

institut de physique nucléaire

LABORATOIRE ASSOCIE A L'IN2P3



IPNO-DRE 85.10

QUELQUES PROPRIETES DES FONCTIONS SATISFAISANT
AUX INEGALITES DE BELL EN RELATION AVEC LA
MECANIQUE QUANTIQUE.

P. ROUSSEL

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

I.P.N. BP n° 1 - 91406 ORSAY

IPNO-DRE 85.10

QUELQUES PROPRIETES DES FONCTIONS SATISFAISANT
AUX INEGALITES DE BELL EN RELATION AVEC LA
MECANIQUE QUANTIQUE.

P. ROUSSEL

RESUME

QUELQUES PROPRIETES DES FONCTIONS SATISFAISANT AUX INEGALITES DE BELL EN RELATION AVEC LA MECANIQUE QUANTIQUE

Après avoir rappelé le débat sur la mécanique quantique (M.Q.) ouvert en 1935 par A. Einstein et N. Bohr, on décrit l'expérience proposée par D. Bohm et on établit une démonstration originale des inégalités trouvées par J. Bell pour mettre à l'épreuve la classe de modèles prétendant compléter la M.Q. par des paramètres cachés dans le passé commun. On montre que la M.Q. viole presque partout ces inégalités. Les propriétés générales des fonctions (d'une variable) satisfaisant aux inégalités de Bell sont examinées en détail pour la comparaison de ces fonctions avec celles prédites par la M.Q. : en ce qui concerne les dérivées, les intégrales, les valeurs, les intervalles, les amplitudes et finalement le comportement global : quelques exemples de fonctions "à la Bell" construites pour se rapprocher des prédictions de la M.Q. sont donnés. Il est ainsi mis en évidence une incompatibilité de la M.Q. avec les fonctions satisfaisant aux inégalités de Bell, plus radicale que celle qui résulte du seul examen des inégalités.

ABSTRACT

SOME PROPERTIES OF THE FUNCTIONS SATISFYING BELL'S INEQUALITIES IN RELATION TO QUANTUM MECHANICS

Having recalled the 1935 debate between A. Einstein and N. Bohr about quantum mechanics (Q.M.) the thought-experiment of D. Bohm is described and a new derivation of the Bell's inequalities is established to test the class of theories based on the hypothesis of hidden-parameters in the common past. It is shown that Q.M. violates these inequalities almost everywhere. The general properties of functions satisfying Bell's inequalities are studied in order to compare them to Q.M. predictions as regards derivatives, integrals, values, intervals, amplitudes and finally the overall behaviour ; a few of the Bell's functions chosen to approach somehow Q.M. are given. Altogether, in the comparison between Q.M. and functions satisfying Bell's inequalities, an incompatibility is revealed that is stronger than that resulting from consideration of just the inequalities.

I	- INTRODUCTION	1
II	- LES INEGALITES DE BELL	2
	II.1 - <u>Une expérience type pour démonstrations</u>	2
	II.2 - <u>Pourquoi une inégalité</u>	3
	II.3 - <u>Passage à une fonction d'une seule variable (angulaire)</u>	4
III	- VIOLATION DE L'INEGALITE DE BELL PAR LA M. Q.	6
IV	- LES FONCTIONS "A LA BELL"	7
	IV.1 - <u>Propriétés concernant les dérivées</u>	8
	IV.2 - <u>Propriétés concernant les intégrales</u>	9
	IV.3 - <u>Propriétés concernant les valeurs et les intervalles</u> ..	10
	IV.4 - <u>Propriétés concernant les amplitudes</u>	13
	IV.5 - <u>Retour sur les conditions (13) et (8)</u>	15
V	- CONCLUSION	17
APPENDICE A : Démonstration de Bell et démonstration selon les mesures d'ensembles. Démonstration de l'inégalité de Bell généra- lisée.		21
APPENDICE B : Propriétés découlant de l'inégalité de Bell et des relations de symétrie.		24
APPENDICE C : Séquence limite de racines et séquence limite d'amplitudes des fonctions "à la Bell" et génération d'une fonction limite à N racines.		25

I - INTRODUCTION

Un débat portant sur les qualités de théorie physique de la mécanique quantique a été amorcé il y a un demi-siècle par un article de A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen (1) et par un article en "réponse" de N. Bohr (2) quelques mois plus tard en 1935. Les succès, c'est peu dire, de la mécanique quantique n'ont pas permis aux questions soulevées de rester au premier plan de l'actualité de la physique mais le débat pourtant dure toujours. On se doit de citer l'intervention très importante de D. Bohm et Y. Aharonov (3) en 1957 qui ont proposé une expérience type permettant à la fois de poser clairement les problèmes et susceptible de réalisation effective. Mais celle des voies de ce débat qui occupe aujourd'hui le devant de la scène a été ouverte par J.S. Bell (4) en 1964 et si elle tient ce rôle, c'est que Bell a espéré pouvoir faire trancher le débat par un résultat expérimental. Il a, en effet, montré pour toute une classe de modèles pouvant en principe prétendre à compléter la mécanique quantique, et en s'appuyant sur l'expérience type de Bohm, que les résultats d'expériences (ou leurs prédictions) devaient satisfaire une certaine relation, plus précisément une inégalité reliant les résultats de mesures pour différentes valeurs d'un paramètre - en fait, l'angle de deux polariseurs comme on le verra plus loin -. Des expériences ont été effectivement menées jusque récemment celles de A. Aspect et al. très précises (5) et pour les dernières (6), faisant intervenir un paramètre nouveau, le temps. Elles ont (presque) toutes confirmé la mécanique quantique et (donc) violé les inégalités de Bell rejetant ainsi la classe de modèles à l'épreuve. Il reste cependant à interpréter ces expériences, c'est-à-dire à examiner ce qu'elles impliquent, ce qu'elles éliminent : confirment-elles seulement que la mécanique quantique fonctionne bien, ou bien qu'elle est incompatible avec certaines hypothèses - lesquelles -. Quel est le rapport avec les questions initiales de Einstein et al. De nouvelles questions sont-elles posées ? De nouveaux concepts, souvent introduits, comme la "non-localité" ou la "non-séparabilité" sont-ils nécessaires ? En regard de ces grandes interrogations sur lesquelles B. d'Espagnat est intervenu récemment (7) avec un point de vue personnel mais approfondi et documenté, le but de cet article est très limité : démontrer quelques conséquences des inégalités de Bell et montrer comment ces propriétés modifient la problématique des comparaisons de l'expérience avec la mécanique quantique ou avec les modèles envisagés par Bell pour la compléter.

Précisons que si c'est "l'intime conviction" de l'incompatibilité des hypothèses de Bell-paramètres cachés prédéterminés, ou paramètre dans le passé commun - avec les bases de la mécanique quantique qui a motivé ce travail, les démonstrations, par contre, devraient être indépendantes de cette conviction. Indiquons également que si les résultats trouvés semblent conduire à limiter l'intérêt de toute expérience qui ne ferait que vérifier la violation des inégalités de Bell, - il est vrai qu'elles sont nombreuses aujourd'hui - cela ne concerne pas les dernières expériences d'A. Aspect qui font fonctionner la mécanique quantique dans des conditions originales et fondamentalement nouvelles du point de vue des relations espace-temps mais cette expérience ne sera pas discutée ici - voir réf. (6) -.

II - LES INÉGALITÉS DE BELL

II.1 - Une expérience type pour démonstrations

Bien que beaucoup d'expériences aient été effectuées avec des photons, nous garderons l'exemple original aussi bien de Bohm que de Bell (fig. 1), celui de deux particules 1 et 2 de spin 1/2 formées dans un état singulet $S = 0$ et se "séparant" pour être détectées "indépendamment" dans deux aimants de Stern-Gerlach dont les axes de mesure de polarisation peuvent être orientés selon différentes directions \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , etc. . .

Le résultat de la mesure de polarisation $A = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{a}$ sur la particule 1 et $B = \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{b}$ sur la particule 2 peut donner un résultat +1 ou -1, quelles que soient les orientations \vec{a} et \vec{b} , en conformité avec la mécanique quantique (et à l'expérience). Cela est vrai quel que soit l'état initial mais préciser l'état initial $S = 0$ permet de prédire la corrélation entre les mesures A sur 1 et B sur 2.

La mécanique quantique prédit, en effet, une valeur moyenne pour cette corrélation

$$\langle 1 | P(\vec{a}, \vec{b}) = \langle A(\vec{a}) \cdot B(\vec{b}) \rangle = - \vec{a} \cdot \vec{b} \quad (\vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ vecteurs unitaires})$$

Bell met alors à l'épreuve le modèle suivant dit à variables supplémentaires. Selon ce modèle, pour chaque couple de particules, la valeur particulière d'un paramètre λ pré-détermine* le résultat de la mesure aussi bien A sur 1 que B sur 2.

$$(2) A = A(\vec{a}, \lambda) ; B = B(\vec{b}, \lambda)$$

La répartition statistique des valeurs de λ pour les différents tirages de couples de particules autorise la dispersion des résultats pour un choix donné de \vec{a} et \vec{b} - sans cette possibilité, A et B seraient constants pour \vec{a} et \vec{b} fixés et le modèle perdrait déjà tout contact avec la réalité.

