

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA  
CAIXA POSTAL 20516  
01498 - SÃO PAULO - SP  
BRASIL

# PUBLICAÇÕES

IFUSP/P-523

EQUILÍBRIO E INSTABILIDADES DO PLASMA EM TOKAMAKS

I.L. Caldas, A. Vannucci  
Instituto de Física, Universidade de São Paulo

PARTE I

Março/1985

# EQUILÍBRIO E INSTABILIDADES DO PLASMA EM TOKAMAKS

I. L. CALDAS, A. VANNUCCI

## PARTE I

### RESUMO

~~neste texto~~ Apresenta-se uma introdução fenomenológica de algumas das principais características teóricas e experimentais sobre equilíbrio e instabilidades em tokamaks. Em geral são considerados apenas efeitos macroscópicos, sendo o plasma descrito como um fluido. (Autor)

## PREFÁCIO

Esta publicação abrange parte do curso de pós-graduação: "Equilíbrio e Instabilidades em Tokamaks", ministrado por um dos autores (I.L.C.), no verão de 1983 (com duração de 6 semanas), e foi preparado considerando a falta de material didático publicado sobre Física de Plasmas, e a sua possível utilidade para outros cursos de plasmas, bem como para estudantes que estejam se iniciando nessa área.

O texto foi escrito por um dos autores (A.V.), a partir de suas notas de aulas, e das anotações elaboradas pelo outro autor (I.L.C.), durante a preparação dessas aulas.

A idéia de realizar este curso surgiu por iniciativa da própria Comissão de Pós-Graduação do Instituto, que pretendeu oferecer alguns cursos de pós-graduação, durante o verão de 1983.

Dois dos objetivos principais do referido curso foram o de discutir, com os bolsistas de pós-graduação do Laboratório de Física de Plasmas, que estavam iniciando seus projetos de pesquisa em Física Experimental, algumas pesquisas em desenvolvimento sobre equilíbrio e instabilidades em tokamaks, como também fornecer-lhes elementos que possibilitassem a leitura de artigos publicados nessa área. Um curso semestral foi posteriormente oferecido, tendo sido abordados, com maior profundidade, questões relacionadas às instabilidades e oscilações em Física de Plasmas. Estes e outros tópicos, vistos no primeiro curso, deverio ser, também, publicados.

Nas referências bibliográficas são citados os textos principais utilizados na preparação deste trabalho, relacionando-se, ainda, algumas obras cuja leitura se recomenda para um aprofundamento no assunto abordado.

Agradecemos ao Dr. R.M.O. Galvão e à Srta. I.H. Tan pela revisão do texto e às Srtas. I.T. Yokomizo e I. Carneiro pela datilografia.

## CONTEÚDO

### I. INTRODUÇÃO

1. Fusão Termonuclear Controlada
2. Tokamaks
3. Equilíbrio do Plasma em Tokamaks
4. Instabilidades do Plasma em Tokamaks
5. Operação de Tokamaks em Regimes Estáveis

### II. EQUILÍBRIO MHD EM SISTEMAS COM SIMETRIA AXIAL

1. Equações Básicas
2. Equilíbrio MHD em Coordenadas Cilíndricas
3. Equilíbrio MHD em Coordenadas Toroidais
4. Equilíbrio MHD em Coordenadas de Fluxo Ortogonais
5. Equilíbrio MHD em Coordenadas Helicoidais
6. Resoluções da Equação de Grad-Shafranov
  - 6.a. Solução considerando  $I'$  nulo e  $P'$  constante
  - 6.b. Solução considerando  $P'$  constante e  $I^2 \propto \psi$
7. Cálculo aproximado da Transformada Rotacional em um Tokamak
8. Medida Experimental de  $\psi$
9. Problemas

## I. INTRODUÇÃO

### I.1. FUSÃO TERMONUCLEAR CONTROLADA

O principal objetivo do programa de fusão termonuclear controlada é o de aquecer um gás (constituído por átomos leves) à uma temperatura bastante elevada, e confiná-lo através de campos eletromagnéticos por um período de tempo suficientemente longo, de forma a se conseguir uma quantidade de energia (através das reações nucleares de fusão) maior que a consumida nos processos de confinamento e aquecimento<sup>1,2</sup>.

A reação nuclear que se mostra mais viável para ser utilizada nos futuros reatores é<sup>3,4</sup>:



cuja seção de choque, em função da temperatura de aquecimento do gás, é mostrada a seguir<sup>3</sup>.

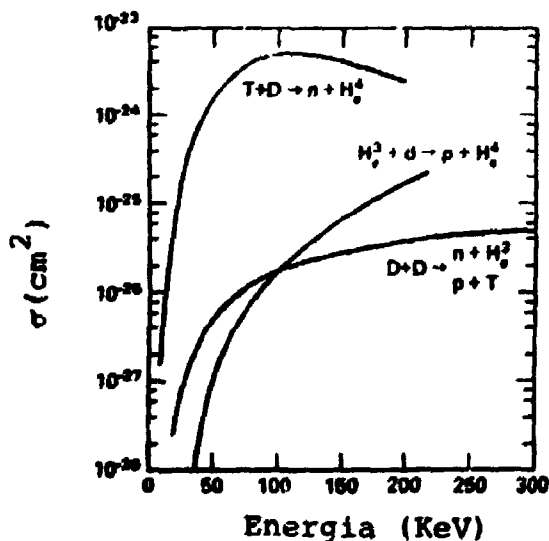


Fig. I - A reação D-T, pela sua alta seção de choque, é a mais viável de ser utilizada nos futuros reatores.

A barreira coulombiana que atua durante uma colisão deutério-trítio é de aproximadamente 150 KeV. Em um plasma que

se encontra à uma temperatura média  $\bar{T} \sim 100 \text{ KeV}$ , toda partícula que possui velocidade igual ou superior que a velocidade média da distribuição, terá também energia suficiente para transpor essa barreira.

Levando-se em conta o efeito quântico de tunelamento, mostra-se ainda que uma temperatura de  $T \sim 10 \text{ KeV}$  já seria suficientemente alta para permitir uma obtenção de energia razoavelmente maior que a consumida, numa reação D-T<sup>3</sup>. Nesse caso, a densidade  $n$  do plasma, e o tempo de confinamento  $\tau$ , estariam relacionados pela condição:

$$n\tau \geq 1 \times 10^{14} \text{ s/cm}^3 \quad (2)$$

conhecida como critério de Lawson, que relaciona, para temperaturas diferentes, o valor mínimo do produto  $n\tau$ , para que a energia produzida no processo de fusão seja maior do que a gasta nesse processo<sup>3</sup>.

## I.2. TOKAMAKS

As máquinas de confinamento com geometria toroidal têm se mostrado mais convenientes que as de geometria linear, uma vez que as primeiras não possuem extremidades, por onde as partículas poderiam escapar.

O tokamak, entre todas as máquinas de confinamento, foi a que apresentou, até o momento, os resultados mais promissores, no que se refere à obtenção da fusão termonuclear controlada<sup>6</sup>.

Os principais conceitos em que se baseia o funcionamento dessa máquina foram desenvolvidos durante a década de 50,

principalmente pelo físico russo Artsimovich. Já na década seguinte, alguns tokamaks entraram em operação no Instituto Kurchatov em Moscou. Os resultados experimentais obtidos, apresentados em 1968 na conferência de Novosibirsk, patrocinada pela IAEA, alcançaram tremenda repercussão entre os físicos de plasma dos países ocidentais. Um grupo de físicos britânicos especializados em diagnósticos por laser (espalhamento Thomson), trabalhou no Instituto Kurchatov, em 1969, e confirmou os resultados anunciados pelos russos e que estavam sendo encarados, até então, com uma certa incredulidade<sup>6</sup>.

A seguir, Artsimovich proferiu uma série de conferências no Instituto de Tecnologia de Massachussets - EUA, bastante informativas, e já em 1970 entrava em operação o primeiro tokamak americano, reconstruído de um stellerator, na Universidade de Princeton.

É curioso, no entanto, notar que a construção do primeiro tokamak fora da URSS, ocorreu em 1965 em Camberra - Austrália. Com esse tokamak, uma equipe de pesquisa pequena conseguiu obter resultados científicos importantes<sup>7</sup>.

Na década de 70 houve um enorme esforço mundial no sentido de construir novos tokamaks e de desenvolver diagnósticos mais precisos e eficientes.

Na tabela I encontram-se relacionados alguns parâmetros típicos relativos ao: tokamak T-3 (Kurchatov, 1969), às máquinas recentes de grande porte<sup>6</sup> e ao primeiro tokamak brasileiro, o TBR-1, instalado na Universidade de São Paulo<sup>8</sup>.

Atualmente, dois gigantes tokamaks entraram em operação (o TFTR de Princeton - EUA e o JET - Inglaterra), e outros dois já estão na fase final de construção (na URSS e no Japão). A principal finalidade desses quatro tokamaks, é o de

Parâmetros	T-3	máquina de grande porte	TBR-1
$I_p$ (corrente de plasma)	130 KA	2000 KA	10 KA
$\tau_p$ (tempo de descarga)	70 ms	12 s	6 ms
$T_e$ (temperatura de elétrons)	1500 eV	3500 eV	100 eV
$T_i$ (temperatura de íons)	500 eV	7500 eV	10 eV
$n_e$ (densidade de elétrons)	$5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$	$1 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$	$\sim 10^{13} \text{ cm}^{-3}$
$\tau_E$ (tempo de confinamento)	10 ms	100 ms	0,5 ms(?)

TABELA I

operar em regime de reator, e alcançar a marca do "break-even", i.é., conseguir retirar, pelo menos, a mesma quantidade de energia que a consumida; e desta forma, demonstrar a viabilidade da fusão termonuclear controlada.

Esse quadro poderia levar-nos a concluir que o funcionamento de pequenos tokamaks é desnecessário; isso, todavia, não é verdade. Tokamaks de pequeno porte ainda são bastante úteis, não somente ao adestramento de pessoal científico, mas para auxiliar também no grande esforço empreendido mundialmente em busca da fusão termonuclear controlada. Um exemplo bastante significativo é o tokamak TOSCA, que possui as mesmas dimensões geo-



métricas que as do TBR-1 e que deu importantes contribuições aos aspectos de equilíbrio, instabilidades e aquecimento de plasmas<sup>6</sup>.

### I.3. EQUILÍBRIO DO PLASMA EM TOKAMAKS

Nesta seção será apresentada uma breve introdução a respeito dos mecanismos de funcionamento de tokamaks<sup>3,9</sup>. Em geral, será considerado um modelo simplificado (o denominado "tokamak padrão"), que possui uma razão de aspecto,  $\frac{R_0}{a}$ , grande ( $\frac{R_0}{a} \gg 1$ , sendo  $R_0$  e  $a$  os raios maiores e menores, respectivamente), seção circular, e simetria axial (as variáveis não dependerão, portanto, de  $\phi$ ); veja Fig. II.

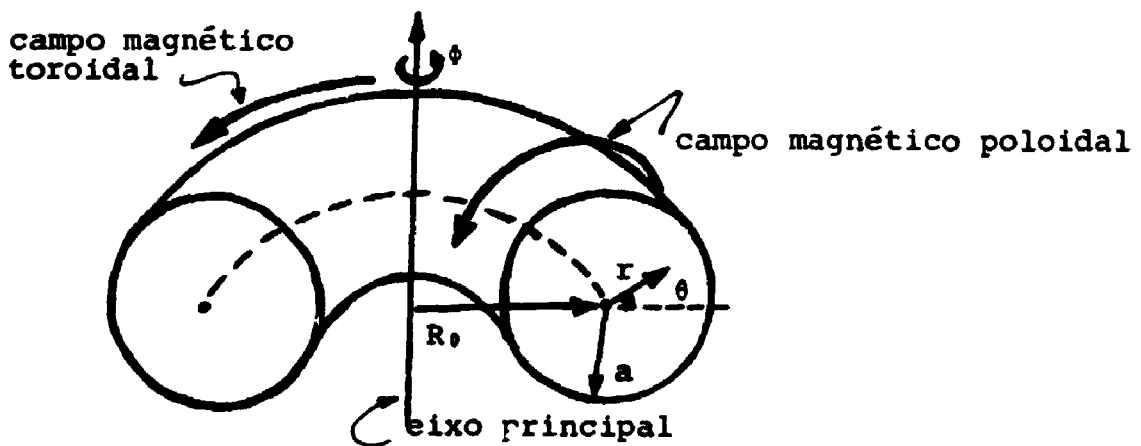


Fig. II - Os campos magnéticos toroidal e poloidal compõe o princípio básico de funcionamento dos tokamaks.

O campo magnético toroidal ( $B_\phi$ ) é criado por uma corrente elétrica quase-estacionária, que percorre um conjunto de espiras externas, enroladas ao redor do torus, conforme esquematizado na Fig. III.

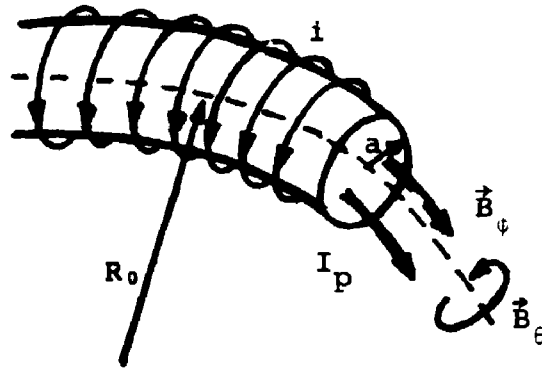


Fig. III - Uma corrente elétrica quase-estacionária, pelas espiras toroidais, é que provoca a formação do campo  $B_\phi$ .

A corrente de plasma  $I_p$ , a qual é criada pela variação do fluxo magnético induzido por um transformador elétrico, gera, por sua vez, um campo magnético poloidal ( $B_\theta$ ). O acoplamento desses dois campos,  $B_\phi$  e  $B_\theta$ , resulta em um campo magnético composto de linhas de força helicoidais que tendem a confinar as partículas do gás em movimento. Em geral, o passo das hélices varia com  $r$ .

Duas intersecções sucessivas de uma linha de força com o plano poloidal correspondente a  $\phi = \text{constante}$ , após uma volta toroidal completa ( $\Delta\phi = 2\pi$ ), determinam uma variação  $i$  na coordenada angular  $\theta$  ( $\Delta\theta = i$ ). Supondo-se

$$i = 2\pi \frac{n}{m}, \quad (3)$$

onde  $m, n$  são inteiros positivos, então a linha de força fecha-se sobre si mesma, após  $n$  voltas na direção poloidal e  $m$  voltas na toroidal terem sido dadas. Se considerarmos, por exemplo, que  $m$  voltas são dadas na direção toroidal, então:

$$l = (m) \left( 2\pi \frac{n}{m} \right) = 2\pi n \quad ; \quad (4)$$

o qual é um número bem definido. Todavia, de maneira geral, as linhas de força seguem a relação:

$$l = (2\pi) \cdot (\text{número irracional}) \quad . \quad (5)$$

O modelo cilíndrico, correspondente à uma grande razão de aspecto ( $\frac{R_0}{a} \gg 1$ ), é quase sempre bastante útil e comumente adotado, porque simplifica muito os cálculos numéricos e exhibe prontamente várias características importantes dos plasmas confinados por tokamaks. Nesse caso, deve-se considerar a seguinte correspondência de variáveis:

$$(r, \theta, \phi) \longrightarrow (r, \theta, z = \phi R) \quad ,$$

de modo que os parâmetros do equilíbrio tornam-se independentes de  $z$ , e as perturbações passam também a ser descritas por funções periódicas em  $z$ . Deve-se ressaltar, entretanto, que ao se considerar  $\frac{R_0}{a} \gg 1$ , estão sendo desprezados os efeitos toroidais.

Vamos agora discutir rapidamente como ocorre uma descarga elétrica em um tokamak (veja Fig. IV).

