

548600519

С.В. Толоконников,
Р.Ф. Фаязов, С.А. Фаянс

ИАЭ-4059/2

О ВОССТАНОВЛЕНИИ СПЕКТРА
РЕАКТОРНЫХ АНТИНЕЙТРИНО
ИЗ РЕАКЦИИ $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$

Москва 1984

УДК 539.14 + 539.143.2

Ключевые слова: спектры нейтрино, атомный реактор, некорректная задача.

На основе метода регуляризации Тихонова разработана программа восстановления спектра реакторных электронных антинейтрино из реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$. Входными данными программы являются экспериментально измеренный спектр позитронов и функция отклика используемого детектора. Конкретные модельные расчеты выполнены для детектора НД-1, на котором ведутся измерения в нейтринной лаборатории на Ровенской АЭС.

Интерпретация нейтринных экспериментов на реакторе требует надежного знания спектра $\rho(\bar{\nu}_e)$ электронных антинейтрино $\bar{\nu}_e$, генерируемых в активной зоне. Существующие расчетные [1 – 7] спектры $\rho(\bar{\nu}_e)$, спектры, найденные методом инверсии из измеренных электронных спектров [8 – 11] и, наконец, спектры, извлеченные непосредственно из экспериментальных данных по реакции обратного бета-распада на протоне [12 – 14], пока не обладают высокой точностью: в жесткой части они расходятся у авторов даже самых последних работ примерно на 30%.

Использование реакции обратного бета-распада



несомненно, является предпочтительным, поскольку она дает прямую информацию о спектре $\rho(\bar{\nu}_e)$. В ближайшее время следует ожидать заметного повышения точности измерения спектра позитронов из реакции (1), и в связи с этим необходимо иметь достаточно надежный метод восстановления $\rho(\bar{\nu}_e)$ из экспериментальных данных. Разработка такого метода и посвящена данная работа.

Спектр позитронов, рождающихся непосредственно в реакции (1), дается формулой

$$x(T)\Delta T = 2,5 \cdot 10^{-44} (\text{см}^2) N_p f_{\bar{\nu}} t \left(\frac{T}{mc^2} + 1 \right) \sqrt{(T/mc^2 + 1)^2 - 1} \rho(T + \Delta) \Delta T, \quad (2)$$

где $x(T)\Delta T$ — полное число позитронов, появившихся в интервале от T до $T + \Delta T$ за время экспозиции t , с; $f_{\bar{\nu}}$ — поток реакторных $\bar{\nu}_e$ на детекторе, $\bar{\nu}_e/\text{см}^2\text{с}$; N_p — число протонов в детекторе; $\rho_{\bar{\nu}_e}(E)$ —

спектр падающих $\bar{\nu}_e$, 1/МэВ; $\Delta = 1,804$ МэВ — порог реакции (1); $m c^2 = 0,511$ МэВ — масса покоя позитрона.

В реальных экспериментальных установках истинный спектр $x(T)$ искажается (например, в установке НД-1 [15 — 17] — за счет конечного разрешения ФЭУ, неоднородности светосбора, эффектов утечки позитронов, аннигиляционных гамма-квантов и т.д.). Будем считать, что эти искажения описываются с помощью функции отклика $K(T, T')$, которая предполагается известной. Тогда измеряемое распределение позитронов запишется в виде

$$v(T) = \int_0^{T_{\max}} K(T, T') x(T') dT', \quad (3)$$

где $[0, T_{\max}]$ — интервал энергий позитронов, рождающихся в реакции (1). Функция $K(T, T')$ представляет собой вероятность появления сигнала T , если в установке родился позитрон с энергией T' . В принципе при известной точной функции $v(T)$ достаточно решить интегральное уравнение (3), чтобы найти искомый спектр позитронов и тем самым с помощью (2) получить антинейтринный спектр $\rho_{\bar{\nu}_e}(E)$. Однако на практике левая часть уравнения (3) измеряется с некоторой конечной погрешностью, поэтому говорить о его точном решении можно лишь в пределе, когда эта погрешность стремится к нулю. Обозначим через w элемент множества W приближенных левых частей (3), а через z — соответствующий элемент из множества Z приближенных решений. Предполагается, что W содержит точную функцию $v(T)$, а Z — точное решение $x(T)$. Под множеством W понимается некоторый класс функций, “проходящих” внутри коридора экспериментальных ошибок. В символической записи элементы множеств W и Z связаны интегральным уравнением Фредгольма первого рода

