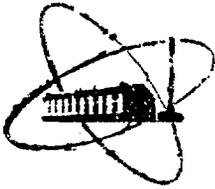


FEi - - 1620.

ФЭИ-1620



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. С. ФЕДOTOVCKИИ

**Об учете сил инерции при нестационарной
фильтрации жидкости в неоднородных
анизотропных пористых средах**

Обнинск — 1984

УДК 621.039.534.25

В. С. Федотовский.

Об учете сил инерции при нестационарной фильтрации жидкости в неоднородных анизотропных пористых средах.

ФЭИ-1620. Обнинск: ФЭИ, 1984. — 22 с.

На основе континуального описания эффективных инерционных свойств гетерогенных сред, образованных жидкостью и взвешенными в ней недеформируемыми включениями, из уравнений Лагранжа для элемента жидкости получены уравнения нестационарной фильтрации идеальной жидкости в пористой среде. Показано, что структура пористой среды в этом случае описывается двумя характеристиками — пористостью и тензором коэффициентов присоединенных масс включений или скелета пористого материала. Рассмотрено течение в анизотропных пористых средах, макроскопическая неоднородность которых может быть обусловлена как неоднородностью скалярного поля пористости, так и неоднородностью тензорного поля коэффициентов присоединенных масс. Рассмотрены два типа пористых сред, имеющих различную топологическую структуру, и показано, что течение в них описывается одними и теми же уравнениями фильтрации, аналогичными уравнениями Эйлера для сплошной среды, но с эффективной плотностью, выражающейся тензором второго ранга.

Для макроскопически неоднородных пористых сред уравнения движения включают дополнительные члены, имеющие существенное значение для задач нестационарной фильтрации в деформируемых пористых средах.

Приведены оценки эффективной плотности для течений в стержневых сборках и зернистых средах со сферическими частицами.

Введение

В основе теории фильтрации лежит выведенное из опыта предположение о том, что поле скоростей фильтрации определяется заданием давления, свойств жидкости и пористой среды.

Если движение жидкости в поровом пространстве является ползущим (безынерционным), то для скорости фильтрации жидкости U справедлив закон Дарси

$$U = \frac{K}{\mu} \text{grad } P,$$

где K проницаемость пористой среды.

На опыте установлено также, что линейный закон фильтрации справедлив при числах Рейнольдса, определенных по характерному размеру пор, не превышающих нескольких сотых. При больших числах Рейнольдса становятся существенными инерционные эффекты и возникает отклонение от линейного закона.

Часто используемый двучленный закон нелинейной фильтрации имеет вид [1]:

$$\text{grad } P = - \frac{\mu}{K} \vec{U} - \beta \frac{\rho U}{\sqrt{K}} \vec{U},$$

где β дополнительный параметр, характеризующий пористую среду.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса квадратичный член в уравнении фильтрации становится преобладающим, а фильтрационное течение становится турбулентным.

Для нестационарной фильтрации были получены уравнения, содержащие локальные и конвективные ускорения [2].

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\rho}{\varepsilon^2} U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i + R_i,$$

где ε - пористость, R - сила сопротивления, действующая на жидкость со стороны пористой среды, линейно или квадратично зависящая от скорости фильтрации.

В последнее время теория фильтрации нашла применение в расчетах гидродинамики активных зон реакторов и теплообменных аппаратов, представляющих собой существенно анизотропные крупнопористые тела с регулярными решетками стержней или труб. Для описания фильтрационного течения жидкости в межтрубном или межстержневом пространстве было предложено уравнение [3,4]

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\rho}{\varepsilon^2} U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + R_i + \frac{\mu^*}{\varepsilon} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2},$$

где μ^* эффективная вязкость.

В работе [5] получено уравнение, учитывающее анизотропию и более существенную роль инерционных сил

$$a_{ik} \frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} a_{ik} U_l \frac{\partial U_k}{\partial x_l} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + R_i,$$

где a_{ik} - тензор эффективной плотности, минимальное значение которого равно $1/\varepsilon$.

Следует отметить, что роль сил инерции при фильтрации жидкости в пористых средах различна и учитывается разными членами уравнений движения. Так, при стационарной фильтрации отклонение от закона Дарси обусловлено инерционными силами, возникающими в результате микронеподвижного течения жидкости в поровом пространстве.

В сильно неоднородных и нестационарных течениях существенную роль играют локальные и конвективные ускорения и соответствующие инерционные силы для усредненного, т.е. фильтрационного движения, что наиболее полно, на наш взгляд, учитывает последнее уравнение.

Исследованию фильтрационного течения и выявлению роли инерционных сил посвящены также работы [6+9], однако вопрос о форме уравнений, которые достаточно хорошо описывали бы поля фильтрационных скоростей в различных задачах с быстропотекающими динамическими процессами, такими как взрыв, удар или вибрации, нельзя считать окончательно решенным.

В настоящей работе вопрос об учете инерционных сил при фильтрации рассматривается в рамках безвихревого течения идеальной несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде, образованной системой неподвижных тел. При исследовании нестационарного и неоднородного течения идеальной жидкости в неоднородной пористой среде в данной работе используется метод, в котором существенной чертой является рассмотрение движения жидкости и скелета пористого тела как единой системы. При этом силы давления на поверхности скелета пористого тела окажутся внутренними и их определение не является необходимым.

Прежде, однако, рассмотрим некоторые аспекты теории движения твердых тел в несжимаемой идеальной жидкости, на основе которой выводятся уравнения фильтрации.