Inicialmente carrega-se o banco de capacitores, e com o fechamento da chave  $K$ , um intenso fluxo magnético ( $\psi$ ) será induzido na região interna do tokamak. A partir da lei de Faraday, obtém-se então

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial \psi}{\partial t} \longrightarrow 2\pi R E_\phi = - \frac{\partial \psi}{\partial t} \longrightarrow E_\phi = - \frac{1}{2\pi R} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad . \quad (6)$$

O campo elétrico  $E_\phi$ , assim gerado, dá origem a uma densidade de corrente elétrica  $j_\phi$ , de acordo com a equação:

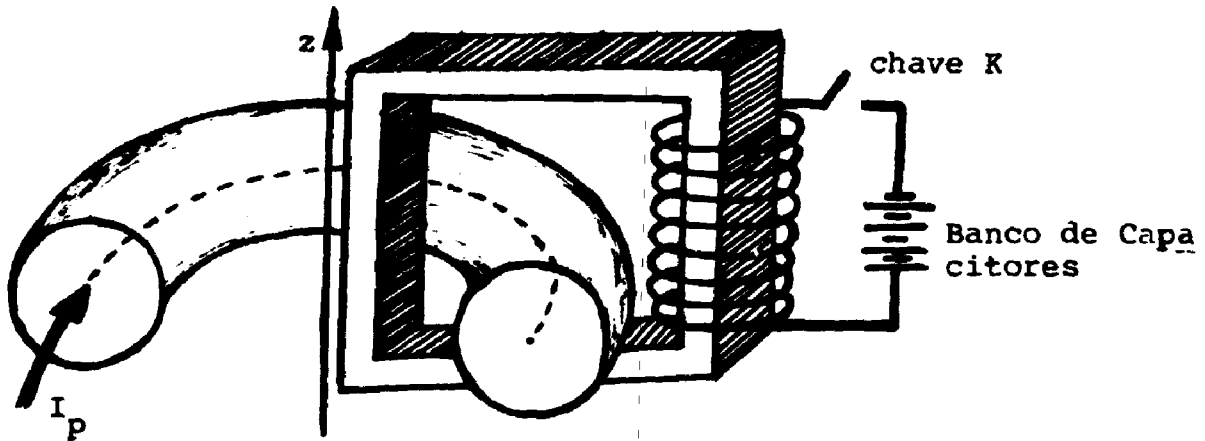


Fig. IV - A corrente de plasma é formada segundo princípios idênticos aos da corrente secundária em um transformador.

$$E_{\phi} = \eta j_{\phi} \quad (7)$$

ou seja, o plasma desempenha a função do secundário em um transformador. Esse mecanismo só funciona, entretanto, se o tempo de penetração do fluxo magnético através do vaso toroidal for muito menor que aquele durante o qual a variação de fluxo ocorre.

Nessa configuração, as linhas de força do campo magnético total, devem satisfazer a relação:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} = \frac{dl}{B} \quad (8)$$

Quando a aproximação  $z = R \cdot \phi$  é utilizada (modelo cilíndrico), pode-se escrever ainda:

$$\frac{rd\theta}{B_{\theta}} = \frac{Rd\phi}{B_{\phi}} = \frac{dl}{B} \quad (9)$$

Seguindo-se, então, uma linha de força em uma volta completa ao redor do toroide, tem-se que:

$$d\phi = \frac{rB_\phi}{RB_\theta} d\theta = q(r)d\theta \quad ; \quad (10)$$

sendo que o termo

$$q(r) = \frac{rB_\phi}{RB_\theta} \quad (11)$$

é denominado "fator de segurança" do tokamak.

Da definição de  $l$ , dada anteriormente, se  $\Delta\phi=2\pi$  então  $\Delta\theta=l$ , de forma que no limite de  $\Delta\phi \rightarrow d\phi$ ,  $\Delta\theta \rightarrow d\theta$ , e o fator de segurança  $q$  poderá ser também escrito como:

$$2\pi = ql \rightarrow q = \frac{2\pi}{l} .$$

Uma linha de força do campo magnético resultante, ao redor do toroide, pode ser percorrida várias e várias vezes, sem que se chegue ao ponto de partida; à ela está associada, então, uma superfície magnética, caracterizada por um determinado valor de  $q$ . As outras linhas de força apresentarão também, o mesmo comportamento, cada qual correspondente ao seu próprio valor de  $q$  e que, como um todo, formam várias camadas, bastante próximas umas das outras, dando idéia de uma "cebola". As únicas exceções, entretanto, se referem às camadas correspondentes à  $q = \frac{m}{n}$ , cujas linhas de forças, associadas à tais camadas, dão voltas ao redor do vaso até atingirem o ponto inicial. Essas superfícies são chamadas "superfícies racionais" e, como veremos posteriormente, desempenham um papel muito importante no que se refere aos processos de instabilidades que ocorrem durante o confinamento do plasma.

O aspecto geométrico do toróide determina por si próprio que as espiras toroidais, ao serem instaladas, se posicionem de mo-

do a estarem mais próximas umas das outras na região radial interna do vaso, do que na radial externa, conforme é mostrado na Fig. V. Isso resulta na formação de um campo magnético toroidal mais intenso em um lado do que no outro, e dessa forma, uma força radial expansiva passa a agir sobre todos os anéis de corrente  $d\vec{j}$ , que formam a corrente de plasma, e atua sobre a coluna de plasma como um todo.

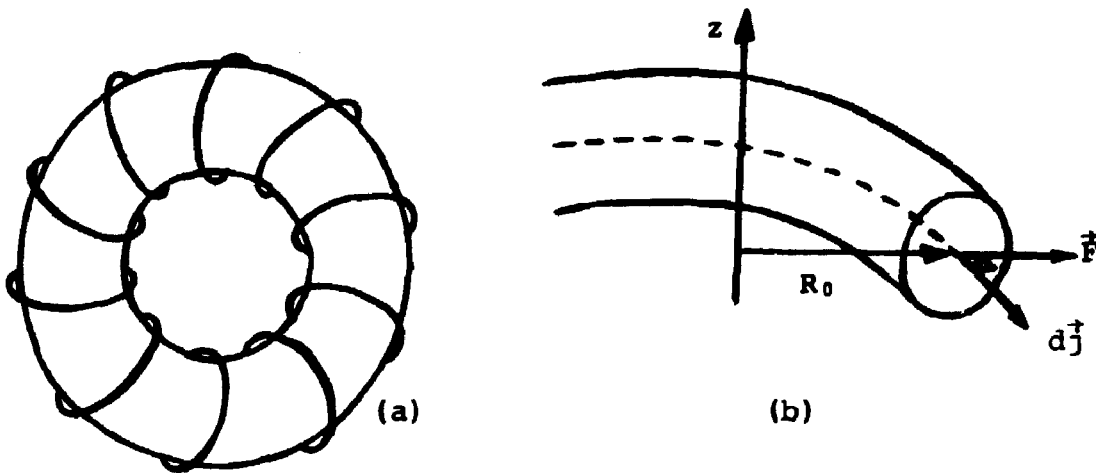


Fig. V - As espiras toroidais são mais espaçadas ao longo da região radial externa (a), o que resulta no aparecimento de uma força expansiva sobre os elementos de corrente  $d\vec{j}$  (b).

Essa força pode ser escrita como:

$$|\vec{F}| \approx |\vec{j} \times \Delta \vec{B}_\theta| \approx j \Delta B_\theta \approx j B_\theta \frac{2a}{R_0} \quad , \quad (12)$$

e ela sempre precisa ser contrabalanceada através de um campo externo conveniente. Isso é feito com a utilização de espiras localizadas convenientemente próximas ao vaso (ver Fig. VI), e que produzem um campo magnético, na região do plasma, de direção vertical. A força que atua no plasma, correspondente à esse campo, é então escrita como:

$$\vec{F}_V \approx \vec{j} \times \vec{B}_V \approx -j B_V \hat{e}_r \quad . \quad (13)$$

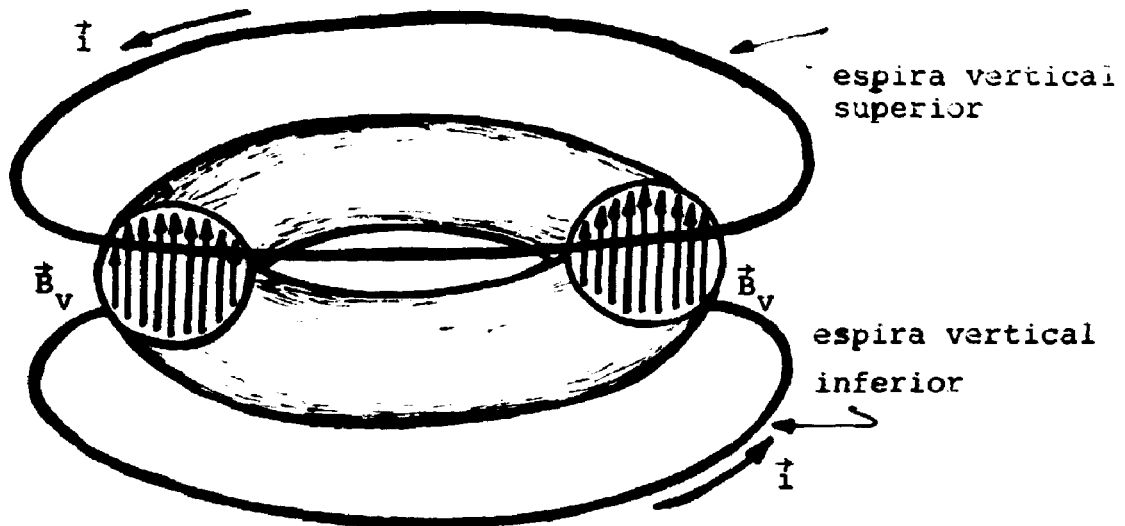


Fig. VI - A força expansiva sobre os anéis de corrente é devidamente cancelada com a introdução de espiras verticais.

Das equações (12) e (13), obtêm-se:

$$B_V = \Delta B_\theta = \frac{2a}{R_0} B_\theta \quad . \quad (14)$$

A configuração das linhas de força resultante da su posição dos campos  $B_V$  e  $B_\theta$  será, portanto, da forma apresen tada na Fig. VII.

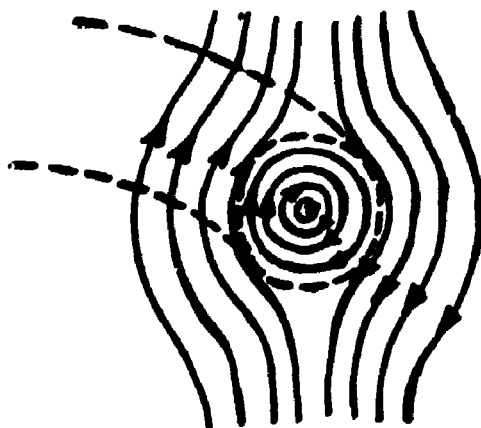


Fig. VII - A superposição dos campos  $B_V$  e  $B_\theta$  determinam que as linhas de força, no interior do vaso, sejam fechadas

#### I.4. INSTABILIDADES DO PLASMA EM TOKAMAKS

Qualquer instabilidade em tokamaks, como veremos posteriormente em detalhes, pode ser escrita como<sup>10</sup>:

$$\delta F \sim f(r) e^{i(m\theta + n\phi)} ; \quad (15)$$

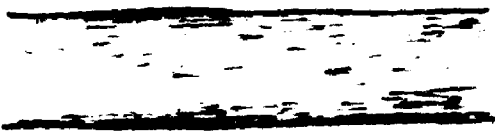
sendo  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ , os números de onda dos modos.

As principais instabilidades são:

##### a) Instabilidades de dobra ("kink instabilities")

Elas aparecem próximas à superfície do plasma, em torno das superfícies magnéticas com  $q = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \dots$ , quando tais superfícies são formadas fora da região de plasma<sup>11</sup> (ou seja, no vácuo). A presença dessas instabilidades acarreta a deformação da coluna, como mostrado na Fig. VIII.

a) Equilíbrio



b) Instabilidade de dobra



Fig. VIII - As instabilidades de dobra se caracterizam por deformarem toda a superfície externa da coluna de plasma.

A magnetohidrodinâmica (MHD) é a teoria que propriamente descreve as instabilidades de dobra, e isso é feito considerando-se o plasma como um fluido ideal (sem resistividade), linearizando-se as equações MHD, e considerando:



$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad . \quad (16)$$

A instabilidade de dobra com  $m=n=1$  é a mais perigosa em tokamaks e pode ser evitada se a condição

$$q(r) > 1$$

for satisfeita<sup>5</sup>.

b) Instabilidades de ruptura ("tearing instabilities")

A utilização da teoria MHD é também bastante apropriada na predição teórica dessas instabilidades<sup>11</sup>. Nesse caso a grande alteração a ser realizada, é considerar a existência da resistividade elétrica do fluido, de forma que a eq. (16) passa então a ser escrita como:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \quad . \quad (17)$$

O aspecto mais interessante, associado às instabilidades de ruptura, se refere à formação de ilhas magnéticas, que surgem devido aos distúrbios no campo magnético, em torno das superfícies racionais (e que nesse caso, localizam-se no interior do plasma).

A confirmação experimental dessas duas instabilidades é obtida ao se analisar as oscilações dentes-de-serra e as de Mirnov<sup>11,12</sup>.

As oscilações dentes-de-serra podem ser observadas através da detecção dos raios-X de baixas energias, emitidos pela região central da coluna de plasma; e que correspondem à superposição de dois modos, o  $m=0$  ( $\sim 5$  a  $10$  KHz), e o  $m=1$  ( $\sim 40$  a  $80$  KHz), conforme mostrado na Fig. IX. A condição necessária para o surgimento dessas oscilações é a de se ter, no centro do

plasma, um fator de segurança menor que um ( $q(0) < 1$ ).

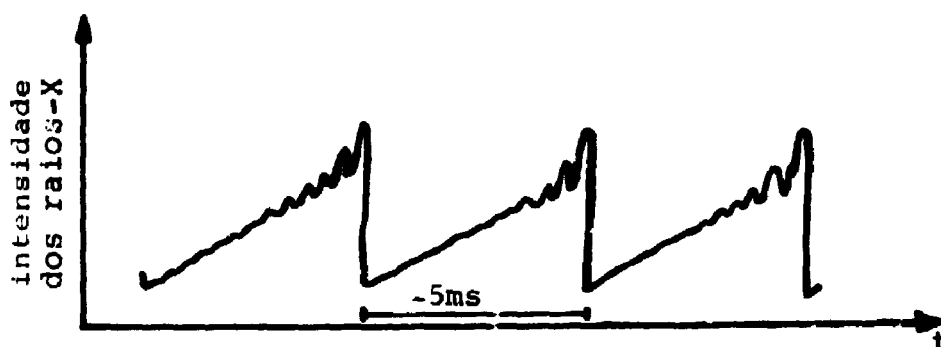


Fig.IX - A instabilidade de ruptura ( $m=n=1$ ) é a causadora das oscilações dentes-de-serra, correspondente ao modo  $m=n=0$

As oscilações de Mirnov, por outro lado, são detetadas, posicionando-se pequenas espiras magnéticas ao redor do plasma. Essas oscilações estão associadas às superfícies racionais, no interior da coluna, e suas frequências características situam-se na faixa de 10 a 100 KHz.

### c) Instabilidade de disruptura

Essa instabilidade é a mais perigosa porque, quando surge, provoca uma súbita queda na corrente de plasma, determinando, por vezes, o seu completo aniquilamento. A disruptura frequentemente ocorre em regimes de altas densidades de partículas, e altas correntes de plasma, e são precedidas por oscilações de Mirnov de amplitudes crescentes<sup>11,12</sup>.

Os mecanismos pelos quais essas instabilidades são produzidas no plasma, ainda não são muito bem compreendidos; porém já existe algumas evidências experimentais de que elas ocorrem após o acoplamento entre dois diferentes modos de oscilação<sup>11</sup>, o que corresponde à superposição de suas respectivas ilhas

magnéticas.

As variações típicas nos valores da corrente de plasma ( $I_p$ ), e do potencial elétrico induzido ( $V_{loop}$ ) são mostradas na Fig. X.

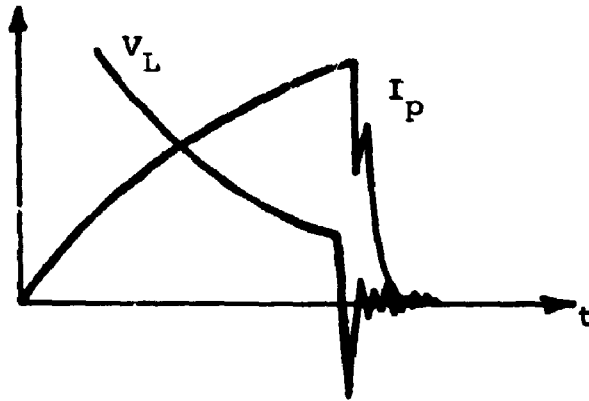


Fig. X - Uma tensão de "loop" negativa é sempre observada quando ocorre uma instabilidade de ruptura.

Já é um fato bastante conhecido (e que também será discutido em maiores detalhes posteriormente), que há algumas condições envolvendo certos parâmetros do plasma, que devem ser satisfeitas, de modo a se obter descargas mais estáveis em tokamaks.

