ФЭИ-1636

ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. С. ФЕДОТОВСКИЙ

Эффективные свойства гетерогенных сред с упругозакрепленными включениями при вибрационных воздействиях

Обнинск — 1984

УДК 533.6.013.42

В. С. Федотовский.

Эффективные свойства гетерогенных сред с упругозакрепленными включениями при вибрационных воздействиях.

ФЭИ-1636. Обнинск: ФЭИ, 1984. — 20 с.

Рассмотрено динамическое поведение гетерогенных сред, образованных несжимаемой жидкостью и содержащимися в ней упругозакрепленными включениями, при вибрационных воздействиях, приложенных к жидкости. Вводятся эффективные инерционные и вязкостные свойства таких гетерогенных сред и изучаются их временные дисперсионные характеристики. Приведен анализ эффективных свойств при низкочастотных, высокочастотных и резонансных вибрационных воздействиях, получены предельные соотношения для гетерогенных сред со свободными и неподвижными включениями. Показано, что эффективные инерционные и вязкостные свойства гетерогенных сред имеют близкую аналогию с диэлектрической проницаемостью. В качестве примера применения теории полученные соотношения использованы для расчета собственных частот колебаний тела с полостью, заполненной гетерогенной средой, служащей моделью кассеты с тепловыделяющей сборкой.

Введение

Активные зоны атомных энергетических установок, тепло-массо-обменные аппараты и подобное оборудование химической, перерабатывающей и других отраслей промышленности являются сложными механическими системами, содержащими большое число однотипных элементов, погруженных в жидкость или обтекаемых потоком жидкости. Часто такие гетерогенные системы целесообразно рассматривать как оболочки или резервуары, заполненные однородной сплошной средой, имеющей некоторые эффективные свойства. При вибрационных, сейсмических или ударных воздействиях динамическая реакция таких систем будет определяться эффективными или виброреологическими свойствами гетерогенных сред [1,2].

Одним из примеров гетерогенной системы может служить тепловыделяющая сборка стержней. Если ТВС рассматривать как ансамбль упругих цилиндрических тел, погруженных в жидкость, то при воздействиях на оболочку кассеты такая гетерогенная среда будет проявлять те или иные инерционные и вязкостные свойства, в зависимости от свойств сплошной среды (теплоносителя) и включений (твэлов), а также от частоты вибрационных воздействий. Элементарной моделью аналогичных гетерогенных сред, удобной для теоретического исследования эффективных свойств, является несжимаемая жидкость, содержащая упруго-закрепленные тела-включения.

Гетерогенные среды такого типа условимся называть инерционноупруговязкими, имея в виду, что их эффективные инерционные и вязкостные свойства зависят от плотности, вязкости и упругости компонентов.

По комбинациям свойств компонентов, образующих гетерогенные среды, можно провести их классификацию.

Включения, находящиеся в жидкости, могут представлять собой недеформируемые тела, упруго связанные с неподвижной системой координат, а жидкость, их содержащая, может быть сжимаемой или несжимаемой, вязкой или идеальной. Такие включения-осцилляторы могут совершать в жидкости поступательные или угловые колебания.

Включения-осцилляторы могут представлять собой упруго деформируемые свободные включения. Это более сложный случай, поскольку деформационные колебания включений в общем случае имеют непрерывный спектр собственных частот.

Наиболее простой моделью инерционноупруговязкой гетерогенной среды является несжимаемая маловязкая жидкость, в которой свободные или упруго закрепленные тела-включения совершают поступательные колебания под действием вибрационных воздействий, приложенных к жидкости. Поскольку в этом случае гидродинамические силы линейно связаны с величиной внешних вибрационных воздействий, то такие гетерогенные среды являются линейными.

В более сложных моделях инерционноупруговязких гетерогенных сред (с упруго ориентируемыми или упруго деформируемыми включениями) колебания включений нелинейно зависят от вибрационных воздействий и, следовательно, такие среды должны описываться нелинейными эффективными свойствами.

В настоящей работе рассматриваются линейные гетерогенные среды и изучаются их эффективные инерционные и вязкостные свойства. Предполагается, что при колебаниях жидкости под действием вибрационных воздействий, включения-осцилляторы совершают только поступательные колебания без вращений и деформаций.

I. Колебания упруго-закрепленных включений-осцилляторов в колеблющейся жидкости

Рассмотрим равномерно распределенные в жидкости одинаковые тела включения, упруго-закрепленные в неподвижной системе координат. Выделим элементарную ячейку жидкости, содержащую одно включение, и рассмотрим его движение под действием внешних поверхностных сил давления, приложенных к жидкости в направлении OX.

Уравнение движения включения имеет вид

$$(M+m)(\ddot{X}_в - \ddot{X}_{гр}) - \rho V \ddot{X}_{гр} + M\ddot{X}_{гр} + \xi(\dot{X}_в - \dot{X}_{гр}) + KX_в = 0,$$

где M - масса включения объемом V, m - присоединенная масса жидкости, ξ - коэффициент вязкого трения, K - жесткость упругой связи, $X_в$ - координата включения, $X_{гр}$ - усредненная координата границы элементарной ячейки жидкости.

В отличие от работы [2], где рассмотрены колебания свободных включений в колеблющейся жидкости, здесь добавлена упругая сила $KX_в$, действующая на включение при отклонении его от положения равновесия.