$$w = \hat{K}z \quad (4)$$

с известным ядром $K(T, T')$.

Наша задача формулируется следующим образом. Требуется восстановить из (4) подынтегральную функцию z по измеренной левой части w и оценить погрешность z при известном коридоре ошибок “измеренных” функций w . Принципиальная трудность при выборе способа решения интегрального уравнения (4) заключается в отсут-

ствии непрерывной зависимости подынтегральной функции от левой части, когда малым отклонениям в w соответствуют значительные отклонения в $z = \hat{K}^{-1}w$ (здесь \hat{K}^{-1} — обратный по отношению к \hat{K} интегральный оператор, который по физическому смыслу задачи существует и является единственным). Это можно проиллюстрировать простым примером [18]. Пусть w_1 и w_2 — некоторые элементы из W , которым соответствуют решения $z_1 = \hat{K}^{-1}w_1$ и $z_2 = \hat{K}^{-1}w_2$. Пусть $z_2 = z_1 + N \sin \omega T$, где N и ω — некоторые параметры. Тогда разность

$$w_2 - w_1 = N \int_{T_1}^{T_2} K(T, T') \sin \omega T dT.$$

для любого физического ядра K путем подбора частоты ω может быть достаточно малой, чтобы w_1 и w_2 не выходили за интервал ошибок, в то время как отличие z_2 от z_1 может быть сколь угодно велико (при больших N). Задача решения уравнения (4) в этих условиях является некорректной по Адамару [19].

Существуют несколько способов решения подобных задач [18 — 20]. Метод оптимальной фильтрации по Винеру, использующий интегральные преобразования, хорош для функций, определенных на всей числовой оси $(-\infty, \infty)$ и для ядер, зависящих от разности аргументов. Статистический метод [20] приводит к необходимости детальных априорных предположений о свойствах искомого решения и выборе процедуры получения приближенного решения. Метод подбора квази-решений [19] основан на априорном выборе последовательности решений, минимизирующих норму* $\rho_W(\hat{K}z, w)$ в пространствах левых частей (4).

Рассмотрим метод регуляризации, свободный от недостатков перечисленных выше методов. Этот подход состоит в замене оператора \hat{K}^{-1} на оператор \hat{R}_γ , близкий к \hat{K}^{-1} , переводящему W в Z . Такой оператор называется регуляризирующим. Он неявно зависит от w и δ — параметра, характеризующего величину "невязки" ρ_W . При $w \rightarrow v$ параметр $\delta \rightarrow 0$ в силу увеличения точности, с которой \hat{R}_γ приближает

* В пространстве L_2 функций, интегрируемых с квадратом, норма определяется посредством соотношения

$$\rho_W(\hat{K}z, w) = \|\hat{K}z, w\|^2 = \int_{T_1}^{T_2} (Kz - w)^2 dT / (T_2 - T_1).$$

K^{-1} . Вследствие однозначности отображения, осуществляемого оператором \hat{R}_γ , заданным w и δ соответствует единственное z , а при уменьшении δ , как будет показано ниже, $z \rightarrow x$. Опишем кратко способ построения \hat{R}_γ .