II.2 - Pourquoi une inégalité

La connaissance complète d'une part de la fonction $A(\vec{a}, \lambda)$ (B s'en déduit comme on le verra plus loin), d'autre part de la distribution de probabilité $\rho(\lambda)$ de λ préciserait complètement le modèle et permettrait de calculer la valeur moyenne de toute mesure effectuée sur le système, en particulier la corrélation recherchée.

$$(3) P(\vec{a}, \vec{b}) = \int_{\Lambda} A(\vec{a}, \lambda) B(\vec{b}, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda ; -1 \leq P(\vec{a}, \vec{b}) \leq +1$$

et de la comparer directement à la prédiction de la mécanique quantique

$$P_{M.Q.}(\vec{a}, \vec{b}) = -\vec{a} \cdot \vec{b}$$

L'intérêt de la démarche de Bell est d'arriver à un résultat qui n'est qu'une inégalité mais qui, par contre, ne repose que sur la seule hypothèse de départ de la prédétermination de A et B : $A = A(\vec{a}, \lambda)$; $B = B(\vec{b}, \lambda)$, indépendamment de la forme particulière que peuvent prendre les fonctions A, B et ρ . Cela permet de ne pas mettre à l'épreuve successivement toutes les hypothèses qu'on pourrait faire sur ces fonctions. L'inégalité est la suivante :

$$(5) |P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c})$$

* c'est en cela que ce modèle nous paraît pré-quantique, classique même : il ignore la spécificité de la mesure quantique, du processus de réduction du paquet d'onde, mais ce n'est pas l'objet de cet article.

on trouvera dans l'appendice A la démonstration donnée par J. Bell (4). Cette démonstration ne met pas directement en évidence que n'interviennent en fait seulement que des considérations de la théorie des ensembles appliquée à l'ensemble Λ des valeurs de λ , comme il est montré dans cet appendice. On y trouvera également une démonstration originale des inégalités de Bell généralisées introduites ultérieurement (8) et qui traitent les voies (1) et (2) de façon plus symétrique en introduisant 4 directions de mesures, \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} ; on n'a plus alors à utiliser la relation $B(\vec{a}, \lambda) = -A(\vec{a}, \lambda)$ qui résulte de la condition :

$$(6) P(\vec{a}, \vec{a}) = -P(\vec{a}, -\vec{a}) = -1 \text{ (voir plus bas)}$$

comme l'avait montré Bell.

II.3 - Passage à une fonction d'une seule variable (angulaire)

Les différents vecteurs \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ... envisagés jusqu'ici peuvent avoir une orientation quelconque dans l'espace à trois dimensions. cependant, l'isotropie de l'espace conduit à ne faire dépendre $P(\vec{a}, \vec{b})$ que de l'angle non orienté $\theta_{\vec{a}, \vec{b}}$ entre \vec{a} et \vec{b} soit :

$$(7) P(\vec{a}, \vec{b}) = P(\vec{b}, \vec{a}) = P(\theta_{\vec{a}, \vec{b}}) = f(\theta)$$

De plus, des considérations de symétrie évidentes se combinent à la condition (6) pour donner :

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = P(-\vec{a}, -\vec{b}) = -P(\vec{a}, -\vec{b}) = -P(-\vec{a}, \vec{b})$$

L'ensemble de ces conditions se traduit sur la fonction f par les conditions :

$$(8) \begin{cases} f(\theta) = -f(\pi - \theta) \\ f(0) = -1 ; f(\pi) = 1 \\ f(\pi/2) = -f(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

Examinons maintenant les conséquences de l'inégalité (5), établie dans l'espace à 3 dimensions, sur la fonction d'une seule variable angulaire $f(\theta)$. Soit α l'angle entre les vecteurs \vec{a} et \vec{b} , supposés fixés, soit β l'angle

entre les vecteurs \vec{a} et \vec{c} supposé constant (\vec{c} n'étant pas autrement contraint) $0 \leq \alpha, \beta \leq \pi$: on supposera $\alpha \geq \beta$. Le premier membre de (5) est alors constant. le second membre peut s'écrire :

$$1 + P(\vec{b}, \vec{c}) = 1 + f(\varphi)$$

où φ peut prendre n'importe quelle valeur entre $(\alpha - \beta)$ et $(\alpha + \beta)$.

Au total, (5) se traduit donc par :

$$(9) \quad \begin{cases} |f(\alpha) - f(\beta)| \leq 1(\varphi) - f(0) \\ 0 \leq \beta \leq \alpha \leq \pi \\ \alpha - \beta \leq \varphi \leq \alpha + \beta \end{cases}$$

On a indiqué sur la figure 2 la zone du plan $f(\theta)$ interdite pour f par la condition (9) à partir des deux seules données $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ correspondant aux angles α et β .

Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ avaient été choisis au départ coplanaires - c'est nécessairement le cas pour les photons puisque ceux-ci sont définis (par exemple) par leur polarisation linéaire selon une direction nécessairement perpendiculaire à la direction de propagation - seules les valeurs extrêmes de φ auraient été à considérer : $\varphi = \alpha + \beta$ et $\varphi = \alpha - \beta$, ce qui réduit donc la portée de l'inégalité (5).

Cependant, dans l'essentiel de ce qui suit, on réduira l'inégalité de Bell à la seule valeur limite $\varphi = \alpha - \beta^*$. On a alors pour les particules de spin 1/2 dans un état S une condition nécessaire même si elle n'épuise pas le résultat de Bell et on aura d'autre part - et c'est la raison de ce choix - l'inégalité de Bell pour des photons convenablement préparés (9) moyennant des modifications mineures : la polarisation linéaire correspond à une direction (et pas un axe orienté), les polarisations exclusives correspondent à des polarisations perpendiculaires (et pas opposées) ; la dépendance de la corrélation avec l'angle des polariseurs prévue par la mécanique quantique est en $-\cos 2\theta$ (au lieu de $-\cos \theta$).

Une fonction f qui satisfait à (9) avec $\varphi = \alpha - \beta$ pour toutes valeurs de α et β satisfait aussi à (9) avec $\varphi = \alpha + \beta$.

Dans ce qui suit, on partira donc de l'inégalité de Bell sous la forme :

$$(10) \quad |f(\alpha) - f(\beta)| \leq f(\alpha - \beta) - f(0)$$

qu'on utilisera conjointement avec l'ensemble des conditions (7).

III - VIOLATION DE L'INEGALITE DE BELL PAR LA MECANIQUE QUANTIQUE

On a souvent écrit (voir ref. (5) (6) (9) et articles cités) que les cas de violation des inégalités étaient peu nombreux, mais si cela est vrai du point de vue des expériences réalisées, on va tout de même montrer que pour le cas des particules de spin 1/2 les prédictions de la mécanique quantique violent "presque partout" ces inégalités. La relation (10) peut en effet s'écrire :

$$(11) \quad y(\alpha, \beta) = f(\alpha) - f(\beta) - f(\alpha - \beta) + f(0) \leq 0$$

où $y(\alpha, \beta)$ a été introduite pour la commodité de la suite.

Si on se rappelle que pour la mécanique quantique,

$$f_{M.Q.}(\theta) = -\cos \theta, \text{ on obtient :}$$

$$(11') \quad y_{M.Q.}(\alpha, \beta) = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \geq 0$$

Sauf aux frontières du domaine ($\alpha = \beta$ ou $\beta = 0$, ou $\alpha = \pi$), pour lesquelles l'égalité est obtenue, $y_{M.Q.} > 0$ viole partout l'inégalité (11) - voir fig. 3 -. Un écart maximum de 0.5 est obtenu pour $\alpha = 2\pi/3$; $\beta = \pi/3$. L'importance de cet écart peut être apprécié en constatant que chacun des quatre termes composant $y(\alpha, \beta)$ est borné par ± 1 ; mais l'essentiel - sauf pour une expérience - n'est pas dans l'importance de l'écart, mais dans l'incompatibilité systématique qui est trouvée.

On pourrait penser que cette incompatibilité trouvée au moins pour un système physique, entre le modèle à l'épreuve* et les prédictions de la mécanique quantique, est suffisante pour rejeter le modèle : la mécanique quantique a fourni ses preuves et elle est à l'oeuvre ici dans une situation plutôt simple et "classique". Il a cependant été recherché une réponse expérimentale quantitative à cette incompatibilité en rapportant l'écart observé (et prévu) à l'inégalité à des barres d'erreur d'origine expérimentale. Nous allons montrer pourquoi cette démarche ne nous paraît pas correcte.

IV - LES FONCTIONS "À LA BELL"

L'utilisation de l'expression (10) (ou de ses généralisations comportant 4 vecteurs) qui a servi de référence aux expériences réalisées a conduit à mesurer $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\alpha-\beta)$ pour des angles qui, si la mécanique quantique est prédictive, rendent l'écart à (10) maximum. Le point faible dans cette démarche est qu'elle ne tient pas compte du fait que, si le modèle à l'épreuve est correct, il impose que la fonction de corrélation $f(\theta)$ soit conforme à l'inégalité de Bell pas seulement en trois points $\theta = \alpha, \beta, \alpha-\beta$ mais sur toute l'étendue de définition où elle s'applique ($0 \leq \beta \leq \alpha \leq \pi$).

Nous allons montrer que la prise en compte de cette propriété globale de $f(\theta)$ et des conditions de symétrie (7) modifie de façon importante le problème de sa comparaison avec les prédictions de la M.Q.

Dans ce qui suit, on va appeler fonction "à la Bell" qu'on notera $f_B(\theta)$, une fonction qui satisfait partout aux conditions (10) et (7).

L'établissement de l'inégalité de Bell permettait de faire l'économie de l'épreuve des différentes fonctions possibles $A(a, \lambda)$ et $\rho(\lambda)$. Sans perdre cette généralité, on va examiner quelques propriétés des fonctions "à la Bell" $f_B(\theta)$ en recherchant en particulier celles qui les distinguent de la fonction $f_{MQ}(\theta) = -\cos\theta$ prédite par la mécanique quantique. A l'inverse, on examinera également comment une fonction $f_B(\theta)$ peut s'approcher de la fonction $f_{MQ}(\theta)$.

* modèle à paramètre prédéterminé dans le passé commun

On va auparavant montrer que l'inégalité se dédouble et trouver une représentation graphique des deux inégalités résultantes.

Le deuxième membre de (10) est positif ou nul, en effet,

$$-1 \leq f(\alpha - \beta) \leq +1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1$$

La condition (10) est donc équivalente aux deux conditions

$$(12) \quad f(\alpha) - f(\beta) \leq f(\alpha - \beta) - f(0)$$

$$(13) \quad f(\alpha) - f(\beta) \geq -[f(\alpha - \beta) - f(0)]$$

Il est intéressant de représenter graphiquement ces deux conditions (fig. 4) : considérant la courbe représentative de $f(\theta)$ à partir de son origine $0(\theta = 0, f(\theta) = -1)$, on déplace cette courbe sur elle-même de telle sorte que $0'$, l'origine de la courbe mobile, décrive la courbe fixe. La condition (12) implique que la courbe mobile reste partout au-dessus de la courbe fixe.