Введем следующие обозначения: $\omega_0 = \sqrt{K/(M+m)}$ - собственная частота колебаний включений-осцилляторов с учетом присоединенной массы жидкости, $\gamma = m/V$ - коэффициент присоединенной массы, $\tau = (M+m)/\xi$ - постоянная времени включений, $h = 1/2\tau$ - коэффициент затухания включения-осцилляторов, $\Delta = \rho_в/\rho$ - отношение плотностей материала включений и жидкости.

Уравнение движения включения в принятых обозначениях имеет вид

$$\ddot{X}_в - \ddot{X}_{гр}\frac{1+\gamma}{\Delta+\gamma} + \frac{1}{\tau}\left(\dot{X}_в - \dot{X}_{гр}\right) + \omega_0^2 X_в = 0. \qquad (I)$$

Задав усредненное перемещение границы элементарной ячейки в виде $X_{гр}(t) = X_{гр_0}\sin\omega t$, решение уравнения (I) будем искать в виде

$$X_в(t) = X'_в \sin\omega t + X''_в \cos\omega t. \qquad (2)$$

После подстановки (2) в (I) получим систему алгебраических уравнений, решение которой есть

$$\frac{X'_в}{X_{гр_0}} = \frac{\frac{1+\gamma}{\Delta+\gamma}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}, \qquad (3)$$

$$\frac{X_в''}{X_{гр_0}} = \frac{1}{\omega\tau}\left[\frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{1-\Delta}{\Delta+\gamma}}{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}\right]. \qquad (4)$$

Полученные соотношения связывают координату включения с усредненной координатой границы элементарной ячейки, как основной кинематической характеристикой гетерогенной среды.

2. Эффективная плотность инерционноупруговязкой гетерогенной среды (виброплотность)

Эффективную плотность определим как коэффициент пропорциональности (в общем случае тензор второго ранга) между обобщенным импульсом единицы объема среды и усредненной скоростью границы этого объема при его колебательном движении под действием внешних периодических воздействий. При этом под обобщенным импульсом будем иметь в виду величину, численно равную импульсу внешней силы, приводящему элемент гетерогенной среды из состояния покоя в движение со скоростью $U = \dot{X}_{гр}$, возникающие при этом силы упругости, действующие на включения-осцилляторы, будем считать внутренними силами.

В таком случае уравнение движения элемента гетерогенной среды единичного объема под действием внешней периодической силы $F(t) = F_0 \sin\omega t$ записывается в виде

$$F(t) = \frac{d}{dt}\left[I(t) + K^*\int X_в' \sin\omega t\, dt\right] = -\frac{d}{dt}\left[I_0 - \frac{K^* X_в'}{\omega}\right]\cos\omega t, \qquad (5)$$

где I_0 - амплитудное значение импульса (количества движения) жидкости и включений, находящихся в единице объема гетерогенной среды. Таким образом величина $I_0^* = I_0 - K^* X_в'/\omega$ - является амплитудным значением обобщенного импульса, учитывающим внутренние упругие связи. Поскольку в единице объема среды содержатся включения $N = \varphi/V$ включений, где φ - их объемная концентрация, то коэффициент жесткости K^* всех упругих связей в единице объема будет равен

$$K^* = N(M+m)\omega_0^2 = \rho\varphi\omega_0^2(\Delta+\gamma). \qquad (6)$$

Импульс I_0 состоит из двух составляющих: количества движения жидкости и количества движения включений [2,3]

$$I_0 = I_ж + I_в ,$$

где

$$I_ж = \rho(\dot{x}_{гр_0} - \dot{x}'_в \varphi),$$

$$I_в = \rho_0 N V \dot{x}'_в = \rho \varphi \Delta \dot{x}'_в .$$

Таким образом обобщений импульс (его амплитудное значение) будет равен

$$I_0^* = \rho(\dot{x}_{гр_0} - \dot{x}'_в \varphi) + \rho\varphi\Delta\dot{x}'_в - \rho\varphi\omega_0^2(\Delta+\gamma)x'_в/\omega =$$

$$= \rho\dot{x}_{гр_0}\left[1 - \frac{\dot{x}'_в}{\dot{x}_{гр_0}}\varphi + \varphi\Delta\frac{\dot{x}'_в}{\dot{x}_{гр_0}} - \frac{\varphi\omega_0^2(\Delta+\gamma)}{\omega^2}\,\frac{x'_в}{x_{гр_0}}\right]. \qquad (7)$$

Разделив обобщённый импульс единицы объема гетерогенной среды на скорость границы этого объема $U = \dot{x}_{гр_0}$, получим с учетом (3), (4) формулу для эффективной плотности гетерогенной среды

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 + \left[\frac{\frac{1+\gamma}{\Delta+\gamma}\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}\right]\cdot\left[(\Delta-1) - (\Delta+\gamma)\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right]\cdot\varphi. \qquad (8)$$

3. Анализ предельных случаев

3.I. Если частота воздействия на гетерогенную среду ω будет существенно больше собственной частоты включений-осцилляторов ω_0 , то из общей формулы (8) следует

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 + \left[\frac{\frac{1+\gamma}{\Delta+\gamma} + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}{1 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}}\right](\Delta-1)\varphi . \qquad (9)$$

Этот результат был получен в [2] при рассмотрении гетерогенных сред со свободными недеформируемыми включениями. Действительно, условие $(\omega_0/\omega) \ll 1$ означает, что жесткость связи включений настолько мала, что упругие силы оказываются существенно меньшими сил инерции и включения являются практически свободными. Анализ различных предельных случаев, вытекающих из соотношения (9), проведен в [2]. Так, в частности, для гетерогенных сред со свободными бесконечно тяжелыми включениями ($\Delta = \infty$), соотношение (9) принимает вид

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 + (1+\gamma)\varphi. \qquad (10)$$

Эффективная плотность ρ^* в этом случае всегда больше плотности жидкости, но имеет конечное значение, в отличие от истинной плотности, равной в данном случае бесконечности.

