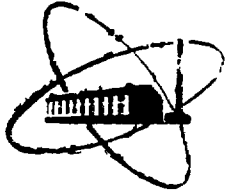


548610755

ФЭИ-1668



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

*Б. Д. АБРАМОВ*

**Принципы итерационного подбора  
групповых гомогенизированных констант**

Обнинск — 1985

---

УДК 519.9:621.039.51.12

**Б. Д. Абрамов.**

Принципы итерационного подбора групповых гомогенизированных констант

ФЭИ-1668. Обнинск, 1985. — 31 с.

В работе рассмотрена задача о построении алгоритмов подбора групповых гомогенизированных констант, обеспечивающих для заданного группового разбиения сохранение определенной совокупности функционалов типа Кэф, чисел процессов, потоков и токов при переходе от исходной задачи к многогрупповой с любой наперед заданной точностью, лимитируемой, разумеется, неопределенностями ядерных данных. Эти алгоритмы могут найти применение, например, в качестве алгоритмов свертки групп

## В В Е Д Е Н И Е

В работе предлагается и исследуется некоторая математическая схема сведения решения краевых задач теории переноса нейтронов с сечениями взаимодействия общего вида к решению последовательности краевых задач с кусочно-постоянными коэффициентами ( групповыми гомогенизированными константами ), значения которых определяются в ходе итерационного процесса. Эта схема в определённом смысле является обобщением широко известного метода групп [1,2], являющегося в настоящее время основным инструментом при проведении нейтронно-физических расчётов ядерных реакторов.

Широко распространённая формулировка [2] многогруппового приближения приводит обычно к удовлетворительному согласию определённой совокупности расчётных и экспериментальных величин, однако обоснование её носит во многом эмпирический характер и существует мнение ([2], стр.8), что "обосновать многогрупповое приближение лишь математическими средствами, которыми оперирует теория переноса излучения, практически невозможно", ибо "многогрупповое приближение, по существу, не является математическим приближением". Иначе говоря, для того, чтобы обосновать многогрупповое приближение, его необходимо прежде всего сформулировать как математическую задачу.

Так как уложить в рамки какой-либо единой логической схемы всю исторически сложившуюся совокупность идей, методик и приёмов, составляющих содержание многогруппового приближения, не представляется, по-видимому, возможным, то такая формулировка, вообще говоря, неоднозначна и, в зависимости от выбора той или иной точки зрения, может быть проведена различными способами, приводящими к различным, в общем, версиям многогруппового приближения. В данной работе рассмотрена одна из возможных формулировок многогруппового приближения, развивающая в определённом плане многогрупповой подход [1], когда вопросы описания пространственной и энергетической зависимости трактуются с единой, вообще говоря, точки зрения, что позволяет в известной степени снять затруднения, возникающие в рамках многогруппового приближения [2] при описании переноса нейтронов в существенно гетерогенных средах.

§ I. ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ.

I. Физические расчёты ядерных реакторов базируются, как известно, на решении условно критического уравнения второго рода [3]

$$M\psi = \frac{1}{k_{\text{эф}}} F\psi, \quad (I.1)$$

где  $M, F$  - операторы, определяемые формулами

$$M\psi = \lambda V\psi + C\psi, \quad F\psi = \frac{\lambda(x, E)}{V\eta} \int_{E'} d\mu' \nu \tilde{\Sigma}_f(x, E', \mu') \psi(x, E', \mu'), \quad (I.2)$$

$$C\psi = \Sigma\psi - S\psi, \quad S\psi = \int_{E'} d\mu' \Sigma_s(x, E' \rightarrow E, \mu_0) \psi(x, E', \mu')$$

на функциях  $\psi(x, E, \mu)$ , удовлетворяющих определённым условиям гладкости и вакуумному граничному условию на внешней поверхности  $\Gamma$  объёма реактора  $G$ .

Точнее, они базируются на решении некоторого другого, многогруппового, уравнения, т.е. уравнения типа

$$\tilde{M}\tilde{\psi} = \frac{1}{\tilde{k}_{\text{эф}}} \tilde{F}\tilde{\psi}, \quad (I.3)$$

(где

$$\tilde{M}\tilde{\psi} = \lambda V\tilde{\psi} + \tilde{C}\tilde{\psi}, \quad \tilde{F}\tilde{\psi} = \frac{\tilde{\lambda}(x, E)}{V\tilde{\eta}} \int_{E'} d\mu' \tilde{\nu} \tilde{\Sigma}_f(x, E', \mu') \tilde{\psi}(x, E', \mu'),$$

$$\tilde{C}\tilde{\psi} = \tilde{\Sigma}\tilde{\psi} - \tilde{S}\tilde{\psi}, \quad \tilde{S}\tilde{\psi} = \int_{E'} d\mu' \tilde{\Sigma}_s(x, E' \rightarrow E, \mu_0) \tilde{\psi}(x, E', \mu') \quad (I.4)$$

а "сечения"  $\tilde{\Sigma}, \tilde{\Sigma}_s, \tilde{\lambda}, \tilde{\nu} \tilde{\Sigma}_f$  - кусочно-постоянные функции переменных  $x$  и  $E$ , ибо, в силу весьма сложной (а, зачастую, и недостоверно известной) зависимости сечений  $\Sigma, \Sigma_s, \lambda, \nu \Sigma_f$  от энергии  $E$  получение точного решения задачи (I.1) в настоящее время затруднительно.

Для целей практики, однако, и не требуется, как правило, знания детальной информации о ходе зависимости функции  $\psi(x, E, \mu)$  от переменных  $x, E, \mu$ . Обычно достаточно знания лишь некоторых интегральных характеристик решения, таких, как  $k_{\text{эф}}$ , числа процессов и т.д. Предполагается, что значения важнейших интегральных характеристик (функционалов) решения задачи (I.1) могут быть с приемлемой точностью получены на основе решения многогрупповой задачи (I.3), если групповые константы (т.е. значения функций  $\tilde{\Sigma}, \tilde{\Sigma}_s, \tilde{\lambda}, \tilde{\nu} \tilde{\Sigma}_f$  в тех интервалах энергии  $E$  и объёма  $G$ , где они постоянны) подобраны соответствующим образом.

2. Подбор групповых констант может быть, в принципе, осуществлён на основе следующих известных положений. Предположим, что интервал рассматриваемых значений энергии разбит на подинтервалы (группы)  $[E_i, E_{i-1}]$ ,  $i=1, 2, \dots, I$ , объём  $G$  реактора - на подобласти  $G_n$ ,  $n=1, 2, \dots, N$  и справедливы разложения

$$\begin{aligned} \Sigma_3(x, E \rightarrow E, \mu_0) &= \sum_{i=1}^I \frac{\Sigma_{3i}}{\chi_i} \Sigma_3^{(i)}(x, E \rightarrow E) \rho_i(\mu_0), \\ \tilde{\Sigma}_3(x, E \rightarrow E, \mu_0) &= \sum_{i=1}^I \frac{\tilde{\Sigma}_{3i}}{\chi_i} \tilde{\Sigma}_3^{(i)}(x, E \rightarrow E) \rho_i(\mu_0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Интегрируем уравнения (1.1), (1.3) по  $x \in G_n$ ,  $E \in [E_i, E_{i-1}]$  с весом некоторой, вообще говоря, произвольной функции  $g$ , приравняем друг другу соответствующие члены:

$$\begin{aligned} \Sigma_n^i(g, \tilde{\Psi})_n^i &= (g, \Sigma \Psi)_n^i; \quad \Sigma_{3n}^{(i)j} (g, \rho \tilde{\Psi})_n^j = (g, \Sigma_3^{(i)j} \rho \Psi)_n^j; \\ \chi_n^i (\chi \rho)_n^i (g, \tilde{\Psi})_n^i &= (g, \chi \rho \Psi)_n^i; \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $\Sigma_n^i$ ,  $\chi_n^i$ ,  $\dots$  - групповые константы, т.е. значения функций  $\Sigma$ ,  $\chi$ ,  $\dots$  в подобласти  $G_n$  при  $E \in [E_i, E_{i-1}]$ ,  $\dots$ ,

$$\begin{aligned} (g, \Sigma \Psi)_n^i &= \int_{G_n} dx \int_{E_i}^{E_{i-1}} dE \int_{\Omega} d\Omega g(x, E, \mu) \Sigma(x, E) \Psi(x, E, \mu), \\ (g, \Sigma_3^{(i)j} \rho \Psi)_n^j &= \int_{G_n} dx \int_{E_j}^{E_{j-1}} dE \int_{\Omega} d\Omega g(x, E, \mu) \Sigma_3^{(i)j}(x, E \rightarrow E) \rho(\mu) \Psi(x, E, \mu), \\ (g, \Psi)_n &= \int_{G_n} dx \int_{\Omega} d\Omega g(x, E, \mu) \Psi(x, E, \mu) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^I (g, \Psi)_n^i. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Условия (1.6) имеют характер условий сохранения чисел процессов (с весом  $g$ ) при переходе от задачи (1.1) к задаче (1.3). Эти условия могут быть и несовместными (если, например,  $(g, \rho \tilde{\Psi})_n^j = 0$ , а  $(g, \Sigma_3^{(i)j} \rho \Psi)_n^j \neq 0$ ). Если же они совместны, то из (1.6) вытекают формулы усреднения сечений:

$$\Sigma_n^i = \frac{(g, \Sigma \Psi)_n^i}{(g, \Psi)_n^i}, \quad \Sigma_{3n}^{(i)j} = \frac{(g, \Sigma_3^{(i)j} \rho \Psi)_n^j}{(g, \rho \tilde{\Psi})_n^j}, \quad \chi_n^i (\chi \rho)_n^i = \frac{(g, \chi \rho \Psi)_n^i}{(g, \tilde{\Psi})_n^i}. \quad (1.8)$$

Таким образом, если групповые константы определены по формулам (1.8), то будут сохранены числа процессов (1.6). Сохранение других функционалов, в том числе и  $\chi \rho$ , вообще говоря, не гарантируется. Действительно, из (1.6) следует, например, что

$$(g, \tilde{\Psi})_n = (g, \Psi)_n, \quad (g, \tilde{\chi} \tilde{\Psi})_n = (g, \chi \Psi)_n, \quad (1.9)$$

поэтому из уравнений (I.1), (I.3) вытекает, что

$$(\mathcal{G}, \mathcal{M}\psi) - (\mathcal{G}, \mathcal{M}\tilde{\psi}) = \left(\frac{1}{k_{sp}} - \frac{1}{\tilde{k}_{sp}}\right) (\mathcal{G}, F\psi), \quad (I.10)$$

т.е.  $\tilde{k}_{sp} = k_{sp}$ , если только  $(\mathcal{G}, \mathcal{M}\psi) = (\mathcal{G}, \mathcal{M}\tilde{\psi})$ , и наоборот.

Гарантированное сохранение  $k_{sp}$  достигается, как известно, на константах [I]

$$\bar{\Sigma}_n^i = \frac{(\psi^* \mathcal{I} \psi)_n^i}{(\psi^* \psi)_n^i}, \quad \bar{\Sigma}_n^{(e)j} = \frac{(\psi^* \mathcal{I}_i^{(e)} \mathcal{P} \psi)_n^j}{(\psi^* \mathcal{P} \psi)_n^j}, \quad \chi_n^i(\mathcal{M}\psi)_n^j = \frac{(\psi^* \mathcal{M} \mathcal{I} \psi)_n^j}{(\psi^* \psi)_n^j}, \quad (I.11)$$

или на константах

$$\bar{\Sigma}_n^i = \frac{(\psi^* \mathcal{I} \psi)_n^i}{(\psi^* \psi)_n^i}, \quad \bar{\Sigma}_n^{(e)j} = \frac{(\psi^* \mathcal{I}_i^{(e)} \mathcal{P} \psi)_n^j}{(\psi^* \mathcal{P} \psi)_n^j}, \quad \chi_n^i(\mathcal{M}\psi)_n^j = \frac{(\psi^* \mathcal{M} \mathcal{I} \psi)_n^j}{(\psi^* \psi)_n^j}, \quad (I.12)$$

где  $\psi^*$ ,  $\tilde{\psi}^*$  - ценность и, соответственно, групповая ценность, т.е. решения уравнений

$$\mathcal{M}^* \psi^* = \frac{1}{k_{sp}} F^* \psi^*, \quad \tilde{\mathcal{M}}^* \tilde{\psi}^* = \frac{1}{\tilde{k}_{sp}} F^* \tilde{\psi}^*, \quad (I.13)$$

сопряжённых к уравнениям (I.1), (I.3). Действительно, при выполнении условий (I.12) имеем из (I.1), (I.13)

$$\left(\frac{1}{k_{sp}} - \frac{1}{\tilde{k}_{sp}}\right) (\psi^* F^* \tilde{\psi}^*) = (\psi^* \mathcal{M} \psi) + (\psi^* \mathcal{M} \psi^*) = 0, \quad (I.14)$$

откуда и следует, что  $\tilde{k}_{sp} = k_{sp}$  (Равенство нуля в (I.14) имеет место в силу выбора граничных условий для  $\psi$ ,  $\tilde{\psi}^*$  [I]). Однако в этом случае не гарантируется сохранение чисел процессов и т.д.