A mais importante dentre elas, é a conhecida "condição de Krushal-Shafranov", representada pela inequação<sup>11</sup>:

$$q(r) > 1 \quad ; \quad 0 < r < a \quad . \quad (18)$$

Uma vez que  $q(r) = \frac{rB_\phi}{RB_\theta}$ , conclui-se que tal condição limita a intensidade da corrente de plasma, já que para um determinado campo magnético  $B_\phi$ , fixo,  $B_\theta$  não pode possuir um valor qualquer.

Estudando-se os modos de ruptura, demonstra-se que eles não são prejudiciais ao equilíbrio do plasma, se for satis

feita a condição<sup>5</sup>:

$$q(a) \geq 3 \quad . \quad (19)$$

Vamos agora definir um parâmetro ( $\beta$ ) que corresponde à razão entre a pressão cinética e a pressão magnética:

$$\beta = \frac{P}{\frac{B^2}{2\mu_0}} \quad , \quad P = NK(T_i + T_e) \quad . \quad (20)$$

Podemos definir ainda, da mesma maneira:

$$\beta_{\text{poloidal}} = \frac{P}{\frac{B_\theta^2}{2\mu_0}} \quad . \quad (21)$$

Para que a condição de equilíbrio seja mantida, é necessário, também, que o campo poloidal seja suficientemente grande de modo que tenhamos<sup>5</sup>

$$\frac{B_\theta^2}{2\mu_0 P} \geq \frac{a}{R}$$

ou então,

$$\beta_{\text{poloidal}} \geq \frac{R}{a} \quad . \quad (22)$$

O máximo valor permitido para  $\beta$ , pode ser encontrado, fazendo-se:

$$\frac{\beta}{\beta_P} = \frac{B_\theta^2}{B_\phi^2 + B_\theta^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{B_\phi}{B_\theta}\right)^2} \quad .$$

Utilizando-se as equações (19) e (22), e lembrando-se da definição de  $q(r)_{r=a}$ , pode-se escrever a relação

$$\beta \leq \frac{\frac{R}{a}}{1 + \left(\frac{R}{3a}\right)^2} \approx \frac{a}{9R} \quad , \quad (23)$$

que determina uma nova condição a ser também satisfeita. Deve-se ressaltar, porém, que esse resultado foi obtido para tokamaks de secção circular; para outras secções, no entanto, valores maiores de  $\beta$  poderiam ser alcançados.

### 1.5. OPERAÇÃO DE TOKAMAKS EM REGIMES ESTÁVEIS

Da condição representada pela eq. (19), pode-se escrever que:

$$q(a) = \frac{a}{R} \frac{B_\phi}{B_\theta} > 3 \quad . \quad (24)$$

Através da aplicação da lei de Ampère, pode-se escrever que

$$\int \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_p \rightarrow B_\theta(a) = \frac{\mu_0 I_p}{2\pi a} \quad , \quad (25)$$

de forma que, combinando-se as equações (24) e (25), chega-se a:

$$q(a) = \frac{2\pi B_\phi a^2}{\mu_0 R I_p} \quad ,$$

de onde se obtém uma expressão que determina o máximo valor permitido para  $I_p$ , dada por:

$$I_p \leq \frac{2\pi B_\phi}{\mu_0 q(a)_{\min}} \frac{a^2}{R} \quad . \quad (26)$$

Portanto, para cada  $q(a)$ , existe um valor de  $I_{p\text{m}\acute{a}x}$ ,  
 $\min$  acima do qual as instabilidades macroscópicas tornam-se intolera-  
 ráveis.

Por outro lado, da definição de  $\beta$  e da eq. (23), é  
 imediato escrever que:

$$\frac{2\mu_0 NK (T_i + T_e)}{B^2} \leq \frac{a}{9R} ,$$

de onde se conclui que o máximo valor para a densidade de partí-  
 cula, em um regime estável, é dada por:

$$N < \frac{a}{9R} \frac{B^2}{2\mu_0 (T_i + T_e)} . \quad (27)$$

Levando-se em conta esses limites de densidade e cor-  
 rente, representados pelas equações (26) e (27) respectivamente,  
 podemos estabelecer regiões nas quais a operação de tokamaks po-  
 daria ser realizada em regimes estáveis. Essas regiões, num dia-  
 grama  $I_p$ - $N$ , são apresentadas na Fig. XI<sup>5</sup>.

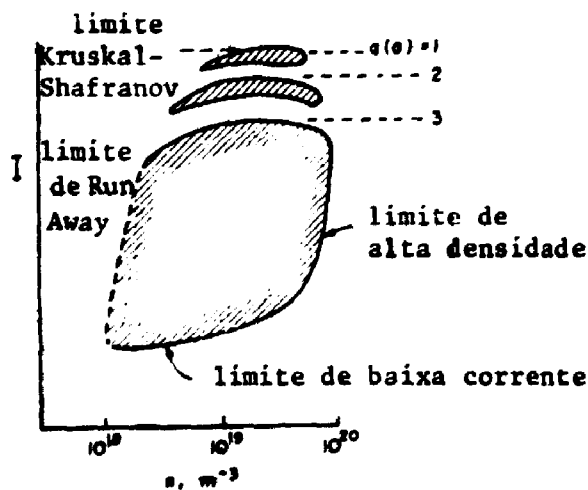


Fig. XI - Ilustração das regiões de operação de tokamaks em regimes estáveis.

Na figura acima, a linha tracejada que delimita parte da região correspondente à  $q(a) = 3$ , é denominada "limite de elétrons fugitivos" porque quando a densidade cai abaixo de um certo valor, a probabilidade de um elétron efetuar uma colisão com um íon torna-se cada vez menor, e conseqüentemente, o livre caminho médio desses elétrons torna-se cada vez maior. Realizando poucas colisões, alguns elétrons absorvem mais e mais energia do campo elétrico aplicado, tornando-se extremamente energéticos, o que os torna capazes de fugir ao confinamento, e por isso denominados de "fugitivos" ("run-away electrons"). O surgimento desses elétrons deve ser evitado porque dissipam energia do plasma<sup>5</sup>.

## II. EQUILÍBRIO MHD EM SISTEMAS COM SIMETRIA AXIAL

### II.1. EQUAÇÕES BÁSICAS

Embora o conhecimento preciso dos mecanismos que de terminam o equilíbrio de plasmas magneticamente confinados seja bastante difícil, várias das condições básicas que devem ser sa tisfeitas, podem ser obtidas através das equações MHD<sup>12,13</sup>.

Essas equações são constituídas pelas relações fun-  
damentais:

Conservação do número de partículas

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (28)$$

Conservação do momento linear

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla P + \vec{j} \times \vec{B} \quad (29)$$

Equação de transporte de energia (caso adiabático)

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) (P \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (30)$$

ou

condição de fluido incompressível

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad , \quad (31)$$

além das equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (32)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (33)$$



$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (34)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (35)$$

Nas expressões acima,  $\vec{v}$  é a velocidade do fluido, e  $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$  é a razão entre os calores específicos à pressão e volume constantes.

Supondo que o sistema se encontre em um estado muito próximo ao do equilíbrio termodinâmico, e que a velocidade de um elemento de fluido seja nula, podemos escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \quad \text{e} \quad \vec{v} = 0 \quad , \quad (36)$$

de forma que as relações (28) a (31) resultam em:

$$\nabla P = \vec{j} \times \vec{B} \quad (37)$$

Denominando  $\vec{E}'$  o campo elétrico medido em um referencial que se move com velocidade  $\vec{v}$  (igual à do fluido), e de  $\vec{E}$  o campo medido no referencial do laboratório (inercial), a transformação de Lorentz que os relaciona, é dada por:

$$\vec{E}' = (1-\gamma) \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{E}}{v^2} \right) + \gamma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad ,$$

sendo  $\gamma$ , nesse caso, igual à  $(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$ .

Pelo fato da energia cinética média das partículas no plasma não ser muito elevada, tem-se então que  $\frac{v}{c} \ll 1$ , e portanto:

$$\vec{E}' \approx \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \eta \vec{j} \quad , \quad (38)$$

sendo que

$$\vec{j}' = \vec{j} - \sigma \vec{v} \approx \vec{j} \quad .$$

A teoria MHD ideal considera a resistividade  $\eta$  do plasma desprezível (o fluido possui temperatura alta), de forma que a eq. (38) torna-se:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad , \quad (39)$$

e, como  $\vec{v} \sim 0$  ,

$$\vec{E} = 0 \quad . \quad (40)$$

Aplicando-se as relações de (36) e a condição (40) nas equações de Maxwell, tem-se ainda, que:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (41)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad . \quad (42)$$

É interessante notar que multiplicando-se por  $\vec{B}$  a equação (37) (que juntamente com a (41) e (42), forma o conjunto de equações básicas do equilíbrio MHD ideal), obtém-se que:

$$\vec{B} \cdot \nabla P = 0 \quad , \quad (43)$$

de onde se verifica que  $P$  é constante ao longo das linhas de força do campo magnético, ou seja,  $\nabla P \perp \vec{B}$ . Se da mesma maneira fôr realizada uma multiplicação por  $\vec{j}$ , chega-se então, que:

$$\vec{j} \cdot \nabla P = 0 \quad , \quad (44)$$

de forma que  $P$ , por sua vez, é constante ao longo das linhas constituídas pelo vetor  $\vec{j}$ . Apesar dos resultados (43) e (44), em geral,

$$\vec{j} \times \vec{B} \neq 0 \quad \text{e} \quad \vec{j} \cdot \vec{B} \neq 0 \quad .$$

## II.2. EQUILÍBRIO MHD EM COORDENADAS CILÍNDRICAS

O sistema de coordenadas cilíndricas, definido pelo conjunto de variáveis  $R$ ,  $\phi$  e  $Z$ , é representado em função do toróide, no esboço abaixo (Fig. XII); sendo que a geometria do sistema permite considerar o equilíbrio como sendo independente de  $\phi$ , ou seja,  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ .

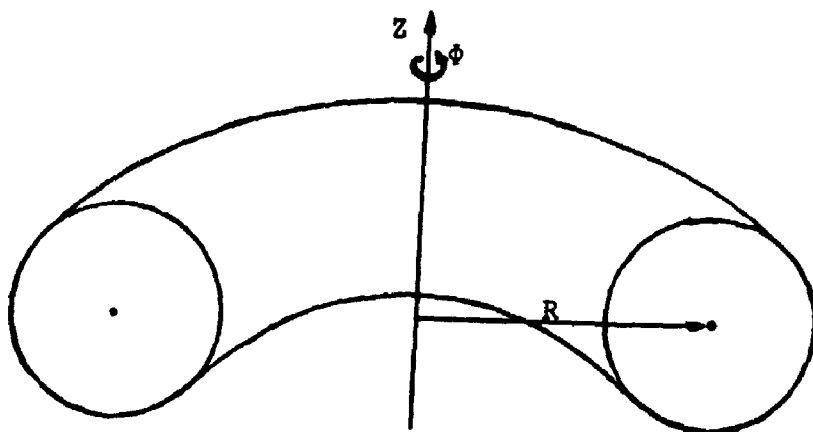


Fig. XII - As variáveis  $R$ ,  $Z$  e  $\phi$  é que formam o sistema de coordenadas cilíndricas.

A equação (41) é então escrita em função dessas coordenadas, como:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_R) + \frac{\partial}{\partial Z} (B_Z) = 0, \quad (45)$$

que é automaticamente satisfeita, se considerarmos as componentes  $B_R$  e  $B_Z$  do campo magnético total sendo dadas por:

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad \text{e} \quad B_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R}, \quad (46)$$

sendo  $\psi$  uma variável que depende de  $R$  e  $Z$  ( $\psi = \psi(R, Z)$ ).

Aplicando-se, ainda, o operador divergente aos dois lados da equação (42), pode-se escrever

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad ,$$

o que resulta em equações, para as componentes de  $\vec{j}$ , análogas às obtidas para o vetor  $\vec{B}$  (eqs. (46)):

$$j_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial I}{\partial Z} \quad \text{e} \quad j_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial I}{\partial R} \quad ; \quad I = I(R, Z) \quad . \quad (47)$$

Substituindo-se (46) e (47) em (42), obtêm-se as componentes:

$$\mu_0 j_R = -\frac{\partial B_\phi}{\partial Z} \rightarrow -\frac{\mu_0}{R} \frac{\partial I}{\partial Z} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial Z} \quad (48)$$

$$\mu_0 j_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RB_\phi) \rightarrow \frac{\mu_0}{R} \frac{\partial I}{\partial R} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (RB_\phi) \quad (49)$$

$$\mu_0 j_\phi = -\frac{\partial B_Z}{\partial R} + \frac{\partial B_R}{\partial Z} \quad . \quad (50)$$

As equações (48) e (49) são simultaneamente satisfeitas com a escolha de

$$I = \frac{RB_\phi}{\mu_0} \rightarrow B_\phi = \frac{\mu_0 I}{R} \quad . \quad (51)$$

Substituindo-se  $B_Z$  e  $B_R$ , da equação (50), pelas expressões apresentadas em (46), chega-se então a:

$$j_\phi = -\frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) \right\} \quad . \quad (52)$$

Denominando-se o operador  $R \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$ , de  $\Delta^*$ , a equação (52) pode, então, ser apresentada numa forma mais compacta:

$$j_\phi = -\frac{1}{\mu_0 R} \Delta^* \psi \quad . \quad (53)$$

Se da mesma forma forem substituídas as equações

(46) e (47), na equação (37) teremos então as seguintes componentes:

i) componente em  $\phi$ :

$$\frac{\partial P}{\partial \phi} = -j_R B_Z + j_Z B_R = 0 \rightarrow \frac{\partial I}{\partial Z} \frac{\partial \psi}{\partial R} = \frac{\partial I}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} ,$$

que corresponde ao jacobiano

$$J \begin{pmatrix} \psi, I \\ R, Z \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial R} & \frac{\partial \psi}{\partial Z} \\ \frac{\partial I}{\partial R} & \frac{\partial I}{\partial Z} \end{vmatrix} = 0 ;$$

de onde se conclui que  $I$  é função de  $\psi$  ( $I = I(\psi)$ ) e que, portanto, suas derivadas em  $R$  e  $Z$  podem ser expressas por:

$$\frac{\partial I}{\partial R} = \frac{\partial I}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial R} = I' \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad \text{e} \quad \frac{\partial I}{\partial Z} = \frac{\partial I}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial Z} = I' \frac{\partial \psi}{\partial Z} . \quad (54)$$

ii) componente radial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial R} &= -j_Z B_\phi + j_\phi B_Z = -\frac{\mu_0 I}{R^2} \frac{\partial I}{\partial R} - \frac{1}{\mu_0 R^2} (\Delta^* \psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial R} \right) = \\ &= -\frac{1}{\mu_0 R^2} (\Delta^* \psi + \mu_0^2 I I') \frac{\partial \psi}{\partial R} . \end{aligned} \quad (55)$$

iii) componente em  $Z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial Z} &= -j_\phi B_R + j_R B_\phi = -\frac{1}{\mu_0 R^2} (\Delta^* \psi) \left( \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) - \frac{\mu_0 I}{R^2} \frac{\partial I}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \\ &= -\frac{1}{\mu_0 R^2} (\mu_0^2 I I' + \Delta^* \psi) \frac{\partial \psi}{\partial Z} . \end{aligned} \quad (56)$$

As equações (55) e (56) mostram que também  $P=P(\psi)$ .

Uma vez que tanto a corrente quanto a pressão dependem dessa fun

ção escalar  $\psi$ , em sistemas com simetria em  $\phi$ , a obtenção dessa função possibilita a análise das condições de estabilidade do plasma.

Sendo  $P = P(\psi)$ , então

$$\frac{\partial P}{\partial R} = P' \frac{\partial \psi}{\partial R} ,$$

e a partir da equação (55) podemos escrever  $\Delta^* \psi$  na forma:

$$\Delta^* \psi = - \mu_0 R^2 P' - I I' \mu_0^2 , \quad (57)$$

que é a conhecida Equação de Grad-Shafranov, a qual deve ser resolvida, de forma a se obter  $\psi(R,Z)$ , uma vez conhecidas as funções  $P(\psi)$  e  $I(\psi)$ .

As expressões gerais de  $\vec{B}$  e  $\vec{j}$  que satisfazem as condições (46), (47), (51) e (53), são:

$$\vec{B} = \frac{1}{R} \left[ \nabla \psi \times \hat{e}_\phi + \mu_0 I \hat{e}_\phi \right] \quad (58)$$

e

$$\vec{j} = \frac{1}{R} \left[ \nabla I \times \hat{e}_\phi - \frac{\Delta^* \psi}{\mu_0} \hat{e}_\phi \right] , \quad (59)$$

sendo  $\hat{e}_\phi$  o versor correspondente à coordenada  $\phi$ .