На множестве Z_1 , всюду плотном в Z , выбираем такой непрерывный и положительно определенный функционал $\Omega(z)$, что множество z , при которых $\Omega(z) \geq 0$, образует компакт в Z_1 . Указанный функционал называется стабилизирующим, поскольку позволяет рассматривать только такие решения z , которые приближают искомое x . Другими словами, для любой функции w существует z из пространства Z_1 . Функцию z мы назовем приближенным или регуляризованным решением (4). Для него должно выполняться соотношение $\rho_W(Kz, w) \leq \delta$. В этом случае мы можем быть уверены, что при уменьшении δ решение z будет сходиться к x . Действительно, поскольку Z_1 плотно в Z , последовательность приближенных решений сходится к точному решению уравнения (3) в силу единственности x по условиям задачи. Следовательно, ценой сужения множества искомых решений мы приходим к непрерывной зависимости решения от левой части (3). Итак, нужно найти z , обеспечивающее минимум как "невязки", так и стабилизирующего функционала, т.е. следует найти минимум функционала $F_\gamma(z, w)$, называемого сглаживающим:

$$F_\gamma(z, w) = \gamma \Omega(z) + \rho_W^2(Kz, w). \quad (5)$$

Такой минимум существует для любого параметра γ и любой функции w из W [18].

Предполагая истинную подынтегральную функцию x в (3) непрерывной и учитывая тот факт, что в пространстве непрерывных функций компактным является множество функций, интегрируемых с квадратом и имеющих обобщенную производную по Соболеву [21], естественно выбрать $\Omega(z)$ в виде квадрата нормы в этом пространстве:

$$\Omega(z) = \int_0^{T_{\max}} (q_0 z + q_1 (z'')^2) dz, \quad (6)$$

где $[0, T_{\max}]$ — область определения решения z ; $q_0(T)$ и $q_1(T)$ — весовые функции, интегрируемые с квадратом; $q_1(T)$ имеет первую производную.

Задача минимизации функционала (5) сводится к решению уравнения Эйлера с определенными граничными условиями. В явном виде с нулевыми граничными условиями первого рода получаем интегродифференциальное уравнение

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_0^{T_{\max}} K(T, T') K(T, t) z(t) dt dT + \gamma (q_0 z - (q_1 z)') = \int_{T_1}^{T_2} K(T, T') w(T) dT, \quad (7)$$

$$z(0) = z(T_{\max}) = 0,$$

где $[T_1, T_2]$ — область измеряемых энергий позитронов; $K^T(T, T')$ — транспонированное ядро уравнения (3).

В случае дискретного задания функции w в N точках уравнение (7) сводится к системе N линейно независимых уравнений. Последнюю удобно решать численными методами, считая T_{\max} конечной. Условие для "невязки" при этом будет иметь вид

$$\sum_{i=1}^N |K_{ij} z_j - w_j|^2 \leq \delta^2. \quad (8)$$

Система уравнений, соответствующая (7), решалась на сетке с переменным шагом методом Гаусса. Поиск параметра γ , обеспечивающего выполнение условия (8) для конкретной функции w и ядра $K(T, T')$, осуществлялся автоматически по геометрической прогрессии с переменным шагом.

Для проведения конкретных расчетов необходимо знать вид аппаратурной функции (т.е. ядро $K(T, T')$). Приводимые ниже расчеты ориентированы на детектор НД-1 [15 — 17]. На первом этапе использовалось упрощенное ядро $K_1(T, T')$ (рис. 1). Это ядро аппроксимирует разрешение детектора функцией Гаусса с дисперсией $\delta = 0,15\sqrt{T' + E}$, МэВ и приближенно учитывает распределение $P(E)$ аннигиляционных гамма-квантов в детекторе

$$P(E) = \begin{cases} 1/\epsilon_0, & 0 < E \leq \epsilon_0, \\ 0, & E = 0, E > \epsilon_0, \end{cases} \quad (9)$$

где граничная энергия $\epsilon_0 = 1,022$ МэВ.