Ещё один известный способ подбора групповых констант заключается в использовании формул

$$\Sigma_n^i = \frac{(\mathcal{B} \mathcal{I} \psi)_n^i}{(\mathcal{B} \psi)_n^i}, \quad \Sigma_n^{(e)j} = \frac{(\mathcal{B} \mathcal{I}_i^{(e)} \mathcal{P} \psi)_n^j}{(\mathcal{B} \mathcal{P} \psi)_n^j}, \quad \chi_n^i(\mathcal{M}\psi)_n^j = \frac{(\mathcal{B} \mathcal{M} \mathcal{I} \psi)_n^j}{(\mathcal{B} \psi)_n^j}. \quad (I.15)$$

Здесь вообще не гарантируется сохранение рассматриваемых функционалов. Но если

$$\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}, \quad (I.16)$$

то формулы (I.15) совпадают с формулами (I.12) и сохраняется  $k_{sp}$ . Если же

$$(\mathcal{B} \psi)_n^i = (\mathcal{B} \tilde{\psi})_n^i, \quad (\mathcal{B} \mathcal{P} \psi)_n^j = (\mathcal{B} \mathcal{P} \tilde{\psi})_n^j, \quad (I.17)$$

то формулы (I.15) переходят в (I.8) и сохраняются числа процессов. Наконец, при выполнении условий (I.16), (I.17) сохраняются и  $k_{sp}$  и числа процессов (I.6). Следует заметить, одна-

ко, что уравнение (I.3) с константами (I.15) может и не иметь решений, удовлетворяющих условиям (I.17).

3. Значения различных систем констант не вполне произвольны: они связаны с константами (I.11), (I.12) Г.И. Марчука соотношениями

$$\begin{aligned} \sum_n \sum_i (\psi^*, \tilde{\psi})_n^i [Z_n^i - \bar{Z}_n^i] - \sum_e \frac{2\alpha e}{4\pi} \sum_n \sum_i \sum_j (\psi^*, \rho \tilde{\psi})_n^i [Z_{5n}^{(e)j} - \bar{Z}_{5n}^{(e)j}] = \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_n \sum_i \sum_j (\psi^*, \tilde{\psi})_n^i [\tilde{\lambda} \chi_n^i (\nu \tilde{\rho})_n^j - \lambda \chi_n^i (\nu \tilde{\rho})_n^j], \\ \sum_n \sum_i (\psi^*, \psi)_n^i [Z_n^i - \bar{Z}_n^i] - \sum_e \frac{2\alpha e}{4\pi} \sum_n \sum_i \sum_j (\tilde{\psi}^*, \rho \psi)_n^i [Z_{5n}^{(e)j} - \bar{Z}_{5n}^{(e)j}] = \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_n \sum_i \sum_j (\tilde{\psi}^*, \psi)_n^i [\tilde{\lambda} \chi_n^i (\nu \tilde{\rho})_n^j - \lambda \chi_n^i (\nu \tilde{\rho})_n^j], \end{aligned} \quad (I.18)$$

имеющими характер тождеств. Здесь  $\lambda = 1/\kappa_{sp}$ ,  $\tilde{\lambda} = 1/\tilde{\kappa}_{sp}$ .

Эти соотношения можно вывести, например, из уравнений для функции  $\psi'$ ,

$$\psi' = \psi - \tilde{\psi}, \quad (I.19)$$

определяющей погрешность групповой аппроксимации.  $\psi'$  удовлетворяет любому из уравнений

$$\begin{aligned} (M - \lambda F)\psi' &= (\tilde{M} - M)\tilde{\psi} - (\tilde{\lambda}\tilde{F} - \lambda F)\tilde{\psi}, \\ (\tilde{M} - \tilde{\lambda}\tilde{F})\psi' &= (\tilde{M} - M)\psi - (\tilde{\lambda}\tilde{F} - \lambda F)\psi \end{aligned} \quad (I.20)$$

с вакуумными граничными условиями на внешней поверхности.

Так как  $(\tilde{M} - M)\psi = (\tilde{C} - C)\psi$ , то (I.20) принимают вид

$$\begin{aligned} (M - \lambda F)\psi' &= (\tilde{C} - C)\tilde{\psi} - (\tilde{\lambda}\tilde{F} - \lambda F)\tilde{\psi}, \\ (\tilde{M} - \tilde{\lambda}\tilde{F})\psi' &= (\tilde{C} - C)\psi - (\tilde{\lambda}\tilde{F} - \lambda F)\psi. \end{aligned} \quad (I.21)$$

Тогда, предполагая, что фиксирован некоторый выбор констант в уравнении (I.3) и уравнения (I.1), (I.3) разрешимы метрически, получаем условия (I.18);

$$\begin{aligned} (\psi^*, [(\tilde{C} - C) - (\tilde{\lambda}\tilde{F} - \lambda F)]) &= 0, \\ (\tilde{\psi}^*, [(\tilde{C} - C) - (\tilde{\lambda}\tilde{F} - \lambda F)]) &= 0, \end{aligned} \quad (I.22)$$

являющиеся необходимыми условиями разрешимости задач (I.20). Но, в силу сделанных предположений, эти задачи разрешимы, и, следовательно, условия (I.18) выполнены.

4. Отметим, что структура многогруппового уравнения (I.3) не определяется условиями (I.6) однозначно. Так, вид формул (I.6) не изменится, если вместо уравнения (I.3) будет рассмотрено некоторое другое уравнение вида

$$\tilde{H}\tilde{\psi} = \tilde{\lambda}F\tilde{\psi} + \tilde{\varphi}, \quad (I.23)$$

где  $\tilde{\varphi}$  - произвольная, в общем, функция, ортогональная к  $\mathcal{G}$  такая, что

$$(\mathcal{G}, \tilde{\varphi}) = (\tilde{\psi}^*, \tilde{\varphi}) = 0. \quad (I.24)$$

Здесь условие  $(\tilde{\psi}^*, \tilde{\varphi}) = 0$  - необходимое условие разрешимости задачи (I.23). И, в частности, если

$$y(x, E, \lambda) = \sum_{c=0}^L \frac{\partial^c y}{\partial \lambda^c} \int_{S_N} d\Omega' R_c(\lambda \lambda') y(x, E, \lambda'), \quad (I.25)$$

то, в соответствии с (I.6), однозначно определяются, вообще говоря, лишь  $\Delta + 1$  констант  $\sum_{S_N}^{(c)} y$ ,  $c = 0, \dots, \Delta$ . Все прочие  $\sum_{S_N}^{(c)} y$ ,  $c = \Delta + 1, \Delta + 2, \dots$ , могут быть выбраны произвольными и это никак не скажется на числах процессов (I.6), а при выполнении условий (I.17),

$$(\mathcal{G}\psi')_n^{(c)} = (\mathcal{G}R_c\psi')_n^{(c)} = 0, \quad c = 0, \dots, \Delta, \quad (I.26)$$

- и на значениях констант (I.8).

Неоднозначно, вообще говоря, и определение граничных условий на границах раздела гомогенизируемых зон. Действительно, решение  $\psi$  исходной задачи (I.1) должно быть, как известно [4,5], абсолютно непрерывным вдоль почти всех траекторий полёта нейтронов, однако на выбор граничных условий для функций  $\tilde{\psi}$ ,  $\psi'$  не наложено, вообще говоря, никаких ограничений. Нужно лишь, чтобы сумма этих функций,  $\psi = \tilde{\psi} + \psi'$ , удовлетворяла исходным условиям гладкости. Следовательно, имеется определённый произвол и в выборе граничных условий для  $\psi, \psi'$ .

5. Отмеченная выше неоднозначность может быть в принципе использована в целях расширения круга сохраняемых функционалов. Так, из условия (I.10),  $(\mathcal{G}, \lambda \psi') = (\lambda - \tilde{\lambda})(\mathcal{G}, F\psi)$ , следует, что  $k_{sp} = k_{sp}$  для произвольной  $\mathcal{G}$ , если  $(\mathcal{G}, \lambda \psi') = 0$ . Последнее будет выполнено, если потребовать, чтобы  $\psi'$  удовлетворяла на границах раздела гомогенизируемых зон граничным условиям типа условий периодичности, отражения и т.п., т.е. условиям, обеспечивающим выполнение равенств

$$(\mathcal{G}, \lambda \psi')_n^{(c)} = 0. \quad (I.27)$$



Изменяя соответствующим образом граничные условия для функций  $\tilde{\psi}$ ,  $\psi$ , приходим к формулировке задачи о поиске решений уравнений (I.3), (I.21) в классах разрывных по границам раздела гомогенизируемых зон функций. Отметим, что в ряде задач влиянием выбора граничных условий для  $\psi$  на выбор граничных условий для  $\tilde{\psi}$  можно пренебречь, т.е. решать уравнение (I.3) с обычными условиями сшивки.

В свою очередь, неоднозначность, связанную с выбором источника  $\varphi$ , можно попытаться использовать для удовлетворения условий (I.17), являющихся, как следует из (I.26), некоторыми условиями минимизации погрешности  $\tilde{\psi}$  группового подхода. Так, например, можно положить

$$\begin{aligned} (\tilde{M} - \tilde{\lambda}\tilde{F})\tilde{\psi} &= \alpha \\ (\tilde{M} - \tilde{\lambda}\tilde{F})\psi &= -\alpha + ((\tilde{C} - C) - (\tilde{F} - \lambda F))\psi, \end{aligned} \quad (I.28)$$

где при  $x \in G_n$ ,  $x \in (E_1, E_2, \dots, E_N)$

$$\alpha = \alpha(\varphi) = \chi_n \varphi + \sum_{\substack{e \\ e \in E_j}} \frac{2\chi_n}{\chi_n} \varphi \chi_n^{(e)} \int_{E'} dE' \rho_e(\omega) \varphi(x, E', \lambda'). \quad (I.29)$$

$$(\varphi, \varphi)_n^{(e)} = (\varphi, \varphi)_n^{(e)} = 0, \quad e = e_1, \dots, \quad (I.30)$$

а коэффициенты  $\alpha_n^{(e)}$ ,  $\alpha_n^{(e)j}$  выбрать из условий (I.17). Тогда, очевидно, эти коэффициенты будут некоторыми функционалами от  $\varphi$ . Условия (I.30) обеспечивают при этом ортогональность источника для произвольных значений коэффициентов.

В случае (I.25) можно попытаться искать источник в виде

$$\alpha = \alpha(\tilde{\psi}) = \sum_{\substack{e \\ e \in E_j}} \frac{2\chi_n}{\chi_n} \sum_{m=-e}^e Y_m(\alpha) \sum_{\substack{e_j \\ e_j \in E_j}} \int_{E'} dE' \rho_e(\omega) \overline{Y_m(\alpha')} \tilde{\psi}(x, E', \lambda'), \quad (I.31)$$

где  $E_j, x \in (E_1, E_2, \dots, E_N)$ ,  $Y_m$ ,  $\overline{Y_m}$  - сферические функции,

$$\int d\Omega Y_m(\alpha) \overline{Y_m(\alpha')} = \frac{4\pi}{2e+1} \delta_{e, e'} \delta_{m, m'}, \quad \rho_e(\omega) = \sum_{m=-e}^e Y_m(\omega) \overline{Y_m(\omega')}, \quad (I.32)$$

$\sum_{m=-e}^e \rho_e^{(e)j}$  - неизвестные коэффициенты, подбираемые из условий (I.17).