Si la courbe mobile est $-f(\theta)$ la condition (13) implique que cette seconde courbe mobile reste en-dessous de la courbe fixe.

Du fait de l'évolution générale de $f(\theta)$: $f(0) = -1$; $f(\pi/2) = 0$; $f(\pi) = 1$, la condition (12) apparaît donc beaucoup plus contraignante que (13) et - recherchant des conditions nécessaires - nous ne considérerons dans l'essentiel de ce qui suit que la première. f_{β} sera utilisé indifféremment pour une fonction qui satisfait à (10) ou seulement à (12). Quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on écrira simplement f .

IV.1 - Propriétés concernant les dérivées de $f_{\beta}(\theta)$

Si $f(\theta)$ est dérivable, en faisant tendre β vers α dans (12), on démontre que la dérivée à l'origine est supérieure à la dérivée sur tout l'intervalle $(0, \pi)$ et donc à sa valeur moyenne sur cet intervalle.

$$(14) \quad f'(0) \geq f'(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

$$(15) \quad f'(0) \geq [f(\pi) - f(0)]/\pi = 2/\pi$$

à comparer à $f_{M.Q.}(0) = 0$.

Bell (4) avait déjà indiqué l'impossibilité pour $f_B(\theta)$ d'être stationnaire en 0.

IV.2 - Propriétés concernant les intégrales

Considérons maintenant l'intégrale

$$(16) \quad I(\theta) = \int_0^{\theta} [f(\theta) - f(0)] d\theta ; 0 < \theta < \pi$$

où le terme $f(0)$ est introduit par commodité pour décaler l'origine et rendre $I(\theta) > 0$.

On peut écrire :

$$I(\theta) = \int_0^{\theta/2} [f(\theta) + f(\theta - \theta) - 2f(0)] d\theta$$

et, compte-tenu de (12) avec $\alpha = \theta$, $\alpha - \beta = \theta$

$$(17) \quad I(\theta) \geq \int_0^{\theta/2} [f^2(\theta) - f(0)] d\theta = \frac{\theta}{2} [f(\theta) - f(0)]$$

quel que soit $0 < \theta < \pi$, l'origine étant prise en $-1 = f(0)$, en chaque point 0, l'intégrale de 0 à θ est supérieure à l'intégrale de la fonction linéaire joignant l'origine à ce point (fig. 5).

En particulier, choisissant $\theta = \pi/2$, on trouve que l'intégrale (toujours comptée à partir de -1) est forcément supérieure à $\pi/4$ alors que :

$$I_{M.Q.}(\pi/2) = \int_0^{\pi/2} (-\cos\theta + 1) d\theta = \pi/2 - 1$$

(18) soit $I_B(\pi/2) - I_{M.Q.}(\pi/2) \geq \frac{4 - \pi}{4}$

Ce n'est pas la valeur (finie) de cette limite qui est importante, c'est la preuve qu'elle donne que toute possibilité de rapprochement entre $F_B(\theta)$ et $F_{M.Q.}(\theta)$ dans une certaine zone de θ sera nécessairement payée dans une autre zone par un éloignement plus grand. Il faut noter que la limite absolue à ± 1 pour $f(\theta)$ quelque soit θ va peser pour la réalisation de cette condition intégrale (18) et va en particulier empêcher d'y satisfaire avec quelques points singuliers en fonction θ .

Notons que la fonction linéaire - qui joint les points $(0, -1) ; (\pi/2, 0) ; (\pi, +1)$ - souvent donnée (4), (7) comme un exemple de f_B apparaît plutôt comme une fonction limite tant pour la dérivée à l'origine que pour l'intégrale. C'est pour une fonction sans point d'inflexion, la fonction f_B qui se rapproche le plus de $f_{M.Q.}$. Nous la noterons $f_{B1}(\theta)$.

IV. 3 -- Propriétés concernant les valeurs et les intervalles

On va examiner ci-dessous la possibilité d'utiliser une fonction à structure plus compliquée pour tenter de rapprocher $F_B(\theta)$ de $f_{M.Q.}(\theta)$. On étudiera alors en particulier la mesure des intervalles de θ où f_B peut être du même côté que $f_{M.Q.}$ par rapport à la fonction linéaire limite f_{B1} . Nous examinerons également les excursions possibles des amplitudes des fonctions f_B . Auoravant et pour simplifier le formalisme, on va rapporter les fonctions f , non plus à l'axe des θ , mais à la fonction linéaire limite f_{B1} vue précédemment.

En effet, si on excepte les deux conditions sur les valeurs $f(0) = -1$ et $f(\pi) = +1^*$, on remarquera que la somme de deux fonctions f_B est également une fonction f_B . Il n'en n'est pas de même de la différence : on peut cependant soustraire une fonction qui satisfait à (12) partout (pour toute valeur de α et β) avec le signe de l'égalité.

C'est le cas de la fonction linéaire f_{B1} que nous allons soustraire à toutes les fonctions f_B avec la notation

$$F(\theta) = f(\theta) - f_{B1}(\theta)$$

les conditions pour que F soit une F_B étant alors :

$$(19) \quad F(0) = F(\pi/2) = F(\pi) = 0^{**}$$

* il faut également excepter la limite à ± 1 pour toute valeur de θ , on reviendra plus loin sur cet aspect.

** et cette fois pour $F(\theta)$, contrairement à $f(\theta)$, la somme de deux $F_B(\theta)$ est une F_B y compris en ce qui concerne les valeurs pour $0, \pi/2$ et π .

$$(20) \quad F(\theta) = -F(\pi - \theta)$$

$$(21) \quad F(\alpha) - F(\beta) \leq F(\alpha - \beta) \text{ qui remplace (12)}$$

et l'on a (voir fig. 6) :

$$F_{M_0}(\theta) = 1 - \frac{2}{\pi} \theta - \cos \theta$$

Remarquons que la représentation (fig. 4) de la condition (12) pour F_B est également valable avec la condition (21) pour F_B . Ce n'est par contre plus vrai pour la condition (13).

Des propriétés portant sur le signe de F_B démontrées à partir de (20) et (21) dans l'appendice B sont indiquées ci-dessous. Compte-tenu de la relation de symétrie (20), l'étude de F sur $(0, \pi/2)$ est suffisante. Mais les relations initiales et déduites sont valables de 0 à π .

$$1) \text{ Si } F(\alpha) \geq 0, \text{ on a alors } F(\alpha/2) \geq 0 \text{ et } F(\alpha/2^n) \geq 0 \quad (22)$$

(n entier positif)

$$\text{et de plus } F(\pi - \alpha) \leq 0 \quad (23)$$

$$2) \text{ Si } F(\alpha) \geq 0 \text{ et } F(\beta) \leq 0, \text{ on a alors } F(\alpha - \beta) \geq 0 \quad (24)$$

$$3) \text{ Si } F(\alpha) \leq 0, \text{ on a alors } F(2\alpha) \leq 0 \quad (25)$$

$$\text{On a aussi : } F(n\alpha) \leq 0 \quad n \text{ entier positif} \quad (25')$$

$$\text{et } F(\pi/2 - \frac{\alpha}{2}) \geq 0 \quad (26)$$

$$\text{et } F(\pi - 2\alpha) \geq 0 \quad (27)$$

$$\text{et } F(\pi - \alpha) \geq 0 \quad (28)$$

$$4) \text{ Si } F(\alpha) \leq 0 \text{ et } F(\beta) \leq 0, \text{ on a alors } F(\alpha + \beta) \leq 0$$

On a en conséquence de (19) et (22)

$$F(\pi/4), F(\pi/8) \dots F(\pi/2n) \dots \geq 0 \quad (30)$$

Ce résultat est très important puisqu'il donne immédiatement la possibilité, si elle est souhaitée, de constater en une seule mesure l'écart de l'expérience et de la mécanique quantique avec toute fonction θ à la Bell puisque $F_{MQ}(\theta)$ est partout négatif.

Par ailleurs, si α_1 est la première racine de $F(\theta)$ ($F(\theta) \geq 0$ si $0 \leq \theta \leq \alpha_1$) et N le nombre de racines entre 0 et $\pi/2$, bornes exclues, en conséquence de (24) on a :

$$(31) \quad \alpha_1 \geq \frac{\pi}{N+2}$$

Rappelant alors que $F_{MQ}(\theta)$ est partout négatif de 0 à $\pi/2$, on va chercher une solution qui serait plus favorable que $F_B(\theta) \equiv 0$. On va alors convenir que deux objectifs sont recherchés : le premier zéro α_1 doit être le plus petit possible et la mesure θ_* de l'ensemble des valeurs de θ pour laquelle $F(\theta)$ est négatif doit être la plus grande possible. Ces deux objectifs sont en effet nécessaires à une bonne approximation de F_{MQ} par F_B .

La condition (31) conduit à augmenter le nombre N de racines de $F(\theta)$. On peut alors définir pour chaque valeur de N , la valeur des racines de F qui correspondent à la réalisation des objectifs précédents et tiennent compte des conditions (2) à (29) qui s'imposent pour F_B . Pour N donné, la séquence des racines données ci-dessous par (32) n'est évidemment pas la seule possible, mais cette séquence donne la valeur maximum de θ_* compatible avec la valeur minimum $\pi/N+2$ de α_1 . La séquence des racines est la suivante (voir fig. 7) :

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \pi/N+2 ; \alpha_3 = 2\alpha_1 ; \alpha_5 = 3\alpha_1 \dots \alpha_{2N-1} = \pi - 2\alpha_1 ; \alpha_{2N+1} = \pi - \alpha_1 \\ \alpha_2 = \pi/N+1 ; \alpha_4 = 2\alpha_2 ; \alpha_6 = 3\alpha_2 \dots \alpha_{2N} = \pi - \alpha_2 ; \alpha_{2N+2} = \pi \end{array} \right.$$

on trouve alors que :

$$(33) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_* / (\pi/2) = \frac{N+3}{4(N+2)} \text{ si } N \text{ est impair} \\ = \frac{N}{4(N+1)} \text{ , si } N \text{ est pair} \end{array} \right.$$

soit :

$N =$	1	2	3	4	5	6	7	8	∞
$\frac{\theta_*}{\pi/2} =$	0.333	0.167	0.300	0.200	0.285	0.214	0.244	0.222	0.250

Si l'augmentation de N permet de rapprocher la première racine de 0, on doit remarquer que pour N grand, le rapport des mesures des premiers intervalles négatifs à celles des premiers intervalles positifs, de l'ordre de $1/N$, tend lui aussi vers zéro alors qu'on le voudrait le plus grand possible !