I. Воздействие жидкости на движущееся тело

Если твердое тело S , погруженное в покоящуюся неограниченную жидкость, пришло каким-либо образом в поступательное движение со скоростью \vec{U} , то возникающее при этом движение жидкости будет безвих-

ревым, и потенциал поля скорости должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (1)$$

во всей области, занятой жидкостью и граничным условиям:

$$\nabla \varphi = 0 \quad (2)$$

в жидкости на бесконечности и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -v \cos \theta \quad (3)$$

на поверхности тела. Здесь θ - угол между направлением движения и нормалью к поверхности тела в рассматриваемой точке.

Кинетическая энергия жидкости при этом выражается соотношением

$$E = -\rho \int_{(s)} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = \frac{1}{2} m_{ik} v_i v_k = \frac{1}{2} \rho G_0 \chi_{ik} v_i v_k, \quad (4)$$

где m_{ik} симметричный тензор присоединенных масс, χ_{ik} тензор коэффициентов присоединенных масс для твердого тела объемом G_0 .

При неустановившемся движении тела со стороны жидкости действуют силы давления, главный вектор и главный момент которых равны

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \rho \int_{(s)} \varphi \vec{n} ds = - \frac{d}{dt} \vec{I}, \quad (5)$$

$$\vec{L} = \frac{d}{dt} \rho \int_{(s)} \varphi \vec{r} \times \vec{n} ds = - \frac{d}{dt} \vec{M}, \quad (6)$$

где
$$\vec{I} = - \rho \int_{(s)} \varphi \vec{n} ds, \quad (7)$$

и
$$\vec{M} = - \rho \int_{(s)} \varphi \vec{r} \times \vec{n} ds \quad (8)$$

есть присоединенные к телу импульс и момент импульса жидкости.

В случае установившегося движения тела с постоянной скоростью v присоединенный импульс жидкости \vec{I} , который может быть записан в виде

$$\vec{I} = \frac{\partial E}{\partial v}, \quad (9)$$

или в тензорной форме через присоединенную массу

$$\vec{I}_i = m_{ik} v_k = \rho G_0 \gamma_{ik} v_k \quad (10)$$

постоянен, и главный вектор сил давления, действующий на тело, равен нулю (парадокс Даламбера).

Главный момент сил давления, который можно записать в виде

$$\vec{L} = -\vec{v} \times \frac{\partial E}{\partial \vec{v}}, \quad (11)$$

при этом может быть отличен от нуля.

Если вектор скорости тела \vec{v} и вектор присоединенного импульса $\vec{I} = \partial E / \partial \vec{v}$ не совпадают, то $\vec{L} \neq 0$ и гидродинамические силы давления, действующие на тело, стремятся повернуть его так, чтобы оно двигалось вперед широкой стороной. Если же вектора \vec{I} и \vec{v} параллельны, то момент силы \vec{L} обращается в нуль, и движущееся тело находится в равновесии. Это возможно в тех случаях, когда поступательное движение тела с постоянной скоростью происходит в направлении главных осей тензора присоединенных масс M_{ik} . Попутно следует отметить, что для трехмерного тела, имеющего три главные оси тензора присоединенных масс, поступательное движение будет устойчивым только при его движении в направлении, соответствующем максимальному значению присоединенной массы. Так, например, для трехосного эллипсоида устойчивым будет движение в направлении наименьшей его оси [10].

Уравнение движения тела под действием внешней силы \vec{F}^* в этом случае имеет вид

$$\frac{d}{dt} (\vec{I}_T + \vec{I}) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (E_T + E)}{\partial \vec{v}} \right] = \vec{F}^*, \quad (12)$$

где $\vec{I}_T = M\vec{v}$, $E_T = Mv^2/2$ импульс и кинетическая энергия твердого тела, имеющего собственную массу M .

В случае, если направление движения тела не совпадает с главными осями тензора присоединенных масс, то под действием гидродинамического момента силы \vec{L} возникает вращение тела с угловой скоростью ω .

Уравнение поступательного движения при этом имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (E_T + E)}{\partial \vec{v}} \right] + \vec{\omega} \times \frac{\partial (E_T + E)}{\partial \vec{v}} = \vec{F}^*. \quad (13)$$

Если на тело действует еще и внешний момент силы \vec{L}^* , то уравнение вращательного движения имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (E_T + E)}{\partial \dot{\omega}} \right] + \vec{\omega} \times \frac{\partial (E_T + E)}{\partial \dot{\omega}} + \vec{v}_x \frac{\partial (E_T + E)}{\partial \dot{v}} = \vec{L}^* \quad (14)$$

Соотношение (13) и (14) известны как уравнения движения Кирхгофа в векторной форме [11].

Итак, мы рассмотрели движение одного твердого тела в бесконечном объеме идеальной жидкости. Аналогичным образом можно было бы рассмотреть движение группы тел, однако, в общей постановке такая задача представляет непреодолимые трудности учёта взаимных влияний тел и их движений.

В некоторых частных случаях движение группы тел можно описать уравнением движения для одного тела. Так если рассмотреть движение группы тел каким-либо способом связанных друг с другом и образующих статистически однородную структуру, то под действием поля внешних сил движение структуры можно описать уравнением (12), где под E_T и E следует понимать кинетическую энергию тел и, соответственно, вовлеченной в движение жидкости в некотором представительном объеме, содержащем достаточное для статистического усреднения параметров количество тел. В этом случае присоединенную массу жидкости целесообразно относить к группе тел, входящих в представительный объем. Если при этом совокупность твердых тел, образующих скелет пористой среды, имеющей объемную концентрацию тел - включений Φ , или пористость $\xi = 1 - \Phi$, характеризовать плотностью $\rho_{ск} = \sum M_i / G$, где $\sum M_i$ - масса всех тел, входящих в представительный объем G , то присоединенную к этим телам массу $\sum m / G$ можно было бы назвать присоединенной плотностью. Для систем, содержащих одинаковые тела и образующих пространственные периодические структуры, в качестве представительного объема может быть использована элементарная ячейка жидкости, содержащая один элемент структуры.