Следует заметить, что условия (I.17) приближённо выполнены, если многогрупповой подход (I.3), (I.8) применим к рассматриваемой задаче (I.1), ибо применимость этого подхода и означает, очевидно, что  $\tilde{\psi}$  в некотором смысле близка к  $\psi$ , т.е. что  $(\varphi, \tilde{\psi})_n^{(e)} \approx (\varphi, \psi)_n^{(e)}$ ,  $(\varphi, \psi)_n^{(e)} \approx 0$  и т.д. При этом нивелируется и различие в формулах (I.8), (I.15) усреднения сечений, а источник  $\alpha$  становится, по-видимому, малым.

6. Рассмотренные выше примеры показывают, что способы подбора групповых констант, позволяющие в принципе достичь строгого сохранения ряда функционалов при переходе от исходной задачи (I.I) к многогрупповой задаче (I.3), вообще говоря, существуют. Но они не вполне конструктивны, ибо базируются на использовании решений, неизвестных по определению. Последнее обстоятельство, однако, не является непреодолимым препятствием для проведения практических расчётов по формулам типа (I.15), так как было замечено, что функционалы этого типа слабо зависят от выбора конкретных функций. Таким образом, вместо точного решения  $\Psi$  исходной задачи (I.I) в этих формулах можно приближённо использовать решения некоторых специально подобранных идеализированных модельных задач, допускающих точное (а, зачастую, и аналитическое) решение. Точность подобных приближений определяется выбором модельных задач и, вообще говоря, растёт по мере увеличения числа групп (уменьшения ширины групп).

Однако число групп нельзя, по практическим соображениям, увеличивать неограниченно. В этой связи встаёт задача о построении алгоритмов подбора групповых гомогенизированных констант, обеспечивающих при фиксированном групповом разбиении сохранение требуемой совокупности функционалов с любой наперед заданной точностью (лимитируемой, разумеется, неопределённостью ядерных данных).

Решение этой задачи на пути конструирования иерархии модельных задач, всё лучше аппроксимирующих исходную задачу (I.I) и имеющих её в качестве предела, наталкивается на серьёзные трудности. Ясно, однако, что если такой подход реализуем, то он эквивалентен некоторому методу последовательных приближений для решения задачи (I.I), т.е. некоторому итерационному алгоритму подбора групповых констант, обеспечивающих всё более точное сохранение рассматриваемой совокупности функционалов.

Так как решение исходной задачи (I.I) в полном объёме, как уже упоминалось, и слишком дорого, и, как правило, не нужно, то представляют интерес такие методы итерационного решения задачи (I.I), в которых центр тяжести переносится на решение многогрупповой задачи, а функция  $\Psi'$ , определяющая погрешность групповой аппроксимации, вычисляется приближённо, как малая добавка, нужная лишь в целях усреднения сечений. Разработка и анализ подобных алгоритмов - цель данной работы.

§ 2. ИТЕРАЦИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ ПОДБОРА КОНСТАНТ.

I. Рассмотрим метод итераций источников деления для решения задачи (I.1):

$$M\psi^{(k)} = F\psi^{(k)}, k=0,1,\dots; K_{sp} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(g, F\psi^{(k)})}{(g, \psi^{(k)})}, \quad (2.1)$$

где  $g$  - произвольная функция, неортогональная к  $F\psi$ , например,  $g(x, E, \nu) \geq 0$  [3,4].

Соответствующий метод решения многогрупповой задачи (I.3) запишем в нетрадиционной форме

$$\tilde{M}^{(k)}\tilde{\psi}^{(k)} = \tilde{F}^{(k)}\tilde{\psi}^{(k)}, k=0,1,\dots; \tilde{K}_{sp} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(g, \tilde{F}^{(k)}\tilde{\psi}^{(k)})}{(g, \tilde{\psi}^{(k)})}, \quad (2.2)$$

где операторы  $\tilde{M}^{(k)}$ ,  $\tilde{F}^{(k)}$  задаются формулами вида (I.4) с тем лишь различием, что в данном случае "сечения"  $\tilde{\Sigma}, \tilde{\Sigma}_s, \tilde{\nu}\tilde{\Sigma}_f, \tilde{\chi}$  считаются зависящими от номера  $k=0,1,\dots$  итерации. Нетрадиционность такого подхода и заключается, очевидно, в зависимости констант от номера итерации.

Значения этих констант будем подбирать из условия  $\tilde{K}_{sp} = K_{sp}$ . Оно будет обеспечено, если потребовать, чтобы

$$(g, \tilde{F}^{(k)}\tilde{\psi}^{(k)}) = (g, F\psi^{(k)}), (g, \tilde{M}^{(k)}\tilde{\psi}^{(k)}) = (g, M\psi^{(k)}), \quad (2.3)$$

$k=0,1,\dots$ . Условия (2.3), в свою очередь, будут удовлетворены, если положить

$$\begin{aligned} [\Sigma_n^i]^{(k)} (g, \tilde{\psi}^{(k)})_n^i &= (g, \Sigma \psi^{(k)})_n^i, \\ [\Sigma_{sn}^{(0)j}]^{(k)} (g, \tilde{\psi}^{(k)})_n^j &= (g, \Sigma_s^{(0)} \psi^{(k)})_n^j, \\ [\chi_n^i(\nu\Sigma_f)_n]^{(k)} (g, \tilde{\psi}^{(k)})_n^i &= (g, \chi \nu\Sigma_f \psi^{(k)})_n^i. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из (2.3) тогда вытекают соотношения типа (I.27),

$$(g, \nu\psi^{(k)})_n^i = 0, (g, \nu\tilde{\psi}^{(k)})_n^i = (g, \nu\psi^{(k)})_n^i, \quad (2.5)$$

обеспечивающие сохранение интегральных токов. Здесь

$$\psi^{(k)} = \psi^{(k)} - \tilde{\psi}^{(k)} \quad (2.6)$$

погрешность групповой аппроксимации в  $k$ -ой итерации. Она удовлетворяет любому из уравнений

$$\begin{aligned} M\psi^{(k)} &= F\psi^{(k)} - (\tilde{F}^{(k)} - F)\tilde{\psi}^{(k)} + (\tilde{C}^{(k)} - C)\tilde{\psi}^{(k)}, \\ \tilde{M}^{(k)}\tilde{\psi}^{(k)} &= F\psi^{(k)} - (\tilde{F}^{(k)} - F)\tilde{\psi}^{(k)} + (\tilde{C}^{(k)} - C)\psi^{(k)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

с вакуумными граничными условиями.

Условия (2.4) аналогичны условиям (1.6) сохранения чисел процессов с весом  $g$ , и если они совместны, то ведут к формулам усреднения сечений, аналогичным формулам (1.8):

$$[\Sigma_n^i]^{(k)} = \frac{(g, \Sigma \psi^{(k)})_n^i}{(g, \tilde{\psi}^{(k)})_n^i}, \quad [\Sigma_n^{(e)j}]^{(k)} = \frac{(g, \Sigma^{(e)j} \psi^{(k)})_n^j}{(g, \rho_e \tilde{\psi}^{(k)})_n^j}, \quad (2.8)$$

$$[\chi_n^i(\sqrt{\Sigma})_n^j]^{(k)} = (g, \chi \sqrt{\Sigma} \psi^{(k)})_n^j / (g, \tilde{\psi}^{(k)})_n^j, \quad k=0, 1, \dots$$

2. Формулы предыдущего пункта задают некоторый итерационный алгоритм решения исходной задачи (1.1), в соответствии с которым решение задачи (2.1) заменяется решением задач (2.2), (2.7) и пересчётом значений групповых констант на каждом итерационном шаге. Эффективность подобного алгоритма зависит, в частности, от того, насколько быстро устанавливаются стационарные значения этих констант. В пределе, при  $k \rightarrow \infty$ , процесс (2.2), (2.5), (2.7) приводит по построению к точным значениям чисел процессов и  $K_{gp}$ . Однако существование предельных значений самих групповых констант не гарантируется. Для этого необходимо и, вообще говоря, достаточно, чтобы существовали предельные значения

$$(g, \tilde{\psi}^{(k)})_n^i \underset{k \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \quad (g, \rho_e \tilde{\psi}^{(k)})_n^j \underset{k \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \quad (2.9)$$

Действительно, тогда из (2.4) и факта сходимости при  $k \rightarrow \infty$  последовательности  $\psi^{(k)}/K_{gp}^k$  к  $\psi$  [3,4] вытекает в обычных условиях сходимость последовательностей  $[\Sigma_n^i]^{(k)}$ ,  $[\Sigma_n^{(e)j}]^{(k)}$ ,  $[\chi_n^i(\sqrt{\Sigma})_n^j]^{(k)}$  к соответствующим предельным значениям (1.8). Неизвестно, существуют ли в общем случае пределы (2.9). Однако их существование будет обеспечено, если потребовать, чтобы

$$(g, \psi^{(k)})_n^i = (g, \rho_e \psi^{(k)})_n^j = 0, \quad k=0, 1, \dots \quad (2.10)$$

Тогда формулы (2.8) переходят в формулы типа (1.15),

$$[\Sigma_n^i]^{(k)} = \frac{(g, \Sigma \psi^{(k)})_n^i}{(g, \psi^{(k)})_n^i}, \quad [\Sigma_n^{(e)j}]^{(k)} = \frac{(g, \Sigma^{(e)j} \psi^{(k)})_n^j}{(g, \rho_e \psi^{(k)})_n^j}, \dots, \quad (2.11)$$

справедливы соотношения

$$(g, \tilde{c}^{(k)} \psi^{(k)})_n^i = (g, (\tilde{c}^{(k)} - c) \psi^{(k)})_n^i = 0, \quad k=0, 1, \dots \quad (2.12)$$

и, наряду с числами процессов (2.4) и токами (2.5), обеспечивается сохранение функционалов типа потоков:

$$(g, \tilde{\psi}^{(k)})_n^i = (g, \psi^{(k)})_n^i, \quad (g, \rho_e \tilde{\psi}^{(k)})_n^j = (g, \rho_e \psi^{(k)})_n^j, \quad k=0, 1, \dots \quad (2.13)$$

Таким образом, условия (2.10), имеющие характер условий минимизации погрешности  $\psi^*(k)$  группового приближения, являются одновременно и некоторыми достаточными условиями сходимости констант (2.8) и операторов  $\tilde{F}(k), \tilde{S}(k), \tilde{C}(k)$  к соответствующим значениям (1.8), (1.15) констант и операторов  $\tilde{F}, \tilde{S}, \tilde{C}$ . Однако удовлетворение этих условий в рамках подхода (2.2)-(2.8) не гарантируется.

3. Положения п.4§1 о неоднозначности определения структуры многогрупповой задачи полностью применимы и в рассматриваемом случае. Поэтому можно попытаться добиться удовлетворения условий (2.10) либо на пути модификации уравнений (2.2), (2.7) вида

$$\begin{aligned} \tilde{M}(kN) \tilde{\psi}(kN) &= \tilde{Q}(kN) + \alpha(kN), \\ \tilde{M}(kN) \psi^*(kN) &= Q^*(kN) - \alpha(kN) + (\tilde{C}(kN) - C) \psi(kN), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $\alpha(kN)$  - ортогональный к  $\mathcal{G}$  источник, выбираемый по аналогии с формулами (1.29), (1.31) из условий (2.10),

$$Q(kN) = F\psi(k), \quad \tilde{Q}(kN) = \tilde{F}(k)\tilde{\psi}(k), \quad Q^*(kN) = Q(kN) - \tilde{Q}(kN), \quad (2.15)$$

либо на пути модификации граничных условий для функций на границах раздела гомогенизируемых зон, либо на пути комбинирования этих приёмов.

Подобные видоизменения схемы (2.2)-(2.8) приводят к требуемому перераспределению плотности нейтронов между функциями  $\tilde{\psi}(kN), \psi^*(kN)$  изменению констант (2.8), однако никак не сказываются на значениях  $k_{eff}$ , чисел процессов (2.4), токов (2.5) и функции  $\psi(kN)$ . Последняя удовлетворяет уравнению

$$\tilde{M}(kN) \psi(kN) = Q(kN) + (\tilde{C}(kN) - C) \psi(kN) \quad (2.16)$$

с обычными условиями сшивки на границах раздела гомогенизируемых зон, т.е. уравнению (2.1),

$$M\psi(kN) = Q(kN), \quad (2.17)$$

и, следовательно, не зависит от способа разбиения в сумму двух функций  $\psi(kN) = \tilde{\psi}(kN) + \psi^*(kN)$ .