Dans tous les cas, $\theta - \pi/2$ ne peut dépasser 0.333 (pour $N=1$) et tend très vite vers 0.25 si N augmente.

IV.4 - Propriétés concernant les amplitudes

Dans la comparaison des F_B avec F_{MQ} , la considération des amplitudes est évidemment importante : avoir le même signe n'est pas suffisant. Les conséquences sur les amplitudes de la condition (21) sont particulièrement simples lorsqu'elle est appliquée à une fonction $F_{BN}(\theta)$ (on appellera F_{BN} une fonction F_B possédant N racines entre 0 et $\pi/2$) dont les racines sont celles de la séquence (32) (voir appendice C). Par simplicité, nous ne considérerons que les cas où N est impair (cas le plus favorable ou point de vue de θ).

Entre 0 et $\pi/2$, F_N possède $N+1 = 2 \nu$ extremas* alternativement positif et négatif. Soient m_1, m_2, \dots, m_ν les minimas (négatifs) comptés de gauche à droite et M_1, M_2, \dots, M_ν les maximas (positifs) comptés de droite à gauche (voir fig. C1). Soit la séquence d'amplitude :

$$(34) \begin{cases} m_1, m_2 = 2m_1 ; m_3 = 3m_1 \dots m_\nu = \nu m_1 \\ M_1 = (\nu + 1) m_1, M_2 = (\nu + 2) m_1 \dots M_\nu = (\nu + \nu) m_1 \end{cases}$$

On montre dans l'appendice c) que :

- 1) Il est possible de trouver une F_{NB} possédant cette séquence.
- 2) m_1 donné, il n'est pas possible de trouver de F_{NB} pour laquelle m_i ou M_j soit plus petit que les valeurs données par (34).
- 3) Pour toute augmentation d'une des valeurs de m_i ou M_i , il n'existe pas de solution qui ne comporte l'augmentation de toutes les valeurs suivantes dans la séquence.

* il s'agit dans chaque domaine de la valeur absolue la plus grande.

On peut remarquer que les extremas de (34) sont proportionnels aux intervalles auxquels ils correspondent tels qu'ils sont donnés par (32).

On montre qu'il est ainsi possible de générer des F_{Bn} : à partir d'une F_{B0} quelconque*, on construit sur chaque intervalle la figure homothétique dans le rapport de l'intervalle à $\pi/2$, la figure étant alternativement droite et retournée pour les intervalles positifs et négatifs.

On donne sur la figure 8, trois exemples de ces fonctions.

Ces fonctions sont particulières :

1) Elles suivent la séquence limite des racines (32) qui minimise α_1 et maximalise θ_1 .

2) elles suivent de façon limite l'inégalité de base (21) en ce sens que pour toute valeur de β (inférieure à α_{2N+1}), il existe au moins une valeur de α différente de π pour laquelle (21) est satisfaite avec l'égalité. Voir appendice C.

La somme de deux de ces fonctions est une fonction F_B mais elle n'est en général plus une fonction limite. La tentative pourrait être faite d'utiliser un arc de sinusöide comme figure de base F_{B0} et de constituer une pseudo base pour les F_B (pseudo, puisque les F_B ne constituent pas un espace vectoriel).

Revenant à la question essentielle, comment approcher F_{MQ} par une fonction F_B , on a représenté sur la fig. 9, avec F_{MQ} , trois fonctions F_B intéressantes pour la comparaison :

1) $F_{B1} \equiv 0$ déjà discutée

2) une F_{B1} particulière pour laquelle

$$F_{B1} = F_{MQ} \text{ pour } \theta \geq \pi/3$$

$$F_{B1} = F_{MQ} \text{ minimum pour } \theta \leq \pi/3$$

3) une F_{B7} particulière pour laquelle :

* elle est, en fait, soumise à une condition donnée dans l'appendice C.

$$F_{B7} = F_{MQ} \text{ pour } \frac{\pi}{9} < \theta < \frac{\pi}{8}$$

$F_{B7} - F_{MQ}$ minimum partout ailleurs.

Ce dernier exemple montre les difficultés qui apparaissent quand on veut se rapprocher de F_{MQ} pour les petits angles en augmentant N . En fait, on peut montrer que lorsque $N \rightarrow \infty$, la figure des F_{BN} ainsi construite tend à occuper tout l'espace compris entre les limites

$$-\frac{2}{\pi} \theta \leq F(\theta) \leq 2 - \frac{2}{\pi} \theta$$

ainsi :

$$\limite_{N \rightarrow \infty} F_{BN}(\epsilon \frac{\pi}{N}) \equiv 2 \text{ si } \epsilon \text{ est un nombre positif } \ll 1.$$

IV. 5 - Retour sur les conditions (13) et (8)

On doit maintenant rappeler que deux conditions ont été abandonnées dont on va examiner normalement les conséquences ; ces conditions ne pouvant que réduire encore les possibilités de rapprochement de F_B avec $F_{M.Q.}$.

Pour la première condition qui s'applique à tous les cas (photons ou particules de spin 1/2), on doit revenir à $f(\theta)$ soumise à (13) :

$$f(\alpha) - f(\beta) \geq [f(\alpha - \beta) - f(0)]$$

D'une part, cette condition complète la condition (14) sur la dérivée qui devient :

$$-f'(0) \leq f'(\theta) \leq f'(0)$$

D'autre part, pour un N donné, elle réduit encore l'intervalle de θ pour lequel f_{BN} peut être égal à $f_{M.Q.}$. On démontre que la limite est trouvée par une procédure indiquée sur la fig. 10 pour le cas où $N = 3$. Pour ce cas, l'intervalle initial $36 - 45^\circ$ se réduit à $-37.9 - 42.6^\circ$. La fraction conservée diminue et tend vers zéro quand $N \rightarrow \infty$.

La deuxième condition supplémentaire ne s'applique pas au cas des photons mais seulement à celui des particules de spin 1/2. Elle remplace, rappelons le, la condition :

$$|f(\alpha) - f(\beta)| \leq f(\alpha - \beta) - f(0)$$

par

$$\text{soit } \begin{cases} f(\alpha) - f(\beta) \leq f(\psi) - f(0) \\ \alpha - \beta \leq \psi \leq \alpha + \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(\alpha) - f(\beta) \leq f(\psi) - f(0) \\ f(\beta) - f(\alpha) \leq -[f(\psi) - f(0)] \\ \alpha - \beta \leq \psi \leq \alpha + \beta \end{cases}$$

Pour les cas où elle s'applique, cette condition réduit encore considérablement les possibilités en particulier pour les petits angles ($N \gg 1$).

V - CONCLUSION

En établissant quelques propriétés générales que possèdent les fonctions qui satisfont aux inégalités de Bell, cet article contribue à poursuivre la démarche de Bell : examiner les conséquences de l'hypothèse de paramètres supplémentaires pré-déterminant le résultat de mesures sur des systèmes micro-physiques à deux particules et permettre leur comparaison avec les prédictions de la mécanique quantique.

Pour le cas des photons*, et à l'exception des points $\pi/4$, $\pi/8 \dots \pi/2^n$ (ensemble de mesure nulle) où l'écart avec la mécanique quantique est irréductible, tout point $F_{M.Q}$ peut en principe être atteint par une fonction F_B satisfaisant aux inégalités de Bell ; mais chacune de ces fonctions ne peut rester égale à $F_{M.Q}(\theta)$ et nous pensons avoir établi grâce aux démonstrations portant sur les valeurs (rel.11'), les dérivées (rel.15), des intégrales (rel.18), les Intervalles (rel. 33), les amplitudes (rel. 34) et le comportement global (fig. 10), l'incompatibilité des fonctions "à la Bell" avec les prédictions de la mécanique quantique. Les résultats nous paraissent relativiser l'intérêt de mener des expériences en vue de vérifier la violation des inégalités de Bell. Si elles sont cependant décidées, ils devraient en orienter différemment le choix.

Bien que ce ne soit pas le sujet de cet article, il nous semble alors que si les dernières expériences d'A. Aspect et al. (6) sont tellement intéressantes, c'est moins parce qu'elles consacrent la violation des inégalités de Bell, que parce qu'elles vérifient les prédictions de la mécanique quantique dans une situation expérimentale qui permet de poser de façon nouvelle ces questions vieilles de cinquante ans sur la réalité de la fonction d'onde ou la nature du processus de mesure quantique.

REMERCIEMENTS

Mrs R. NATAF, G. BOGAERT et G. ROTBARD sont remerciés pour avoir bien voulu faire une lecture critique du manuscrit initial.

* ce n'est pas vrai pour les particules de spin 1/2.