3.2. Если частота воздействия ω будет существенно меньше собственной частоты включений-осцилляторов ω_0, то из (8) также следует формула (10). Совпадение результатов при $(\omega_0/\omega) \gg 1$ и при $(\omega_0/\omega) \ll 1$ и $\Delta = \infty$ означает, что в обоих случаях включения оказываются неподвижными и жидкость, содержащая их, "фильтруется" через неподвижную пористую среду, испытывая одинаковое инерционное сопротивление при движении с ускорением. В первом случае включения являются неподвижными из-за бесконечной их инерционности, а во втором - из-за жесткой связи в пространстве [4].

3.3. Если гетерогенная среда образована маловязкой жидкостью, так что $(\omega\tau)^{-2} \to 0$, то при частотах воздействий не слишком близких к собственной частоте включений-осцилляторов из формулы (8) можно записать

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 - (1+\gamma)\varphi\left(\frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{1-\Delta}{\Delta+\gamma}}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}\right). \qquad (11)$$

Откуда при $(\omega_0/\omega) \to 0$ получается предельная [illegible]мула для эффективной плотности среды со свободными включениями]

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 + \frac{(1+\gamma)(\Delta-1)\varphi}{\Delta+\gamma}, \qquad (12)$$

а при $(\omega_0/\omega) \to \infty$ – формула для эффективной плотности среды с неподвижными включениями (10).

На рис.1 показана зависимость (11) для гетерогенных сред с упругозакрепленными цилиндрическими включениями при их объемной концентрации $\varphi = 0,5$. Коэффициент присоединенной массы в этом случае принят равным [5]

$$\gamma = \frac{1+\varphi}{1-\varphi} = 3.$$

Кривые 1,2,3 соответствуют отношению плотностей материала стержней и жидкости $\Delta = 0$; 1,0; 5,0. Видно, что при $\omega \sim \omega_0$ имеется существенная дисперсия эффективной плотности, причем, для легких включений-осцилляторов область сильной дисперсии шире, чем для тяжелых.

При частоте воздействия на гетерогенную среду ω, определяемую соотношением

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \frac{1+\frac{(1+\gamma)(\Delta-1)\varphi}{\Delta+\gamma}}{1+(1+\gamma)\varphi} \qquad (13)$$

эффективная плотность обращается в нуль, а в диапазоне частот

$$1 > \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 > \frac{1+\frac{(1+\gamma)(\Delta-1)\varphi}{\Delta+\gamma}}{1+(1+\gamma)\varphi} \qquad (14)$$

эффективная плотность становится отрицательной. Это означает, что воздействующая сила и ускорение гетерогенной среды колеблются в противофазе и обусловлено это зарезонансными, т.е. синфазными с воздействующей через жидкость силой колебаниями включений-осцилляторов.

4. Эффективная трансляционная вязкость (вибровязкость)

Зная закон движения включений-осцилляторов в колеблющейся под действием поверхностных сил в гетерогенной среде (3), (4) легко вычислить диссипативные потери и коэффициент объемного вязкого сопротивления или эффективную вязкость, определяемую здесь как коэффициент пропорциональности между поверхностной силой, действующей на единичный объем среды и его мгновенной скоростью $U(t)=\dot{X}_{гр}(t)$ [2]

$$\mu^* = \frac{\xi W_0^2 \varphi}{V \dot{X}_{гр_0}^2}, \tag{15}$$

где W_0 - амплитудное значение скорости включений-осцилляторов относительно жидкости.

Учитывая, что

$$W_0^2 = \left(\dot{X}'_в - \dot{X}_{гр_0}\right)^2 + \dot{X}''^2_в ,$$

имеем

$$\frac{W_0^2}{\dot{X}_{гр_0}^2} = \left(\frac{X'_в}{X_{гр_0}} - 1\right)^2 + \left(\frac{X''_в}{X_{гр_0}}\right)^2 \tag{16}$$

Подставив соотношения (3), (4), получим формулу для эффективной трансляционной вязкости

$$\mu^* = \frac{\rho(\Delta+\gamma)\varphi}{\tau} \cdot \frac{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{1-\Delta}{\Delta+\gamma}\right)^2}{\left[\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{1}{(\omega\tau)^2}\right]} \tag{17}$$

В случае свободных включений, т.е. при $\omega_0 = 0$ из (17) следует [2]

$$\mu^* = \frac{\rho\varphi}{\tau(\Delta+\gamma)} \cdot \frac{(1-\Delta)^2}{\left[1+\frac{1}{(\omega\tau)^2}\right]} . \tag{18}$$

В другом предельном случае жестко закрепленных включений ($\omega_0 \to \infty$), или свободных, но бесконечно тяжелых включений ($\Delta \to \infty$), из (17) следует

$$\mu^* = \frac{\rho(\Delta+\gamma)\varphi}{\tau} . \tag{19}$$

Здесь, как и для эффективной плотности, совпадение результатов при $\omega_0 \to \infty$ и при $\Delta \to \infty$ обусловлено тем, что включения в обоих случаях являются неподвижными.