Таким образом, решение задачи (2.2)-(2.8) с условиями (2.10), если оно существует, сводится к решению уравнения (2.16) с константами (2.11), реализующими условие (2.12) ортогональности функций  $(\tilde{C}(kN) - C)\psi(kN)$  к  $\mathcal{G}$  и последующему подбору

источника  $\alpha^{(k\kappa)}$  и (или) граничных условий для  $\tilde{\varphi}^{(k\kappa)}, \psi^{(k\kappa)}$  на границах раздела гомогенизируемых зон. Если же задача (2.2)-(2.8), (2.10) неразрешима, то тогда либо неразрешима задача (2.2)-(2.8), либо не имеет решения задача подбора источника (или граничных условий). В последнем случае встает проблема выбора между подходами (2.2)-(2.8) и (2.11), (2.16). В дальнейшем мы в основном будем придерживаться подхода (2.11), (2.16), как более "традиционного".

4. С учётом последнего замечания рассмотрим детальнее проблему подбора источника. Из уравнений (2.14) или эквивалентных им уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{M}^{(k\kappa)} \tilde{\varphi}^{(k\kappa)} &= \tilde{Q}^{(k\kappa)} + \alpha^{(k\kappa)}, \\ M \psi^{(k\kappa)} &= Q^{(k\kappa)} + (\tilde{C}^{(k\kappa)} - C) \tilde{\varphi}^{(k\kappa)} - \alpha^{(k\kappa)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

следует, что в обычных предположениях об обратимости операторов  $\tilde{M}^{(k\kappa)}, M$  задача подбора источника  $\alpha^{(k\kappa)}$ , т.е. задача удовлетворения условий (2.10), сводится либо к задаче решения системы линейных алгебраических уравнений

$$(\delta_j \tilde{M}^{(k\kappa)} [Q^{(k\kappa)} + (\tilde{C} - C) \psi - \alpha])_k^i = (\delta_j \rho_e \tilde{M}^{(k\kappa)} [Q^{(k\kappa)} + (\tilde{C} - C) \psi - \alpha])_k^i = 0 \quad (2.19)$$

относительно коэффициентов в разложениях типа (1.29)-(1.31) источника  $\alpha^{(k\kappa)}$ , либо к эквивалентной задаче

$$(\delta_j \tilde{M}^{(k\kappa)} [Q^{(k\kappa)} + (\tilde{C} - C) \tilde{\psi} - \alpha])_k^i = (\delta_j \rho_e \tilde{M}^{(k\kappa)} [Q^{(k\kappa)} + (\tilde{C} - C) \tilde{\psi} - \alpha])_k^i = 0. \quad (2.20)$$

Здесь и всюду далее в этом и следующем пунктах индекс  $\kappa$  итерации для простоты опущен.

Таким образом, если рассматриваемая многогрупповая задача (скажем, задача (2.2)-(2.8)) разрешима и система уравнений (2.19) (или (2.20)) совместна, то разрешима и соответствующая проблема подбора источника (т.е. задача (2.2)-(2.8), (2.10)). В §3 показано, что это так, если  $g \in I$ , а  $\alpha$  выбирается по формуле типа (1.29). В общем случае вопрос остаётся открытым.

Здесь уместно отметить связь между проблемой подбора источника  $\alpha$  и задачей подбора коэффициентов диффузии. Полагая в формуле (1.31)

$$\Delta = 0, \quad \sum_{m\ell} (\delta_j^{(m\ell)})_k^i = \alpha_{m\ell}^i \delta_{ij} / (E_{i-1} - E_i) \quad (2.21)$$

и предполагая, что  $\tilde{\psi}(k, E, \mu)$  достаточно гладкая функция  $\mu$ ,

$$\tilde{\psi}(k, E, \mu) \approx \frac{1}{\mu} [\tilde{\varphi}(k, E) + 3\alpha \tilde{J}(k, E)], \quad (2.22)$$

где величины

$$\tilde{\Phi}(k,E) = \int d\Omega \tilde{\Psi}(k,E,\Omega), \quad \tilde{J}(k,E) = \int d\Omega \Omega \tilde{\Psi}(k,E,\Omega) \quad (2.23)$$

имеет смысл потока и вектора тока нейтронов, обычным путём получаем из уравнений (2.14) уравнения  $P_1$ -приближения

$$\sum_{m=-1}^1 \nabla_m \tilde{J}_m + \sum_n^i \tilde{\Phi} = \sum_{j, E'} \sum_{E_j}^{(1)j} \tilde{\Phi}(k,E') + \chi M \tilde{Q}(k,E), \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{3} \nabla_m \tilde{\Phi} + \sum_n^i \tilde{J}_m = a_{mn}^i \sum_{E'} \sum_{E_j} \tilde{J}_m(k,E') / (E_{i-1} - E_i),$$

где  $\nabla_m \tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{J}_m$  - проекции векторов  $\nabla \tilde{\Phi}$ ,  $\tilde{J}$  на  $m$ -ую координатную ось декартовой системы координат, одна из осей которой ( $m=0$ ) направлена вдоль полярной оси в представлении сферических функций  $Y_{lm}(\alpha)$  в (1.31). Отметим, что ориентация последней может быть задана произвольным образом. Так как  $\tilde{\Phi}$  не зависит, в силу (2.15), от  $E \in [E_i, E_{i-1}]$ , то из (2.24) следует, что  $\tilde{\Phi}$  удовлетворяет уравнению диффузии

$$-\sum_{m=-1}^1 \nabla_m D_{mm}^i \nabla_m \tilde{\Phi} + \sum_n^i \tilde{\Phi} = \sum_{j, E'} \sum_{E_j}^{(1)j} \tilde{\Phi}(k,E') + \chi M \tilde{Q}(k,E) \quad (2.25)$$

где

$$D_{mm}^i = 1/3 (\Sigma_n^i - a_{mn}^i), \quad E, k \in [E_i, E_{i-1}] \times \mathbb{R}^3, \quad m=0, \pm 1. \quad (2.26)$$

-компоненты тензора коэффициента диффузии. Таким образом, если задача (2.10), (2.11), (2.14), (2.21) разрешима, то разрешима и задача подбора коэффициентов диффузии указанного типа.

5. Уравнения типа (2.19), (2.20) - это достаточно сложная система  $N \times I \times (L+1)$  линейных алгебраических уравнений, так что о точном решении её речь, по-видимому, не может идти. Если же говорить о приближённом решении её, т.е. о приближённой реализации условий (2.10), то такая задача всегда разрешима, причём неоднозначно. Необходимо отметить при этом, что для приближённой реализации условий (2.10) мыслимы и иные, менее трудоёмкие алгоритмы, нежели изложенные выше. Так, например, из (2.19), (2.20) следует, что условия (2.10) будут приближённо выполнены, если в пределах каждой зоны и группы будут выполнены приближённые равенства типа

$$\Phi' + (\tilde{c} - c) \Psi = \alpha, \quad \Phi' + (\tilde{c} - c) \tilde{\Psi} = \alpha. \quad (2.27)$$

Тогда, подбирая коэффициенты в разложениях типа (1.29)-(1.31) из условий типа (2.27), мы и получим, очевидно, некоторую совокупность упрощенных алгоритмов подбора источника, различающихся между собой выбором конкретной формы представления источника, способами определения коэффициентов из уравнений типа (2.27) и т.д. Отметим, что если уравнения (2.27) рассматривать как опре-

ление  $X$ , то в этом случае  $\psi \neq 0$ . Далее, в соответствии с (2.15), (2.12), левая часть первого уравнения (2.27) ортогональна к  $\mathcal{Y}$ , а второго - нет. А так как источник  $X$  ортогонален, по построению, к  $\mathcal{Y}$ , то второе уравнение (2.27) не удовлетворяется в смысле операции  $(\mathcal{Y}, \dots)$  и, таким образом, эти уравнения дают разные, в общем, аппроксимации условий (2.10). Подставляя (1.29), (1.31), например, в первое уравнение (2.27) и используя соотношения (1.32), получим, соответственно:

$$\begin{aligned} & \Psi_1 Q^i \delta_{00} + (\Sigma_n^i - \Sigma) \Psi_{em} + \sum_{j, E_j}^{E_{j-1}} \{ \int_{E_j}^{E_{j-1}} \Psi_{em}(X, E') / [\Sigma_m^{(e)}(X, E' \rightarrow E) - \Sigma_m^{(e)j}] \} = \\ & = \alpha_n^i \Psi_{em} + \sum_{j, E_j}^{E_{j-1}} \{ \int_{E_j}^{E_{j-1}} \Psi_{em}(X, E') \}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} & \Psi_1 Q^i \delta_{00} + (\Sigma_n^i - \Sigma) \Psi_{em} + \sum_{j, E_j}^{E_{j-1}} \{ \int_{E_j}^{E_{j-1}} \Psi_{em}(X, E') / \Sigma_m^{(e)}(X, E' \rightarrow E) \} = \\ & = \sum_{j, E_j}^{E_{j-1}} \{ \int_{E_j}^{E_{j-1}} [ \Sigma_m^{(e)j} \Psi_{em}(X, E') + \theta(\epsilon - \delta - 1) \Sigma_{mr}^{(e)j} \tilde{\Psi}_{em}(X, E') ] \}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $\theta(\epsilon) = \begin{cases} 1, & \epsilon \geq 0, \\ 0, & \epsilon < 0, \end{cases}$   $\Psi_{em}(X, E) = \int_{\mathcal{A}} d\mathcal{A} \Psi_{em}(\mathcal{A}) \Psi(X, E, \mathcal{A}), \dots$ ,  $E, X \in (E_1, E_{i-1}) \cap \mathcal{A}$ ,  $\delta_{00}$  - дельта-индекс Кронекера,  $m=0, 1, \dots, i, \epsilon=0, 1, \dots$ .

Таким образом, задача аппроксимации условий (2.10) в рамках рассматриваемого подхода сводится к задаче оптимального в каком-либо смысле подбора коэффициентов типа  $\alpha_n^i, \rho_n^{(e)j}, \Sigma_{mr}^{(e)j}$  и т.д. из уравнений типа (2.28), (2.29) и т.п. Решение этой задачи выходит за рамки данной работы и мы рассмотрим здесь лишь схематически случай

$$g(X, E, \mathcal{A}) \equiv 1, \quad (2.30)$$

когда условия (2.10) вырождаются в условия  $(\Psi)_n^i = 0$ , а константы  $\Sigma_{mr}^{(e)j}, \epsilon=0, 1, \dots$ , в соответствии с идеологией п.4§1, могут быть выбраны равными нулю. Так как при  $\epsilon=0$  уравнения (2.28), (2.29) удовлетворены в смысле операции  $(\mathcal{Y}, \dots)$  для произвольных значений коэффициентов, то представляется целесообразным искать эти коэффициенты из уравнений с  $\epsilon \geq 1$ . В частности,  $\Sigma_{mr}^{(e)j}$  определяется из уравнения

$$(\Sigma_n^i - \Sigma) \Psi_{em} + \sum_{j, E_j}^{E_{j-1}} \{ \int_{E_j}^{E_{j-1}} \Psi_{em}(X, E') / \Sigma_m^{(e)}(X, E' \rightarrow E) \} = \sum_{j, E_j}^{E_{j-1}} \{ \int_{E_j}^{E_{j-1}} \tilde{\Psi}_{em}(X, E') \}, \quad (2.31)$$

$m=0, 1, \dots, i, \epsilon=1, 2, \dots$  коэффициенты  $\alpha_{mr}^i$  - из уравнения

$$(\Sigma_n^i - \Sigma) \Psi_{em} + \sum_{j, E_j}^{E_{j-1}} \{ \int_{E_j}^{E_{j-1}} \Psi_{em}(X, E') / \Sigma_m^{(e)}(X, E' \rightarrow E) \} = \alpha_{mr}^i \sum_{j, E_j}^{E_{j-1}} \{ \int_{E_j}^{E_{j-1}} \tilde{\Psi}_{em}(X, E') / (E_{j-1} - E_j) \}, \quad (2.32)$$

и т.д. Последние соотношения близки к традиционным.