De modo a comprovarmos a validade das expressões (58) e (59), vamos utilizá-las, por exemplo, no cálculo de  $B_z$  e  $j_\phi$ .

$$\begin{aligned} B_z &= \hat{e}_z \cdot \vec{B} = \frac{1}{R} \hat{e}_z \cdot \left\{ \nabla \psi \times \hat{e}_\phi + \mu_0 I \hat{e}_\phi \right\} = \\ &= \frac{1}{R} \left\{ \hat{e}_z \cdot \nabla \psi \times \hat{e}_\phi + \mu_0 I \hat{e}_z \cdot \hat{e}_\phi \right\} = \frac{1}{R} \left\{ \nabla \psi \cdot \hat{e}_\phi \times \hat{e}_z \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow B_z = \frac{1}{R} \left\{ \nabla \psi \cdot \hat{e}_R \right\} , \end{aligned}$$

o que implica em pegarmos apenas a componente radial do gradiente

te, ou seja:

$$B_z = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \psi \quad ,$$

e

$$\begin{aligned} j_\phi &= \hat{e}_\phi \cdot \vec{j} = \frac{1}{R} \left\{ \hat{e}_\phi \cdot \nabla I \times \hat{e}_\phi - \frac{\Delta^* \psi}{\mu_0} \hat{e}_\phi \right\} = \\ &= \frac{1}{R} \left\{ \nabla I \cdot \hat{e}_\phi \times \hat{e}_\phi - \frac{\Delta^* \psi}{\mu_0} \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi \right\} = -\frac{1}{\mu_0 R} \Delta^* \psi \quad , \end{aligned}$$

como já sabíamos.

### II.3. EQUILÍBRIO MHD EM COORDENADAS "TOROIDAIS"

As variáveis que compõem o sistema de coordenadas toroidais, são representadas por  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ ; sendo  $\hat{e}_r$ ,  $\hat{e}_\theta$  e  $\hat{e}_\phi$ , seus respectivos versores. Enquanto a componente  $\phi$  é idêntica a das coordenadas cilíndricas,  $r$  e  $\theta$  estão relacionadas com  $R$  e  $Z$  segundo o esquema da Fig. XIII.

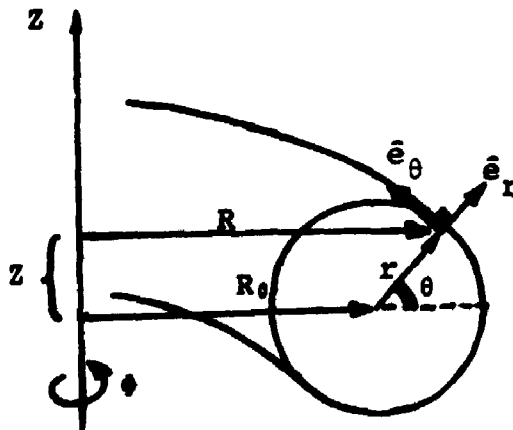


Fig. XIII - No esquema, estão representadas o sistema de coordenadas "toroidais" ( $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ ) e seus respectivos versores ( $\hat{e}_r$ ,  $\hat{e}_\theta$ ,  $\hat{e}_\phi$ ).

É imediato perceber que um sistema de coordenadas po de ser escrito em função do outro, segundo as relações:

$$\begin{aligned} R - R_0 &= r \cos \theta \longrightarrow R = R_0 + r \cos \theta \\ Z &= r \sin \theta \\ \phi &= \phi \end{aligned} \quad (60)$$

ou então:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(R-R_0)^2 + Z^2} \\ \theta &= \arctg \left( \frac{Z}{R-R_0} \right) \\ \phi &= \phi \end{aligned} \quad (61)$$

Por sua vez, o conjunto de versores de um sistema pode ser escrito em função dos versores do outro sistema, da forma:

$$\begin{aligned} \hat{e}_R &= \cos \theta \hat{e}_r - \sin \theta \hat{e}_\theta & \hat{e}_r &= \cos \theta \hat{e}_R + \sin \theta \hat{e}_z \\ \hat{e}_z &= \sin \theta \hat{e}_r + \cos \theta \hat{e}_\theta & \text{ou} & \hat{e}_\theta &= -\sin \theta \hat{e}_R + \cos \theta \hat{e}_z \\ \hat{e}_\phi &= \hat{e}_\phi & \hat{e}_\phi &= \hat{e}_\phi \end{aligned} \quad (62)$$

Vamos agora procurar escrever as componentes do campo magnético já conhecidas (equações (46) e (51)), em termos das coordenadas "toroidais", definidas acima.

Antes porém, é preciso escrever o operador gradiente

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \hat{e}_R + \frac{\partial}{\partial Z} \hat{e}_z$$

em termos dessas novas coordenadas.

Sabemos que

$$Z = Z(r, \theta) \quad \text{e} \quad R = R(r, \theta) \quad ;$$



assim

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial R} .$$

Utilizando as relações (61), obtemos que:

$$\frac{\partial r}{\partial R} = \frac{R-R_0}{\sqrt{Z^2 + (R-R_0)^2}} = \frac{R_0 - R}{r} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta ,$$

e

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{1}{1 + \frac{Z^2}{(R-R_0)^2}} \left[ - \frac{Z}{(R-R_0)^2} \right] = \frac{-r \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = -\frac{\sin \theta}{r} ,$$

onde foi utilizada a identidade:

$$\frac{\partial}{\partial X} \arctg X = \frac{1}{1+X^2} .$$

Da mesma forma, em relação à variável  $Z$ , temos:

$$\frac{\partial r}{\partial Z} = \frac{Z}{r} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{R-R_0}{(R-R_0)^2 + Z^2} = \frac{\cos \theta}{r} .$$

Substituindo-se esses resultados na expressão do gradiente, e lembrando ainda dos resultados obtidos em (62), chegamos que:

$$\nabla_{\text{coord. tor.}} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{e}_\theta . \quad (63)$$

As componentes  $B_r$ ,  $B_\theta$  e  $B_\phi$ , podem agora ser obtidas, retomando novamente a expressão geral para  $\vec{B}$ , definida em (58):

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad B_r &= \hat{e}_r \cdot \vec{B} = \frac{1}{R} \left\{ \hat{e}_r \cdot \nabla\psi \times \hat{e}_\phi + \mu_0 I \hat{e}_r \cdot \hat{e}_\phi \right\} = \\
 &= \frac{1}{R} \left\{ \nabla\psi \cdot \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r \right\} = \frac{1}{R} \left\{ \nabla\psi \cdot (-\hat{e}_\theta) \right\} = -\frac{1}{rR} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \quad (64)
 \end{aligned}$$

$$\text{ii)} \quad B_\theta = \hat{e}_\theta \cdot \vec{B} = \frac{1}{R} \left\{ \hat{e}_\theta \cdot \nabla\psi \times \hat{e}_\phi + \mu_0 I \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\phi \right\} = \frac{1}{R} \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (65)$$

$$\text{iii)} \quad B_\phi = \hat{e}_\phi \cdot \vec{B} = \frac{1}{R} \left\{ \hat{e}_\phi \cdot \nabla\psi \times \hat{e}_\phi + \mu_0 I \hat{e}_\phi \cdot \hat{e}_\phi \right\} = \frac{\mu_0 I}{R} \quad (66)$$

Para obter-se as componentes do vetor densidade de corrente ( $\vec{j}$ ) nessas coordenadas, tem-se primeiro que calcular o operador  $\Delta^*$  utilizando-se as relações (60) a (62), e a seguir, utilizar o mesmo procedimento adotado acima (veja exercícios 4 e 5, no ítem II.9).

#### II.4. EQUILÍBRIO MHD EM COORDENADAS DE FLUXO ORTOGONAIS

O sistema de coordenadas de fluxo, representado por  $\psi$ ,  $\chi$  e  $\phi$ , é utilizado principalmente na análise de ondas e instabilidades do plasma<sup>14</sup>.

A primeira componente desse sistema, é a própria função  $\psi$ , solução da equação de Grad-Shafranov (equação (57)); a terceira é a coordenada ignorada  $\phi = -\phi$  e a segunda ( $\chi$ ) é escolhida de modo que  $\psi$ ,  $\chi$  e  $\phi$  formem um sistema ortogonal. A condição de  $\psi$ ,  $\chi$  e  $\phi$  serem coordenadas linearmente independentes, permite-nos escrever:

$$\nabla\psi \cdot \nabla\chi = 0 \rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial r} \frac{\partial\chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial\chi}{\partial\theta} = 0 \quad ,$$

ou então,

$$\psi_r \chi_r + \frac{1}{r^2} \psi_\theta \chi_\theta = 0 \quad , \quad (67)$$

sendo  $M_n = \frac{\partial M}{\partial n}$ , a notação utilizada.

A coordenada  $\chi$ , de certo modo, corresponde a um ângulo ( $0 \leq \chi \leq 2\pi$ ), que satisfaz às seguintes condições de contorno:

$$\text{se } \theta = 0 \text{ , então } \chi = 0$$

$$\text{se } \theta = 2\pi \text{ , então } \chi = 2\pi \text{ .}$$

As linhas representativas das regiões internas ao toróide, correspondentes a pontos de mesmos valores de  $\psi$  e  $\chi$ , são mostradas na Fig. XIV. Essas linhas, em suas intersecções, são perpendiculares entre si.

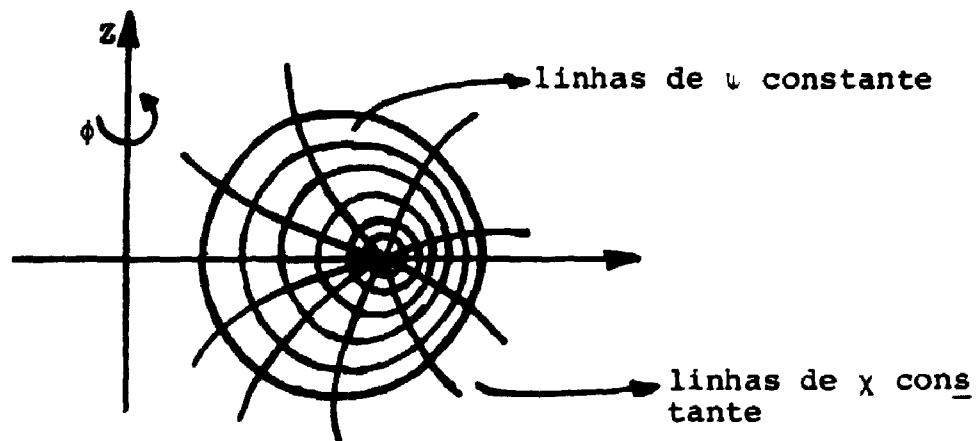


Fig. XIV - As linhas correspondentes a  $\psi$  e  $\chi$  constantes se interceptam, no interior do vaso, formando ângulos perpendiculares entre si.

Vamos procurar agora escrever as componentes de  $\vec{B}$  e  $\vec{j}$  nessas coordenadas. Para isso, será preciso obter os versores  $\hat{e}_\psi$  e  $\hat{e}_\chi$  correspondentes; e será suposto ainda, que tanto a função  $\psi(r, \theta)$ , como suas derivadas em  $r$  e  $\theta$ , já são conhecidas.

Pela definição de um versor, temos:

$$\hat{e}_\psi = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} = \frac{\psi_r \hat{e}_r + \frac{1}{r} \psi_\theta \hat{e}_\theta}{\sqrt{\psi_r^2 + \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2}} \quad , \quad (68)$$

e como

$$\hat{e}_\chi = \hat{e}_\phi \times \hat{e}_\psi = \frac{\psi_r \hat{e}_\phi \times \hat{e}_r + \frac{1}{r} \psi_\theta \hat{e}_\phi \times \hat{e}_\theta}{\sqrt{\psi_r^2 + \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2}} \quad ,$$

então

$$\hat{e}_\chi = \frac{\psi_r \hat{e}_\theta - \frac{1}{r} \psi_\theta \hat{e}_r}{\sqrt{\psi_r^2 + \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2}} \quad . \quad (69)$$

De posse desses resultados, e recorrendo também a equação (58), teremos então que:

$$\begin{aligned} B_\chi &= \hat{e}_\chi \cdot \vec{B} = \frac{1}{R} \left[ \hat{e}_\chi \cdot \nabla\psi \times \hat{e}_\phi + \mu_0 I \hat{e}_\chi \cdot \hat{e}_\phi \right] = \\ &= \frac{1}{R} \left[ \nabla\psi \cdot \hat{e}_\phi \times \hat{e}_\chi \right] = -\frac{1}{R} \nabla\psi \cdot \hat{e}_\psi = -\frac{1}{R} \nabla\psi \cdot \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} \quad , \end{aligned}$$

ou seja,

$$B_\chi = -\frac{1}{R} \frac{|\nabla\psi|^2}{|\nabla\psi|} = -\frac{1}{R} |\nabla\psi| \quad . \quad (70)$$

Da mesma maneira, podemos obter, pela equação (68), que

$$\begin{aligned} B_\psi &= \hat{e}_\psi \cdot \vec{B} = \frac{\nabla\psi}{|\nabla\psi|} \cdot \vec{B} = \\ &= \frac{1}{R |\nabla\psi|} \left[ \nabla\psi \cdot \nabla\psi \times \hat{e}_\phi + \mu_0 I \nabla\psi \cdot \hat{e}_\phi \right] = 0 \quad , \quad (71) \end{aligned}$$

uma vez que  $\nabla\psi$  não possui a componente em  $\phi$ .

Quanto à  $B_\phi$ , naturalmente,

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{R} \quad . \quad (72)$$

Já que

$$\vec{B} = B_\chi \hat{e}_\chi + B_\phi \hat{e}_\phi$$

conforme demonstrado acima, e sendo  $B_\phi$  a componente toroidal, então  $B_\chi$  estará, necessariamente, relacionado com o campo poloidal do sistema.

Anteriormente, havíamos definido a função denominada "fator de segurança" do tokamak, como sendo

$$q(r) = \frac{r B_\phi}{R B_\theta} \quad . \quad (73)$$

Essa expressão, no entanto, foi obtida utilizando-se a aproximação cilíndrica para o toróide, e portanto, não constitui-se numa equação exata. Uma relação mais geral para  $q(r)$ , pode ser obtida através das coordenadas de fluxo.

Vamos primeiramente calcular os coeficientes métricos  $h_1$ ,  $h_2$  e  $h_3$ , correspondentes às coordenadas  $\psi$ ,  $\chi$  e  $\phi$ .