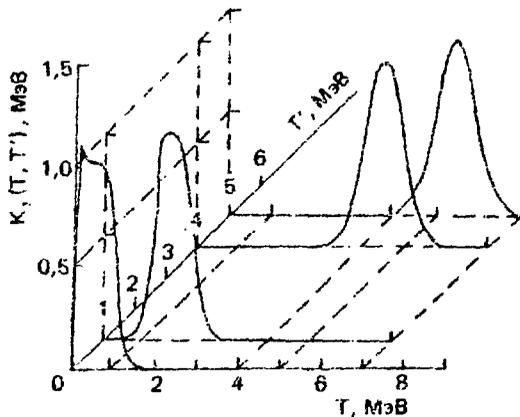


Рис. 1. Упрощенная функция отклика $K_1(T, T')$. Кривые приведены для энергий $T' = 0, 1, 4$ и 5 МэВ

Функция $K_1(T, T')$ была взята в виде

$$K_1 = \int_0^{\epsilon_0} e^{-(T-T'-E)^2/2\sigma^2} \frac{P(E)dE}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad (10)$$

Как видно из рис. 1, эта функция при фиксированной энергии позитрона T' имеет вид кривой с максимумом, сдвинутым вправо относительно T' . Действительно, приравнявая производную dK/dT нулю и вычисляя аналитически интеграл

$$I = \int_0^{\epsilon_0} \frac{dE}{\sqrt{2\pi}b} \frac{-2(T - (T' + E))}{2b^2(T' + E)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(T - T' - E)^2}{2b^2(T' + E)}\right),$$

получаем

$$I \sim \operatorname{erf}((Tx + 1)/\sqrt{x}/\sqrt{2}b),$$

где

$$x = (T' + E)^{-1}.$$

При некоторой фиксированной энергии T'_F из условия $I = 0$ для положения максимума T_m в $K(T, T')$ имеем

$$T_m = \sqrt{T'_F(T'_F + \epsilon_0)}.$$

При $T'_F \gg \epsilon_0$ сдвиг максимума $\Delta_E = T_m - T'_F = \epsilon_0/2 \approx 0,5$ МэВ.

При меньших T' максимум сдвигается слабее. Это хорошо видно из

рис. 2, где приведен вид распределения $K_1(T, T')$ при четырех значениях энергии позитрона: $T' = 0, 1, 4, 5$ МэВ. В качестве измеренного спектра $w(T)$ был взят результат интегрирования ядра $K_1(T, T')$ со спектром позитронов из реакции $(\bar{\nu}_e, p)$ с расчетным спектром реакторных антинейтрино Авиньона [3]. Полученные таким способом спектры в дальнейшем будут обозначаться термином "измеренные". Указанный выше измеренный спектр w в сравнении с восстановленным для ядра $K_1(T, T')$ спектром z приведен на рис. 3. Отчетливо виден сдвиг максимума функции z относительно максимума w влево на $\Delta \approx 0,5$ МэВ.

Исследована зависимость восстановленного спектра от параметров γ, q_0, q_1 . Выяснилось, что оптимальными значениями являются $\gamma q_0 \sim 10^{-3}, q_1/q_0 \sim 1$. В разработанной программе допускается значение "невязки" масштаба $\delta \sim 10^{-2}$. При меньших δ начинают сказываться ошибки численного интегрирования. За ошибку предлагаемого способа восстановления спектров позитронов, основанного на методе регуляризации, взята величина

$$\delta_z = \rho_z(z, z_H)/z,$$

где z_H — решение, полученное повторным восстановлением с ядром $K_1(T, T')$ из функции $w_H = K_1 z$ (z — функция, полученная при "первом" восстановлении). Для примера возьмем функцию, показанную на рис. 3. Кривые z и z_H приведены на рис. 4. Величина δ_z оказыва-