6. Обратимся к рассмотрению итерационных методов решения задачи (2.11), (2.16). Положим например,

$$\tilde{M}_m^{(kN)} \psi_{mN}^{(kN)} = Q^{(kN)} + (\tilde{C}_m^{(kN)} - C) \psi_m^{(kN)}, \quad m=0, 1, \dots, \quad (2.33)$$

где  $\tilde{M}_m^{(kN)}, \tilde{C}_m^{(kN)}$  - многогрупповые операторы с гомогенизированными константами

$$[\Sigma_m^i]_m^{(kN)} = \frac{(g_1 \Sigma_m^{(kN)})_m^i}{(g_1 \psi_m^{(kN)})_m^i}, \quad [\Sigma_m^{(kN)}]_m^{(kN)} = \frac{(g_2 \Sigma_m^{(kN)})_m^i}{(g_2 \psi_m^{(kN)})_m^i}, \quad (2.34)$$

переопределяемыми на каждом итерационном шаге  $m=0, 1, \dots$  в соответствии с условиями

$$(g_1 (\tilde{C}_m^{(kN)} - C) \psi_m^{(kN)})_m^i = 0, \quad m=0, 1, \dots \quad (2.35)$$

Если процесс (2.33), (2.34) сходится, то он сходится, очевидно, к решению задачи (2.11), (2.16), т.е. задачи (2.17), и, таким образом, в этом случае мы получаем метод решения исходной задачи (2.1) на базе решения последовательности задач с кусочно-постоянными по энергии и координате "сечениями", когда на каждом итерационном шаге  $m=0, 1, \dots$  обращается многогрупповой оператор  $\tilde{M}_m^{(kN)}$  и вычисляются новые значения групповых констант.

Так как обращение оператора  $\tilde{M}_m^{(kN)}$  само по себе достаточно трудная задача, то можно сформулировать модификацию метода (2.33),

$$\tilde{L}_m^{(kN)} \psi_{mN}^{(kN)} = Q^{(kN)} + \tilde{S}_m^{(kN)} \psi_{mN}^{(kN)} + (\tilde{C}_m^{(kN)} - C) \psi_m^{(kN)}, \quad (2.36)$$

реализующую одновременно процедуру обращения оператора  $\tilde{M}_m^{(kN)}$  в соответствии с методом итераций по столкновениям. Здесь  $\tilde{L}_m^{(kN)} \psi = \mu \varphi + \tilde{S}_m^{(kN)} \varphi$ ,  $\tilde{S}_m^{(kN)}, \tilde{C}_m^{(kN)}$  - многогрупповые операторы с константами (2.34),  $m=0, 1, \dots$ . Отметим, что метод (2.34), (2.36) эквивалентен методу

$$\tilde{L}_m^{(kN)} \psi_{mN}^{(kN)} = Q^{(kN)} + S \psi_m^{(kN)} + (\tilde{C}_m^{(kN)} - C) \psi_m^{(kN)}, \quad m=0, 1, \dots, \quad (2.37)$$

сходимость которого при определенных условиях установлена в §3. В этих же условиях, по-видимому, сходятся и другие методы этого пункта и, в частности, методы типа

$$\tilde{M}_m^{(kN)} \psi_{mN}^{(kN)} = Q^{(kN)} + (\tilde{C}_m^{(kN)} - C) \psi_{mN}^{(kN)}, \quad m=0, 1, \dots, \quad (2.38)$$

и т.д.

В ряде случаев целесообразно расщепить решение рассматриваемой задачи на решение многогрупповой задачи типа

$$\tilde{M}_m^{(kN)} \tilde{\psi}_{mN}^{(kN)} = \tilde{Q}^{(kN)} \quad (2.39)$$

и решение какой-либо из задач типа

$$\tilde{M}_m^{(kH)} \psi_{m+1}^{(kH)} = Q^{(kH)} + (\tilde{C}_m^{(kH)} - C) \psi_m^{(kH)}, \quad (2.40)$$

$$M \psi_{m+1}^{(kH)} = Q^{(kH)} + (\tilde{C}_m^{(kH)} - C) \tilde{\psi}_m^{(kH)}, \quad (2.41)$$

$$\tilde{M}_m^{(kH)} \psi_{m+1}^{(kH)} = Q^{(kH)} + (\tilde{C}_m^{(kH)} - C) (\tilde{\psi}_{m+1}^{(kH)} + \psi_m^{(kH)}), \quad (2.42)$$

$$M \psi_{m+1}^{(kH)} = Q^{(kH)} + (\tilde{C}_m^{(kH)} - C) \tilde{\psi}_{m+1}^{(kH)}, \quad (2.43)$$

и т.д. для погрешности  $\psi_{m+1}^{(kH)} = \tilde{\psi}_{m+1}^{(kH)} - \tilde{\psi}_{m+1}^{(kH)}$  групповой аппроксимации. При этом, очевидно, что формулы (2.39), (2.40) задают расщепление процесса (2.33) на два процесса, формулы (2.39), (2.43) соответствуют расщеплению процесса (2.38) и т.д., процесс (2.37) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_m^{(kH)} \tilde{\psi}_{m+1}^{(kH)} &= \tilde{Q}^{(kH)} + \tilde{S}_m^{(kH)} \tilde{\psi}_m^{(kH)}, \\ \tilde{\Delta}_m^{(kH)} \psi_{m+1}^{(kH)} &= Q^{(kH)} + \tilde{S}_m^{(kH)} \psi_m^{(kH)} + (\tilde{C}_m^{(kH)} - C) \psi_m^{(kH)} \end{aligned} \quad (2.44)$$

и т.п. Такое расщепление имеет смысл, когда многогрупповая задача достаточно хорошо описывает искомые физические процессы в реакторе, ибо тогда  $\psi_{m+1}^{(kH)}$  можно рассматривать как малую добавку к  $\tilde{\psi}_{m+1}^{(kH)}$ , а, следовательно, и вычислять её лишь приближённо. Кроме того, при выполнении обычных условий многогрупповое уравнение достаточно решать в диффузионном приближении, тогда как применимость подобного приближения для решения задач типа (2.40)-(2.43) вызывает сомнение.

Заметим, что в случае выполнения соотношений

$$(\rho_1 \psi_m^{(kH)})_R^i = (\rho_1 \rho_c \psi_m^{(kH)})_R^i = 0 \quad (2.45)$$

рассмотренные выше алгоритмы являются также алгоритмами решения задачи (2.2)-(2.8). Если же удовлетворение условий (2.45) не гарантировано, то формулы (2.39)-(2.43) задают алгоритмы решения задачи (2.2)-(2.8), если сечения усредняются по формулам

$$[\Sigma_R^i]_m^{(kH)} = \frac{(\rho_1 \Sigma \psi_m^{(kH)})_R^i}{(\rho_1 \tilde{\psi}_m^{(kH)})_R^i}, \quad [\Sigma_{SR}^i]_m^{(kH)} = \frac{(\rho_1 \Sigma^i \rho_c \psi_m^{(kH)})_R^i}{(\rho_1 \rho_c \tilde{\psi}_m^{(kH)})_R^i}. \quad (2.46)$$

7. В целях удовлетворения условий (2.45) можно обратиться к решению задачи типа (2.14),

$$\begin{aligned} \tilde{M}_m^{(kH)} \tilde{\psi}_{m+1}^{(kH)} &= \tilde{Q}^{(kH)} + \tilde{S}_{m+\frac{1}{2}}^{(kH)}, \\ \tilde{M}_m^{(kH)} \psi_{m+1}^{(kH)} &= Q^{(kH)} - \tilde{S}_{m+\frac{1}{2}}^{(kH)} + (\tilde{C}_m^{(kH)} - C) \psi_m^{(kH)}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

с источником типа (I.29)-(I.31),

$$\alpha_{m+\frac{1}{2}}^{(kH)} = [\alpha_n^{(kH)}]_{m+\frac{1}{2}}^i g + \sum_e \sum_{\substack{2eH \\ \chi}} \sum_j [\alpha_n^{(kH)}]_{m+\frac{1}{2}}^j \sum_{E_j} \{dE\} dA^p(\mu) \psi_m^{(kH)}(E_j), \quad (2.48)$$

$$\alpha_{m+\frac{1}{2}}^{(kH)} = \sum_{e=2H} \sum_{p=-e}^e \sum_j \{Y_p(\alpha)\} \sum_{\substack{2eH \\ \chi}} \sum_j [\alpha_n^{(kH)}]_{m+\frac{1}{2}}^j \sum_{E_j} \{dE\} dA^p(\alpha) \psi_m^{(kH)}(E_j).$$

Предполагая, что оператор  $\tilde{M}_m^{(kH)}$  обратим, сводим задачу определения коэффициентов в (2.48) к задаче решения системы линейных алгебраических уравнений типа (2.19), (2.20),

$$\begin{aligned} (g, [ \tilde{M}_m^{(kH)} ]^{-1} [ Q^{(kH)} + (\tilde{C}_m^{(kH)} - C) \psi_m^{(kH)} - \alpha_{m+\frac{1}{2}}^{(kH)} ])_{\alpha}^i &= 0, \\ (g, [ \tilde{M}_m^{(kH)} ]^{-1} [ Q^{(kH)} + (\tilde{C}_m^{(kH)} - C) \psi_m^{(kH)} - \alpha_{m+\frac{1}{2}}^{(kH)} ])_{\alpha}^j &= 0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Если уравнения (2.49) совместны, то может быть построен источник  $\alpha_{m+\frac{1}{2}}^{(kH)}$ , после чего искомые функции  $\tilde{\psi}_{mH}^{(kH)}$ ,  $\psi_{mH}^{(kH)}$ , удовлетворяющие условиям (2.45), находятся из уравнений (2.47). Отметим, что процедуру (2.47)-(2.49) целесообразно, по-видимому, рассматривать как процедуру улучшения последнего найденного приближения методов типа (2.39), (2.40): после того, как при некотором  $m$  значения констант (2.34) найдены с нужной точностью,  $\tilde{\psi}_{mH}^{(kH)}$  определяется в соответствии с (2.47)-(2.49).

Аналогичные заключения могут быть сформулированы и в отношении схемы (2.34), (2.44). В этом случае функции  $\tilde{\psi}_{mH}^{(kH)}$ ,  $\psi_{mH}^{(kH)}$ , удовлетворяющие условиям (2.45), ищутся из уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_m^{(kH)} \tilde{\psi}_{mH}^{(kH)} &= \tilde{Q}^{(kH)} + \tilde{S}_m^{(kH)} \tilde{\psi}_m^{(kH)} + \alpha_{m+\frac{1}{2}}^{(kH)}, \\ \tilde{\Delta}_m^{(kH)} \psi_{mH}^{(kH)} &= Q^{(kH)} + S_m^{(kH)} \psi_m^{(kH)} - \alpha_{m+\frac{1}{2}}^{(kH)} + (\tilde{C}_m^{(kH)} - C) \psi_m^{(kH)} \end{aligned} \quad (2.50)$$

с условиями типа (2.49), если выражения в квадратных скобках последних формул дополнить членом  $S_m^{(kH)} \psi_m^{(kH)}$ .

Для приближенной реализации условий типа (2.49) можно воспользоваться соображениями п.5§3. Тогда, с точностью до обозначений, будут справедливы соотношения типа (2.27)-(2.32), позволяющие определить приближенные значения коэффициентов в разложениях (2.48) по уже известным из предыдущей итерации значениям функций  $\tilde{\psi}_m^{(kH)}$ ,  $\psi_m^{(kH)}$ .

Отметим ещё некоторые положения, связанные с решением в рамках схемы (2.48)-(2.49) многогруппового уравнения (2.47) в диффузионном приближении. Полагая, в соответствии с (2.21), что

$$\Delta = 0, \quad [\sum_{p \neq l} (e)_{ij}^{(kH)}]_{m+1/2}^i = [\alpha_{pR}]_{m+1/2}^i \delta_{ij} (E_{i-1} - E_i), \quad p=0, \pm 1, \quad (2.51)$$

получим, по аналогии с соответствующим выводом п.3§2,

$$\sum_{p=-1}^1 \nabla_p \tilde{\varphi}_{p, mH}^{(kH)} + [\sum_{p \neq l} (e)_{ij}^{(kH)}]_{m+1/2}^i \tilde{\varphi}_{p, mH}^{(kH)} = \sum_j [\sum_{p \neq l} (e)_{ij}^{(kH)}]_{m+1/2}^i \int_{E_j}^{E_{j+1}} \tilde{\varphi}_{p, mH}^{(kH)}(kE) + \chi_{p0} \tilde{Q}, \quad (2.52)$$

$$\frac{1}{3} \nabla_p \tilde{\varphi}_{p, mH}^{(kH)} + [\sum_{p \neq l} (e)_{ij}^{(kH)}]_{m+1/2}^i \tilde{\varphi}_{p, mH}^{(kH)} = [\alpha_{pR}]_{m+1/2}^i \int_{E_i}^{E_{i-1}} \tilde{\varphi}_{p, mH}^{(kH)}(kE) / (E_{i-1} - E_i),$$

откуда видно, что в данном случае уравнения (2.52)  $P_2$ -приближения уже не сводятся, вообще говоря, к уравнению диффузии типа (2.25). Однако для достаточно больших  $m$  можно, по-видимому, приближённо положить

$$-\sum_{p=-1}^1 \nabla_p [\alpha_{pR}]_{m+1/2}^i \tilde{\varphi}_{p, mH}^{(kH)} + [\sum_{p \neq l} (e)_{ij}^{(kH)}]_{m+1/2}^i \tilde{\varphi}_{p, mH}^{(kH)} = \sum_j [\sum_{p \neq l} (e)_{ij}^{(kH)}]_{m+1/2}^i \int_{E_j}^{E_{j+1}} \tilde{\varphi}_{p, mH}^{(kH)}(kE) + \chi_{p0} \tilde{Q}^{(kH)}; \quad [\alpha_{pR}]_{m+1/2}^i = 1/3 \{ [\sum_{p \neq l} (e)_{ij}^{(kH)}]_{m+1/2}^i - [\alpha_{pR}]_{m+1/2}^i \}, \quad (2.53)$$

ибо, если процесс (2.52) сходится, то он сходится, очевидно, к решению уравнения (2.25).