2. Воздействие тел на обтекающую их жидкость.

Эффективная плотность.

Рассмотрим движение жидкости и содержащиеся в ней твердые тела. Движение жидкости может быть обусловлено действием на нее как поверхностных, так и объемных или массовых сил.

Рассмотрим движение под действием поверхностных сил. В этом случае в элементе жидкости возникает градиент давления $dP/dx = -\rho du/dt$, где du/dt - ускорение элемента жидкости. На находящееся в этом элементе тело объемом G_0 действует выталкивающая сила $\rho G_0 du/dt$

в направлении ускорения. Уравнение относительного движения тела при этом имеет вид

$$(M+m) \frac{d\dot{w}}{dt} = \rho G_0 \frac{du}{dt} - M \frac{du}{dt}, \quad (15)$$

где $\dot{w} = \dot{v} - \dot{u}$ относительная скорость, \dot{v} и \dot{u} - абсолютные скорости тела и границы элемента жидкости.

Здесь мы предполагаем, что направление движения совпадает с одной из главных осей тензора присоединенных масс, и гидродинамический момент сил давления равен нулю.

Интегрируя (15) от нуля до некоторого момента времени t и полагая постоянную интегрирования равной нулю (при $t = 0$ скорости жидкости и тела равны нулю), получим

$$(M+m)(\dot{v} - \dot{u}) = \rho G_0 u - M u, \quad (16)$$

откуда отношение скоростей тела и жидкости будет

$$\frac{\dot{v}}{\dot{u}} = \frac{m + \rho G_0}{m + M},$$

или

$$\frac{\dot{v}}{\dot{u}} = \frac{1 + \gamma}{\Delta + \gamma}, \quad (17)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{m}{\rho G_0}, \quad \Delta = \frac{\rho_T}{\rho}, \quad \rho_T = \frac{M}{G_0}.$$

Из формулы (17) видно, что абсолютная скорость тела \dot{v} будет больше или меньше скорости элемента жидкости (его границы \dot{u}) в зависимости от отношения плотностей материала тела ρ_T и жидкости ρ . Если плотность тела меньше плотности жидкости ($\Delta < 1$), то скорость легкого тела будет больше скорости жидкости и, наоборот, при $\Delta > 1$ скорость тела будет меньше скорости жидкости, т.е. тяжелое тело будет отставать от жидкости.

Определим импульс системы элемент жидкости-содержащееся в нем тело в момент времени, когда скорость границы элемента после начала движения станет равной \dot{u} , а скорость тела - \dot{v} . Этот импульс состоит из двух составляющих - импульса твердого тела

$$I_T = \rho G_0 \dot{v} \quad (18)$$

и импульса жидкости I_x , который мы найдем как произведение массы жидкости $\rho(G-G_0)$ в выделенном объеме G и скорости движения центра масс жидкости u^*

$$I_x = \rho(G-G_0)u^* \quad (19)$$

Выразим скорость центра масс жидкости u^* через среднюю скорость движения границы выделенного объема u и скорость твердого тела v . Заметим, что через некоторый промежуток времени Δt после начала движения, когда центры масс жидкости и тела совпадали, произойдет их смещение; центр массы тела сместится на величину $x_T = v\Delta t$, граница выделенного объема сместится в среднем на величину $x_{TP} = u\Delta t$, а центр массы жидкости - на $x^* = u^*\Delta t$. На рис. I показаны элемент объема и содержащееся в нём тело в моменты времени $t = 0$ и $t = \Delta t$.

Уравнение статических моментов масс жидкости, заполняющей объем G , и жидкости в вытесненном телом объеме G_0 относительно центра массы жидкости, имеющейся в объеме $G-G_0$, имеет вид

$$(x_{TP} - x^*)\rho G - (x_T - x_{TP})\rho G_0 = 0, \quad (20)$$

или, после деления на Δt ,

$$(u - u^*)\rho G - (v - u)\rho G_0 = 0. \quad (21)$$

Откуда скорость центра масс жидкости равна

$$u^* = \frac{u - v\varphi}{1 - \varphi}, \quad (22)$$

где $\varphi = G_0/G$ - объёмная концентрация тел в жидкости.

Таким образом, импульс жидкости можно записать в виде

$$I_x = \rho G (u - v\varphi), \quad (23)$$

где u и v связаны соотношением (17).

Следует отметить, что импульс жидкости, записанный в форме (23), является действительным количеством движения жидкости в объеме $G-G_0$, т.е. он равен интегралу от локальных импульсов микроэлементов жидкости по объёму $G-G_0$. Непосредственное же вычисление интеграла

$$I_x = \rho \int_{(G-G_0)} u(r) d^3r$$
 невозможно, если поле скоростей $u(r)$ заранее не известно.

Таким образом, применённый здесь подход позволяет вычислить и выразить импульс жидкости через характеристики системы ξ и Δ , интегрально учитывая поле скоростей жидкости в окрестности выделений.

Аналогичным образом обстоит дело и в задаче о движении тела в движущейся жидкости. В этом случае импульс жидкости равен произведению присоединенной массы на скорость тела. Следует отметить, что в безграничном объеме жидкости непосредственное вычисление количества движения вообще невозможно вследствие того, что интеграл $\rho \int u(r) d^3 r$ не является абсолютно сходящимся; на больших расстояниях от тела модуль скорости $u(r)$ имеет порядок r^{-3} и, хотя никакой расходимости не возникает, величина интеграла зависит от формы внешней границы области интегрирования, линейные размеры которой увеличиваются. Трудность состоит в том, что вдали от тела в движении типа диполя, получаются бесконечно большие величины количества движения, как в жидкости, движущейся вперед, так и в жидкости, движущейся назад [12].