Для гетерогенных сред, образованных маловязкой жидкостью и для частот воздействий не слишком близких к собственной частоте включений-осцилляторов, т.е. в случае $(\omega\tau)^{-2} \ll 1$, формулу (I7) запишем в виде

$$\mu^* = \frac{\rho(\Delta+\gamma)\varphi}{\tau} \cdot \frac{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{1-\Delta}{\Delta+\gamma}\right)^2}{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2} \tag{20}$$

и приведем в качестве одного из примеров ее частный случай для гетерогенной среды с цилиндрическими включениями. Используя для коэффициента вязкого трения формулу [5]

$$\xi = \frac{4\pi\mu a}{\delta(1-\varphi)^2}, \tag{21}$$

где a - радиус цилиндра, $\delta = \sqrt{\frac{2\nu}{\omega}}$ - толщина пограничного слоя на его поверхности, μ - сдвиговая вязкость жидкости. Время релаксации цилиндрических включений запишем в виде

$$\tau = \frac{\rho V(\Delta+\gamma)}{\xi} = \frac{\rho a\delta(1-\varphi)^2(\Delta+\gamma)}{4\mu}. \tag{22}$$

Подставив (22) в (20), запишем формулу для эффективной вязкости в виде безразмерного комплекса

$$\frac{\mu^*}{\mu} a\delta = \frac{4\varphi}{(1-\varphi)^2} \cdot \frac{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{1-\Delta}{\Delta+\gamma}\right)^2}{\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2}. \tag{23}$$

В предельных случаях низкочастотных воздействий $(\omega_0/\omega) \to \infty$ и высокочастотных воздействий $(\omega_0/\omega) \to 0$ из (23) имеем

$$\frac{\mu^*}{\mu} a\delta = \frac{4\varphi}{(1-\varphi)^2} \quad \text{при} \quad \frac{\omega_0}{\omega} \to \infty, \tag{24}$$

$$\frac{\mu^*}{\mu} a\delta = \frac{4\varphi}{(1-\varphi)^2} \left(\frac{1-\Delta}{\Delta+\gamma}\right)^2 \quad \text{при} \quad \frac{\omega_0}{\omega} \to 0. \tag{25}$$

На рис.2 показана зависимость (23) для $\varphi = 0,5$ и $\gamma = 3$. Кривые 1,2,3 соответствуют случаям $\Delta = 0$; $\Delta = 1,0$; $\Delta = 5$. Видно, что трансляционная вязкость гетерогенной среды с включениями-осцилляторами существенно возрастает при приближении частоты воздействий к собственной частоте осцилляторов. При частоте воздействия, удовлетворяющей условию

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = \frac{\Delta - 1}{\Delta + \gamma} , \qquad (26)$$

эффективная трансляционная вязкость обращается в нуль. Это связано с тем, что колебания включений и жидкости синфазны и имеют одинаковую амплитуду. При этом, из-за отсутствия относительного движения включений и жидкости, в системе отсутствуют и диссипативные потери.

Интересно отметить, что в этом случае, эффективная плотность гетерогенной среды (см.(8) равна истинной плотности жидкости, а не истинной плотности гетерогенной смеси

$$\rho_{см} = \rho(1-\varphi) + \rho_0 \varphi ,$$

как это получается для среды со свободными включениями, когда вязкость жидкости настолько велика, что включения становятся "замороженными", т.е. неподвижными относительно колеблющейся жидкости [2].

5. Эффективные свойства гетерогенных сред при частотах, близких к собственной частоте включений-осцилляторов

Рассмотрим эффективные свойства в так называемом пределе Лоренца*/, когда частота воздействий ω близка к собственной частоте ω_0 включений-осцилляторов с малым затуханием ($h = 1/2\tau \ll \omega_0$). Полагая $(\omega_0/\omega)-1 \ll (\omega_0/\omega)+1$ и $\left[(\omega_0/\omega)-1\right]^2 \approx 2\left[1-(\omega_0/\omega)\right]$, будем иметь из (8) и (17)

---

*/ Среды, состоящие из электрических осцилляторов, при воздействии электромагнитных полей проявляют свойства в определенном смысле аналогичные эффективным механическим свойствам инерционноупруговязких гетерогенных сред при вибрационных и акустических воздействиях. В связи с этим мы будем использовать принятую в спектроскопии терминологию, имея в виду родственность задач спектрометрии и виброакустической диагностики.

$$\frac{\rho^*}{\rho} = 1 + \frac{(1+\gamma)^2 \varphi \omega_0}{2(\Delta+\gamma)} \cdot \frac{(\omega_0 - \omega)}{[(\omega_0-\omega)^2 + h^2]} , \qquad (27)$$

$$\mu^* = \frac{\rho\varphi(1+\gamma)^2}{2(\Delta+\gamma)} \cdot \frac{h}{[(\omega_0-\omega)^2 + h^2]} \qquad (28)$$