8. В предыдущем пункте были схематически намечены некоторые из возможных путей реализации условий (2.45) за счёт подбора источника. Как уже отмечалось выше, в принципе имеется возможность обеспечения этих условий и за счёт подбора граничных условий для функций  $\tilde{\varphi}, \varphi'$  на границах раздела гомогенизируемых зон. Рассмотрим этот вопрос в простейшем случае  $g \equiv 1$ , когда условия (2.45) вырождаются в условия

$$(1, \varphi'_m)^{(kH)} \Big|_R^i = 0, \quad (2.54)$$

а  $\sum_{p \neq l} (e)_{ij}^{(kH)} = 0, \quad e=1, 2, \dots$ . Применяя операцию  $(1, \dots)_R^i$  к уравнению (2.47), получим, с учётом (2.15), (2.35),

$$(1, \nabla_p \varphi_{p, mH}^{(kH)}) \Big|_R^i + [\sum_{p \neq l} (e)_{ij}^{(kH)}]_{m+1/2}^i (1, \varphi_{p, mH}^{(kH)}) \Big|_R^i = (E_{i-1} - E_i) \sum_j [\sum_{p \neq l} (e)_{ij}^{(kH)}]_{m+1/2}^i (1, \varphi_{p, mH}^{(kH)}) \Big|_R^i, \quad (2.55)$$

откуда следует, что  $\varphi_{p, mH}^{(kH)}$  будет удовлетворять условиям (2.54), если потребовать, чтобы

$$(1, \nabla_p \varphi_{p, mH}^{(kH)}) \Big|_R^i = \int_{E_i}^{E_{i-1}} dE \int_{\Gamma_R} d\Omega \chi_{p0}(x) \varphi_{p, mH}^{(kH)}(x, E, \Omega) = 0 \quad (2.56)$$

и предположить, что матрица с элементами

$$[\sum_n^i]_m^{(kH)} \delta_{ij} - (E_i - E_i) [\sum_{SA}^{(0)}]_m^{(kH)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, Z \quad (2.57)$$

не вырождена. Последнее обычно имеет место (см. п. 2§5), так что выполнение условий (2.54) будет обеспечено, если  $\psi_{MH}^{(kH)}$  будет удовлетворять на границах раздела гомогенизируемых зон граничным условиям типа условий отражения, периодичности и т.п., т.е. условиям, обеспечивающим равенства (2.56).

Таким образом, решая уравнение для  $\psi_{MH}^{(kH)}$  в пределах каждой данной гомогенизируемой зоны  $G_k$  с произвольным граничным условием на  $\Gamma_k$ , удовлетворяющим требованию (2.56), мы обеспечиваем выполнение условий (2.54), и остаётся лишь указать способ подбора граничного условия для  $\psi_{MH}^{(kH)}$ , гарантирующий требуемую непрерывность функции  $\psi_{MH}^{(kH)} = \psi_{MH}^{(kH)} + \psi_{MH}^{(kH)}$  на границах раздела гомогенизируемых зон. Последнее выходит за рамки данной работы.

С практической точки зрения наибольший интерес, по-видимому, представляет комбинация процедур подбора источника и граничных условий, когда, в соответствии с алгоритмами приближённого подбора источника п. 5§2, определяются коэффициенты в разложениях типа (2.48), а  $\psi_{MH}^{(kH)}$  находится затем из решения уравнений типа (2.47), (2.50) с граничными условиями типа (2.56). При таком подходе, по-видимому, можно пренебречь отличием граничных условий для  $\psi_{MH}^{(kH)}$  на границах раздела гомогенизируемых зон от обычных условий сшивки. Действительно, из условия  $(\psi_{MH}^{(kH)})_{\Gamma}^i = 0$  и невырожденности матрицы (2.57) вытекает, что  $(\psi_{MH}^{(kH)})_{\Gamma}^i = 0$ , так что функция  $\psi_{MH}^{(kH)}$  удовлетворяет граничному условию типа (2.56), если условие (2.54) реализовано, например, за счёт подбора источника  $\chi_{MH}^{(kH)}$ . Но в последнем случае  $\psi_{MH}^{(kH)}$ ,  $\psi_{MH}^{(kH)}$  удовлетворяют обычным условиям сшивки на границах раздела гомогенизируемых зон. Поэтому можно ожидать, что, в случае приближённого удовлетворения условий (2.54) за счёт приближённого подбора источника,  $\psi_{MH}^{(kH)}$  будет приближённо удовлетворять условиям сшивки, а  $\psi_{MH}^{(kH)}$  - условиям типа (2.56).

9. Замена истинных граничных условий условиями типа отражения и т.д. позволяет свести решение задачи по определению  $\psi^r$  во всей области  $G$  к решению  $N$  независимых задач в подобластях  $G_k, k=1, 2, \dots, N$ , что значительно облегчает решение задачи. Дальнейший логический шаг в этом направлении - вообще отказаться от решения уравнения для  $\psi^r$ , полагая, что процедура приближённого подбора источника - это и есть некоторая процедура приближённого решения уравнения для  $\psi^r$  с условиями типа (2.45). На этом

пути мы приходим к алгоритмам типа

$$\tilde{M}_m^{(kN)} \tilde{\Psi}_{mN}^{(kN)} = \tilde{Q}^{(kN)} + \alpha_{m+1/2}^{(kN)}, \quad \alpha_{m+1/2}^{(kN)} \approx \tilde{Q}^{(kN)} + (\tilde{C}_m^{(kN)} - C) \tilde{\Psi}_m^{(kN)}, \quad (2.58)$$

где

$$[\tilde{\Sigma}_n^i]_m^{(kN)} = \frac{(\beta_1 \tilde{\Sigma}_m^{(kN)})_n^i}{(\beta_1 \tilde{\Psi}_m^{(kN)})_n^i}, \quad [\tilde{\Sigma}_n^{(e)j}]_m^{(kN)} = \frac{(\beta_1 \tilde{\Sigma}_m^{(e)})_n^j \tilde{\Psi}_m^{(kN)}_n^i}{(\beta_1 \tilde{\Psi}_m^{(kN)})_n^j \tilde{\Psi}_m^{(kN)}_n^i}, \quad (2.59)$$

$\alpha_{m+1/2}^{(kN)}$  выбирается в соответствии с формулами типа (2.48) из приближённого решения уравнений типа (2.27),

Неизвестно, могут ли иметь какое-либо практическое значение алгоритмы типа (2.58), (2.59). Однако алгоритмы типа

$$\tilde{M}_m^{(kN)} \tilde{\Psi}_{mN}^{(kN)} = \tilde{Q}^{(kN)} + \alpha_{m+1/2}^{(kN)}, \quad \alpha_{m+1/2}^{(kN)} \approx \tilde{Q}^{(kN)} + (\tilde{C}_m^{(kN)} - C) \Psi_m^{(kN)}, \quad (2.60)$$

где константы выбираются по формулам (2.11), источник - по нижней формуле (2.48), а функция  $\Psi_m^{(kN)}$  предполагается известной, могут найти применение, например, в качестве алгоритмов свёртки групп. Тот факт, что, скажем, задача (2.1) - это задача с непрерывной зависимостью от энергии, не играет здесь роли и можно считать, например, что (2.1) - это многогрупповая (или мультигрупповая), а (2.60) - малогрупповая (или многогрупповая) задача. Вообще, все рассматриваемые в этой работе алгоритмы - это некоторые алгоритмы свёртки групп, а простейший из них - это алгоритм п.2§1, когда свёртка ведётся по формулам (1.15) и нет гарантии сохранения каких-либо функционалов типа чисел процессов и т.п. Алгоритм (2.60) отличается от простейшего введением процедуры пересчёта источника с целью приближённого удовлетворения условий (2.10), т.е. условий сохранения чисел процессов (2.4), токов (2.5) потоков (2.13) и  $\lambda_{\Sigma}$ , причём процедуры наиболее простого вида из всех рассмотренных выше. Введение такой процедуры означает переход к уравнению другого типа: если, например, исходное уравнение было с изотропным рассеянием, то малогрупповое будет характеризоваться линейно-анизотропным рассеянием и т.д. При решении уравнения (2.60) в диффузионном приближении речь будет идти о вычислении поправки к коэффициенту диффузии и т.д.

Другой алгоритм типа (2.60) - это алгоритм

$$\tilde{M}_m^{(kN)} \tilde{\Psi}_{mN}^{(kN)} = \tilde{Q}^{(kN)} + \alpha_{m+1/2}^{(kN)}, \quad \alpha_{m+1/2}^{(kN)} \approx \tilde{Q}^{(kN)} + (\tilde{C}_m^{(kN)} - C) \Psi_m^{(kN)}, \quad (2.61)$$

$$[\tilde{\Sigma}_n^i]_m^{(kN)} = \frac{(\beta_1 \tilde{\Sigma}_m^{(kN)})_n^i}{(\beta_1 \tilde{\Psi}_m^{(kN)})_n^i}, \quad [\tilde{\Sigma}_n^{(e)j}]_m^{(kN)} = \frac{(\beta_1 \tilde{\Sigma}_m^{(e)})_n^j \Psi_m^{(kN)}_n^i}{(\beta_1 \tilde{\Psi}_m^{(kN)})_n^j \Psi_m^{(kN)}_n^i}, \dots$$

§ 3. ВОПРОСЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБОСНОВАНИЯ.

1. Рассмотрим вопрос о принципиальной осуществимости схемы подбора констант и источников при данном  $k=0,1,\dots$ . Опуская индекс  $k$ , перепишем уравнение (2.1) в виде

$$M\psi = \varphi, \quad \varphi \geq 0, \quad \varphi \neq 0, \quad (3.1)$$

и предположим, что интервал рассматриваемых энергий отделён от нуля,  $0 < E_0 \leq E \leq E^0 < \infty$ ,  $\Sigma(x, E)$ ,  $\Sigma_0(x, E; E, M_0)$  - положительные функции, суммируемые по совокупности переменных,

$$0 < \Sigma_0 = \operatorname{ess\,inf}_{x, E} \Sigma(x, E) \leq \Sigma(x, E) \leq \operatorname{ess\,max}_{x, E} \Sigma(x, E) = \Sigma^0 < \infty, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{ess\,max}_{x, E} \frac{\int_{E'} \Sigma_0^{(0)}(x, E'; E)}{\Sigma(x, E)} = A_1 < \infty, \quad \operatorname{ess\,max}_{x, E'} \frac{\int_{E'} \Sigma_0^{(0)}(x, E'; E)}{\Sigma(x, E')} = A_2 < \infty,$$

объём реактора  $G$  - конечная выпуклая область в  $R_3$  с кусочно-гладкой поверхностью  $\Pi$ ,  $d$  - диаметр области  $G$ .