Итак, возвращаясь к рассматриваемой задаче, полный импульс системы запишем в виде

$$I^* = I_K + I_T = \rho G [(u - v\varphi) + \Delta v \varphi]. \quad (24)$$

Разделив этот импульс на объем G и среднюю скорость движения границы элемента u , получим эффективную плотность гетерогенной среды

$$\rho^* = \rho \left(1 - \frac{v}{u} \varphi\right) + \rho_T \frac{v}{u} \varphi, \quad (25)$$

или, с учетом соотношения (17),

$$\rho^* = \rho \left[1 + \frac{(1+\gamma)(\Delta-1)\varphi}{\Delta+\gamma} \right]. \quad (26)$$

Формула (26) получена при рассмотрении ячейки жидкости, содержащей одно твердое тело. Однако, при сделанных выше допущениях относительно взаимной связанности различных тел, образующих статистически однородную структуру, эта формула будет справедлива и в общем случае.

Если теперь предположить, что тела, образующие такую пористую структуру, имеют бесконечно большую массу ($\Delta = \infty$), то из (26) следует

$$\rho^* = \rho [1 + (1+\gamma)\varphi] = \rho [1 + (1+\gamma)(1-\varepsilon)], \quad (27)$$

где $\varepsilon = 1 - \varphi$ - пористость.

Другим способом формула (27) получена в работе [5] при рассмотрении течения идеальной жидкости в сферических сборках.

Таким образом, при $\Delta = \infty$, в любой момент времени после начала

движения жидкости элементы структуры будут неподвижными и мы будем иметь фильтрационное течение идеальной жидкости через неподвижную пористую среду.

При континуальном описании фильтрационного течения можно считать, что мы имеем дело с некоторой идеальной жидкой средой, имеющей эффективную плотность (27) и текущей с фильтрационной скоростью $U = u$.

Поскольку микроструктура анизотропной пористой среды определяется в общем случае объёмной пористостью ϵ и тензором коэффициентов присоединенных масс γ_{ik} , то эффективная плотность среды также является тензором второго ранга

$$\rho_{ik} = \rho a_{ik} = \rho \left[\delta_{ik} + (\delta_{ik} + \gamma_{ik})(1 - \epsilon) \right], \quad (28)$$

где a_{ik} - тензор коэффициентов эффективной плотности, δ_{ik} - единичный тензор.

3. Уравнение фильтрации идеальной жидкости.

Рассмотрим нестационарное и неоднородное фильтрационное течение идеальной несжимаемой жидкости в анизотропной пористой среде под действием градиента давления. Выделим в пористой среде элемент жидкости, например, так, чтобы его граница проходила по жидкости и не пересекала твердых тел, и проследим за его движением. На рис.2 показано перемещение и трансформация элемента жидкости, имеющего в начальный момент времени форму прямоугольника. Через время t центр масс жидкости переместится на расстояние $X = Vt$, где V - средняя скорость, связанная со скоростью фильтрации U соотношением $V = U/\epsilon$.

Запишем для выделенного объёма как консервативной системы уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = F_i \quad (29)$$

где F_i - компоненты главного вектора поверхностных сил давления, равные $-(dP/dx_i)G\epsilon$, X_i макрокоординаты центра масс выделенного объёма жидкости, $v_i = \dot{X}_i$ компоненты скорости движения его центра масс.

Если движение происходит в потенциальном поле внешних объёмных сил (в поле сил тяжести, электрическом или магнитных полях), то лагранжиан для рассматриваемого элемента равен

$$\mathcal{L} = E - \Pi,$$

где E и Π - кинетическая и потенциальная энергии жидкости.

Поскольку обобщенный импульс среды в элементе G равен

$$I_i^* = \rho a_{ik} G U_k, \quad (30)$$

то кинетическую энергию среды, связанную с обобщенным импульсом соотношением

$$I_i^* = \frac{\partial E}{\partial U_i}, \quad (31)$$

можно записать в виде

$$E = \rho G a_{ik} \frac{U_i U_k}{2} = \rho G \varepsilon^2 a_{ik} \frac{V_i V_k}{2}. \quad (32)$$

Следует отметить, что, хотя формулы для эффективной плотности (28) и, соответственно, для обобщенного импульса (30) и кинетической энергии (32) получены при рассмотрении системы жидкость и свободно взвешенные в ней бесконечно тяжелые тела, они будут справедливы и для систем с закрепленными каким-либо способом телами; при этом обобщенный импульс учитывает реакцию связи тел.

Потенциальная энергия элемента жидкости, находящегося в поле силы тяжести

$$П = \rho G \varepsilon g_i X_i \quad (33)$$

Следует отметить, что, рассматривая жидкость с неподвижными вклиненными в поле силы тяжести, мы обязаны считать эти тела закрепленными в пространстве; в противном случае под действием массовой силы они будут двигаться вместе с жидкостью с ускорением g .

В общем случае нестационарного и неоднородного течения обобщенный импульс I^* является функцией времени t и макрокоординат X_i , поэтому полная производная от обобщенного импульса состоит из локальной и конвективной производных

$$\frac{d}{dt} I_i^* = \frac{\partial I_i^*}{\partial t} + V_t \frac{\partial I_i^*}{\partial X_t}. \quad (34)$$

Кроме того, кинетическая энергия жидкости может быть функцией макрокоординат, если параметры пористой среды - пористость и тензор коэффициентов присоединенных масс - являются функциями X_i , т.е. в случае фильтрации жидкости в неоднородной пористой среде.