Um deslocamento infinitesimal  $d\vec{s}$ , no espaço tri-dimensional, pode ser igualmente representado por qualquer sistema de coordenadas:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 \quad - \text{ coord. cartesianas}$$

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (Rd\phi)^2 \quad - \text{ coord. "toroidais"}$$

$$(ds)^2 = (h_1 d\psi)^2 + (h_2 d\chi)^2 + (h_3 d\phi)^2 \quad - \text{ coord. de fluxo .}$$

Já que  $d\bar{s}$  não depende do sistema adotado, então:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (Rd\phi)^2 = (h_1 d\psi)^2 + (h_2 d\chi)^2 + (h_3 d\phi)^2 . \quad (73)$$

Dessa equação, imediatamente concluímos que

$$h_3 = R . \quad (74)$$

Mas como,

$$d\psi = \psi_r dr + \psi_\theta d\theta \quad (75)$$

$$d\chi = \chi_r dr + \chi_\theta d\theta , \quad (76)$$

que substituídas em (74) (e após simples desenvolvimento de cálculos), chega-se a:

$$\begin{aligned} (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 &= (h_1^2 \psi_r^2 + h_2^2 \chi_r^2) (dr)^2 + \\ &+ (h_1^2 \psi_\theta^2 + h_2^2 \chi_\theta^2) (d\theta)^2 + (2h_1^2 \psi_r \psi_\theta + 2h_2^2 \chi_r \chi_\theta) (dr d\theta) . \end{aligned}$$

Comparando-se os termos dos dois lados dessa igualdade, tem-se que:

$$h_1^2 \psi_r^2 + h_2^2 \chi_r^2 = 1$$

$$h_1^2 \psi_\theta^2 + h_2^2 \chi_\theta^2 = r^2$$

$$2h_1^2 \psi_r \psi_\theta + 2h_2^2 \chi_r \chi_\theta = 0 ,$$

o que corresponde à um sistema de três equações e duas incógnitas, cuja solução é dada por:

$$h_1 = (\psi_r^2 + \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2)^{-1/2} \quad (77)$$

$$h_2 = \frac{r \psi_r}{\chi_\theta} (\psi_r^2 + \frac{1}{r^2} \psi_\theta^2)^{-1/2} \quad (78)$$

Lembrando que  $|\nabla\psi| = \sqrt{\psi_r^2 + (\frac{1}{r} \psi_\theta)^2}$ , e que  $B_\chi = \frac{|\nabla\psi|}{R}$ , podemos escrever (77) na forma:

$$h_1 = \frac{1}{|\nabla\psi|} = \frac{1}{R B_\chi} \quad (79)$$

Através da definição matemática do jacobiano (J), o coeficiente  $h_2$ , por sua vez, pode também ser escrito em função das equações (74) e (79), da forma:

$$J = h_1 h_2 h_3 = (R) (h_2) \left( \frac{1}{R B_\chi} \right) \longrightarrow h_2 = B_\chi J \quad (80)$$

O significado físico do fator de segurança, conforme já discutido, corresponde à razão entre os caminhos infinitesimais percorridos, ao longo de uma linha de força, nas direções toroidal e poloidal, respectivamente. No sistema de coordenadas de fluxo, isso equivale à relação:

$$q = q(\psi, \chi) = \frac{d\phi}{d\chi} \quad (81)$$

Procuraremos agora obter uma expressão que relacione  $d\phi$  com  $d\chi$ . Para isso, consideremos um elemento de deslocamento ( $d\vec{\ell}$ ), que esteja sempre orientado tangencialmente às linhas de força do campo magnético resultante; isso é,

$$\vec{B} \times d\vec{\ell} = 0 \quad (82)$$

Como  $B_\psi = 0$  (equação (71)), então

$$\vec{B} = B_\chi \vec{e}_\chi + B_\phi \vec{e}_\phi ;$$

mas como  $d\vec{\ell}$  é sempre paralelo à linha de força considerada, e esta não possui componente  $\psi$ , então  $d\vec{\ell} = (0, h_2 d\chi, h_3 d\phi)$ , de modo que a equação (82) resulta em:

$$h_3 B_\chi d\phi - h_2 B_\phi d\chi = 0 ,$$

e portanto

$$\frac{d\phi}{d\chi} = \frac{h_2 B_\phi}{h_3 B_\chi} = \frac{J}{R} B_\phi . \quad (83)$$

Substituindo (83) em (81), tem-se finalmente que

$$q = \frac{J}{R} B_\phi . \quad (84)$$

A dependência de  $q$  com relação à  $\chi$ , se dá através do jacobiano  $J$ , no qual ela aparece explicitamente. Integrando-se a equação (84) em  $\chi$ , num período completo ( $2\pi$ ), obtém-se uma expressão para o valor médio do fator de segurança, da forma:

$$\bar{q} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{J B_\phi}{R} d\chi = \frac{1}{2\pi} \Delta\phi , \quad (85)$$

sendo  $\Delta\phi$ , o aumento de  $\phi$  após  $\Delta\chi = 2\pi$  (uma volta completa na direção poloidal). Representando o toróide "aberto" em um diagrama  $\phi$ - $\chi$  (Fig. XV), podemos visualizar melhor a coerência desses resultados.



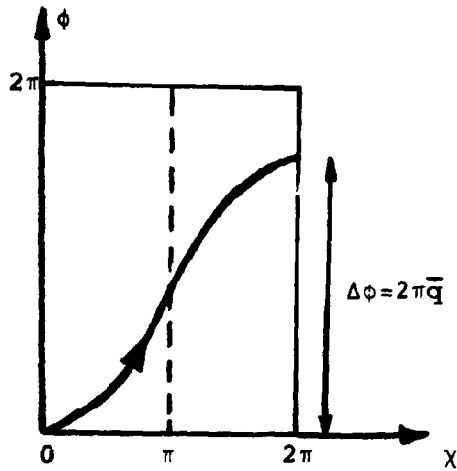


Fig. XV - À uma variação em  $\chi$ , de  $2\pi$ , corresponderá uma variação em  $\phi$  de  $2\pi\bar{q}$ .

Se

$$\bar{q} = \frac{m}{n} = \text{número racional} ,$$

as linhas de força fecham-se em si mesmas após  $m$  voltas na direção toroidal, e  $n$  voltas na direção poloidal. A transformação rotacional passa, então, a ser definida como:

$$t = \frac{2\pi}{\bar{q}} ;$$

resultado semelhante àquele já obtido anteriormente (equação (11)).

## II.5. EQUILÍBRIO MHD EM COORDENADAS HELICOIDAIS

A seguir serão considerados equilíbrios com simetria helicoidal dependentes das coordenadas  $r$  e  $u = \theta - hz$ , sendo  $h$  uma constante e  $\theta$  e  $z$  definidos com relação ao toróide, segundo a Fig. XVI<sup>15</sup>.

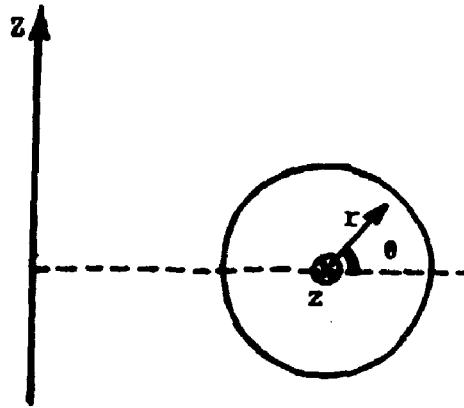


Fig. XVI - O sistema de coordenadas helicoidais é formado pelas variáveis  $r$  e  $u = \theta - hz$ , sendo  $h$  uma constante.

É imediato perceber que, para qualquer par de valores ( $r$  e  $u$ ), constantes, a condição  $u = \theta - hz = \text{constante}$  representa a equação de uma hélice; assim:

$$du = d\theta - h dz = 0 \rightarrow d\theta = h dz \quad , \quad (86)$$

ou seja, à qualquer variação  $d\theta$ , sempre corresponderá uma variação linear  $dz$ , em função da constante  $h$ .

Um elemento de deslocamento situado ao longo de uma linha helicoidal, correspondente à um dado valor de  $r$ , pode ser escrito como:

$$d\vec{l} = r d\theta \hat{e}_\theta + dz \hat{e}_z = (rh \hat{e}_\theta + \hat{e}_z) dz \quad , \quad (87)$$

o que é facilmente verificado através da Fig. XVII.

O versor  $\hat{e}_u$ , convenientemente definido de forma a ser sempre tangente à hélice, é escrito como:

$$\hat{e}_u = \frac{d\vec{l}}{dl} = \frac{hr \hat{e}_\theta + \hat{e}_z}{\sqrt{1 + (hr)^2}} \quad . \quad (88)$$

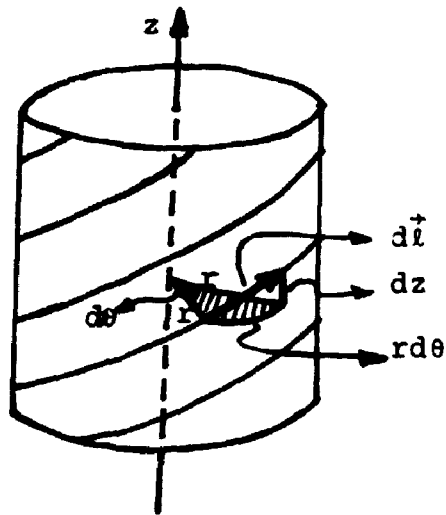


Fig.XVII - O elemento de deslocamento  $d\vec{l}$ , ao longo de uma hélice, pode ser decomposto nas componentes  $rd\theta$  e  $dz$ .

O versor  $\hat{e}_{hel.}$ , por sua vez, possui direção perpendicular à hélice e está contido na superfície cilíndrica descrita por  $r = \text{constante}$ . Esse novo versor, juntamente com  $\hat{e}_u$  e  $\hat{e}_r$ , formam a base ortogonal (veja Fig. XVIII) necessária à descrição do equilíbrio MHD.

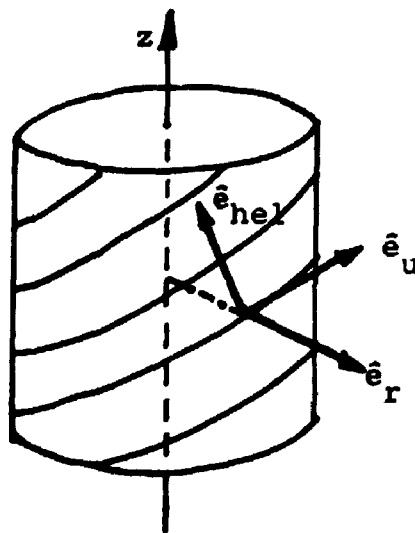


Fig. XVIII - Na figura são mostradas as direções e sentidos dos versores  $\hat{e}_{hel}$ ,  $\hat{e}_u$  e  $\hat{e}_r$ , formando uma base ortogonal.

Por ser sempre perpendicular à hélice, a obtenção de  $\hat{e}_{hel}$  pode ser realizada através do gradiente de  $u$ :

$$\hat{e}_{hel} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} ;$$

mas

$$\begin{aligned} \nabla u = \nabla(\theta - hz) &= \frac{\partial}{\partial r} (\theta - hz) \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\theta - hz) \hat{e}_\theta + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} (\theta - hz) \hat{e}_z , \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\nabla u = \frac{1}{r} \hat{e}_\theta - h \hat{e}_z . \quad (89)$$

Dessa forma

$$\hat{e}_{hel} = \frac{\nabla u}{|\nabla u|} = \frac{\frac{1}{r} \hat{e}_\theta - h \hat{e}_z}{\sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + h^2}} = \frac{\hat{e}_\theta - hr \hat{e}_z}{\sqrt{1 + (hr)^2}} . \quad (90)$$

É fácil mostrar, utilizando-se as equações (89) e (90),

que

$$\hat{e}_u \times \hat{e}_{hel} = \hat{e}_r$$

$$\hat{e}_{hel} \cdot \hat{e}_u = 0 .$$

O campo magnético total pode ser decomposto de forma que uma de suas componentes tenha a mesma direção e sentido de  $\hat{e}_{hel}$ . A determinação dessa componente (utilizando-se a equação (58)), é feito a seguir:

$$\begin{aligned} B_{hel} &= \vec{B} \cdot \hat{e}_{hel} = \frac{1}{r} \left[ \nabla \psi \cdot \hat{e}_\phi \times \hat{e}_{hel} + \mu_0 I \hat{e}_{hel} \cdot \hat{e}_\phi \right] = \\ &= \frac{1}{r} \left[ \nabla \psi \cdot \hat{e}_\phi \times \frac{\hat{e}_\theta - hr \hat{e}_z}{\sqrt{1 + (hr)^2}} + \frac{\mu_0 I}{\sqrt{1 + (hr)^2}} (\hat{e}_\theta - hr \hat{e}_z) \cdot \hat{e}_\phi \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + (hr)^2}} \left[ -hr \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\mu_0 I}{r} \right] = \frac{1}{\sqrt{1 + (hr)^2}} \left[ -hr B_z + B_\theta \right] ,$$

ou seja,

$$B_{hel} = \frac{B_z}{\sqrt{1 + (hr)^2}} \left[ \frac{B_\theta}{B_z} - hr \right] . \quad (91)$$

Devemos ressaltar que nos cálculos anteriores utilizou-se o sistema de coordenadas cilíndricas, e considerou-se ainda o eixo  $z$  como sendo o eixo geométrico do toróide (o que corresponde à situação em que a razão de aspecto é muito grande), o que implica, portanto, em  $\theta \equiv \phi$ .

A constante  $h$ , como justificaremos posteriormente, pode ser convenientemente escolhida como sendo:

$$h = \frac{1}{R_0} \frac{n}{m} , \quad (92)$$

onde  $n$  e  $m$  são números inteiros positivos, e  $2\pi R_0$  é o comprimento do cilindro periódico.

Assim, a equação (91) pode ser posta na forma:

$$B_{hel} = B_z \left( \frac{B_\theta}{B_z} - \frac{n}{m} \frac{r}{R_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (hr)^2}} = B_z \frac{r}{R_0} \left( \frac{R_0}{r} \frac{B_\theta}{B_z} - \frac{n}{m} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (hr)^2}}$$

ou então:

$$B_{hel} = B_z \frac{r}{R_0} \left( \frac{1}{q} - \frac{n}{m} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + (hr)^2}} \quad (93)$$

de onde se conclui que essa componente anula-se justamente na superfície em que  $\frac{1}{q} = \frac{n}{m}$ .

A equação

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 ,$$

permite-nos escrever uma expressão para o campo magnético, em termos de uma função vetorial (potencial vetor), como:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad , \quad (94)$$

cujas componentes são:

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ B_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (95)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \quad .$$

Supondo-se que  $\vec{A} = \vec{A}(r, u)$ , e sendo  $u = \theta - hz$ , podemos escrever ainda que

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial u} \quad , \quad e \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = -h \frac{\partial}{\partial u} \quad . \quad (96)$$

Substituindo-se as relações de (96) nas de (95), obtem-se:

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial u} + h \frac{\partial A_\theta}{\partial u} \\ B_\theta &= -h \frac{\partial}{\partial u} A_r - \frac{\partial A_z}{\partial r} \end{aligned} \quad (97)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial u} A_r \quad .$$

Introduzindo-se a função escalar  $\psi$ , tal que

$$\psi = A_z + hr A_\theta \quad , \quad (98)$$

obtêm-se então, a partir de (97), que:

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial u} \quad (99)$$

$$B_\theta - hr B_z = -\frac{\partial A_z}{\partial r} - h \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (100)$$

Se supusermos, por exemplo, uma situação de equilíbrio onde  $B_r = 0$  (linhas de força do campo poloidal são circulares), então

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{d\psi}{dr} \quad ,$$

e a equação (100) passa a ser escrita como:

$$\frac{d\psi}{dr} = hr B_z - B_\theta \quad ,$$

que, integrada em função de  $r$ , permite o cálculo de  $\psi$ , a partir da função  $q(r)$ , na forma:

$$\psi = \int_0^r (hr B_z - B_\theta) dr = \int_0^r \frac{r B_z}{R_0} \left( \frac{R_0 B_\theta}{r B_z} - h R_0 \right) dr \quad ;$$

mas como  $h = \frac{1}{R_0} \frac{n}{m}$ , e  $q(r) = \frac{r B_z}{R_0 B_\theta}$ , então:

$$\psi(r) = \frac{B_z}{R_0} \int_0^r \left( \frac{n}{m} - \frac{1}{q} \right) r dr \quad . \quad (101)$$

## II.6. RESOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE GRAD-SHAFRANOV

### II.6.a. SOLUÇÃO CONSIDERANDO I' NULO E P' CONSTANTE

Como visto anteriormente, se escrevermos o operador  $\Delta^*$  em coordenadas cilíndricas, a equação (57) de Grad-Shafranov torna-se:

$$\left\{ \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right\} \psi = - \mu_0 R^2 \frac{dP}{d\psi} - \mu_0^2 I \frac{dI}{d\psi} \quad (102)$$

Adotando perfis de corrente e pressão na forma<sup>16</sup>

$$P = -A(1 + \alpha^2)\psi + \text{cte} \rightarrow \frac{dP}{d\psi} = P' = -A(1 + \alpha^2) \quad (103)$$

e

$$I = \text{cte} \rightarrow \frac{dI}{d\psi} = I' = 0 \quad , \quad (104)$$

onde A e  $\alpha$  são constantes, a equação (102) torna-se:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) \psi = \mu_0 R^2 A(1 + \alpha^2) \quad ,$$

que admite solução da forma:

$$\psi = - \frac{\mu_0 A R^2}{8} (C + R^2 + 4\alpha^2 z^2) \quad . \quad (105)$$

Nessa equação, C também é uma constante, e possui um significado físico bastante interessante, o qual passaremos, agora, a analisar em detalhes.

Devemos, antes, ressaltar que, ao considerarmos I constante (equação (104)), estamos supondo que  $B_\phi \sim \frac{1}{R}$ , que é a dependência de  $B_\phi$  em R na ausência de plasma, ou seja, no



vácuo. Isso certamente não corresponde à realidade, visto que na formação do plasma, o campo toroidal é bastante alterado, devido aos efeitos paramagnético ou diamagnético do plasma.