В этих предположениях, следуя работам [4-6], сформулируем основные факты, касающиеся разрешимости задачи (3.1). Обозначим через  $D_p$  множество функций  $\psi(x, E, \mu)$  из  $L_p$ , удовлетворяющих при почти всех  $E, \mu, x_0 \in [E_0, E^0] \times \Omega \times \Pi_\mu$  условиям:  $\psi(x_0, \mu, E, \mu)$  абсолютно непрерывны на  $[t^-, t^+]$ ;  $\psi(x_0 + \mu t^-, E, \mu) = 0$ ;  $\mu \nabla \psi + \Sigma \psi \in L_p$ . Здесь  $\Pi_\mu$  и  $x_0$  - ортогональные проекции области  $G$  и вектора  $x$  на плоскость  $(\mu, x) = 0$ ,  $\Omega$  - единичная сфера в  $R_3$  и при заданном  $x_0 \in \Pi_\mu$  точки  $t^\pm$ ,  $t^+ > t^-$  - точки пересечения поверхности  $\Pi$  прямой  $x_0 + \mu t$ ,  $-\infty < t < \infty$ . Вводи операторы, определяемые формулами

$$\Delta \psi = \mu \nabla \psi + \Sigma \psi, \quad S \psi = \int_{E'} d\mu' \Sigma_0(x, E'; E, M_0) \psi(x, E', \mu') \quad (3.3)$$

на функциях из  $D_p$ , трансформируем задачу (3.1) в  $D_p$  к эквивалентному уравнению

$$\psi = \bar{L} S \psi + \bar{L} \varphi \quad (3.4)$$

в  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Норму в  $L_p$  зададим выражением

$$\|\psi\|_p = \left\{ \int_{E'} d\mu \int_{\Omega} \Sigma(x, E) |\psi(x, E, \mu)|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (3.5)$$

$$\|\psi\|_\infty = \operatorname{ess\,max} |\psi(x, E, \mu)|, \quad x, E, \mu \in G \times [E_0, E^0] \times \Omega.$$

Тогда нетрудно получить оценки

$$\|\bar{L}'\Phi\|_p \leq \delta \|\frac{1}{\Sigma}\Phi\|_p, \quad \|\frac{1}{\Sigma}S\psi\|_p \leq A_1^{\frac{1}{p}} A_2^{\frac{1}{p}} \|\psi\|_p, \quad (3.6)$$

где  $A_1, A_2$  - оценки из (3.2),  $\delta = 1 - \exp(-\Sigma^0 d) < 1$ . Из этих оценок при  $p=1$  следует, что  $\|\bar{L}'S\psi\|_1 \leq \delta A_2 \|\psi\|_1$ , т.е. что  $\|\bar{L}'S\|_1 < 1$ , если выполнено условие

$$\Sigma(\chi E') \geq \Sigma_S(\chi E') = \int dE \Sigma_S^{(0)}(\chi, E' \rightarrow E), \quad (3.7)$$

Гарантирующее выполнение условия  $A_2 \leq 1$ . Так как спектральный радиус  $r(\bar{L}'S)$  оператора  $\bar{L}'S$  не зависит от индекса  $\rho$  пространств  $L_\rho$  [4], то при выполнении условия (3.7)  $r(\bar{L}'S) < 1$ .

Это означает [7], что при выполнении условия (3.7) уравнение (3.4), а, следовательно, и задача (3.1), имеет единственное решение для произвольной  $\Phi \in L_\rho$ , которое является пределом последовательных приближений

$$\psi_{m+1} = \bar{L}'S\psi_m + \bar{L}'\Phi, \quad m=0,1,\dots \quad (3.8)$$

при любом начальном приближении  $\psi_0 \in L_\rho, 1 \leq \rho \leq \infty$ .

Таким образом, мы показали, что условие (3.7) - достаточное условие разрешимости задачи (3.1). Это положение имеет место и в более общем случае, когда энергия не отделена от нуля, а сечения обращаются в нуль в ряде подобластей [4]. Отметим также, что если  $\Phi \geq 0$ , то  $\psi > 0$  при почти всех  $E, \chi \in [E_0, E^0] \times X \times G$ .

2. Сформулируем аналогичные положения для многогрупповой задачи

$$\tilde{M}\tilde{\psi} = \tilde{Q} \quad (3.9)$$

с константами типа (2.II),

$$\Sigma_n^i = \frac{(\mathcal{G}\Sigma\psi)_n^i}{(\mathcal{G}\psi)_n^i}, \quad \Sigma_{SN}^{(0)ij} = \frac{(\mathcal{G}\Sigma^{(0)}\psi)_n^i}{(\mathcal{G}\psi)_n^i}, \dots \quad (3.10)$$

и сечениями (3.2), усредняемыми с весом произвольной положительной функции  $\psi > 0$ . Будем предполагать также всюду далее, что  $\mathcal{G}(\chi E, \chi) \equiv 1$ . Тогда, очевидно, имеют смысл константы  $\Sigma_n^i, \Sigma_{SN}^{(0)ij}, \chi_n^0(\psi)_n^i$  и, например,

$$0 < \Sigma_n^i = \int_{\chi \in G_n} \int_{E \in [E_i, E_{i-1}]} \Sigma(\chi E) \leq \Sigma_n^i \leq \int_{\chi \in G_n} \int_{E \in [E_i, E_{i-1}]} \Sigma(\chi E) = \Sigma_n^{0i} < \infty, \quad (3.II)$$

$$0 < \int_{\chi \in G_n} \int_{E \in [E_i, E_{i-1}]} \frac{\int_{E' \in [E_i, E_{i-1}]} \Sigma_S^{(0)}(\chi E' \rightarrow E)}{(E_{i-1} - E_i)} \leq \Sigma_{SN}^{(0)ij} \leq \int_{\chi \in G_n} \int_{E \in [E_i, E_{i-1}]} \frac{\int_{E' \in [E_i, E_{i-1}]} \Sigma_S^{(0)}(\chi E' \rightarrow E)}{(E_{i-1} - E_i)} < \infty,$$



и т. д. Так как  $(1, \Sigma_S^{(e)} \rho_e \psi)_n^j = (1, \rho_e \psi)_n^j = 0, e=1, 2, \dots$ , то в рассматриваемом случае  $g \neq 1$  определение констант  $\Sigma_{\mathcal{M}}^{(e)j}, e=1, 2, \dots$  неоднозначно и, в соответствии с идеологией §1, значения этих констант могут быть выбраны произвольными. Будем считать в дальнейшем, что  $\Sigma_{\mathcal{M}}^{(e)j} = 0, e=1, 2, \dots$ .

Таким образом, вводя операторы

$$\tilde{\Sigma} \tilde{\psi} = \mathcal{J} \rho \tilde{\psi} + \tilde{\Sigma} \tilde{\psi}, \quad \tilde{\mathcal{J}} \tilde{\psi} = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} \rho \psi' \tilde{\Sigma}_S^{(0)}(x, E' \rightarrow E) \tilde{\psi}(x, E', \nu') \quad (3.12)$$

где  $\tilde{\Sigma}(x, E), \tilde{\Sigma}_S^{(0)}(x, E' \rightarrow E)$  — многогрупповые гомогенизированные "сечения", определённые выше, приходим к задаче, аналогичной задаче, исследованной в предыдущем пункте. Отличие лишь в том, что в данном случае "сечения"  $\tilde{\Sigma}, \tilde{\Sigma}_S$  — кусочно-постоянные функции. Эти "сечения" удовлетворяют, очевидно, условиям (3.2), поэтому справедливы выводы предыдущего пункта и, в частности, достаточным условием разрешимости задачи (3.9) является условие

$$\Sigma_n^j = \frac{(1, \Sigma \psi)_n^j}{(1, \psi)_n^j} \geq \frac{(1, \tilde{\Sigma} \psi)_n^j}{(1, \psi)_n^j} = \int dE \tilde{\Sigma}_S^{(0)j} = \sum_{i=1}^I (\tilde{E}_i - E_i) \tilde{\Sigma}_{\mathcal{M}}^{(0)j}, \quad (3.13)$$

которое, впрочем, вытекает и непосредственно из условия (3.7): в силу положительности функций  $\Sigma, \Sigma_S$  для всякой  $\psi > 0$  из (3.7) следует (3.13).

Так как, в силу (2.15),  $\tilde{Q}(x, E)$  — кусочно-постоянная функция переменной  $E$ , постоянная на каждом из интервалов  $(E_i, E_{i+1}]$ ,  $i=1, 2, \dots, I$ , то из уравнения (3.9),  $\tilde{\Sigma} \tilde{\psi} = \tilde{\mathcal{J}} \tilde{\psi} + \tilde{Q}$ , следует, что  $\psi(x, E, \nu)$  обладает этим же свойством. Поэтому уравнение (3.9) эквивалентно системе групповых уравнений типа

$$\mathcal{M} \psi^i + \Sigma^i \psi^i = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{j=1}^I \tilde{\Sigma}_S^{j \rightarrow i} \int_{\mathcal{M}} \rho \psi^j(x, \nu') + Q^i, \quad i=1, 2, \dots, I, \quad (3.14)$$

где, например,  $\psi^i(x, \nu) = (E_{i-1} - E_i) \tilde{\psi}(x, E, \nu)$  при  $E \in (E_{i-1}, E_i]$  и т.д., а условия разрешимости этой системы в пространстве  $\mathcal{L}_p$  вектор-функций  $\psi = (\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^I)$  с любой нормой, эквивалентной норме

$$\|\psi\|_{\mathcal{L}_p} = \left\{ \sum_{i=1}^I (E_{i-1} - E_i)^{1-p} \int_{\mathcal{M}} \rho (\Sigma^i(x) / \psi^i(x, \nu))^p \right\}^{1/p}, \quad (3.15)$$

совпадают с соответствующими условиями для задачи (3.9) и, в частности, достаточным условием разрешимости является условие (3.13), означающее в данном случае условие диагонального преобладания по столбцам матрицы  $\Sigma(x) - \tilde{\Sigma}_S^{\wedge}(x)$  для каждого  $x \in \mathcal{G}$ :

$$\Sigma^j(x) \geq \sum_{i=1}^I \tilde{\Sigma}_S^{j \rightarrow i}(x), \quad j=1, 2, \dots, I, \quad x \in \mathcal{G}. \quad (3.16)$$

Итак, мы показали, что при выполнении условий (3.2), (3.7) из разрешимости задачи (3.1) следует разрешимость задачи (3.9), если константы усреднены по формулам (3.10) при  $\mathcal{J} \equiv 1$  с весом произвольной  $\psi > 0$ . Вопрос о том, всегда ли из разрешимости задачи (3.1) следует разрешимость задачи (3.9), являющийся принципиальным вопросом рассматриваемого многогруппового подхода, остаётся при этом открытым.

3. Отметим некоторые положения, касающиеся задач, сопряжённых к задачам (3.1), (3.9). Так как  $\mathcal{D}_\rho$  плотно в  $\mathcal{L}_\rho$ ,  $1 \leq \rho < \infty$ , то существует оператор  $\tilde{M}^* = \mathcal{L}^* - S^*$ , сопряжённый к оператору  $M$ , где операторы  $\mathcal{L}^*$ ,  $S^*$  задаются формулами

$$\mathcal{L}^* = U \mathcal{L} U, \quad S^* \psi^* = \int_{\mathcal{M} \in \mathcal{I}} \int_{\mathcal{E}} \int_{\mathcal{A}} \mathcal{L}^*(x, E, \mu) \psi^*(x, E, \mu') \quad (3.17)$$

на функциях из  $\mathcal{D}_{\rho^*}$ ,  $\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^*} = 1$ , удовлетворяющих при почти всех  $E, \mu, x_0 \in (\mathcal{E}_0, \mathcal{E}^0) \times \mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{M}$  условиям:  $\psi^*(x_0 + \mu E^+, E, \mu)$  абсолютно непрерывна на  $(t^-, t^+]$ ;  $\psi^*(x_0 + \mu E^+, E, \mu) = 0$ ;  $-\mu \psi^* + \mathcal{L} \psi^* \in \mathcal{L}_{\rho^*}$ ,  $1 \leq \rho < \infty$ . При  $\rho = \infty$   $\mathcal{D}_\rho$  не плотно в  $\mathcal{L}_\rho$  и операторы (3.17) можно рассматривать как сужение операторов  $\mathcal{L}^*$ ,  $S^*$  на  $\mathcal{L}_1$ . Здесь  $U$  - оператор, действующий по правилу  $U \psi(x, E, \mu) = \psi(x, E, -\mu)$ . Аналогичные заключения справедливы и в отношении операторов  $\tilde{\mathcal{Z}}^*$ ,  $\tilde{\mathcal{A}}^* = \tilde{\mathcal{L}}^* - \tilde{\mathcal{S}}^*$ . При этом имеют место соотношения Лагранжа

$$(\psi^*, M \psi) = (\psi, M^* \psi^*), \quad (\tilde{\psi}^*, \tilde{M} \tilde{\psi}) = (\tilde{\psi}, \tilde{M}^* \tilde{\psi}^*), \quad (3.18)$$

задачи

$$M^* \psi^* = Q^*, \quad \tilde{M}^* \tilde{\psi}^* = \tilde{Q}^* \quad (3.19)$$

разрешимы одновременно с задачами (3.1), (3.9), соответственно, и, если  $Q^*$ ,  $\tilde{Q}^* > 0$ , то  $\psi^*$ ,  $\tilde{\psi}^* > 0$  [4, 5].

