, а коэффициент динамичности при резонансе определяется по формуле

$$Q = \frac{M \omega_0}{\pi R^2 \mu_*^T} \sqrt{1 + \frac{\pi R^2 \rho_*^T}{M}}.$$

Литература

1. Бреннер Г. Реология двухфазных систем в кн.: Реологин суспензий. М.,Мир, 1975, с. 11-67.

2. Блехман И.И., Джанелидзе Г.Ю. Вибрационное перемещение. М., "Наука", 1964, с.912.

3. Блехман И.И. Метод прямого разделения движений в задачах о действии вибраций на нелинейные механические системы.- -"Известия АН СССР, сер. Механика твердого тела", 1976., № 6, с.13-27.

4. Гранат Н.Л. Установившиеся колебания сосудов с двухфазной смесью. - "Известия АН СССР, сер. Механика и машиностроение", 1964, № 5, с. 61-64.

5. Гранат Н.Л. Потери энергии при колебаниях шара в двухфазной смеси (вибровязкость и виброплотность смеси). - "Известия АН СССР, сер. Механика", 1965, № 1, с.34-41.

6. Ганиев Р.Ф., Украинский Л.Е. Динамика частиц при воздействии вибраций. Киев: Наукова Думка, 1975, 168 с.

7. Ганиев Р.Ф., Лапчинский В.Ф. Проблемы механики в космической технологии, М.,Машиностроение, 1978, 119 с.

8. Федотовский В.С. Динамические свойства системы тело-газожидкостная суспензия. "Прикладная механика", 1980, № 3,

9. Федотовский В.С., Спиров В.С., Кухтин А.Б. Инерционное и демпфирующее действие двухфазного потока на колеблющийся трубопровод. Препринт ФЭИ-1178. Обнинск-1981.

10. Вознякевич Е.В., Номофилов Е.В. Гомогенная модель течения жидкости в стержневых сборках. - Атомная энергия, 1981 , т.51, вып.1.,с.6.

11. Вознякевич Е.В., Федотовский В.С. О независимости присоединенной массы и коэффициента демпфирования от направления колебаний бесконечной стержневой сборки. Препринт ФЭИ-1005. Обнинск-1980.

12. Федотовский В.С. Гидродинамические силы, действующие на колеблющиеся сферические и цилиндрические включения. Препринт ФЭИ- 1473. Обнинск-1983.

13. Федотовский В.С. Приближенный способ расчёта присоединенных масс и коэффициентов гидродинамического демпфирования колебаний тесных пучков стержней. Препринт ФЭИ-1072. Обнинск-1980.

14. Федотовский В.С. Об инерционных и демпфирующих свойствах двухфазной пузырьковой смеси, содержащей поверхностно-активные вещества. Препринт ФЭИ-1104. Обнинск-1980.

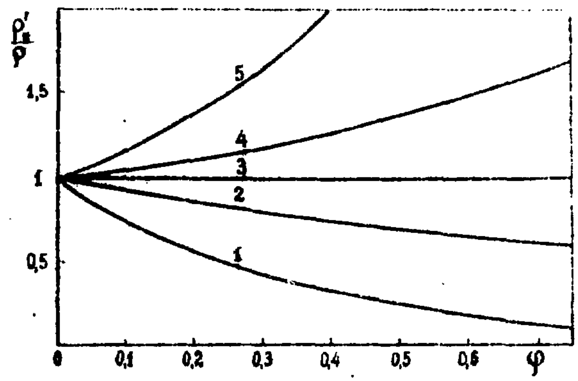

Рис.I. Эффективная трансляционная плотность гетерогенной среды со сферическими включениями. Расчет по формуле (20). I - Δ =0: 2 - Δ =0,5: 3 - Δ =I: 4 - Δ =2: 5 - Δ =∞.

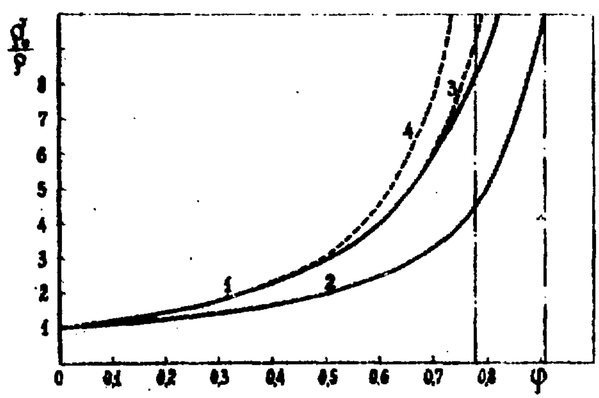

Рис.2. Эффективная трансляционная плотность трансверсально изотропной гетерогенной среды с неподвижными цилиндрическими включениями. Расчет по формуле (23). I,2 -"поперечная" и "продольная" плотности: 3,4 -"поперечная" плотность при концентрации включений(с треугольной и квадратной решеткой), близкой к предельной.

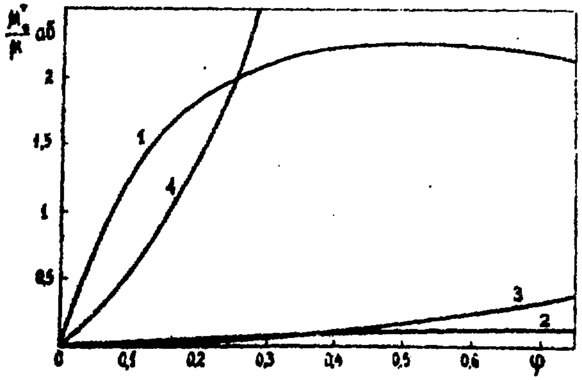

Рис.3. Эффективная трансляционная вязкость гетерогенной среды со сферическими включениями. Расчет по формуле (42).
I - Δ=0: 2 - Δ=0,5: 3 - Δ=2: 4 - Δ=∞ .

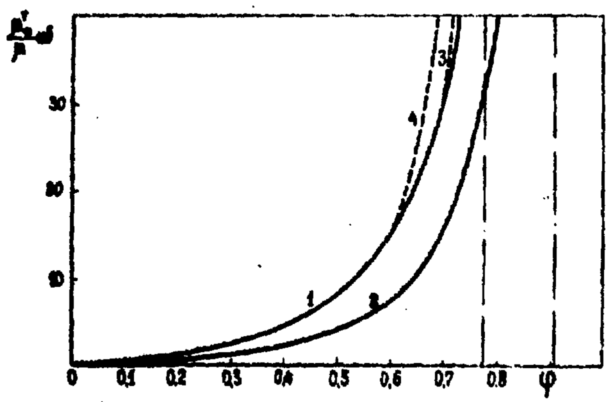

Рис.4. Эффективная трансляционная вязкость трансверсально изотропной гетерогенной среды с неподвижными цилиндрическими включениями. I,2 -расчет по формулам (46),(47): 3,4 -расчет для систем с объемной концентрацией, близкой к предельной.

Технический редактор **Н. П. Герасимова**

Подписано к печати 16.01.1984 г. Т-04139. Формат 60×90 1/16

Офсетная печать. Усл. п. л. 1,25. Уч.-изд. л. 0,9. Тираж 78 экз.

Цена 14 коп. ФЭИ-1507. Индекс 3624

Отпечатано на ротапринте ФЭИ, г. Обнинск

14 коп. Индекс 3624

Эффективные свойства гетерогенных сред со свободными недеформируемыми включениями при вибрационных воздействиях.
ФЭИ-1507, 1984, 1-20.