Escrevendo o gradiente de  $\psi$  em coordenadas cilíndricas, temos:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial R} \hat{e}_R + \frac{\partial\psi}{\partial Z} \hat{e}_Z \quad , \quad (106)$$

de forma que, substituindo (105) em (106), chegamos a:

$$\nabla\psi = - \mu_0 A R \left[ \frac{1}{4} (C + 2R^2 + 4\alpha^2 Z^2) \hat{e}_R - R\alpha^2 Z \hat{e}_Z \right] \quad . \quad (107)$$

Impondo que o gradiente de  $\psi$  é nulo, através da equação (107), conseguimos obter as coordenadas  $(\bar{R}_0, \bar{Z}_0)$  correspondente à posição do "eixo magnético" do plasma. Esse eixo é definido de forma que em todos os seus pontos, o campo poloidal é nulo. Dessa forma:

$$\nabla\psi = - \mu_0 A \bar{R}_0 \left[ \frac{1}{4} (C + 2\bar{R}_0^2 + 4\alpha^2 \bar{Z}_0^2) \hat{e}_R - \bar{R}_0 \alpha^2 \bar{Z}_0 \hat{e}_Z \right] = 0 \quad ,$$

o que resulta nas equações:

$$- \mu_0 A \bar{R}_0 \left( \frac{C}{4} + \frac{\bar{R}_0^2}{2} + \alpha^2 \bar{Z}_0^2 \right) = 0 \quad (108)$$

e

$$- \mu_0 A \bar{R}_0^2 \bar{Z}_0 = 0 \rightarrow \bar{Z}_0 = 0 \quad . \quad (109)$$

Substituindo (109) em (108), obtemos que

$$\bar{R}_0^2 = - \frac{C}{2} \rightarrow \bar{R}_0 = \sqrt{-\frac{C}{2}} \quad , \quad (110)$$

de onde se conclui que  $C$  é uma constante necessariamente negativa, e que está intrinsecamente relacionada com a posição do eixo magnético.

Chamando por  $\psi(\bar{R}_0, \bar{Z}_0=0) \equiv \psi_0$ , o valor de  $\psi$ , no eixo magnético, temos então, pela equação (105), que:

$$\psi_0 = \frac{\mu_0 A \bar{R}_0^4}{8} \rightarrow A = \frac{8 \psi_0}{\mu_0 \bar{R}_0^4}, \quad (111)$$

de forma que

$$\psi = - \psi_0 \frac{R^2}{\bar{R}_0^4} (-2 \bar{R}_0^2 + R^2 + 4 \alpha^2 Z^2) \quad (112)$$

Estamos agora em condições de determinar as linhas isobáricas no plasma, através da expressão de  $\psi$ , fornecida pela equação (112). Isso é possível pois, conforme discutido anteriormente (item II.2), a pressão depende unicamente de  $\psi$  ( $P=P(\psi)$ ), e assim:

$$\nabla P = \frac{\partial P}{\partial \psi} \nabla \psi \quad (113)$$

No caso particular, onde  $\nabla \psi=0$ , teremos também  $\nabla P=0$  (veja Fig. XIX), o que constitui-se numa condição alternativa a ser utilizada na obtenção da posição do eixo magnético, quando tal procedimento for conveniente.

Vamos inicialmente relacionar as coordenadas cilíndricas que estão sendo utilizadas, com as coordenadas ditas "pseudo-toroidais" ( $r', \theta', \phi$ ), que são simplesmente as coordenadas toroidais, definidas a partir do eixo magnético do plasma, e não mais do seu eixo geométrico.

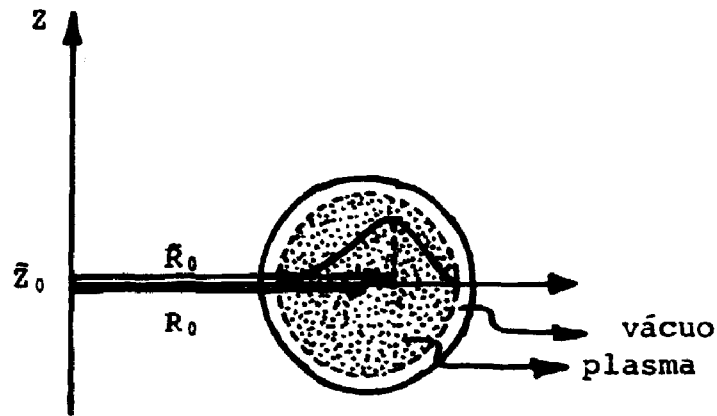


Fig. XIX - Na pressão no interior do plasma é máxima exatamente onde  $\nabla\psi = 0$ , o qual corresponde ao eixo magnético

Dessa maneira, podemos escrever as relações

$$\begin{aligned} R &= \bar{R}_0 + r' \cos \theta' \\ Z &= r' \sin \theta' \end{aligned} \quad (114)$$

que substituídas em (112), e efetuados os cálculos, resulta:

$$\begin{aligned} \psi = -\psi_0 \left\{ 1 - (4\alpha^2 \sin^2 \theta' + 4\cos^2 \theta') \left( \frac{r'}{\bar{R}_0} \right)^2 - \right. \\ \left. - (8\alpha^2 \sin^2 \theta' \cos \theta' + 4\cos^3 \theta') \left( \frac{r'}{\bar{R}_0} \right)^3 - (4\alpha^2 \sin^2 \theta' \cos^2 \theta') \left( \frac{r'}{\bar{R}_0} \right)^4 \right\} . \end{aligned}$$

Como  $\bar{R}_0$  é, basicamente, um parâmetro de construção da máquina ( $\bar{R}_0 \sim R_0$ ), e é sempre escolhido de forma que  $\frac{\bar{R}_0}{r} \gg 1$ , então  $\psi$  pode ser escrito como:

$$\psi = -\psi_0 \left\{ 1 - (4\alpha^2 \sin^2 \theta' + 4\cos^2 \theta') \left( \frac{r'}{\bar{R}_0} \right)^2 \right\} \quad (115)$$

sendo  $\alpha$  uma constante, que, dependendo do seu valor, determina

as várias formas possíveis (teóricas) para as linhas isobáricas.

No caso específico de se escolher  $\alpha=1$ , a função  $\psi$  não mais dependerá de  $\theta'$

$$\psi \sim -\psi_0 \left\{ 1 - 4 \left( \frac{r'}{R_0} \right)^2 \right\} \quad , \quad (116)$$

e conseqüentemente, as linhas isobáricas formam círculos concêntricos em torno do eixo magnético.

O campo magnético poloidal, nesse caso, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} B_{\theta'} &= \hat{e}_{\theta'} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r'} \left[ \hat{e}_{\theta'} \cdot \nabla \psi \times \hat{e}_{\phi} + \mu_0 I \hat{e}_{\theta'} \cdot \hat{e}_{\phi} \right] = \\ &= \frac{1}{r'} \nabla \psi \cdot \hat{e}_{r'} = \frac{1}{r'} \frac{\partial \psi}{\partial r'} \quad , \end{aligned}$$

ou então,

$$B_{\theta'} = -\psi_0 \left\{ -8 \left( \frac{r'}{R_0} \right) \right\} = 8 \psi_0 \frac{r'}{R_0} \quad , \quad (117)$$

que também não depende de  $\theta'$ , e cujas linhas de força são igualmente círculos concêntricos.

O sentido (horário ou anti-horário) das linhas poloidais, pode ser determinado calculando-se as componentes  $B_z$  e  $B_R$  do campo resultante, em coordenadas "toroidais". Vamos fazer isso, re-escrevendo  $\psi$  em função das coordenadas cilíndricas.

Pela Fig. XX, vemos que  $r'$  está relacionada com  $R$  e  $Z$ , da forma:

$$r'^2 = Z^2 + (R - \bar{R}_0)^2 \quad , \quad (118)$$

de modo que a equação (116) passa a ser escrita como:

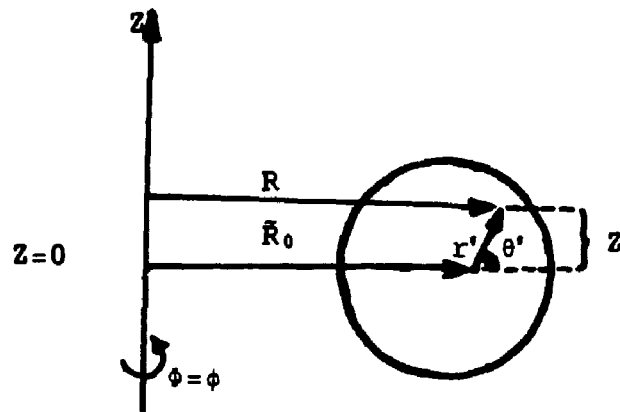


Fig. XX - Nessa figura está sendo mostrado como as coordenadas pseudo-toroidais estão relacionadas com as cilíndricas.

$$\psi \sim - \psi_0 \left\{ 1 - \frac{4}{\bar{R}_0^2} \left[ Z^2 + (R - \bar{R}_0)^2 \right] \right\} \quad (119)$$

Portanto temos, das equações em (46), que:

$$B_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} = - \frac{8\psi_0}{\bar{R}_0^2} \frac{(R - \bar{R}_0)}{R} \quad (120)$$

e

$$B_R = - \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} = \frac{8\psi_0}{\bar{R}_0^2} \frac{Z}{R} \quad (121)$$

de onde se conclui que, para valores de Z positivos,  $B_R$  é positivo; e para valores de R maiores que  $\bar{R}_0$ ,  $B_Z$  é negativo, o que demonstra ter, o campo magnético poloidal ( $\vec{B}_{\text{poloidal}} = \vec{B}_R + \vec{B}_Z$ ), o sentido horário, conforme indicado na Fig. XXI.

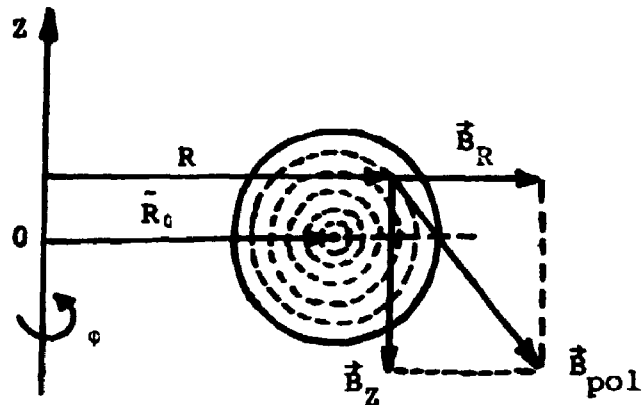


Fig. XXI - A adição entre os vetores  $\vec{B}_R$  e  $\vec{B}_z$  determinam o sentido (horário, nesse caso), do vetor  $\vec{B}_{pol}$ .

II.6.b. SOLUÇÃO CONSIDERANDO  $P'$  CONSTANTE E  $I^2 \propto \psi$

Iremos agora, obter uma solução aproximada da equação de Grad-Shafranov:

$$\Delta^* \psi = \mu_0 R^2 P' - I I' \mu_0^2 = -\mu_0 R^2 P' - \frac{1}{2} (I^2)' \mu_0^2, \quad (122)$$

para o caso dos perfis de corrente e pressão serem dados por:

$$I^2(\psi) = I_0^2 + I_1^2 \psi \quad (123)$$

e

$$P(\psi) = P_0 + P_1 \psi. \quad (124)$$

Utilizando (123) e (124) em (122), e sabendo que o operador  $\Delta^*$ , em coordenadas "toroidais", pode ser escrito como

$$\Delta^* = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} \left[ \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right], \quad (125)$$

podemos escrever que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R} \left[ \cos \theta \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right] = \\ = - \mu_0 R^2 P_1 - \frac{1}{2} \mu_0^2 I_1^2 \quad . \end{aligned} \quad (126)$$

Será procurada uma solução, em série, da forma

$$\psi(r, \theta) = \psi_0(r) + \psi_1(r) \cos \theta + \psi_2(r) \cos 2\theta + \dots \quad , \quad (127)$$

onde os índices indicam a ordem do termo, com relação ao inverso da razão de aspecto  $\epsilon = \frac{\bar{a}}{R_0}$ , ou seja:

$$\frac{\psi_1}{\psi_0} \sim \frac{r}{R_0} \ll 1 \quad , \quad \frac{\psi_2}{\psi_0} \sim \left( \frac{r}{R_0} \right)^2 \ll 1 \quad , \quad \text{etc.} \quad (128)$$

Substituindo (127) em (126), e pegando os termos de até a 1ª ordem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_0}{dr} \right) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_1}{dr} \right) \cos \theta - \frac{\psi_1}{r^2} \cos \theta - \\ - \frac{1}{R} \left[ \frac{d\psi_0}{dr} \cos \theta + \frac{d\psi_1}{dr} \cos^2 \theta + \frac{\psi_1}{r} \sin^2 \theta \right] = - \mu_0 R^2 P_1 - \frac{1}{2} \mu_0^2 I_1^2 , \end{aligned} \quad (129)$$

onde  $\frac{d\psi_0}{d\theta} = 0$  e as derivadas são totais pelo fato dos  $\psi_1$  dependerem apenas de  $r$ .

Por outro lado,  $R$  também deve ser escrito em termos de  $\theta$  e  $r$ , e como já sabemos:

$$R - R_0 = r \cos \theta \longrightarrow R = R_0 + r \cos \theta \quad ,$$

o que nos conduz às expressões

$$R^2 = R_0^2 \left( 1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta \right)^2$$

e

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} \left( \frac{1}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta} \right) ,$$

as quais, expandidas em série de Taylor, considerando  $\frac{r}{R_0} \ll 1$ , podem ser escritas, respectivamente, como:

$$R^2 = R_0^2 \left( 1 + \frac{2r}{R_0} \cos \theta \right) \quad (130)$$

e

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} \left( 1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) , \quad (131)$$

de maneira que, substituindo (130) e (131) em (129), desenvolvendo os cálculos, e comparando os termos em  $\cos n\theta$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) dos dois lados da igualdade, chega-se às expressões:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_0}{dr} \right) = - R_0^2 \mu_0 P_2 - \frac{1}{2} I_1^2 \mu_0^2 \quad (132)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_1}{dr} \right) - \frac{\psi_1}{r^2} = \frac{1}{R_0} \frac{d\psi_0}{dr} - 2 R_0 \mu_0 , \quad (133)$$

onde se considerou, novamente, a condição (128).

Uma solução particular, para linhas de  $\psi$  aproximadamente circulares, pode ser obtida caso adotemos as condições de contorno:

$$\begin{aligned} 1) \quad \psi(0) = 0 &\rightarrow \psi_0(0) = 0 \quad \text{e} \quad \psi_1(0) = 0 \\ 2) \quad \psi(a) = \text{cte} = \psi_B &\rightarrow \psi_0(a) = \psi_B \quad \text{e} \quad \psi_1(a) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (134)$$



relativas à um tokamak de secção circular  $\left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{r=a} = 0$ .

Nosso objetivo será o de demonstrar que, apesar de impormos linhas aproximadamente circulares, o eixo magnético não corresponderá ao eixo geométrico. Isso será feito resolvendo-se as equações diferenciais de 1ª ordem (132) e (133).

A solução da equação homogênea correspondente à (132), é:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_0}{dr} \right) = 0 \longrightarrow r \frac{d\psi_0}{dr} = A \longrightarrow \frac{d\psi_0}{dr} = \frac{A}{r} ,$$

cuja integral em relação à  $r$ , resulta em

$$\psi_0 = A \ln r + B ,$$

sendo  $A$  e  $B$  constantes a serem determinadas.

Uma solução particular da equação geral é:

$$\psi_0 = \psi_B \frac{r^2}{a^2} ,$$

como é facilmente verificável. Dessa maneira, temos que

$$\psi_0 = \psi_B \frac{r^2}{a^2} + A \ln r + B .$$

Pelas condições de contorno consideradas (equação (134)), concluímos que  $A=B=0$ , e portanto

$$\psi_0 = \psi_B \frac{r^2}{a^2} . \quad (135)$$

Com esse resultado, a equação (133) passa a ser escrita como:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi_1}{dr} \right) - \frac{\psi_1}{r^2} = \frac{2\psi_B r}{a^2 R_0} - 2R_0 \mu_0 P_1 r = \gamma r \quad , \quad (136)$$

sendo 
$$\gamma \equiv \frac{2\psi_B}{a^2 R_0} - 2R_0 P_1 \mu_0 \quad . \quad (137)$$

A equação homogênea, correspondente à expressão (136), é:

$$\frac{d^2 \psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} - \frac{1}{r} \frac{\psi_1}{r} = 0 \quad ,$$

que possui como solução:

$$\psi_1(r) = Ar + Br^{-1} \quad .$$

Uma solução particular de (136) seria:

$$\psi_1(r) = \frac{\gamma}{8} r^3 \quad ,$$

de forma que a solução geral passa a ser escrita como:

$$\psi_1(r) = Ar + Br^{-1} + \frac{\gamma}{8} r^3 \quad . \quad (138)$$

As condições de contorno serão satisfeitas, apenas se:

$$B = 0 \quad e \quad A = -\frac{\gamma}{8} a^2 \quad .$$

Portanto:

$$\psi_1(r) = \frac{\gamma}{8} (r^2 - a^2)r \quad . \quad (139)$$

Substituindo as expressões de  $\psi_0$  (equação (135)) e

de  $\psi_1$  (equação (139)) na identidade (127), teremos finalmente

$$\psi(r) = \psi_B \frac{r^2}{a^2} + \frac{\gamma}{8} (r^2 - a^2) r \cos \theta + \dots \quad , \quad (140)$$

que corresponde à solução geral da equação de Grad-Shafranov, para os perfis de I e P considerados.