REFERENCES

- (1) A. EINSTEIN, B. PODOLSKY and N. ROSEN,
Phys. Rev. 47 (1935) 777

- (2) N. BOHR
Phys. Rev. 48 (1935) 696

- (3) D. BOHM et Y. AHARONOV,
Phys. Rev. 108 (1957) 1070
Voir aussi D. Bohm "Quantum theory", Constable and Company Ltd,
Londres 1954

- (4) J.S. BELL, Physics 1 (1964) 195

- (5) A. ASPECT, Ph. GRANGIER et G. ROGER
Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 460 et
" " " 49 (1982) 91

- (6) A. ASPECT, J. DALIBARD, G. ROGER,
Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1804

- (7) B. D'ESPAGNAT,
Physics Reports 110 (1984) 201

- (8) J.F. CLAUSER, M.A. HORNE, A. SHIMONY et R.A. HOLT,
Phys. Rev. Lett. 23 (1969) 880

- (9) A. ASPECT, Thèse de Doctorat d'Etat, Orsay 1983

LEGENDE DES FIGURES

- Fig. 1 : Schéma de l'expérience type (avec des particules de spin 1/2) proposée par Bohm pour concrétiser la question soulevée par Einstein, Podolsky et Rosen
- Fig. 2 : Conséquences pour la fonction d'une variable $f(\theta)$ de l'existence de l'inégalité de Bell dans l'espace à trois dimensions pour le cas des particules de (masse finie) à spin 1/2. La connaissance de $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ élimine la zone hachurée pour la fonction $f(\theta)$. Si les directions des polariseurs sont maintenues dans un plan, seules les valeurs extrêmes $\alpha-\beta$ et $\alpha+$ sont éliminées.
- Fig. 3 : Pour les particules de spin 1/2, la fonction $y_{M.Q.}(\alpha, \beta) = f(\alpha) - f(\beta) - f(\alpha-\beta) + f(\alpha)$ positive ou nulle viole presque partout l'inégalité de Bell $y \leq 0$. On a tracé les lignes de niveau $y = 0$ (les frontières du domaine) ; $y = 0.37$; $y = 0.5$ (la valeur maximale de y).
- Fig. 4 : Représentation de l'inégalité de Bell $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq f(\alpha-\beta)$ qui se dédouble en deux conditions du fait de la valeur absolue dans le premier membre.
- Fig. 5 : Une des conséquences de l'inégalité de Bell sur l'intégrale de $f_B(\theta)$
- Fig. 6 : Tracé de $F_{M.Q.}(\theta) = f_{M.Q.}(\theta) - f_B(\theta)$. On a fait figurer les limites de $F(\theta)$ imposées par les conditions $-1 \leq f(\theta) \leq +1$.
- Fig. 7 : Position des $2N$ racines de $F_B(\theta)$ (en plus de $0, \pi/2, \pi$) qui rendent minimum la première racine α_1 , et maximale la mesure θ_+ des intervalles où $F_B(\theta)$ est négatif.

FIGURE CAPTIONS

- Fig. 1 : Scheme of the thought-experiment given by D. Bohm to exemplify the questions of Einstein, Podolsky, Rosen.
- Fig. 2 : Consequences for the one variable function $f(\theta)$ of the Bell inequalities established in the three-dimensional space. $f(\alpha)$ and $f(\beta)$ being known, the shaded area is forbidden for $f(\theta)$. Only the extreme values $\alpha-\beta$ and $\alpha+\beta$ are excluded if the axis of the polarizers are kept within a plane.
- Fig. 3 : For spin one-half particles, the function associated with quantum mechanics $y_{Q.M.}(\alpha; \beta) = f(\alpha) - f(\beta) - f(\alpha-\beta) + f(\alpha)$, positive or zero, violates the Bell inequality $y \leq 0$ almost everywhere.
The lines corresponding to the values $y = 0$ and $y = 0.37$ have been drawn as well as the point corresponding to the maximum value $y = 0.5$.
- Fig. 4 : Graphic representation of the Bell inequality $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq f(\alpha-\beta) - f(\alpha)$ which splits into two conditions because of the absolute value in the first term.
- Fig. 5 : One of the consequences of Bell's inequality on the integral of $f_B(\theta)$:
- Fig. 6 : Graphic representation of $F_{Q.M.}(\theta) = f_{Q.M.}(\theta) - f_B(\theta)$. The shaded zone corresponds to the conditions $-1 \leq f(\theta) \leq +1$.
- Fig. 7 : Position of the $2N$ roots of $F_B(\theta)$ ($0, \pi/2$ and π excluded) which minimize the value α_1 of the first root and maximize the measure θ_1 of the intervals for which $F_B(\theta)$ is negative.
- Fig. 8 : Three examples of Bell's functions $F_{BN}(\theta)$ with the limit sequence of $2N$ roots - fig. 7 - and the limit sequence of amplitudes (see relations 32 and 34).

Fig. 8 : Trois exemples de fonctions à la Bell $F_{BN}(\theta)$ possédant la séquence limite de racines - voir fig. 7 - et la séquence limite d'amplitude des différents lobes (voir relations 32 et 34).

Fig. 9 : Comparaison de la mécanique quantique et de trois différentes fonctions à la Bell prétendant à la comparaison. Les petites flèches indiquent les premiers points où $F_B > 0$ ($\pi/4 \dots \pi/2n$) voir relation 30.

$F_{B|E0}$ est la fonction linéaire limite ($f_{B|}(\theta) = 2/\pi \theta - 1$).

$F_{B|1}$ est la fonction à une racine qui coïncide avec $F_{M.Q.}(\theta)$ pour $\theta > \pi/3$.

$F_{B|7}$ est la fonction à sept racines qui coïncide avec $F_{M.Q.}(\theta)$ pour $\pi/9 \leq \theta \leq \pi/8$ ($\alpha_1^* = \pi/9$; $\alpha_2^* = \pi/8$).

Fig. 10 : La fonction $F_{B|}(\theta)$ qui coïncide avec $F_{M.Q.}(\theta)$ entre $\pi/5$ et $\pi/4$ pour un intervalle maximum compatible avec la seconde condition de Bell (relation (13) du texte) (on a entouré d'un cercle les deux régions d'intérêt) et qui partout ailleurs rend minimum la différence à $F_{M.Q.}(\theta)$.

Fig. A.1 : Découpage de l'ensemble $\Lambda(\lambda)$ des valeurs du paramètre supplémentaire λ en fonction du signe des mesures selon les directions \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Pour désigner les différents sous ensembles, et par convention, on a pris 0 pour - et 1 pour + et à \vec{a} \vec{b} \vec{c} dans l'ordre. Voir texte.

Fig. C1 : Schéma indiquant la désignation des racines et des extrémums utilisés.

Fig. 9 : Comparison between quantum mechanics and three competing Bell's functions. The small arrows indicate the points where $F_B(\theta) > 0$, i.e. $\pi/4 \dots \pi/2n$ (see relation 30)
 $F_{B1} \leq 0$ is the linear limit function ($F_{B1}(\theta) = 2\theta/\pi - 1$)
 F_{B1} is the function with one root which is equal to $F_{Q.M.}(\theta)$ for $\theta > \pi/3$.
 F_{B7} is the function with seven roots which is equal to $F_{Q.M.}(\theta)$ for $\alpha_1 = \pi/9 \leq \theta \leq \pi/8 = \alpha_2$.

Fig. 10 : The function $F_{B31}(\theta)$ which maximize the interval where $F_B = F_{Q.M.}$ between $\pi/4$ and $\pi/5$ as permitted by the second Bell inequality (rel (13)) and which minimize the difference $F_B - F_{Q.M.}$ everywhere else. A circle has been drawn around the two regions of interest.

Fig. A1 : Given the set $\Lambda(\lambda)$ of the values of the extra parameter λ . The different subsets corresponding to a given polarization on the different axis $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ have been drawn. Arbitrarily, the values 0 (1) have been attributed to a negative (positive) polarization.

Fig. C1 : Scheme giving the indices used for the roots and extrema.

APPENDICE A

Démonstration de Bell et démonstration selon les mesures d'ensembles.

Démonstration de l'inégalité de Bell généralisée.

Les lignes suivantes A1 à A5 constituent la démonstration originale de Bell (4)

$$(A.1) \quad P(\vec{a}, \vec{b}) = - \int_{\Delta(\lambda)} d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda)$$

où on a déjà introduit l'égalité $B(\vec{b}, \lambda) = -A(\vec{b}, \lambda)$

$$(A.2) \quad P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) = - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\vec{a}, \lambda)A(\vec{b}, \lambda) - A(\vec{a}, \lambda)A(\vec{c}, \lambda)]$$

$$(A.3) \quad = + \int d\lambda \rho(\lambda) A(\vec{a}, \lambda) A(\vec{b}, \lambda) [-1 + A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)]$$

puisque A vaut ± 1 et donc $A = 1/A$

$$(A.4) \quad \left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq \int d\lambda \rho(\lambda) [1 - A(\vec{b}, \lambda) A(\vec{c}, \lambda)]$$

qui exprime que la valeur absolue de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue. On a alors :

$$(A.5) \quad \left| P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) \right| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c}) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On va reprendre maintenant la démonstration en exprimant plus directement l'hypothèse de base du modèle : pour chaque positionnement a, b, c etc... Il existe un sous-ensemble de valeur de λ choisi dans l'ensemble $\Delta(\lambda)$ des valeurs de λ pour lesquels la mesure selon a est +1, un autre pour laquelle elle est -1 et de même selon b, selon c etc... (fig. A.1).

Ainsi pour (A.1), remarquons que $\Delta(\lambda)$ peut être partagé selon les signes de $A(a, \lambda)$ et $A(b, \lambda)$, soit ++, +-, -+, --, et si on désigne par (++) la mesure de l'ensemble correspondant au résultat ++ etc... on a simplement :

$$(A.1) \rightarrow P(\vec{a}, \vec{b}) = (+-) + (-+) - (++) - (--)$$

Pour poursuivre la démonstration et mieux, mettre en évidence le caractère binaire des choix successifs, on désignera par (ooo) la mesure de l'ensemble des λ qui donne -1 sur les trois directions a, b, c (111) celle de celui qui donne +1 etc... On a alors le tableau suivant où on a mis en évidence les différentes expressions qui apparaissent dans (A.1) à (A.5).

	(000)	(001)	(010)	(011)	(100)	(101)	(110)	(111)
$P(\vec{a}, \vec{b})$	-	-	+	+	+	+	-	-
$P(\vec{a}, \vec{c})$	-	+	-	+	+	-	+	-
$P(\vec{b}, \vec{c})$	-	+	+	-	-	+	+	-
1	+	+	+	+	+	+	+	+
$P(\vec{ab}) - P(\vec{ac})$	0	-2	2	0	0	2	-2	0
$1 + P(\vec{bc})$	0	2	2	0	0	2	2	0

on a alors $|P(\vec{ab}) - P(\vec{ac})| = 2 |[(010) + (101)] - [(001) + (110)]|$
 $1 + P(\vec{b}, \vec{c}) = 2 |[(010) + (101)] + [(001) + (110)]|$
 et l'inégalité est démontrée.