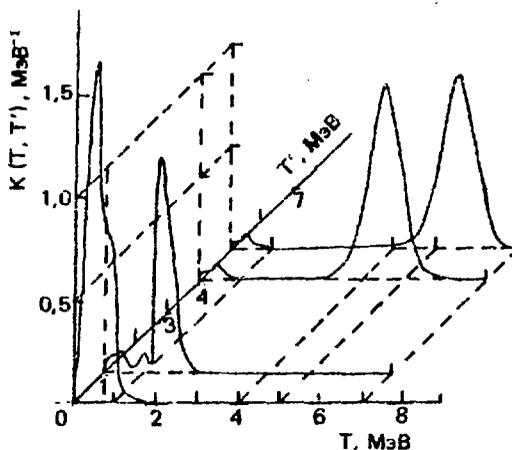


Рис. 2. Функция отклика детектора НД-1, рассчитанная по методу Монте-Карло. Кривые приведены для энергий $T' = 0, 1, 4$ и 5 МэВ

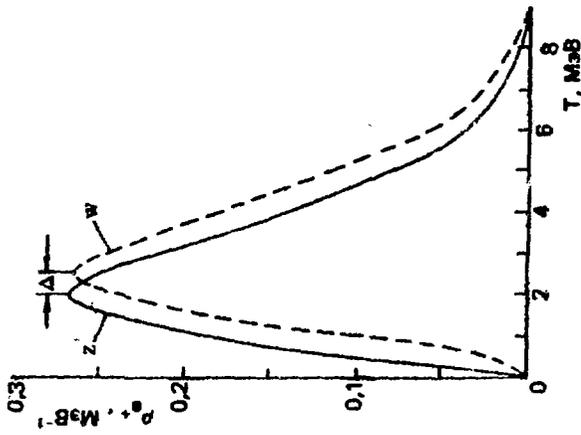


Рис. 3. Измеренный w и восстановленный z спектры позитронов. Расчет с "упрощенным" ядром K_1 (T, T'). Спектр w получен действием интегрального оператора с ядром K_1 (T, T') на позитронный спектр из реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$ для спектра реакторных электронных антинейтрино Авианова [3]

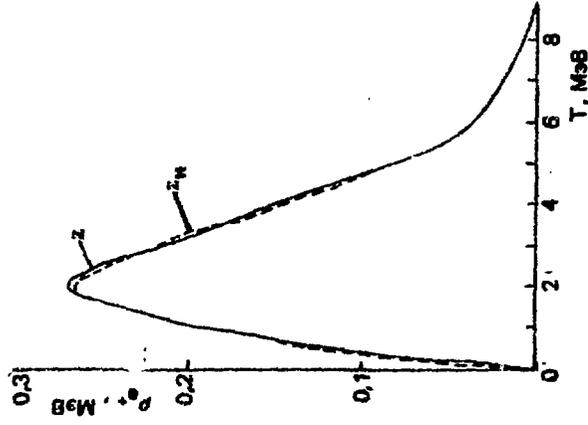


Рис. 4. Пример, демонстрирующий точность процедуры восстановления спектра позитронов. Спектр z восстановлен из измеренного спектра w , приведенного на рис. 3, с использованием "упрощенного" ядра K_1 . Спектр $z_{н}$ — результат повторного восстановления из спектра $w = \hat{K}_1 z$

ется $\sim 1\%$. Такое значение δ можно объяснить двумя факторами: ошибками применяемого в программе численного способа интегрирования, а также тем, что оператор регуляризации \hat{R}_γ является приближением к оператору \hat{K}^{-1} , обеспечивающему взаимную однозначность точного решения x и левой части v в уравнении (3). В то же время оператор регуляризации \hat{R}_γ обеспечивает однозначность лишь в одну сторону: $z_H = \hat{R}_\gamma \hat{K} z$. Таким образом, $z_H = \hat{R}_\gamma \hat{K} z \neq z$.