Интересно отметить, что соотношениями, подобными (27), (28) описывается и зависимость от частоты диэлектрической проницаемости или поляризуемости среды, представляющей набор электрических осцилляторов. В пределе Лоренца для действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости имеют место соотношения [6]

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2\pi e^2 N}{m\omega_0} \cdot \frac{(\omega_0 - \omega)}{[(\omega_0-\omega)^2 + h^2]} , \qquad (29)$$

$$-\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega) = \frac{2\pi e^2 N}{m\omega_0} \cdot \frac{h}{[(\omega_0-\omega)^2 + h^2]} , \qquad (30)$$

где e и m - заряд и масса электрического осциллятора, имеющего собственную частоту ω_0, N - число осцилляторов в единице объема среды. Из сравнения видно, что аналогами эффективной плотности ρ^* и вязкости μ^* являются $\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega)$ и $\mathrm{Im}\,\varepsilon(\omega)$.

Итак мы рассмотрели основные дисперсионные зависимости для эффективных свойств одной из простейших моделей инерционноупруговязких гетерогенных сред.

Как видно из полученных соотношений (27), (28) эффективные свойства таких сред существенно зависят от отношения частоты вибрационных воздействий ω и собственной частоты включений-осцилляторов ω_0. Кроме того эффективные свойства определяются отношением плотностей материала включений и сплошной фазы Δ, объемной концентрацией включений φ и их взаимным расположением. Таким образом в рассмотренной модели гетерогенной среды учтено взаимное влияние осцилляторов друг на друга. Тем не менее, предполагаемая в модели идентичность включений-осцилляторов является идеализацией. В действительности, из-за конструктивных отличий, а также из-за гидродинамической связанности системы включений-осцилляторов, гетерогенная среда имеет спектр частот тем более широкий, чем больше гидродинамическая связанность, т.е. чем больше φ и γ [7,8].

5. Эффективные свойства гетерогенных сред с нетождественными включениями-осцилляторами

Рассмотрим гетерогенную среду с нетождественными включениями-осцилляторами, имеющими некоторую заданную функцию распределения по частотам, ширина которой определяется разбросом конструктивных параметров осцилляторов, их гидродинамической связанностью, или обоими факторами одновременно.

Пусть $N(\omega')$ - функция плотности распределения числа включений-осцилляторов по собственным частотам ω' является симметричной относительно среднего значения ω_0 и имеет вид распределения Лоренца [6]

$$N(\omega') = \frac{\beta}{(\omega'-\omega_0)^2+\beta^2} \tag{31}$$

где β - параметр, характеризующий ширину этого распределения. Тогда, при частоте воздействия на гетерогенную среду близкой к собственной частоте "усредненного" осциллятора часть из них будет совершать синфазные с несущей сплошной фазой колебания, а часть - противофазные. Таким образом результирующее воздействие включений-осцилляторов будет способствовать сглаживанию дисперсионной зависимости эффективной плотности так же, как затухание включений-осцилляторов, связанное с диссипативными потерями жидкости. Параметр β можно интерпретировать как величину, обратную постоянной времени τ^* ансамбля включений.

$$\beta = \frac{1}{2\tau^*} \tag{32}$$

Величина τ^* характеризует время, в течение которого ансамбль осцилляторов, приведенный одновременно в синфазные колебания, придет в состояние с таким распределением фаз, что результирующее движение "усредненного" осциллятора будет ослаблено в "е" раз.

Для эффективной плотности гетерогенной среды с нетождественными включениями-осцилляторами можно записать

$$\tilde{\rho}^* = \frac{1}{N_0}\int_0^\infty \rho^*(\omega')\,N(\omega')\,d\omega', \tag{33}$$

где $N_0 = \int_0^\infty \beta\left[(\omega' - \omega_0)^2 + \beta^2\right]^{-1} d\omega'$ - полное число включений-осцилляторов в единице объема среды. Подставив (27) и (32) в (33) и произведя вычисление интеграла, получим

$$\frac{\tilde{\rho}^*}{\rho} = 1 + \frac{(1+\gamma)^2 \varphi \omega_0}{2(\Delta+\gamma)} \cdot \frac{(\omega_0 - \omega)}{\left[(\omega_0 - \omega)^2 + (h+\beta)^2\right.} \cdot \qquad (34)$$

Аналогичным образом для эффективной трансляционной вязкости получим

$$\tilde{\mu}^* = \frac{\rho\varphi(1+\gamma)^2}{2(\Delta+\gamma)} \cdot \frac{(h+\beta)}{\left[(\omega_0 - \omega)^2 + (h+\beta)^2\right.} \cdot \qquad (35)$$

Из сравнения (34), (35) и (27), (28) видно, что неидентичность включений-осцилляторов приводит к тому, что эффективные свойства инерционноупруговязких гетерогенных сред становятся такими, как если бы они состояли из идентичных осцилляторов, но с увеличением на величину β затуханием. Даже в идеальном случае без диссипации ($h = 0$), неидентичность включений-осцилляторов создает отличную от нуля эффективную трансляционную вязкость.