L'inégalité de Bell généralisée correspond à deux choix de direction a et a' pour la particule 1, deux choix b et b' pour la particule 2. Comme précédemment, donnons le label 0 pour la réponse -1, le label 1 pour la réponse +1 et rangeons $aa'bb'$ dans cet ordre, on obtient le tableau suivant des expressions de $P(a, b)$ etc... et les quatre inégalités de Bell qui s'en déduisent. On a indiqué également l'inégalité $-4 \leq S_+ \leq +4$ sans intérêt pratique.

	$\Lambda(a) = -1$	$\Lambda(a) = -1$	$\Lambda(a) = +1$	$\Lambda(a) = +1$	
	$\Lambda(a') = -1$	$\Lambda(a') = +1$	$\Lambda(a') = -1$	$\Lambda(a') = +1$	
	00000010010001	0100101010110111	1000100110101011	110011011101101111	
$P(\vec{a}, \vec{b})$	+ + - -	+ + - -	- - + +	- - + +	
$P(\vec{a}, \vec{b}')$	+ - + -	+ - + -	- + - +	- + - +	
$P(\vec{a}', \vec{b})$	+ + - -	- - + +	+ + - -	- - + +	
$P(\vec{a}', \vec{b}')$	+ - + -	- + - +	+ - + -	- + - +	
$\dagger P(\vec{a}, \vec{b}) \dagger P(ab') \dagger P(a'b) - P(a'b')$	2 2 -2 -2	2 -2 2 -2	-2 2 -2 2	-2 -2 2 2	$-2 \ll S_B \ll +2$
+ + - +	2 -2 2 -2	2 2 -2 -2	-2 -2 2 2	-2 2 -2 2	$-2 \ll S_B \ll +2$
+ - + +	2 -2 2 -2	-2 -2 2 2	2 2 -2 -2	-2 2 -2 2	$-2 \ll S_B \ll +2$
- + + +	2 -2 2 -2	-2 -2 2 2	2 2 -2 -2	-2 2 -2 2	$-2 \ll S_B \ll +2$
+ + + +	4 0 0 -4	0 0 0 0	0 0 0 0	-4 0 0 4	$-4 \ll S_+ \ll +4$

APPENDICE B

Propriétés découlant de l'inégalité de Bell et des relations de symétrie.

Partons d'abord de l'inégalité (21) seule

$$F(\alpha) - F(\beta) \leq F(\alpha - \beta)$$

faisant $\alpha = 2\beta$, on a :

$$F(\alpha/2) \geq 1/2 F(\alpha)$$

en particulier

$$F(\alpha) > 0 \rightarrow F(\alpha/2) > 0 \quad (22)$$

$$\text{et } F(\alpha) \leq 0 \rightarrow F(2\alpha) \leq 0 \quad (25)$$

(24) et (29) se déduisent directement de (21). Remarquons enfin que (25) et (29) donnent $F(\alpha) \leq 0 \rightarrow F(n\alpha) \leq 0$ (25')

$$1 \leq n \text{ entier } \leq \pi/\alpha$$

Prenant maintenant en compte la relation de symétrie (20) $F(\alpha) = -F(\pi - \alpha)$ (23) et (28) sont obtenus directement (22) et (28) donnent :

$$F(\alpha) \leq 0 \rightarrow F\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \geq 0 ; \dots F\left(\frac{\pi - \alpha}{2n}\right) n \text{ entier} \quad (26)$$

(25) et (28) donnent :

$$F(\alpha) \leq 0 \rightarrow F(\pi - 2\alpha) \geq 0 \dots F(\pi - n\alpha) \geq 0 \quad (27)$$

$$1 \leq n \text{ entier } \leq \pi/\alpha$$

APPENDICE C

SEQUENCE LIMITE DE RACINES ET SEQUENCE LIMITE D'AMPLITUDES DES FONCTIONS "A LA BELL" ET GENERATION D'UNE FONCTION LIMITE A N RACINES.

On se limite dans ce qui suit au cas où N est impair, pour N pair, seul le détail des démonstrations est différent.

On considère donc la séquence (34) des racines de F_{BN} :

$$\alpha_1^0 = \pi/N+2 ; \alpha_2^0 = \pi/N+1 ; \alpha_3^0 = 2\alpha_1^0 ; \alpha_4^0 = 2\alpha_1^0 ; \alpha_5^0 = 3\alpha_1^0$$

α_1^* qui atteint là la valeur limite donnée par (31) ne peut être diminué.

α_2 est limité vers le haut par le fait que $(N+2)\alpha_2^* = \pi/2$; pour $\pi/2 \leq \alpha \leq \alpha_{N+1}$, on doit donc avoir $F(\alpha) \geq 0$, ce qu'interdirait (25') avec $n = N+2$ si α_2 était plus grand que α_2^* .

α_1 et α_2 étant ainsi fixés, les autres racines ne peuvent être modifiées dans le sens de l'augmentation de θ_+ sans contredire (25') ou/et (27) en effet, chacun des intervalles négatifs successifs sur l'intervalle $(0, \pi)$ est minimum par rapport à l'exigence de (25') ; toute tentative d'augmentation d'un intervalle négatif (inférieur à $\pi/2$) se traduit avec (20) par une augmentation d'un intervalle positif (au-dessus de $\pi/2$) et donc par la diminution d'un intervalle négatif justement interdite.

Il existe d'autres séquences de racines ayant un θ_+ supérieur, mais elles n'ont pas la valeur α_1^* minimum. On peut, par exemple, introduire $2n$ racines entre $\pi/3$ (le α_1^* correspondant à $N=1$) et $\pi/2$ mais cela ne présente aucun intérêt par rapport aux objectifs recherchés.

Nous limitant toujours au cas où $N = 2\nu - 1$ est impair et appelant $\alpha(m_j)$ etc... l'angle correspondant à l'extrémum m_j , c'est-à-dire $-F(m_j)$ est la valeur maximum de $-F(\theta)$ entre α_{2j-1} et α_{2j} de même $F(M_j)$ est la valeur maximale de $F(\theta)$ entre $\alpha_{2\nu-j-1}$ et $\alpha_{2\nu-j}$ (fig. C.1)

$$\text{soit } \beta = \alpha(m_1) \quad \alpha_1 \leq \alpha(m_1) \leq \alpha_2$$

$$\text{soit } \alpha - \beta = \alpha(m_1) \quad \alpha_1 \leq \alpha(m_1) \leq \alpha_2$$

on a forcément : $\alpha_3 \leq \alpha \leq \alpha_4$

dans l'intervalle α_3, α_4 existe un minimum m_2 pour un angle en général différent de α mais (21) implique nécessairement :

$$\begin{aligned} -m_1 &\geq -m_2 + m_1 \\ \text{ou } m_2 &\geq m_1 + m_1 \end{aligned}$$

gardant la même valeur $\beta = \alpha(m_1)$

avec $\alpha - \beta = \alpha(M_\nu)$: $0 \leq \alpha(M_\nu) \leq \alpha_1$

on a forcément $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha \leq \alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2$

à l'intervalle $\alpha_2 \alpha_3$ correspond un maximum $M_{\nu-1}$ pour un angle en général différent de α mais (21) implique nécessairement :

$$M_\nu \geq M_{\nu-1} + m_1$$

On peut poursuivre avec toujours $\beta = \alpha(m_1)$ et $\alpha - \beta = \alpha(m_2)$ qui donne :

$$m_3 \geq m_2 + m_1$$

et $\alpha - \beta = \alpha(M_{\nu-1})$ qui donne

$$m_{\nu-1} \geq M_{\nu-1} + m_1$$

etc...

On a donc la série de conditions nécessaires :

$$m_2 \geq m_1 + m_1$$

$$m_3 \geq m_2 + m_1$$

$$m_\nu \geq m_{\nu-1} + m_1$$

$$M_1 \geq m_\nu + m_1$$

$$M_\nu \geq M_{\nu-1} + m_1$$

On obtiendrait d'autres inégalités en utilisant $\beta = 2\pi m_1$; celle-ci nous suffit.

La séquence $m_1 ; m_2 = 2m_1 ; m_3 = 3m_1 ; \dots ; m_\nu = (\nu-1)m_1 ; m_{\nu+1} = \nu m_1 ; \dots ; m_N = 2\nu m_1$ est en effet celle qui croit le moins vite et toute augmentation de l'un de ses termes se traduit nécessairement par une augmentation au moins aussi grande (on montrerait en fait avec les autres conditions qu'elle est beaucoup plus grande) des éléments suivants. Ces deux propriétés font payer cher la possibilité que donne l'utilisation d'un N important de faire descendre $F_{BN}(\theta)$ au voisinage de $F_{MQ}(\theta)$ pour les petits θ .

On va montrer maintenant qu'il est possible de construire une F_{BN} possédant cette séquence d'amplitudes qui, rappelons-le, sont proportionnelles aux intervalles auxquels elles se rapportent.

Soit $F_{B0}(\theta)$ une fonction F_B sans racine* (elle ne s'annule que pour 0, $\pi/2$ et π) et soit :

$$F(\theta) = F_{B0} \left[\frac{(N+1)(N+2)}{2} \theta \right]$$

$F_{BN}(\theta)$ est alors construit de la manière suivante. Rappelons que $N = 2\nu-1$.