Vamos procurar agora determinar o valor do parâmetro  $\gamma$  e, a seguir, mostrar que o deslocamento do eixo magnético (em relação ao eixo geométrico) depende apenas do segundo termo da equação acima. Será necessário porém, que primeiramente se obtenha uma expressão conveniente para  $\beta_{\text{poloidal}}$ .

Como no vácuo a pressão é nula, obviamente, podemos escrever, a partir da equação (124), que

$$P(a) = 0 = P_0 + P_1 \psi(a) = P_0 + P_1 \psi_B$$

ou

$$P_1 = - \frac{P_0}{\psi_B} \quad , \quad (141)$$

e portanto

$$P(\psi) = P_0 \left( 1 - \frac{\psi}{\psi_B} \right) \quad . \quad (142)$$

Da equação obtida anteriormente (equação (53)) para a componente toroidal da densidade de corrente  $\vec{j}$ , e utilizando ainda a equação de Grad-Shafranov, podemos escrever, para os perfis considerados:

$$j_\phi = R P' + \frac{\mu_0}{2R} (I^2)' = - R \frac{P_0}{\psi_B} + \frac{\mu_0}{2R} I_1^2 \quad . \quad (143)$$

Introduzindo a constante  $j_0$ , tal que

$$j_\phi(0) = j_0 \quad , \quad e \quad R(0) = R_0 \quad (144)$$

obtêm-se

$$I_1^2 = \frac{2R_0}{\mu_0} \left( j_0 + \frac{R_0 P_0}{\psi_B} \right) \quad (145)$$

e assim

$$j_\phi = j_0 \left[ - \frac{1}{j_0} \frac{P_0}{\psi_B} R + \left( 1 + \frac{R_0 P_0}{j_0 \psi_B} \right) \frac{R_0}{R} \right] . \quad (146)$$

Pela equação (53), temos

$$\Delta^* \psi = - \mu_0 R j_\phi .$$

Se aplicarmos o operador  $\Delta^*$  (dado pela equação (125)) na solução expandida de  $\psi(r)$  (obtida em (140)), podemos escrever, após igualarmos os termos de mesma dependência em  $\cos n\theta$ , dos dois lados da equação, que:

$$\frac{4\psi_B}{a^2} = - \mu_0 j_0 R_0 \rightarrow \psi_B = - \frac{\mu_0 j_0 R_0 a^2}{4} ; \quad (147)$$

ou seja, a partir dos parâmetros  $a$ ,  $j_0$  e  $R_0$ , obtêm-se imediatamente  $\psi_B$ , que corresponde ao valor de  $\psi$  na borda do plasma.

O termo  $-\frac{R_0 P_0}{j_0 \psi_B}$ , passa então a ser escrito como:

$$-\frac{R_0 P_0}{j_0 \psi_B} = \frac{4P_0}{j_0^2 \mu_0 a^2} . \quad (148)$$

Pela lei de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_p = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

ou seja,

$$2\pi a B_{\text{poloidal}}(a) = \mu_0 j_0 \pi a^2 \rightarrow j_0 = \frac{2B_{\text{poloidal}}(a)}{\mu_0 a}, \quad (149)$$

que ao ser substituído no segundo membro da equação (148), resulta:

$$-\frac{R_0 P_0}{j_0 \psi_B} = \frac{\frac{P_0}{2}}{\frac{B_{\text{pol}}^2(a)}{2\mu_0}} \quad (150)$$

Como sabemos, a média de qualquer função  $F$  sobre a secção do plasma, é definida por:

$$\bar{F} = \frac{\int F dS}{\int dS} \quad .$$

O valor médio da pressão pode então ser obtido a partir da equação (142):

$$\bar{P} = \frac{\int_0^a (2\pi r dr) P_0 \left(1 - \frac{\psi}{\psi_B}\right)}{\pi a^2} \quad .$$

Substituindo nessa equação o resultado obtido em (140), e integrando:

$$\bar{P} \sim \frac{P_0}{2} \rightarrow P_0 = 2\bar{P} \quad ,$$

de forma que a equação (150) passa então a ser escrita como:

$$-\frac{R_0 P_c}{j_0 \psi_B} = \frac{\bar{P}}{\frac{B_{pol}^2(a)}{2\mu_0}} = \hat{\beta}_{pol} \quad , \quad (151)$$

em analogia com a equação (21).

Vamos, finalmente, obter o valor de  $\gamma$ .

Substituindo a equação (141) na equação (137), te-

mos:

$$\gamma = \frac{2\psi_B}{R_0 a^2} + 2\mu_0 R_0 \frac{P_0}{\psi_B} \quad ,$$

que pode ser escrita, utilizando as equações (151) e (147), co-  
mo:

$$\gamma = \frac{2\psi_B}{R_0 a^2} + \left[ 2\mu_0 R_0 \hat{\beta}_{pol} \right] \left[ -\frac{4\psi_B}{a^2 \mu_0 R_0} \right] \quad ,$$

ou seja,

$$\gamma = \frac{2\psi_B}{R_0 a^2} \left[ 1 + 4\hat{\beta}_{pol} \right] \quad , \quad (152)$$

de forma que a expressão (140) pode ser expressa como

$$\psi(r) = \frac{\psi_B}{a^2} r^2 + \alpha \psi_B (r^3 - a^2 r) \cos \theta + \dots \quad , \quad (153)$$

sendo

$$\alpha = \frac{1 + 4\hat{\beta}_{pol}}{4 R_0 a^2} \quad . \quad (154)$$

O eixo magnético, como já sabemos, é obtido impondo-  
-se que  $\nabla\psi = 0$ , ou seja (equação (63))

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \hat{e}_\theta = 0 \quad ,$$

de onde necessariamente se obtêm, utilizando-se a equação (153), que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\alpha \psi_B (\bar{r}^2 - a^2) \bar{r} \sin \bar{\theta} = 0 \rightarrow \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi, \quad (155)$$

e portanto

$$\frac{\partial \psi}{\partial \bar{r}} = \frac{2 \psi_B \bar{r}}{a^2} \pm 2 \bar{r} a^2 \alpha (3 \bar{r}^2 - a^2) = 0, \quad (156)$$

onde o sinal  $\pm$  corresponde ao fato de  $\theta$  ser nulo ou  $\theta = \pi$ , respectivamente. Nessas últimas expressões,  $\bar{r}$  e  $\bar{\theta}$  representam os valores para os quais as equações se anulam, ou seja, são as coordenadas do eixo magnético do plasma.

A equação (156) é de segundo grau e admite, portanto, as soluções:

$$\bar{r}_1 = - \frac{1 + \sqrt{1 + 3 \alpha^2 a^6}}{3 \alpha a^2}, \text{ para } \theta = 0, \quad (157)$$

e

$$\bar{r}_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 3 \alpha^2 a^6}}{3 \alpha a^2}, \text{ para } \theta = \pi. \quad (158)$$

Nessas soluções, o sinal à frente da raiz foi escolhido de forma a não permitir que  $\bar{r}_1$  e  $\bar{r}_2$  possam ser negativos.

Vamos agora discutir o significado dessas soluções.

Tanto  $\bar{r}_1$  quanto  $\bar{r}_2$  satisfazem a condição  $\nabla \psi = 0$  e portanto poderiam definir a posição do eixo magnético. Se lembrarmos, no entanto, que o deslocamento do eixo magnético (em relação ao geométrico) ocorre devido ao fato das espiras toroidais estarem mais próximas entre si no lado interno do toróide (Fig. V), conforme discutido anteriormente, podemos concluir que é  $\bar{r}_1$ ,

a coordenada radial que define a posição do eixo magnético.

O ponto de estagnação (como é denominado  $\vec{r}_2$ ) está situado, por sua vez, justamente na posição em que os campos poloidal, criado pelo plasma, e o vertical se anulam (veja secção I.3), conforme é mostrado na Fig. XXII.

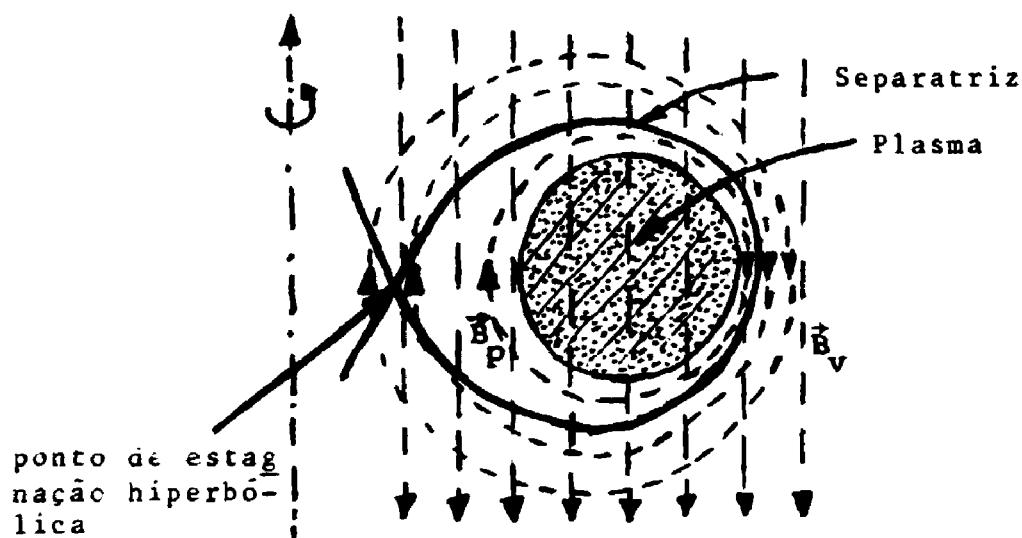


Fig. XXII - As linhas de força resultantes do campo vertical ( $\vec{B}_v$ ) e do campo poloidal ( $\vec{B}_p$ ) formam superfícies fechadas antes da separatriz e abertas depois da mesma.

O acoplamento desses dois campos, resulta em linhas de força que se fecham sobre si mesmas caso estejam localizadas aquém da separatriz (nome dado à linha de força que passa justamente por  $\vec{r}_2$ ), e abertas, caso se localizem além dela<sup>(9)</sup>.

Estudando alguns casos limites para as equações (157) e (158), chegamos a interessantes conclusões:

$$\text{Para } R_0 \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow 0$$

e assim

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \vec{r} = 0$$

Isso significa que, para confinamento cilíndrico ( $R_0 \rightarrow \infty$ ), os eixos magnético e geométrico coincidem, como já era de se supor.



Para  $\alpha \rightarrow a^{-3}$ , temos que

$$\bar{r}_1 \rightarrow \frac{a}{3} \quad \text{e} \quad \bar{r}_2 \rightarrow a \quad ,$$

ou seja, o eixo magnético se localiza à  $\frac{1}{3}$  do raio menor do toróide, e o ponto de estagnação se encontra na borda do plasma. Essa situação corresponde ao caso limite em que o equilíbrio é alcançado, visto que, se o ponto de estagnação se localizar dentro do plasma, então teremos, no interior do toróide, linhas de força abertas, através das quais as partículas escapariam, e o confinamento não seria possível.

Levando esse resultado em consideração, podemos concluir, através da equação (154), que o máximo valor permitido para o parâmetro  $\beta_{pol}$  de uma máquina toroidal, seria

$$(\beta_{pol})_{\text{máx}} = \frac{R_0}{a} - \frac{1}{4} \quad . \quad (159)$$

A seguir, iremos calcular uma expressão para  $B_\phi^2$ , e mostrar que, através dela, é possível determinar quando o plasma torna-se diamagnético ou paramagnético (o campo toroidal é menor ou maior, respectivamente, do que o existente sem a corrente de plasma), dependendo apenas do valor assumido por  $\beta_{pol}$ .

Das equações (51) e (123), temos

$$B_\phi^2 = \left( \frac{\mu_0 I}{R} \right)^2 = \frac{\mu_0^2}{R^2} (I_0^2 + I_1^2 \psi) \quad ,$$

que também pode ser escrita, utilizando-se a equação (145), como

$$B_\phi^2 = \frac{\mu_0^2}{R^2} \left[ I_0^2 + 2j_0 \frac{R_0^2}{\mu_0} \left( 1 + \frac{R_0 P_0}{\psi_B j_0} \right) \psi \right] \quad ,$$

ou então

$$B_{\phi}^2 = \frac{\mu_0^2}{R^2} \left[ I_z^2 + \frac{2 j_z R_0^2}{c} (1 - \beta_{pol}) \psi \right] , \quad (160)$$

onde utilizou-se a expressão (151).

De (160), é fácil verificar que,

para  $\beta_{pol} < 1 \Rightarrow B_{\phi}^2 > B_{\phi}^2(\text{v\u00e1cuo}) \Rightarrow$  plasma \u00e9 paramagn\u00e9tico

para  $\beta_{pol} > 1 \Rightarrow B_{\phi}^2 < B_{\phi}^2(\text{v\u00e1cuo}) \Rightarrow$  plasma \u00e9 diamagn\u00e9tico.

Al\u00e9m das duas solu\u00e7\u00f5es apresentadas e discutidas, uma outra solu\u00e7\u00e3o particular da equa\u00e7\u00e3o de Grad-Shafranov \u00e9 obtida, considerando-se os perfis<sup>17</sup>

$$P = D\psi \quad e \quad I = C\psi , \quad (161)$$

sendo C e D, constantes. A express\u00e3o obtida para  $\psi$ , nesse caso, \u00e9 ent\u00e3o dada por

$$\psi = \frac{D}{C^2} + \sum_K A(K) R B_1 \left[ \sqrt{(b^2 - K^2)} r \right] e^{iKz} , \quad (162)$$

onde  $B_1$  \u00e9 uma fun\u00e7\u00e3o de Bessel de primeira ordem, e  $A(K)$ , constantes arbitr\u00e1rias.

## II.7. C\u00c1LCULO APROXIMADO DA TRANSFORMADA ROTACIONAL EM UM TOKAMAK

Ser\u00e1 considerado um tokamak de sec\u00e7\u00e3o circular e baixo  $\beta$ , com grande raz\u00e3o de aspecto. Isso corresponde ao caso das linhas correspondentes \u00e0  $\psi$  constante serem c\u00edrculos, com

centro no eixo magnético.

A componente toroidal do campo magnético pode ser imaginada como sendo produzida por uma corrente imaginária  $i$ , que possuiria, então, a direção e sentido de  $\hat{e}_z$  (Fig. XXIII).

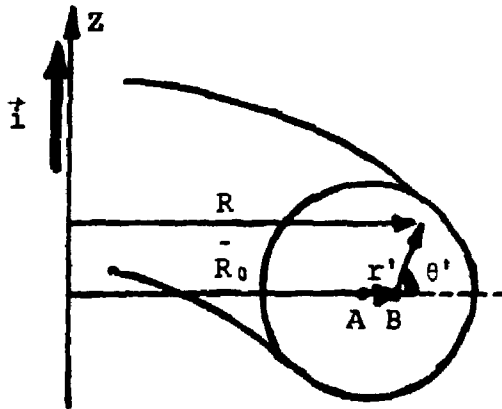


Fig. XXIII - Uma corrente imaginária  $i \hat{e}_z$  pode ser considerada como formadora da componente toroidal do campo magnético. A e B correspondem às posições dos eixos geométrico e magnético, respectivamente.

Pela Lei de Ampère, temos

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \vec{I} \longrightarrow 2\pi R B_\phi = \mu_0 i \quad ,$$

ou então

$$B_\phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi R} \quad , \quad (163)$$

que ao ser comparada com a equação (51), conclui-se que

$$I = \frac{i}{2\pi} \quad . \quad (164)$$

Na Fig. XXIII, podemos observar que  $\tilde{R}_0$  e  $R$  estão relacionadas entre si, por

$$R = \tilde{R}_0 + r' \cos \theta' \implies R = \tilde{R}_0 \left( 1 + \frac{r'}{\tilde{R}_0} \cos \theta' \right) . \quad (165)$$

A métrica desse sistema é

$$(ds)^2 = (dr')^2 + (r'd\theta')^2 + (Rd\phi)^2 = (dr')^2 + (r'd\theta')^2 + h^2(\tilde{R}_0 d\phi)^2 , \quad (165)$$

sendo

$$h \equiv \left( 1 + \frac{r'}{\tilde{R}_0} \cos \theta' \right) . \quad (166)$$

Nesse caso, um elemento de volume do sistema seria:

$$dV = r' \tilde{R}_0 h dr' d\theta' d\phi , \quad (167)$$

e a componente toroidal passaria a ser escrita, pelas equações (51) e (169), como

$$B_\phi = \frac{\mu_0 \frac{1}{2\pi}}{R} = \frac{B_{\phi_0}}{h} , \quad (168)$$

onde  $B_{\phi_0} = B_\phi (R = \tilde{R}_0)$  .