В реальной ситуации спектр позитронов измеряется не с нулевой энергии, а с некоторого порогового значения T_D . Поэтому речь может идти, разумеется, лишь о восстановлении части спектра $\rho_{e^+}(\Gamma)$ при энергиях $T \geq T_D$. Поскольку в программе предусмотрена возможность задания изм.енного спектра в произвольных точках, недостающие значения $w(T)$ в интервале от 0 до T_D задаются с помощью интерполяции по методу кубического сплайна. Было проанализировано влияние такой интерполяции на восстановленные спектры при различных значениях порога регистрации T_D . При увеличении T_D качественный вид кривых w в интервале от 0 до T_D плавно изменяется. Три функции w при пороговых энергиях $T_D = 0, 2$ и $4,4$ МэВ (соответственно w, w_{Δ_1} и w_{Δ_2}) показаны на рис. 5. На рис. 6 приведены вос-

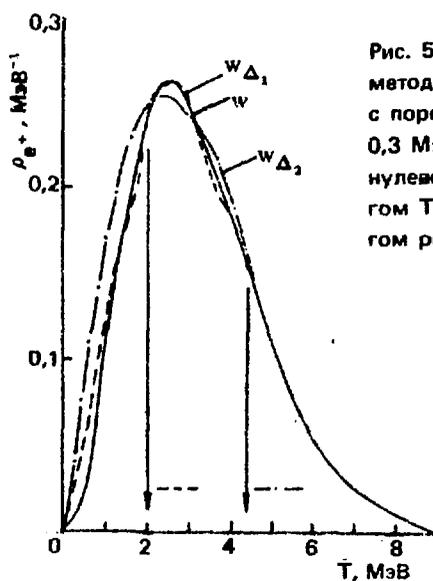


Рис. 5. Аппроксимация измеренного спектра w методом кубического сплайна. Спектр w задан с пороговой энергии T_D до $T = 9$ МэВ с шагом $0,3$ МэВ. — — результат аппроксимации при нулевом пороге; - - - функция w_{Δ_1} с порогом $T_D = 2$ МэВ; - · - · функция w_{Δ_2} с порогом регистрации позитронов $T_0 = 4,4$ МэВ

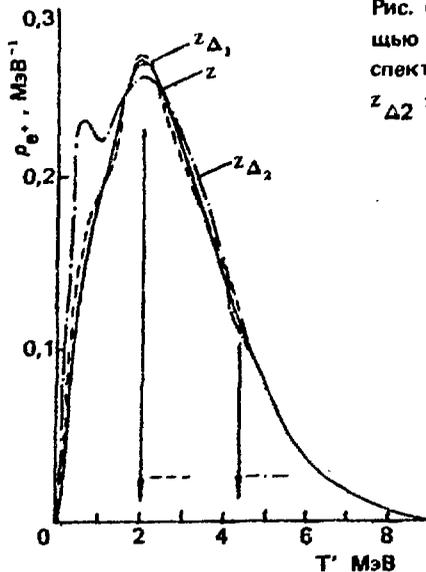


Рис. 6. Спектры позитронов, полученные с помощью программы восстановления для измеренных спектров, показанных на рис. 5. Кривые z , z_{Δ_1} , z_{Δ_2} соответствуют левым частям w , w_{Δ_1} , w_{Δ_2}

становленные из этих функций спектры z , z_{Δ_1} и z_{Δ_2} . Для них поточечное отклонение $|z - z_{\Delta_i}|/z$ при энергиях выше соответствующего порога T_D не превышает 3%.

Обсудим теперь способ оценки коридора ошибок восстановленного спектра позитронов. Если проинтерполировать граничные точки интервалов "экспериментальных" ошибок получим коридор ошибок задания измеренного спектра. Внутри этого коридора можно выбрать любую непрерывную левую часть (4) и с помощью предложенного выше способа получить единственную восстановленную функцию z . Эти кривые w могут быть гладкими, ломаными, зигзагообразными. Огибающие множества кривых z , полученных восстановлением из таких функций w , и будут определять коридор ошибок восстановленных спектров позитронов. Выбор w в пределах "экспериментально" измеренного коридора ошибок осуществлялся с использованием датчика случайных чисел, позволяющего в каждой точке либо группе точек задавать отклонение кривой, например, от нижней границы коридора. Статистика составила 104 кривых. На рис. 7 приведены в сравнении коридоры ошибок измеренного спектра и восстановленного с помощью описанной процедуры и ядра $K_1(T, T')$ спектра. Интервал ошибок задавался по формуле