* on verra plus loin qu'elle doit satisfaire une condition supplémentaire.

dans l'intervalle	$F_{BN}^{\xi}(\theta)$ est égal à :	il y correspond un extremum	dans l'intervalle	$F_{BN}^{\xi}(\theta)$ est égal à :	il y correspond un extremum
$0 \quad \alpha_1$ $\alpha_2 \quad \alpha_3$ $\alpha_4 \quad \alpha_5$	$(N+1)F[(0)/(N+1)]$ $N F [(0-\alpha_2)/N]$ $(N-1)F[(0-\alpha_4)/(N-1)]$	M_v M_{v-1} M_{v-2}	$\alpha_1 \quad \alpha_2$ $\alpha_3 \quad \alpha_4$ $\alpha_5 \quad \alpha_6$	$-F[(\alpha_2-0)/1]$ $-2F[(\alpha_4-0)/2]$ $-3F[(\alpha_6-0)/3]$	m_1 m_2 m_3
$\alpha_{2i} \quad \alpha_{2i+1}$	$(2v-i)F[(0-\alpha_{2i})/(2v-i)]$	M_{v-i}	$\alpha_{2i+1} \quad \alpha_{2i+2}$	$-(i+1)F[(\alpha_{2(i+1)}-0)/(i+1)]$	m_{i+1}
$\alpha_{2v-2} \quad \alpha_{2v-1}$	$(v+1)F[(0-\alpha_{2v-2})/(v+1)]$	M_1	$\alpha_{2v-1} \quad \pi/2$	$-v.F(\pi/2-0)/v$	m_v

Soit $\alpha_{2i-1} \leq \beta \leq \alpha_{2i} ; 1 \leq i \leq N$, on peut écrire :

$$\beta = \alpha_{2i} - \lambda \frac{\pi}{K}$$

avec $K = (N+1)(N+2)$ et $0 \leq \lambda \leq 1$

On a alors :

$$F(\beta) = -i F \left[\frac{\alpha_{2i} - \beta}{i} \right]$$

$$= -i F \left(\lambda \frac{\pi}{K} \right) = F_{Bo} \left(\frac{K}{2} \lambda \frac{\pi}{K} \right) = F_{Bo} \left(\lambda \frac{\pi}{2} \right)$$

de même, soit $\alpha_{2j} \leq \alpha \leq \alpha_{2j+1} ; N \geq j \geq i$

$$\alpha = \alpha_{2j} + \mu(2\nu - j) \pi / K$$

avec $2\nu = N + 1$

$$F(\alpha) = (2\nu - j) F \left((\alpha - \alpha_{2j}) / (2\nu - j) \right)$$

$$= (2\nu - j) F \left(\mu(2\nu - j) \pi / K / (2\nu - j) \right) = (2\nu - j) F \left(\mu \pi / K \right)$$

$$= (2\nu - j) F_{Bo} \left(\mu \pi / 2 \right)$$

on a alors :

$$\alpha - \beta = \alpha_{2j} - \alpha_{2i} + \pi \left(\mu(2\nu - j) + \lambda i \right) / K$$

notant que $\alpha_{2j} - \alpha_{2i} = \alpha_{2(j-i)}$

et que $(2\nu - (j-i)) \pi / K = \alpha_{2(j-i)+1} - \alpha_{2(j-i)}$

on trouve : $\alpha - \beta \leq \alpha_{2(j-i)+1}$

et donc

$$F(\alpha - \beta) = [2\nu - (j-i)] F \left(\frac{\pi \left(\mu(2\nu - j) + \lambda i \right)}{2\nu - (j-i)} \right)$$

$$= [2\nu - (j-i)] F_{Bo} \left(\frac{\mu(2\nu - j) + \lambda i}{2\nu - (j-i)} \frac{\pi}{2} \right)$$

$$= [2\nu - (j-i)] F_{Bo} \left[\left(\lambda + \frac{\mu - \lambda}{2\nu - (j-i)} \right) \frac{\pi}{2} \right]$$

Constatant que pour $\mu = \lambda$, on a :

$$F(\alpha) - F(\beta) = F(\alpha - \beta)$$

l'inégalité (21) peut s'écrire :

$$[2\nu - (j-1)] [F_{Bo}(\frac{\mu(2\nu-j)+\lambda i}{2\nu-(j-1)} \frac{\pi}{2}) - F_{Bo}(\lambda \frac{\pi}{2})] >$$

$$(2\nu-j) [F_{Bo}(\mu \frac{\pi}{2}) - F_{Bo}(\lambda \frac{\pi}{2})]$$

$$[2\nu - (j-1)] [F_{Bo}(\frac{\lambda + \frac{2\nu-j}{2\nu-(j-1)}(\mu-\lambda)}{\frac{\pi}{2}}) - F_{Bo}(\lambda \frac{\pi}{2})] >$$

$$(2\nu-j) [F_{Bo}(\mu \frac{\pi}{2}) - F_{Bo}(\lambda \frac{\pi}{2})]$$

ou

$$F_{Bo}(\frac{\lambda + \rho(\mu-\lambda)}{\frac{\pi}{2}}) - F_{Bo}(\lambda \frac{\pi}{2}) \geq \rho [F_{Bo}(\frac{\lambda + (\mu-\lambda)}{\frac{\pi}{2}}) - F_{Bo}(\lambda \frac{\pi}{2})]$$

$$\text{avec } \rho = \frac{2\nu-j}{2\nu-(j-1)}$$

et cela doit être vrai quels que soient λ et μ , i et j , et quel que soit ν si on veut utiliser la même F_{Bo} pour toute valeur de ν :

Compte tenu des limitations :

$$1 \leq i \leq j \leq N = 2\nu - 1$$

on a :

$$0 \leq \frac{1}{2\nu} \leq \rho \leq 1 - \frac{1}{2\nu} \leq 1$$

cherchant cette fois une condition suffisante, on peut supprimer ρ dans l'inégalité ci-dessus qui devient :

$$F_{Bo}(\frac{\lambda + \rho(\mu-\lambda)}{\frac{\pi}{2}}) - F_{Bo}(\lambda \frac{\pi}{2}) \geq F_{Bo}(\frac{\lambda + (\mu-\lambda)}{\frac{\pi}{2}}) - F_{Bo}(\lambda \frac{\pi}{2})$$

et qui exprime simplement qu'à partir de tout point de F_{Bo} , la valeur moyenne de la dérivée est une fonction décroissante de l'angle, c'est-à-dire que la dérivée de F_{Bo} est continûment décroissante sur $0, \pi/2$ - ce qui n'est pas le cas de toutes les fonctions F_{Bo} .

Cette condition étant assurée pour F_{Bo} , nous avons donc montré que si β est choisi dans un intervalle où $F(\beta)$ est négatif, il existe une valeur de α dans chacun des intervalles suivants où $F(\alpha)$ est positif pour laquelle la

condition (21) est satisfaite avec le signe de l'égalité. On montrerait qu'il en est de même pour chacune des intervalles où $F(\alpha)$ est négatif. Si β est choisi dans un intervalle où $F(\beta)$ est positif, la propriété n'est trouvée que pour les intervalles où $F(\alpha)$ est positif.

On a ainsi montré la possibilité de générer une fonction limite F_{BN} possédant N zéros (entre 0 et $\pi/2$ exclus), qui satisfait partout à la condition (21) et qui est limite en trois sens : i) elle possède la séquence limite (34) des racines, ii) elle possède la séquence limite (34) d'amplitudes. iii) elle satisfait au moins en une valeur du couple (α, β) à la condition (21) avec le signe d'égalité.