7. Колебания тела с полостью, заполненной инерционноупруговязкой гетерогенной средой

Рассмотрим в качестве примера применение полученных выше результатов расчет колебаний тела массой M, упруго закрепленного на пружине жесткостью K, полость которого объемом V заполнена гетерогенной средой с эффективными свойствами ρ^* и μ^*. Такая колебательная система может служить, например, моделью кассеты с тепловыделяющей сборкой упругих стержней, подверженной изгибным балочным колебаниям. Если пучок стержней и окружающую его оболочку рассматривать как упругую балку с закрепленными концами, то при вибрационных воздействиях, приводящих к ее изгибным колебаниям по одной из балочных форм, задача определения динамических характеристик кассеты сводится к рассматриваемой модельной задаче.

Собственная частота колебаний пружинного маятника выражается соотношением

$$\Omega^2 = \frac{K}{M+\rho^* V} = \frac{\omega_1^2}{1+\frac{\rho^* V}{M}}, \tag{36}$$

где $\omega = \sqrt{K/m}$ - собственная частота маятника без среды. Имея в виду дисперсионные свойства гетерогенной среды (для простоты будем использовать предельное соотношение (11)), ее эффективную плотность ρ^* следует взять при искомой частоте Ω. Подстановка (11) при $\omega = \Omega$ в (36) приводит к биквадратному уравнению

$$\Omega^4\left(1+\frac{V}{M}\rho_c^*\right) - \Omega^2\omega_0^2\left(1+\frac{V}{M}\rho_н^* + \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) + \omega_1^2\omega_0^2 = 0, \tag{37}$$

где введены обозначения

$$\rho_c^* = \rho\left[1+\frac{(1+\gamma)(\Delta-1)\varphi}{\Delta+\gamma}\right], \qquad \rho_н^* = \rho\left[1+(1+\gamma)\varphi\right],$$

представляющие, в сущности, предельные соотношения (12) и (10) для эффективной плотности гетерогенных сред со свободными (ρ_c^*) и неподвижными ($\rho_н^*$) включениями.

Решение биквадратного уравнения (37) дает два значения для квадрата собственной частоты пружинного маятника

$$\frac{\Omega_{1,2}^2}{\omega_0^2} = \frac{\left(1+\frac{V}{M}\rho_н^*+\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right) \pm \sqrt{\left(1+\frac{V}{M}\rho_н^*+\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)^2 - 4\left(1+\frac{V}{M}\rho_c^*\right)\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}}}{2\left(1+\frac{V}{M}\rho_c^*\right)} \tag{38}$$

Таким образом, пружинный маятник, заполненный инерционноупруго-вязкой гетерогенной средой, имеет две собственные частоты Ω_1 и Ω_2, и обусловлено это, очевидно, тем, что маятник является гидродинамически связанной колебательной системой, имеющей две степени свободы, одна из которых относится к ансамблю включений-осцилляторов, а другая - к полому телу. Аналогичный, но более простой случай колебаний гидродинамически связанной системы рассмотрен в работе [9].

Тривиальным предельным случаем колебаний пружинного маятника является случай, когда полость тела заполнена однородной жидкостью плотностью ρ, т.е. когда полная масса маятника постоянна и равна $M + \rho V$, а его собственная частота равна $\Omega = \sqrt{\frac{K}{M+\rho V}}$. Действительно, полагая в гетерогенной среде объемную концентрацию включений $\varphi = 0$ и, следовательно $\rho_c^* = \rho_н^* = \rho$, из формулы (38) получим для одной из собственных частот

$$\Omega_1^2 = \frac{\omega_1^2}{1 + \frac{\rho V}{M}}, \tag{39}$$

а для другой

$$\Omega_2^2 = \omega_0^2 . \tag{40}$$

Вторая собственная частота $\Omega_2 = \omega_0$ здесь хотя формально и возникает, практически не будет проявляться при наличии в системе диссипативных потерь.

Рассмотрим еще один случай собственных колебаний системы, когда жесткость пружины и масса тела равны нулю. Из формулы (38) следует

$$\frac{\Omega_0^2}{\omega_0^2} = \frac{\rho_н^*}{\rho_c^*} = \frac{1 + (1+\gamma)\varphi}{1 + \frac{(1+\gamma)(\Delta-1)\varphi}{\Delta+\gamma}} . \tag{41}$$

Как видно из формулы, собственная частота колебаний не зависит от объема среды, а определяется только ее собственными свойствами. Таким образом эту частоту можно было бы назвать собственной частотой инерционноупруговязкой гетерогенной среды.

Интересно отметить, что с этой частотой связано одно из замечательных свойств инерционноупругих гетерогенных сред; именно при этой частоте вибрационных воздействий эффективная плотность гетерогенной среды обращается в нуль (см.формулу (13)).

8. Обсуждение результатов и заключительные замечания

В предыдущих разделах рассмотрены эффективные инерционные и вязкостные свойства гетерогенных сред, образованных несжимаемой жидкостью и содержащимися в ней включениями-осцилляторами. Анализ полученных результатов был проведен для случая маловязкой жидкости, когда колебательные процессы в гетерогенной среде проявляются особенно отчетливо и носят ярко выраженный резонансный характер.

Следует отметить, что полученные дисперсионные соотношения для эффективных свойств гетерогенных сред могут использоваться не тольно для расчета динамических характеристик колебательных систем, как это проиллюстрировано в разделе 7 для простейшего случая, но и для расчета волновых процессов в сжимаемых гетерогенных средах.