Таким образом, учитывая, что для выделенного объема жидкости её истинная масса $\rho G \varepsilon$ есть величина постоянная, уравнение Лагранжа запишем в виде

$$a_{ik}\epsilon\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_k}{\partial x_l}\right) + v_k \frac{\partial(a_{ik}\epsilon)}{\partial t} + v_l v_k \frac{\partial(a_{ik}\epsilon)}{\partial x_l} - \frac{v_l v_k}{2} \frac{\partial(a_{lk}\epsilon)}{\partial x_i} =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i,$$

или, для скорости фильтрации U ,

$$a_{ik}\left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} U_l \frac{\partial U_k}{\partial x_l}\right) + \frac{U_k}{\epsilon} \frac{\partial(a_{ik}\epsilon)}{\partial t} + \frac{U_l U_k}{\epsilon^2} \frac{\partial(a_{ik}\epsilon)}{\partial x_l} -$$

$$- \frac{U_l U_k}{2\epsilon^2} \frac{\partial(a_{lk}\epsilon)}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + g_i.$$

Здесь первый член учитывает нестационарность и неоднородность фильтрационного течения жидкости, второй член — нестационарность параметров ϵ и γ_{ik} , характеризующих пористую среду, третий и четвертый члены учитывают неоднородность пористой среды.

При выводе уравнений фильтрации (36) мы исходили из того, что рассматривали течение идеальной жидкости через совокупность изолированных друг от друга неподвижных тел, образующих пористую среду, поровое пространство которой является односвязной областью. Для простоты мы предполагали, что граница выделенного представительного элемента объема проходит только по жидкости. Давление P при этом определяется естественным образом, как

$$P = \frac{1}{G\epsilon} \int P d^3r. \quad (37)$$

Рассмотрим теперь слитно-пористую среду с отличающейся от рассмотренной выше топологической структурой. В этом случае, при выделении представительного объема, его границы будут проходить как по жидкости, так и по скелету пористого материала. Однако, для динамики фильтрационного потока идеальной жидкости топологическая структура пористой среды не имеет значения.

Действительно, любую слитно-пористую среду можно представить состоящей из микроблоков, разделенных друг от друга столь малыми промежутками, заполненными жидкостью, что их вкладом в пористость среды можно пренебречь. Жидкость в этих зазорах будет неподвижной

и не даст вклада в динамические эффекты взаимодействия с изолированными друг от друга, но неподвижными, т.е. закрепленными каким-либо способом в пространстве, микроблоками.

Естественно, что при определении эффективной плотности среды по общей формуле (28) тензор коэффициентов присоединенных масс скелета пористого материала γ_{ik} должен определяться как для изолированного, т.е. окруженного со всех сторон жидкостью, представительного элемента объема.

Таким образом, уравнения фильтрационного течения идеальной жидкости в пористой среде, имеющей любую топологическую структуру (слитно-пористые, точечно-контактные и гипотетические среды, скелет которой состоит из отдельных, не контактирующих друг с другом неподвижных тел, имеют одну и ту же форму (36).

Для замыкания системы уравнений, описывающих фильтрационное течение при заданных полях величин $\varepsilon(X, t)$ и $\gamma_{ik}(X, t)$, характеризующих пористую среду, необходимо записать уравнение неразрывности, имеющее, в случае несжимаемой жидкости, вид

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0. \quad (38)$$

Рассмотрим теперь несколько случаев фильтрации идеальной несжимаемой жидкости в пористых средах.

4. Нестационарная фильтрация в однородных пористых средах, образованных пучками стержней

Уравнение движения в этом случае имеет вид

$$a_{ik} \left(\frac{\partial U_k}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} U_l \frac{\partial U_k}{\partial X_l} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X_i} + g_i. \quad (39)$$

Расположим координатную ось OZ вдоль стержней пучка, а оси OX и OY - в направлениях трансверсальной изотропии стержневого пучка.

Для не слишком тесных пучков стержней, образующих треугольную или квадратную решетки с относительным шагом $S/d > 1,2$, коэффициенты присоединенной массы γ_{xx} и γ_{yy} выражаются через объемную концентрацию стержней φ , или пористость ε соотношением [13].

$$\gamma_{xx} = \gamma_{yy} = \frac{1 + \varphi}{1 - \varphi} = \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon}. \quad (40)$$

Для продольного направления OZ коэффициент присоединенной массы

γ_{zz} , в соответствии с изложенными выше представлениями, должен определяться, как для бесконечно длинных, но окруженных со всех сторон жидкостью стержней. В этом случае коэффициент присоединенной массы определяется соотношением [13]

$$\gamma_{zz} = \frac{\varphi}{1-\varphi} = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (41)$$

Подставив (40) и (41) в (27), получим

$$a_{xx} = a_{yy} = \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}, \quad (42)$$

$$a_{zz} = 1/\varepsilon. \quad (43)$$

Уравнения фильтрации для направлений Ox , Oy и Oz имеют при этом вид

$$\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_x}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} U_y \frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon} U_z \frac{\partial U_x}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + q_x, \quad (44)$$

$$\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_y}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} U_x \frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} U_y \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon} U_z \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + q_y, \quad (45)$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial U_z}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} U_x \frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} U_y \frac{\partial U_z}{\partial y} + \frac{1}{\varepsilon} U_z \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + q_z. \quad (46)$$

При фильтрационном течении жидкости в более тесных пучках стержней ($S/d < 1,2$) компоненты тензора a_{ik} можно вычислить, используя соотношения для коэффициентов присоединенных масс [14]

$$\gamma_{xx} = \gamma_{yy} = \frac{6}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\frac{S}{d}-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{2}{\frac{S}{d}-1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \right) \quad (47)$$

для пучков стержней, образующих треугольную решетку,

$$\gamma_{xx} = \gamma_{yy} = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\frac{S}{d}-1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{2}{\frac{S}{d}-1}} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right) \quad (48)$$

для пучков, образующих квадратную решетку.