$$\Delta w/w = 0,1\sqrt{w(T)/w(T = 1\text{мэВ})},$$

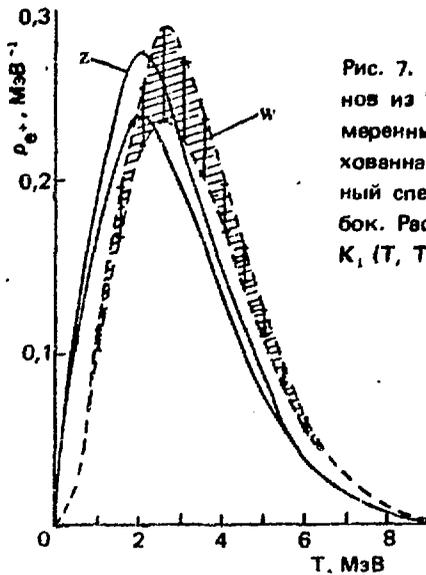


Рис. 7. Пример восстановления спектра позитронов из "экспериментального". Функция w — измеренный спектр с коридором ошибок (заштрихованная область), функция z — восстановленный спектр с соответствующим коридором ошибок. Расчет проведен с "упрощенным" ядром $K_1(T, T')$

дающей 10%-ную ошибку "измерения" левой части уравнения (3) при энергии $T = 1$ МэВ.

Произведен также расчет с ядром $K_2(T, T')$. Эта аппаратная функция характеризует уже реальный детектор НД-1 [11]. Функция $K_2(T, T')$ получена путем моделирования десяти тысяч историй с нейтронами и гамма-квантами в детекторе [17]. Зависимость функции $K_2(T, T')$ от измеряемой энергии T при четырех фиксированных энергиях рождающегося позитрона $T' = 0, 1, 4$ и 5 МэВ приведена на рис. 2. Аналогично изложенному выше, измеренный спектр позитронов получен исходя из указанного ядра $K_2(T, T')$ и расчетного спектра $x(T)$. В качестве $x(T)$ использовался домноженный на сечение реакции $(\bar{\nu}_e, p)$ спектр реакторных электронных антинейтрино, полученный расчетным путем Клапдором и Метзиенгером [7]. Измеренный спектр w , восстановленный z и истинный x приведены на рис. 8. Отличие функции z от функции x составляет $\delta_z \sim 1\%$. Коридор ошибок измеренного спектра принимался равным

$$\Delta w/w = 0,1\sqrt{w(T = 1 \text{ мэВ})/w(T)}.$$

Методом, описанным выше, со статистикой 104 кривых получен коридор определения z , аналогичный показанному на рис. 7. Коридоры левых частей и решений (4) приведены на рис. 9.

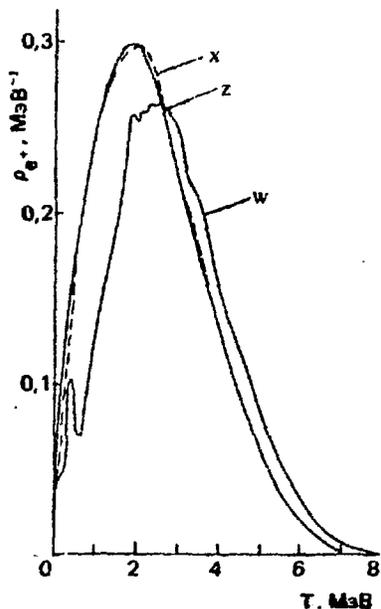


Рис. 8. Измеренный w и восстановленный z спектры позитронов. Расчет с "реальным" ядром $K_2(T, T')$, полученным методом Монте-Карло. Здесь $w = K_2 x$, где x — спектр позитронов из реакции $\bar{p} + p \rightarrow n + e^+$, рассчитанный со спектром \bar{p} Клапдора и др. [7]