Если сплошная фаза гетерогенной среды с включениями-осцилляторами является сжимаемой жидкостью, то в среде могут распространяться волны давления, характеристики которых определяются рассмотренными выше эффективными свойствами при условии, что длина волны будет существенно больше характерного размера включений и расстояния между ними. Так для скорости волны давления ($C \sim \rho^{*-1/2}$) можно получить дисперсионное соотношение, показывающее наличие трех характерных частотных диапазонов.

Для высокочастотного и низкочастотного диапазонов, т.е. для частот больших собственной частоты гетерогенной среды Ω_0 (41) и для частот меньших собственной частоты включений ω_0, эффективная плотность положительна и, следовательно, скорость звука - действительная величина. При этих частотах звук распространяется в гетерогенной среде с большим или меньшим затуханием, в зависимости от соответствующей величины эффективной трансляционной вязкости (20).

В среднечастотном диапазоне ($\omega_0 < \omega < \Omega_0$) эффективная плотность среды отрицательна, чему соответствует мнимая скорость распространения волн. Это означает, чтоакустические волны не могут распространяться в гетерогенной среде, т.е. они не могут проникать в гетерогенную среду извне. Отсюда следует, что для волн среднечастотного диапазона граница раздела однородной и гетерогенной сред является более или менее идеальным отражателем.

Обращая внимание на абсолютные значения эффективной плотности, следует отметить, что с ростом частоты (уменьшением ω_0/ω) скорость акустических волн при отсутствии затухания уменьшается до нуля, или, при ненулевом затухании, до очень малых значений при $\omega \approx \omega_0$. Затем фазовая скорость становится мнимой и возмущения не проходят в среду.При частотах больших Ω_0 фазовая скорость снова становится вещественной и уменьшается от бесконечности до некоторого значения.

Затухание акустических волн в низкочастотном и высокочастотном диапазонах в соответствии с резонансным характером эффективной трансляционной вязкости μ^*, должно проявляться следующим образом. При увеличении частоты до ω_0 затухание волн должно сильно возрастать. В частотном диапазоне непропускания ($\omega_0 < \omega < \Omega_0$) ослабление отраженной волны будет максимальным вблизи ω_0 и весьма слабым при $\omega \approx \Omega_0$ (почти идеальный отражатель). При дальнейшем увеличении частоты выше Ω_0, затухание будет проявляться по-разному для сред с тяжелыми и легкими включениями. Для сред с легкими включениями ($\Delta < 1$) затухание уменьшается с ростом частоты, а для сред с тяжелыми включениями ($\Delta > 1$), наоборот увеличивается. Интересно при этом отметить одно характерное свойство, качественно отличающее гетерогенные среды с тяжелыми включениями от сред с легкими включениями. Из формулы (I7) (см.также рис. 2) видно, что только для сред с тяжелыми включениями существует частота, при которой эффективная трансляционная вязкость обращается в нуль. При увеличении относительной плотности включений Δ от I до ∞ эта частота уменьшается от ∞ до ω_0. Акустические волны на этих частотах должны распространяться в гетерогенной среде без затухания.

В разделе 6 был рассмотрен вопрос об эффективных свойствах гетерогенных сред с неидентичными включениями-осцилляторами, где показано, что даже в случае без диссипации существует отличная от нуля эффективная вязкость. Очевидно, что для сжимаемых гетерогенных сред это будет соответствовать затуханию акустических волн.

Следует отметить,что этот тип затухания хорошо известен в физике плазмы как "затухание Ландау". В последнее время механизм затухания, обусловленный случайными неоднородностями,стал рассматриваться и в области механики гетерогенных сред. Так в работе [I0] показано, что аналог затухания Ландау имеет место для акустических волн в гетерогенной среде, образованной жидкостью и пузырьками газа. Там же отмечено, что аналогичными свойствами будет обладать среда, состоящая из жидкости с натянутыми внутри нее упругими нитями.

Таким образом в инерционноупруговязких средах с включениями-осцилляторами могут "сосуществовать" два противоположных эффекта; с одной стороны даже в средах с невязкой сплошной фазой возможно затухание акустических волн на частотах, близких к усредненной частоте включений-осцилляторов, с другой стороны, в средах с вязкой жидкостью существует частота, при которой отсутствует затухание акустических волн. Последнее, правда, относится только к средам с идентичными включениями-осцилляторами. Неидентичность, т.е. разброс собственных частот осцилляторов, устраняет эту особенность.

Список использованных источников

I. Федотовский В.С. Континуальный подход к задачам динамики резервуаров, содержащих пучки стержней или группы частиц и жидкость при вибрационных воздействиях: Препринт ФЭИ-I528, Обнинск, I984.

2. Федотовский В.С. Эффективные свойства гетерогенных сред со свободными недеформируемыми включениями при вибрационных воздействиях: Препринт ФЭИ-I507, Обнинск, I984.

3. Федотовский В.С. Об учете сил инерции при нестационарной фильтрации жидкости в неоднородных анизотропных пористых средах: Препринт ФЭИ-I620, Обнинск, I984.

4. Вознякевич Е.В., Номофилов Е.В. Гомогенная модель течения в стержневых сборках.-Атомная энергия, I98I, т.5I, №I, с.6.