На рис.3 показаны зависимости компонент тензора эффективной плотности от пористости пучков цилиндрических стержней. Видно, что при объемной пористости стержневой сборки близкой к предельной, компоненты α_{xx} и α_{yy} стремятся к бесконечности, а компонента α_{zz} - к предельному значению $1/\epsilon$. Таким образом, по мере уплотнения стержневыхборок степень анизотропии эффективной плотности возрастает от единицы при $\epsilon = 1$ до бесконечности при $\epsilon = \epsilon_{пр}$.

5. Фильтрация идеальной жидкости в пористой среде, образованной сферическими частицами.

В этом случае пористую среду можно считать изотропной. Коэффициент присоединенной массы для группы сфер имеет вид [13]

$$\chi = \frac{1+2\varphi}{2(1-\varphi)} = \frac{3-2\epsilon}{2\epsilon}. \quad (49)$$

Эффективная плотность при этом равна

$$\rho^* = \rho \frac{3-\epsilon}{2\epsilon}. \quad (50)$$

Если, например, сферические частицы образуют наиболее плотную ромбоэдрическую упаковку с предельной пористостью $\epsilon_{пр} = 0,2595$, то эффективная плотность будет равна

$$\rho^* = 5,28 \rho$$

Обычно же в уравнениях фильтрации инерционные члены записываются с множителем $1/\epsilon$; это эквивалентно тому, что эффективная плотность среды берется равной

$$\rho/\epsilon = 3,85 \rho.$$

В действительности же эффективная плотность оказывается несколько большей и обусловлено это инерционным взаимодействием жидкости и пористого материала.

6. Линейный и точечный источник жидкости в пористой среде.

Простейшими случаями неоднородных фильтрационных течений являются течения от линейного и точечного источников, расположенных в пористой среде.

В стационарном случае уравнение фильтрации идеальной жидкости в однородной пористой среде для радиальной составляющей скорости фильтрации имеет вид

$$\frac{1 + (1+\gamma)(1-\varepsilon)}{\varepsilon} U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r}, \quad (51)$$

или

$$\frac{\rho}{\varepsilon} U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\rho(1+\gamma)(1-\varepsilon)}{\varepsilon} U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} = - \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (52)$$

Здесь первый член можно интерпретировать как силу инерции, действующую на массу жидкости $\rho\varepsilon$ в единице объема пористой среды при её движении с конвективным ускорением

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = \frac{1}{\varepsilon^2} U_r \frac{\partial U_r}{\partial r}. \quad (53)$$

Второй член - это реакция скелета пористой среды (единицы объема) на неоднородное фильтрационное течение жидкости от источника.

Пусть линейный источник мощности $m = Q/2\pi$ (Q - расход жидкости на единицу длины источника) расположен параллельно осям стержней бесконечной стержневой сборки. В этом случае $U_r = m/r^2$ и конвективное ускорение на расстоянии r от источника будет

$$U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} = - \frac{m^2}{r^3}, \quad (54)$$

а гидродинамическая сила взаимодействия (притяжения) группы стержней, находящихся в единице объема на расстоянии r от источника

$$F = \frac{\rho(1+\gamma)(1-\varepsilon)m^2}{\varepsilon r^3}. \quad (55)$$

Учитывая, что в единице объема находится $N = \frac{1-\varepsilon}{\pi a^2}$ стержней радиусом a , из (55) получим силу, действующую на один стержень

$$F = \pi \rho a^2 m^2 \frac{(1+\gamma)}{\varepsilon r^3}, \quad (56)$$

или, используя соотношение (40) для γ ,

$$F = 2\pi \rho a^2 m^2 / \varepsilon^2 r^3.$$

Если пористость близка к единице, то обтекание каждого стержня можно рассматривать без учета влияния других стержней. В этом случае $\gamma = 1$ и сила притяжения цилиндра к источнику будет равна

$$2\pi \rho a^2 m^2 / r^3 \quad (57)$$

Этот результат с точностью до величины a^2/r^2 совпадает с известной формулой [II] для силы взаимодействия цилиндра с линейным источником в безграничном объеме идеальной жидкости

$$F = \frac{2\pi\rho a^2 m^2}{r^3(1-\frac{a^2}{r^2})} \quad (58)$$

Аналогичным образом легко получить силу взаимодействия скелета пористой среды с точечным источником.

Если точечный источник мощности $m = \alpha/4\pi$ находится в однородной пористой среде, то $U_r = m/r^2$ и формула для силы имеет вид

$$F = \frac{\rho(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)2m^2}{\varepsilon r^5} \quad (59)$$

В пористой среде, образованной сферическими частицами, в единице объема находится $N = (1-\varepsilon)/(\frac{4}{3}\pi a^3)$ частиц. Следовательно, силу взаимодействия одной сферы с источником можно записать в виде

$$F = \frac{8}{3}\pi\rho a^3 m^2 \frac{(1+\varepsilon)}{\varepsilon r^5}, \quad (60)$$

или, с учетом (49),

$$F = \frac{4}{3}\pi\rho a^3 m^2 (2+\varepsilon)/\varepsilon^2 r^5.$$

При $\varepsilon \rightarrow 1$ из (60) получим формулу для силы притяжения одиночной сферы к источнику

$$F = \frac{4\pi\rho a^3 m^2}{r^5}, \quad (61),$$

которая также с точностью до a^2/r^2 совпадает с известным точным решением [II]

$$F = \frac{4\pi\rho a^3 m^2}{r^5(1-\frac{a^2}{r^2})^2} \quad (62)$$

7. Однородное стационарное фильтрационное течение в неоднородной пористой среде.

Рассмотрим однородное фильтрационное течение идеальной жидкости в пористой среде с переменными вдоль направления течения X характеристиками пористой среды. Как отмечалось выше, неоднородность пористой среды может быть обусловлена как неоднородностью поля пористости $\varepsilon(X)$, так и неоднородностью тензорного поля $\chi(X)$.