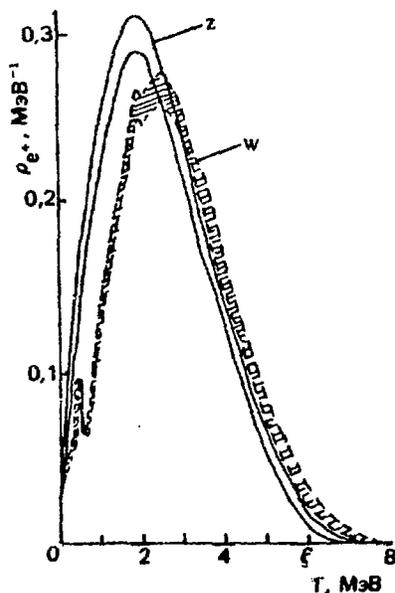


Рис. 9. Пример восстановления спектра позитронов из измеренного w , приведенного на рис. 8. Коридор ошибок задания w нанесен пунктиром и заштрихован. Сплошными линиями обозначен коридор, внутри которого располагается восстановленный спектр. При получении измеренного и восстановленного спектров использовалось "реальное" ядро $K_2(T, T')$

Рассмотренный в предлагаемой работе метод позволяет восстанавливать спектр позитронов из спектра практически любого вида, измеренного на эксперименте. Точность восстановления заведомо меньше реальных ошибок эксперимента и ограничена точностью применяемых численных методов расчета.

Авторы благодарны Л.А. Микаэлян за внимание к работе и полезные обсуждения.

Список литературы

1. Боровой А.А., Добрынин Ю.Л., Копейкин В.И. — ЯФ, 1977, т. 25, с. 264.
2. Копейкин В.И. — ЯФ, 1980, т. 32, с. 1507.
3. Avignone F.T. — Phys. Rev. D, 1970, vol. 2, p. 2609.
4. Avignone F.T., Greenword Z.D. — Phys. Rev. C, 1980, vol. 22, p. 594.
5. Davis B.R. et al. — Phys. Rev. C, 1979, vol. 19, p. 2259.
6. Vogel P. et al. — Phys. Rev. C, 1981, vol. 24, p. 1543.
7. Klapdor H.V., Metzienger J. — Phys. Lett., 1982, vol. 112B, p. 22.
8. Schreckenbach K. et al. — Phys. Lett., 1981, vol. 99B, p. 251.
9. Tsoulfanidis N. et al. — Nucl. Sci. Eng., 1971, vol. 43, p. 42.
10. Боровой А.А., Климов Ю.В., Копейкин В.И. — ЯФ, 1983, т. 37, с. 1345.
11. Боровой А.А., Копейкин В.И., Микаэлян Л.А., Толоконников С.В.— ЯФ, 1982, т. 36, с. 400.
12. Nezzrick F., Reines F. — Phys. Rev., 1966, vol. 142, p. 852.
13. Boehm F. et al. — Phys. Lett., 1980, vol. 97B, p. 310.
14. Kwon H. et al. — Phys. Rev. D, 1981, vol. 24, p. 1097.
15. Афонин А.И. и др. Препринт ИАЭ-3676/2, М., 1982.
16. Афонин А.И. и др. Препринт ИАЭ-3804/2, М., 1983.
17. Добрынин Ю.Л. Препринт ИАЭ-3173, М., 1979.
18. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1974.
19. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1981.
20. Петров А.П. Статистический подход к решению операторных уравнений 1 рода: Автореферат дис. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. 1967.
21. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики.— М.: Мир, 1977, т. 1.

Редактор О.В. Базанова
Технический редактор Н.И. Мазеева
Корректор Г.Я. Кармадонова

Т-13455. 10.07.84. Формат 60x90/16. Уч.-изд. л. 0,7
Тираж 110. Индекс 3624. Заказ 2804

Отпечатано в ИАЭ

10 мод.

Издательство 3624

Препринт ИАЗ-4059/2. М., 1984