A componente poloidal do campo magnético também pode ser escrita por uma expressão análoga à equação (168). Isso será feito aplicando-se a equação de Maxwell, da forma:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 ,$$

ou então

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial r'} (h_2 h_3 B_{r'}) + \frac{\partial}{\partial \theta'} (h_1 h_3 B_{\theta'}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (h_1 h_2 B_\phi) \right] = 0 . \quad (169)$$

A primeira e a última parcelas da equação (169) são

nulas, haja visto estarmos considerando as linhas de força de  $B_{pol}$  como sendo círculos concêntricos ( $B_r = 0$ ). e que também há simetria do sistema em relação à coordenada  $\phi$   $\left( \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \right)$ .

Dessa maneira, temos

$$\frac{1}{r' h R_0} \frac{\partial}{\partial \phi'} (h R_0 B_{\theta'}) = 0 \quad ,$$

de onde se conclui que o produto  $h R_0 B_{\theta'}$  só deve depender de  $r'$ , ou seja,

$$h R_0 B_{\theta'} = f(r') \quad , \quad (170)$$

e portanto

$$B_{pol} = B_{\theta'} = \frac{f(r')}{h R_0} = \frac{B_{0 pol}(r')}{h} \quad . \quad (171)$$

Uma vez que as linhas de força devem necessariamente satisfazer a equação

$$\frac{dl}{B} = \frac{r' d\theta'}{B_{pol}} = \frac{R d\phi}{B_{\phi}} \quad ,$$

podemos então escrever

$$d\theta' = \frac{R B_{pol}}{r' B_{\phi}} d\phi = \frac{(R_0 h) \left( \frac{B_{0 pol}}{h} \right)}{(r') \left( \frac{B_{0 \phi}}{h} \right)} = \frac{R_0 B_{0 pol}}{r' B_{0 \phi}} + 0 \left( \frac{r'}{R_0} \right) \quad ,$$

ou seja,

$$d\theta' \sim \frac{R_0 B_{0 pol}}{r' B_{0 \phi}} d\phi \quad . \quad (172)$$

Como para  $\Delta\phi = 2\pi$ ,  $\Delta\theta' = 1$ , obtém-se que

$$l \sim \frac{2\pi \tilde{R}_0 B_{0\text{pol}}}{r' B_{0\phi}} ; \quad (173)$$

e desde que

$$q = \frac{2\pi}{l}$$

então

$$q \sim \frac{r' B_{0\phi}}{\tilde{R}_0 B_{0\text{pol}}} . \quad (174)$$

## II.8. MEDIDA EXPERIMENTAL DE $\psi$

Uma medida de  $\psi$  exigiria, de acordo com a equação (58), que se pudesse determinar os valores de  $B_R$  e  $B_Z$ , em todos os pontos  $(R, Z)$  do plasma, o que é, na realidade, impraticável.

Entretanto, é possível obter-se, de maneira aproximada, o perfil  $\psi(R, Z)$ , supondo-se que  $\psi$  corresponde a uma função separável nas variáveis  $R$  e  $Z$  e medindo-se, ainda, as componentes do campo magnético ao longo de apenas duas linhas no plasma, conforme é mostrado na Fig. XXIV.

Dessa forma, vamos supor que

$$\psi(R, Z) = \frac{\psi(R_1, Z)\psi(R, Z_1)}{\psi(R_1, Z_1)} , \quad (175)$$

sendo  $(R_1, Z_1)$ , um ponto arbitrário escolhido na secção da coluna de plasma.

Das equações obtidas em (46), podemos escrever, considerando ainda a equação (175), que

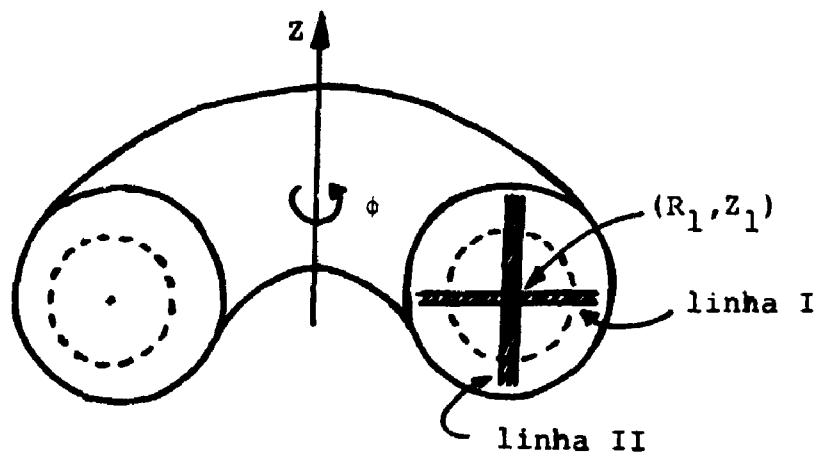


Fig. XXIV - Medindo-se os perfis  $B_Z(R, Z_1)$  e  $B_R(R_1, Z)$  ao longo das linhas I e II, respectivamente, pode-se então obter  $\psi(R, Z)$ .

$$B_R(R_1, Z) = - \frac{1}{R_1} \frac{\psi(R_1, Z_1)}{\psi(R_1, Z_1)} \frac{d\psi(R_1, Z)}{dZ}$$

e

$$B_Z(R, Z_1) = \frac{1}{R} \frac{\psi(R_1, Z_1)}{\psi(R_1, Z_1)} \frac{d\psi(R, Z_1)}{dR} ,$$

as quais, ao serem integradas em  $Z$  e  $R$ , respectivamente, resultam em:

$$\psi(R_1, Z) = - R_1 \int_{Z_1}^Z B_R(R_1, Z) dZ - \psi(R_1, Z_1) \quad (176)$$

e

$$\psi(R, Z_1) = \int_{R_1}^R R B_Z(R, Z_1) dR - \psi(R_1, Z_1) . \quad (177)$$

É imediato perceber, portanto, que se conseguirmos medir os perfis  $B_Z(R, Z_1)$  e  $B_R(R_1, Z)$  ao longo das linhas I e

II (Fig. XXIV), respectivamente, obteremos então, impondo como condição de contorno o valor de  $\psi$  no ponto  $(R_1, Z_1)$ , a função  $\psi(R, Z)$ . A partir daí, lembrando que  $I = I(\psi)$  (item II.2), podemos escrever, a partir da equação (51), que

$$I(\psi) = \frac{R}{\mu_0} B_\phi(\psi) = \frac{R}{\mu_0} B_\phi(R, Z_1) \quad . \quad (178)$$

Todos os demais perfis, de grandezas que caracterizam o equilíbrio considerado, podem ser calculados a partir de  $\psi$  e  $I$ .

A aplicação desse método foi realizado por Allen<sup>18</sup>, que obteve os dados experimentais usando sondas magnéticas com 6 bobinas, separadas por distâncias de 3 cm. Com isso, ele pode obter as evoluções temporais da corrente e pressão a partir de  $\psi(R, Z)$  calculada. O confronto desses resultados, em cada instante, com os determinados por outros métodos, indicou uma boa concordância, o que demonstra terem sido bastante razoáveis as hipóteses consideradas.

Convém lembrar que esse modo de análise é apenas aproximado, por não ser  $\psi$ , como definida pela equação (175), uma solução exata da equação de Grad-Shafranov.

## II.9. PROBLEMAS

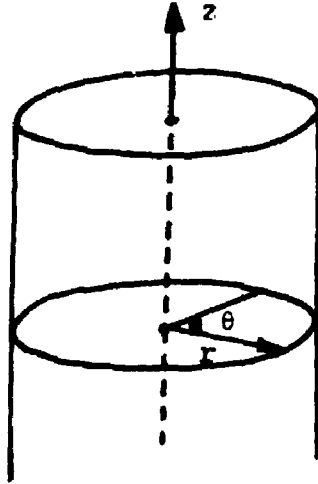
1) Considere uma coluna cilíndrica de plasma infinita, conforme indicado na figura abaixo, sendo dados os seguintes perfis de densidade de corrente elétrica e campo magnético:

$$\text{para } r = a : \vec{j} = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\alpha \hat{e}_z \quad , \quad \text{sendo } \alpha = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{para } r > a : \vec{j} = 0 \quad ,$$



e

para todo  $r$ ,  $\nabla B_z = 0$ .

a) Mostre que a corrente elétrica total do plasma é dada por:

$$I = \frac{\pi a^2 j_0}{\alpha + 1}.$$

b) Calcule  $B_\theta(r)$  para  $r > a$  e  $r < a$ .c) Calcule o perfil de pressão  $P(r)$ .d) Calcule o fator de segurança  $q(r)$ , sendo  $2\pi R$  a altura do cilindro, e  $\frac{R}{r} \gg 1$ , tanto para  $r \leq a$  como para  $r > a$ .e) Calcule  $q(0)$  e mostre que  $j_0 = \frac{2 B_z}{\mu_0 R q(0)}$ .f) Mostre que  $\frac{q(a)}{q(0)} = \alpha + 1$ .

2) Considere o tokamak TBR-1 do IFUSP, que possui as seguintes características:

$$a \sim 8 \text{ cm}$$

$$R \sim 30 \text{ cm}$$

$$B_z = 0,4 \text{ T}$$

$$q(0) = 1,1$$

$$q(a) = 4,4$$

$$P(0) = 5,0 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Supondo uma aproximação cilíndrica para esse tokamak, e que

$$\nabla B_z = 0 \quad \text{e} \quad \vec{j} = j_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\alpha \hat{e}_z,$$

Calcule:

- a) Os valores das constantes  $j_0$  e  $\alpha$ .
- b) A corrente de plasma  $I$ .
- c) Os valores de  $\beta(0)$  e  $\beta_{pol}(0)$ .
- d) Faça uma estimativa da ordem de grandeza de  $\bar{P}$  e  $\bar{\beta}$ .

3) Considere os dados e modelo do TBR-1, apresentados no problema (2). Supondo que  $T_e \sim 100$  eV e  $T_i \sim 10$  eV, discuta as condições sobre os valores máximos da corrente do plasma ( $I$ ), de  $\beta$  e da densidade de partículas ( $N$ ).

4) Calcule o operador  $\Delta^*$ , em termos das coordenadas "toroidais". Demonstre, primeiramente, a validade das igualdades abaixo:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial R} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} .$$

5) Calcule as componentes do vetor  $\vec{j}$  em coordenadas "toroidais". Escreva as expressões obtidas em termos de  $I, I', P'$  e das derivadas de  $\psi$ .

6) Calcule as componentes  $j_\psi, j_\chi$  e  $j_\phi$  em função de  $I, I', P'$  e das derivadas de  $\psi$ .

7) Calcule a componente vertical do campo magnético ( $B_z$ ), em função de  $\psi$ .

8) Mostre que em tokamaks não é possível haver equilíbrio em que, para um valor fixo de  $\phi$ , as linhas isobáricas sejam círculos concêntricos ao redor do eixo magnético, ou seja, ao redor

do ponto  $\vec{R}_0 = (R=R_0, Z=0, \phi)$ .

Sugestão: Verifique que soluções do tipo  $\psi = Ar^2$ , onde  $r^2 = (R-R_0)^2 + Z^2$  e  $A$  uma constante, não satisfazem a equação de Grad-Shafranov.

9) Considere a definição de  $\bar{q}$

$$\bar{q}(\psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{JB_\phi}{R} d\chi, \quad ,$$

onde  $\psi, \chi$  e  $\phi$  são as coordenadas de fluxo.

a) Demonstre que:

$$\Lambda = \frac{1}{2\pi} \int \vec{B} \cdot \nabla\phi d\tau = 2\pi \int \bar{q} d\psi$$

e

$$\Sigma = \frac{1}{2\pi} \int \vec{B} \cdot \nabla\chi d\tau = 2\pi \int d\psi, \quad ,$$

sendo  $d\tau$  um elemento de volume.

b) Mostre que as quantidades  $\Lambda$  e  $\Sigma$  podem ser interpretadas como sendo os fluxos de  $\vec{B}$  nas direções toroidal e poloidal, respectivamente.

c) Mostre que

$$\bar{q} = \frac{d\Lambda}{d\Sigma} .$$

10) Demonstre que

$$\vec{B} \cdot \nabla\psi = 0 .$$

11) Adote o modelo cilíndrico para o TBR-1, considerando os perfis:

$$j_z = j_0 \left[ 1 - \frac{r^2}{a^2} \right]^{\alpha} \quad \text{e} \quad \nabla B_z = 0$$

- a) Para um dado  $r$ , calcule as componentes de  $B$  perpendicular e paralela à linha helicoidal descrito por  $u = \theta - hz = \text{cte}$ .
- b) Construa os gráficos de  $B_z$ ,  $B_\theta$  e  $B_{\text{helicoidal}}$  em função de  $r$ . Considere, para isso, que

$$h = \frac{n}{m} \frac{1}{R_0}, \quad n = 1 \quad \text{e} \quad m = 3$$

$$a \sim 8 \text{ cm}$$

$$R_0 \sim 30 \text{ cm}$$

$$q(0) = 1,1$$

$$q(a) = 4,4$$

- c) Calcule  $q(r)$ .
- d) Determine a função  $\psi(r)$ .

12) Considere a função

$$\psi = \frac{\psi_B}{a^2} r^2 + \frac{\psi_B}{4 R_0 a^2} (1 + 4 \hat{\beta}_{\text{pol}}) (r^3 - a^2 r) \cos \theta + \dots,$$

solução da equação de Grad-Shafranov, correspondente aos perfis:

$$I^2 = I_0^2 + I_1^2 \psi$$

$$P = P_0 \left( 1 - \frac{\psi}{\psi_B} \right).$$

Calcule os termos dominantes das componentes  $B_\phi$ ,  $B_r$  e  $B_\theta$ .

REFERÊNCIAS

- 1) I.C. Nascimento, Fusão Termonuclear Controlada, em Física do Plasma, editada por A.L. Chian e M. Reusch, Universidade Federal Fluminense, 1979.
- 2) Vers La Fusion Thermonucléaire Contrôlée, Report LRP 139/78, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1978.
- 3) G.P. Lasche, The Phys. Teacher, 234, April, 1981.
- 4) J. Hergill, Nuclear Fusion Research, em Plasma Physics and Nuclear Fusion Research, editado por R.D. Gill, Academic Press, 1981.
- 5) T.J. Dolan, Fusion Research Principles, Experiments and Technology, Pergamon Press, 1982.
- 6) D.C. Robinson, Revista Brasileira de Física, Volume Especial I, 69, 1982.
- 7) A.H. Morton, The Australian Physicist, 18, 195, 1981.
- 8) I.C. Nascimento e outros, Proc. of the Spring College on Fusion Energy, IAEA, SMR-82, 45, 1982.
- 9) R.M.O. Galvão, Equilíbrio Magnetohidrodinâmico, em Física do Plasma, editada por A.L. Chian e M. Reusch, Universidade Federal Fluminense, 1979.
- 10) R.M.O. Galvão, Estabilidade Magnetohidrodinâmica, em Física do Plasma, editada por A.L. Chian e M. Reusch, Universidade Federal Fluminense, 1979.
- 11) J.A. Wesson, MHD Stability Theory, em Plasma Physics and Nuclear Fusion Research, edited by R.D. Gill, Academic Press, 1981.
- 12) G. Bateman, MHD Instabilities, The MIT Press, 1978.
- 13) J.P. Freidberg, Rev. Mod. Phys., 54, 801, 1982.
- 14) J.P. Goedbloed, Phys. Fluids, 18, 1258, 1975.

- 15) A.S. Fernandes e I.L. Caldas, Comunicação em preparação.
- 16) V.D. Shafranov, Reviews of Plasma Physics, Vol. 2, 103, 1966.
- 17) W.B. Thompson, An Introduction to Plasma Physics, Pergamon Press, 1962.
- 18) A.W. Allen, Phys. Fluids, 22, 2394, 1979.

Além das referências mencionadas são recomendadas as seguintes publicações como complementação do assunto abordado.

- 19) J.P. Goedbloed, Lecture Notes on Ideal Magnetohydrodynamics, Universidade Estadual de Campinas, 1979.
- 20) P.H. Sakanaka, Macroscopic Plasma Properties and Stability Theory, em Modern Plasma Physics, IAEA, 3, 1981.
- 21) H. Tasso, Lectures on Plasma Physics, preprint IFUSP/P-181, LFP-8, 1979.