На рис.4 показана микроструктура течения (линии тока и изотехи) в таких пористых средах. На рис.4а показан случай, когда обе характеристики среды ε и γ являются функциями координаты X ; $\varepsilon = \varepsilon(X)$, $\gamma = \gamma(X)$. На рис.4б показан предельный случай, когда пористость среды $\varepsilon \rightarrow 1$, а коэффициент присоединенной массы $\gamma \rightarrow \infty$, но произведение $\gamma(1-\varepsilon)$ является ограниченной величиной, зависящей от X . На рис.4в показан случай $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$ и $\gamma = \gamma(X)$.

Уравнение стационарной одномерной фильтрации имеет вид

$$\frac{U_x^2}{2\varepsilon^2} \frac{\partial(a_{xx}\varepsilon)}{\partial X} = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial X}, \quad (63)$$

где скорость фильтрации $U_x = \text{const}$.

При подходящих зависимостях $\varepsilon(X)$ и $\gamma(X)$ распределение усредненного давления будет иметь вид, показанный на нижнем рис.4.

Если, в частности, пористая среда образована цилиндрическими стержнями, оси которых перпендикулярны направлению фильтрационного течения, то используя для коэффициента присоединенной массы соотношение (40), уравнение (63) можно записать в виде

$$\frac{U_x^2}{2\varepsilon^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial P}{\partial X}. \quad (64)$$

Список использованных источников.

1. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. М.: Наука, 1969.
2. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения природных жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: ГТТИ, 1956.
3. Субботин В.И., Ибрагимов М.Х., Ушаков П.А. и др. Гидродинамика и теплообмен в атомных энергетических установках. М.: Атомиздат, 1975.
4. Субботин В.И., Кащеев В.М., Номофилов Е.В., Дрьев Ю.С. Решение задач реакторной теплофизики на ЭВМ. М.: Атомиздат, 1979.
5. Вознякевич Е.В., Номофилов Е.В. Гомогенная модель течения в стержневых сборках. - Атомная энергия, 1981, т. 51, № 1, с. 6.
6. Михин В.И. Уравнение фильтрации для стержневых сборок.: Препринт ФЭИ - 1323, Обнинск, 1982.
7. Цвиккер К., Костен К. Звукопоглощающие материалы. М.: 1952.
8. Roats P.A.C. The role of inertia in the hydrodynamics of porous media. - Arch. for Rational Mech. and Analysis, 1972, v 44, n 4, p 267
9. Whitaker S. Advances in theory of fluid motion in porous media. - Ind. and Chem., 1969, v 61, n 12, p. 14.
10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
11. Милл-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.
12. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
13. Федотовский В.С. Гидродинамические силы, действующие на колеблющиеся сферические и цилиндрические включения: Препринт ФЭИ - 1473, Обнинск, 1983.
14. Федотовский В.С. Приближенный способ расчета присоединенных масс и коэффициентов гидродинамического демпфирования колеблющихся тесных лучков стержней: Препринт ФЭИ - 1072, Обнинск, 1980.

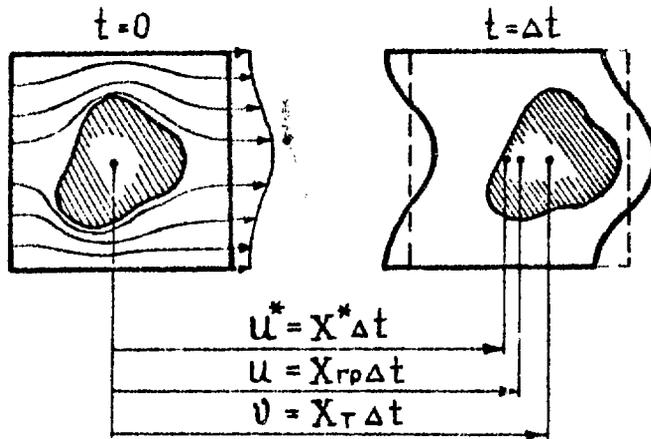


Рис.1. Смещение элемента жидкости и содержащегося в нем тела за время Δt под действием поверхностных сил, приложенных к элементу жидкости.

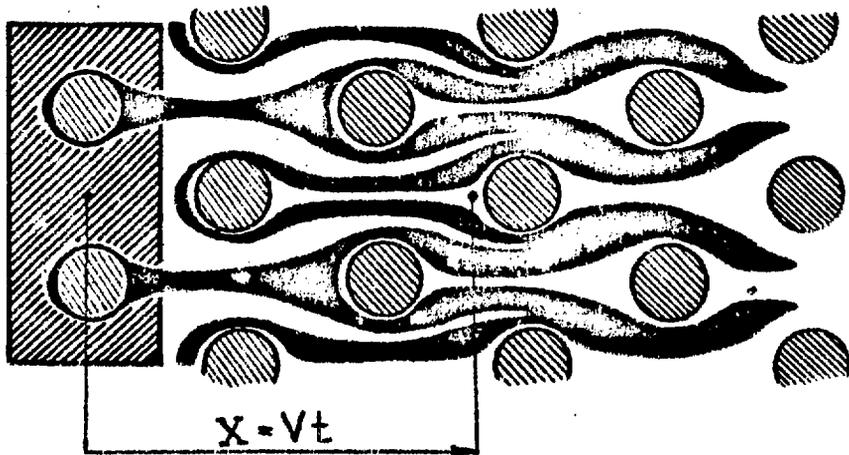


Рис.2. Премещение и трансформация элемента жидкости при фильтрации в пористой среде.