5. Федотовский В.С. Гидродинамические силы, действующие на колеблющиеся сферические и цилиндрические включения: Препринт ФЭИ-I473, Обнинск, I983.

6. Рабинович Н.М., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. - М.,: Наука, I984.

7. Chen S.S. Vibration of nuclear fuel bundles. - Nucl. Eng. and Design, 1975, v. 35, N3, p. 399.

8. Вальес Н.Г. Колебания системы стержней в жидкости. - Проблемы прочности, I978, №II, с.62.

9. Федотовский В.С. Колебания гидродинамически связанной системы стержень-концентрическая трубка: Препринт ФЭИ-I452, Обнинск, I983.

I0. Рютов Д.Д. Аналог затухания Ландау в задаче о распространении звуковой волны в жидкости с пузырьками газа. - Письма в ЖЭТФ, I975, т.22, вып.9,с.446.

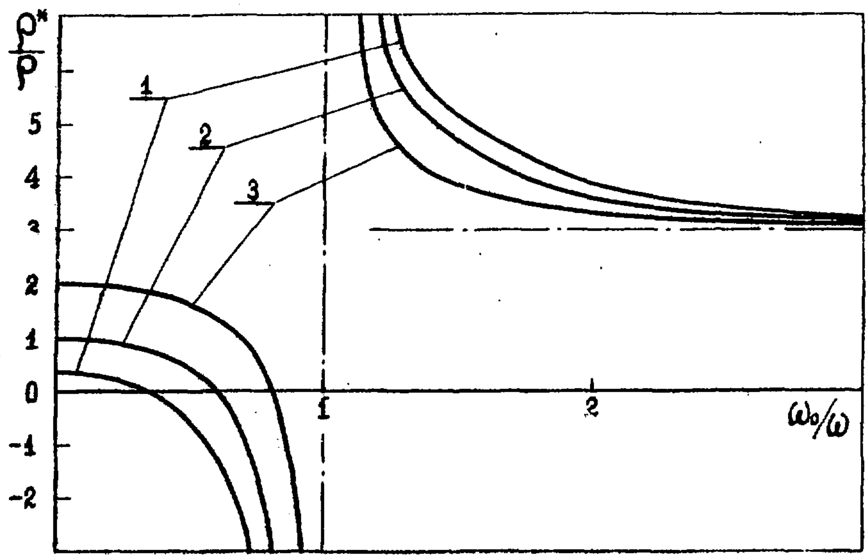

Рис.I. Эффективная плотность гетерогенной среды с цилиндрическими включениями-осцилляторами при объемной концентрации $\varphi = 0{,}5$.
Относительная плотность включений I $-\Delta = 0{,}2$ $-\Delta = $ I, 3 $-\Delta = 5$.

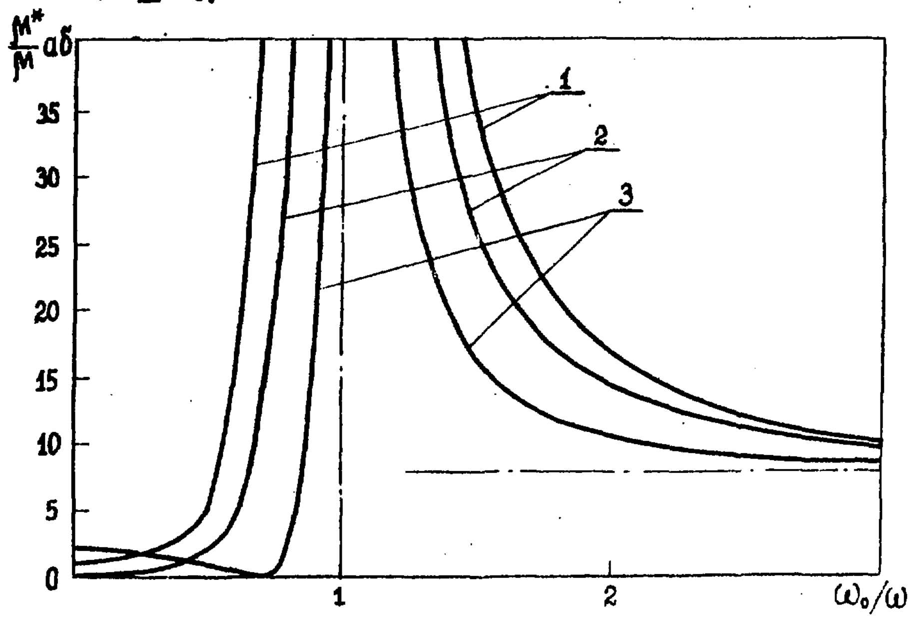

Рис.2. Эффективная трансляционная вязкость гетерогенной среды (обозначения см. рис.I).

Технический редактор Н.П.Герасимова.

Подписано к печати 22/II-1984 г. Т-20590 Формат 60х90 I/I6
Офсетная печать Усл.п.л.I,2 Уч.-изд.л. 0,8 Тираж 75 экз.
Цена I2 коп. ФЭИ-I636 Индекс 3624 164

Отпечатано на ротапринте ФЭИ,г.Обнинск.

12 коп. Индекс 3624

Эффективные свойства гетерогенных сред с упругозакрепленными включениями при вибрационных воздействиях.
ФЭИ-1636, 1984, 1-20.