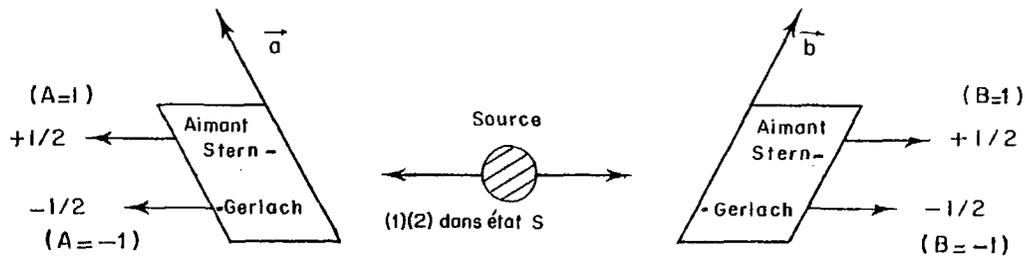


Fig. 1

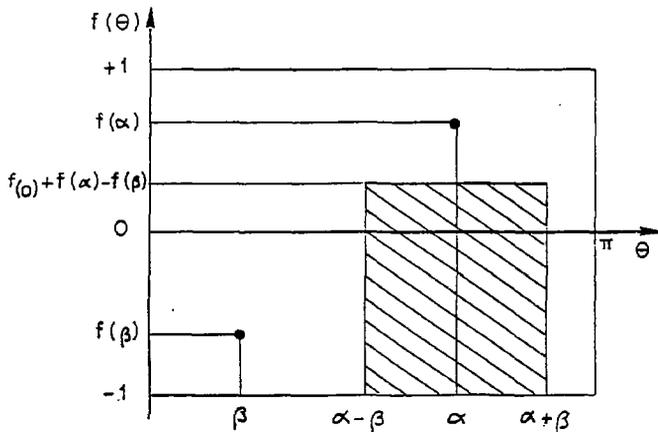


Fig. 2

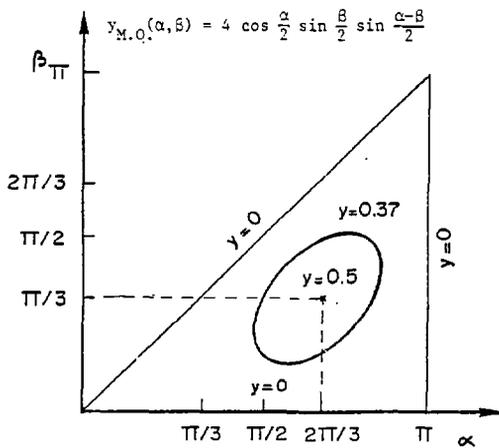


Fig. 3

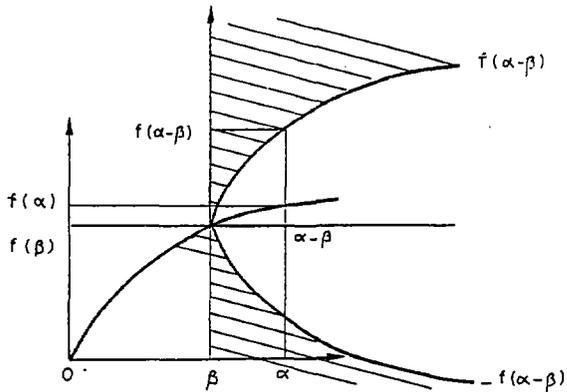


Fig. 4

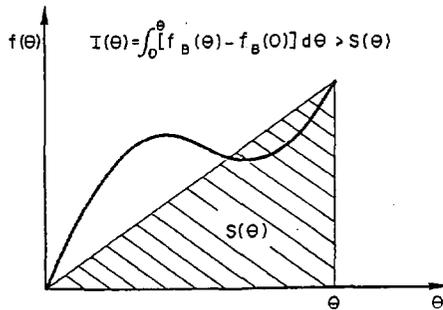


Fig. 5

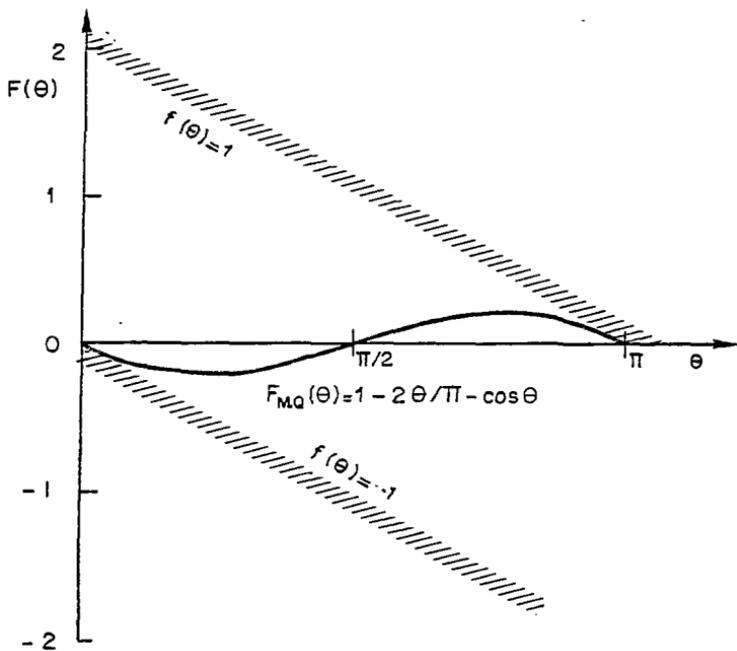


Fig. 6

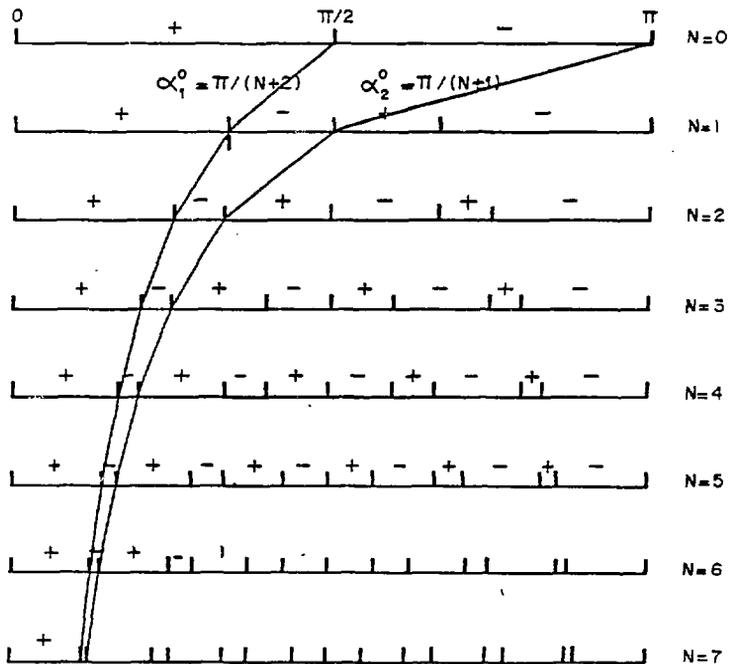


Fig. 7

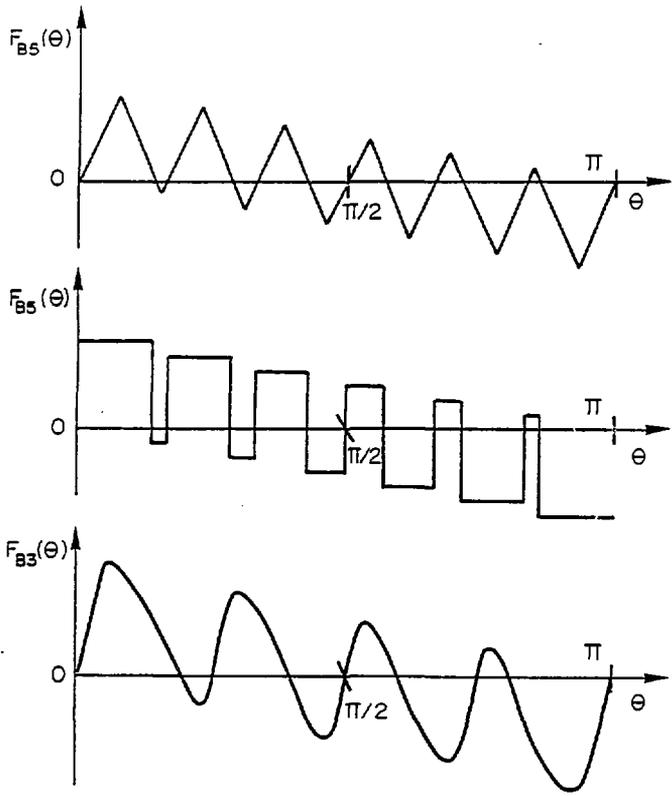


Fig. 8

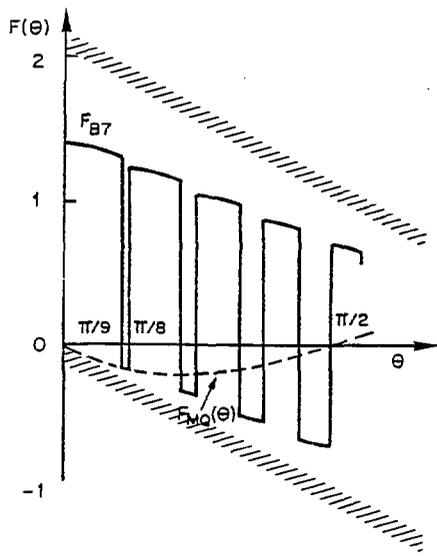
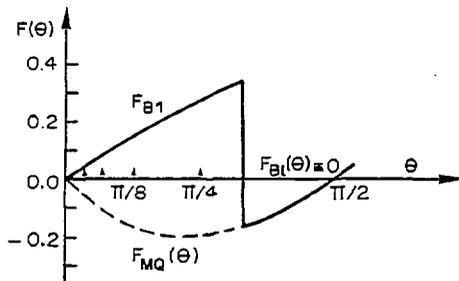


Fig. 9

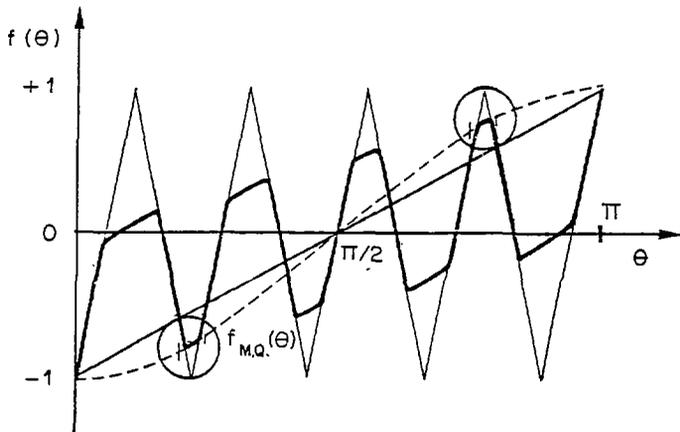


Fig. 10

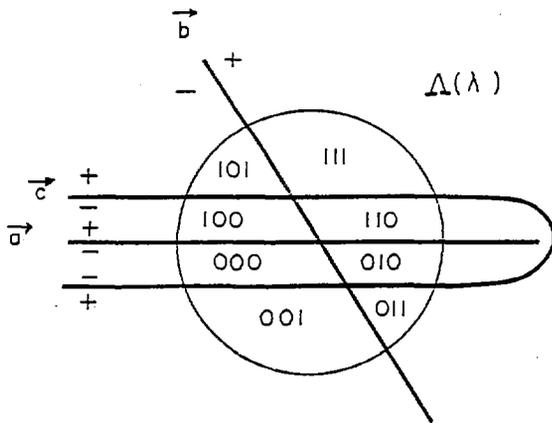


Fig. A.1

$$N = 2\nu - 1$$

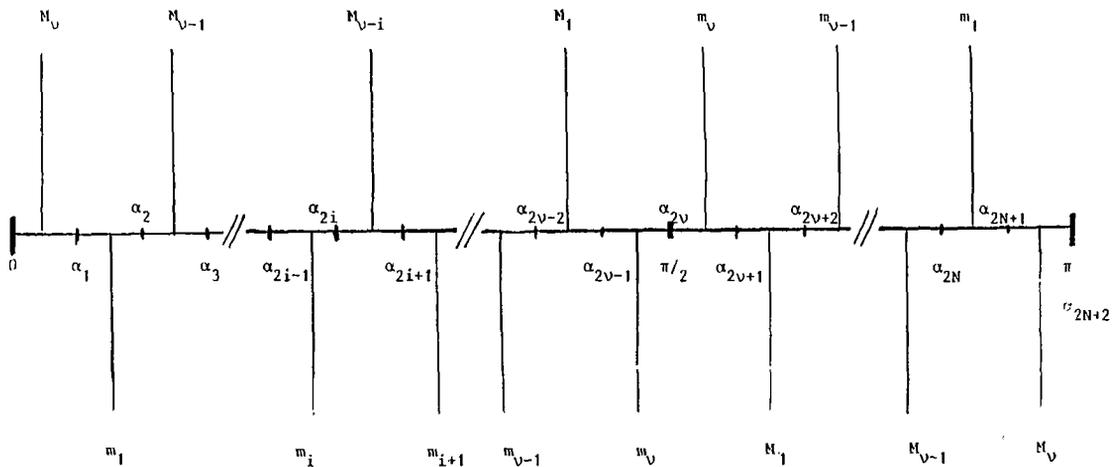


Fig. C.1