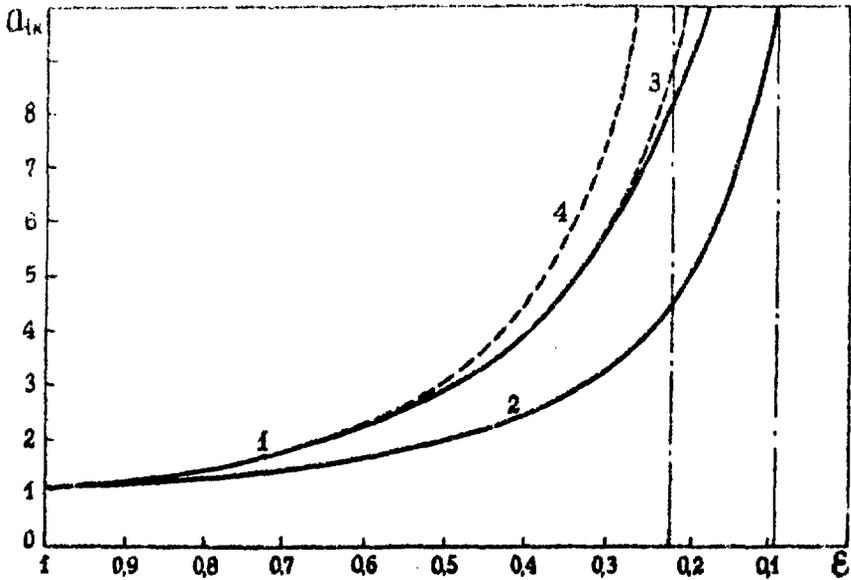


Рис. 3. Зависимость тензора эффективной плотности от объемной пористости стержневых сборок I - расчет по (42), 2 - расчет по (43), 3, 4 - расчет по (28) с учетом (47) и (48), соответственно.

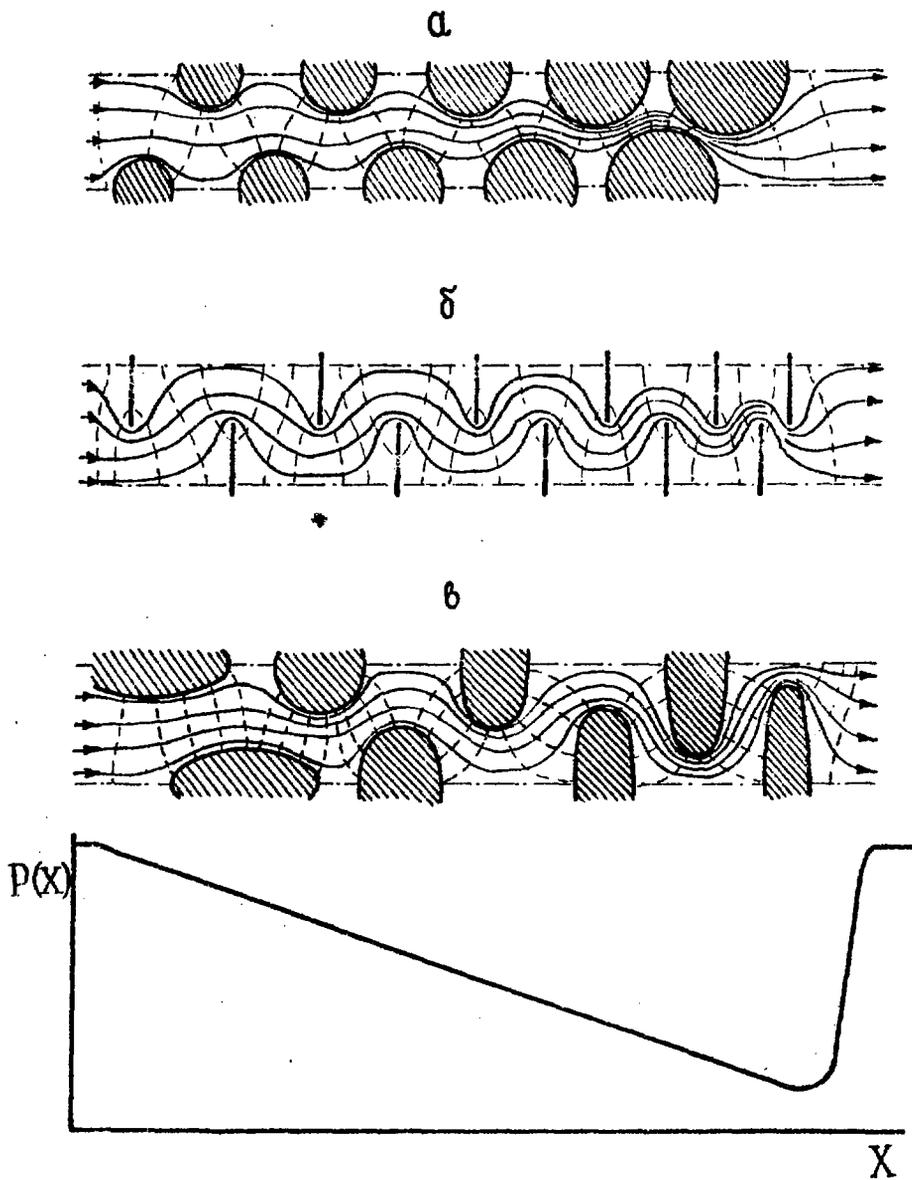


Рис. 4. Микроструктура течений и поле усредненного давления при одномерной фильтрации идеальной жидкости в неоднородных пористых средах.

Технический редактор Н.П.Герасимова:

Подписано к печати 7.09.1984 г. Т-17072 Формат 60x90 1/16

Офсетная печать Усл.п.л. 1,4 Уч.-изд.л. 0,9 Тираж 75 экз.

Цена 14 коп. ФЭИ-1620 Индекс 3624 1154

Отпечатано на ротарпринте ФЭИ, г. Обнинск.

14 коп.

Индекс 3624

**Об учете сил инерции при нестационарной фильтрации
жидкости в неоднородных анизотропных пористых средах.
ФЭИ-1620, 1984, 1-22.**