4. Перейдём к обоснованию методов последовательных приближений п.6§2 для решения нелинейной задачи (2.11), (2.16) в рамках предположений предыдущих пунктов. Пусть  $\mathcal{D}_\rho^+$  - множество положительных функций из  $\mathcal{D}_\rho$ . Тогда при каждом данном  $k=1, \dots$  уравнение (2.15),

$$\tilde{M} \psi = Q + (\tilde{C} - C) \psi, \quad (3.20)$$

эквивалентно в  $\mathcal{D}_\rho^+$  уравнению (3.1) (см., например, [8], стр. 328), и, таким образом, однозначно разрешимо в  $\mathcal{D}_\rho^+$ . Вводя обозначения  $\tilde{\mathcal{Z}}(\psi) = \tilde{\mathcal{Z}}$ ,  $\tilde{C}(\psi) = \tilde{\mathcal{Z}}^{-1}$ , где  $\tilde{\mathcal{Z}}$  - оператор, задаваемый формулой  $\tilde{\mathcal{Z}} \psi = \mu \psi + \tilde{\mathcal{Z}} \psi$  на  $\mathcal{Y} \in \mathcal{D}_\rho$ , трансформируем (3.20) к эквивалентной нелинейной задаче

$$\Psi = A\Psi, \quad A\Psi = \tilde{e}(\Psi)Q + \tilde{e}'(\Psi)[\tilde{\Sigma}(\Psi) - \Sigma]\Psi + \tilde{e}(\Psi)S'\Psi, \quad (3.21)$$

на множестве  $L_p^+$  положительных функций из  $L_p$ .

Тогда, очевидно, вопрос о сходимости (при каждом данном  $k=0,1,\dots$ ) методов (2.36), (2.37) с константами (2.34) при  $\gamma \equiv 1$  будет эквивалентен вопросу о сходимости метода

$$\Psi_{m+1} = A\Psi_m, \quad \Psi_m \in L_p^+, \quad m=0,1,\dots \quad (3.22)$$

Так как существование и единственность решения задачи (3.21) в  $L_p^+$  установлены, то для исследования последнего вопроса можно обратиться к методу, основанному на оценке нормы производной по Фреше оператора  $A$  в неподвижной точке  $\Psi = A\Psi$  оператора  $A$ . Если окажется, что  $\|A'(\Psi)\| < 1$ , то, в соответствии с [7], стр.28 (или [9], стр.140), для любого заданного  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1 - \|A'(\Psi)\|$ , найдётся открытый шар  $S(\Psi, \delta)$ , такой, что при  $\Psi_0 \in S(\Psi, \delta)$  итерации (3.22) тоже лежат в  $S(\Psi, \delta)$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \Psi_m = \Psi$  и

$$\|A\Psi - \Psi_m\| \leq (\|A'(\Psi)\| + \varepsilon)^m \|A\Psi - \Psi_0\|. \quad (3.23)$$

Иначе говоря, последовательные приближения (3.22) будут сходиться к  $\Psi$ , если начальное приближение  $\Psi_0$  достаточно близко к  $\Psi$ .

Обратимся к оценке нормы  $A'(\Psi)$ . Рассмотрим сначала простейший случай, когда  $N=I=1$ , т.е. случай, когда имеется всего одна зона и одна группа. При этом  $\tilde{\Sigma}(\Psi) = (\tilde{\Sigma}\Psi)/(\tilde{c}\Psi) = \text{const}$  и (см., например, [3], стр.80)

$$\tilde{\Sigma}(\Psi+h) - \tilde{\Sigma}(\Psi) = \tilde{\Sigma}'(\Psi)h + \omega(\Psi, h), \quad \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \omega(\Psi, h)/\|h\| = 0, \quad (3.24)$$

где  $\tilde{\Sigma}'(\Psi)$  - производная оператора (функционала)  $\tilde{\Sigma}(x)$ ,

$$\tilde{\Sigma}'(\Psi)h = \frac{(\tilde{\Sigma} - \tilde{\Sigma}_0)h}{(\tilde{c}h)}, \quad |\tilde{\Sigma}'(\Psi)h| \leq \frac{\tilde{\Delta}}{(\tilde{c}h)} \|h\|, \quad \tilde{\Delta} = \frac{\tilde{\Sigma}^0 - \tilde{\Sigma}_0}{\tilde{\Sigma}_0}. \quad (3.25)$$

Используя формулу (3.24) и представление

$$L[\tilde{e}(\Psi+h) - \tilde{e}(\Psi)]Q = \int_{t^-}^t \tilde{e}'(Q)(x_0, t, \xi, \eta) \left[ e^{-\tilde{\Sigma}(\Psi+h)(t-t')} - e^{-\tilde{\Sigma}(\Psi)(t-t')} \right], \quad (3.26)$$

справедливое при почти всех  $\xi, \eta, x_0 \in [E_0, E^0] \times \Omega \times \bar{T}_0$ , нетрудно видеть, что, в соответствии с определением

$$L[\tilde{e}(\Psi+h) - \tilde{e}(\Psi)]Q = \tilde{e}'(\Psi)Qh + \omega(\Psi, Q, h), \quad (3.27)$$

производная  $\tilde{e}'(\Psi)Q$  оператора  $\tilde{e}(\Psi)Q$  дается выражением

$$\tilde{E}^{\epsilon}(\psi) \phi h = - \int_{t^*}^t \omega^{\epsilon}(t-t') \phi(\psi(t'), E, \psi) e^{-\tilde{Z}(\psi)(t-t')} \tilde{E}^{\epsilon}(\psi) h \quad (3.28)$$

и справедливы оценки

$$\|\tilde{E}^{\epsilon}(\psi) \phi h\|_1 \leq \tilde{\Delta}(1+\tilde{\Delta}) \delta \frac{(1, \psi)}{(1, \tilde{Z} \psi)} \|h\|_1; \lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \|\omega_2(\psi, \phi, h)\|_1 / \|h\|_1 = 0, \quad (3.29)$$

где, очевидно,

$$\omega_2(\psi, \phi, h) = - \int_{t^*}^t \omega^{\epsilon}(t-t') \phi(\psi(t'), E, \psi) \omega^{\epsilon}(t-t') h - \sum_{n=2}^{\infty} (t')^n [\tilde{Z}^n(\psi) h + \omega(\psi, h)] \frac{(t-t')^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Аналогичную оценку,

$$\|\tilde{E}^{\epsilon}(\psi) \phi h\|_p \leq \Delta(1+\Delta) \delta \frac{(1, \psi)^0}{(1, \psi)_0} \frac{\|\tilde{Z}^{\perp} Q\|_p}{(1, \tilde{Z} \psi)_0} \|h\|_p, \quad (3.30)$$

можно получить и в общем случае, когда

$$\tilde{Z}^{\epsilon}(\psi) = \sum_{n,i} \theta_n^i(\psi, E) \frac{(1, \tilde{Z} \psi)_n^i}{(1, \psi)_n^i}, \quad \tilde{Z}^{\epsilon}(\psi) h = \sum_{n,i} \theta_n^i(\psi, E) \frac{(Z - \tilde{Z}, h)_n^i}{(1, \psi)_n^i} \quad (3.31)$$

- кусочно-постоянные функции переменных  $\psi, E$ . Здесь

$$(1, \dots)_0 = \min_{n,i} (1, \dots)_n^i, (1, \dots)_n^i = \max_{n,i} (1, \dots)_n^i, \Delta = \max_{n,i} \frac{\tilde{Z}_n^{\alpha_i} - \tilde{Z}_n^{\beta_i}}{\sum_{n,i} \theta_n^i}, \quad (3.32)$$

$\theta_n^i(\psi, E)$  - характеристическая функция множества  $\{\psi, E \in A_n^i\}$ .

Переписывая (3.21) в виде  $A\psi = \tilde{E}^{\epsilon}(\psi) \phi(\psi)$ , где

$$\phi(\psi+h) = \phi(\psi) + \phi'(\psi)h + \omega_2(\psi, \phi, h), \quad \lim_{\|h\|_1 \rightarrow 0} \|\omega_2(\psi, \phi, h)\|_1 / \|h\|_1 = 0, \quad (3.33)$$

$$\phi(\psi) = \phi + S\psi + [\tilde{Z}^{\epsilon}(\psi) - \tilde{Z}] \psi, \quad \phi'(\psi)h = Sh + \tilde{Z}^{\epsilon}(\psi)h\psi + [\tilde{Z}^{\epsilon}(\psi) - \tilde{Z}]h,$$

можно убедиться в том, что производная  $A'(\psi)$  оператора  $A$  даёт-ся выражением

$$A'(\psi)h = \tilde{E}^{\epsilon}(\psi) \phi(\psi)h + \tilde{E}^{\epsilon}(\psi) \phi'(\psi)h, \quad (3.34)$$

обобщаям обычное выражение для производной сложной функции, и

$$\|A'(\psi)h\|_1 \leq \delta(1+\Delta) \|A_2 + 2\omega + \Delta \frac{(1, \psi)^0}{(1, \psi)_0} \left[ (A_2 + \Delta) \frac{(1, \tilde{Z} \psi)}{(1, \tilde{Z} \psi)_0} + \frac{(1, \phi)}{(1, \tilde{Z} \psi)_0} \right] \|h\|_1, \quad (3.35)$$

где  $\delta, A_2$  - оценки предыдущих пунктов.

Так как  $\|A'(\psi)\|_1 \leq \delta A_2 < 1$  при  $\Delta = 0$ , то из (3.35) и положений, изложенных выше, следует, что при всех достаточно малых  $\Delta$  и  $\|\psi - \psi_0\|_1$  метод (3.22) будет сходящимся. Это означает, в свою очередь, что сходимость методов (2.34), (2.36) и (2.34), (2.37) (в обычном предположении о кусочной непрерывности

полного сечения  $\Sigma(\mathcal{K})$  от  $\mathcal{K} \in \mathcal{B}X(E_0, E^0)$ ) всегда может быть обеспечена за счёт достаточно детального разбиения  $\mathcal{B}X(E_0, E^0)$  на зоны и группы.

Что же касается проблемы подбора начального приближения  $\psi_0 > 0$ , то здесь можно отметить то очевидное обстоятельство, что этот выбор должен удовлетворять условию

$$Q + S\psi_0 + (\tilde{\Sigma}(\psi_0) - \Sigma)\psi_0 > 0 \quad (3.36)$$

ибо в противном случае не гарантируется положительность  $\psi$ .

5. Обратимся теперь к рассмотрению проблемы подбора источника. Пусть выполнены условия (3.2), (3.7) и константы вычислены по формулам (3.10) с весом  $\psi > 0$  решения задачи (3.1) при  $\varphi \equiv 1$ . Тогда уравнения (3.1), (3.9), (3.19) одновременно разрешимы и может быть поставлен вопрос о подборе источника  $\alpha$  в уравнениях (2.14),

$$\begin{aligned} \tilde{M}\psi &= \tilde{Q} + \alpha, \\ \tilde{M}\psi' &= Q' + (\tilde{C} - C)\psi - \alpha \end{aligned} \quad (3.37)$$

с целью сохранения чисел процессов (2.4). Последнее будет обеспечено при выполнении условий (2.10), которые в рассматриваемом случае  $\varphi \equiv 1$  вырождаются в условия

$$(\psi')_n^i = 0. \quad (3.38)$$

Если искать источник в виде (1.29)-(1.30),

$$\alpha = \alpha(\varphi) = \sum_{m,j} \alpha_m^j \theta_m^j(\mathcal{K}E) \varphi(\mathcal{K}E), \quad (\psi')_m^j = 0, \quad (3.39)$$

где  $\theta_m^j$  - характеристическая функция множества  $\mathcal{B}_m \times [E_j, E_{j+1}]$  то задача подбора источника сводится к задаче решения системы линейных алгебраических уравнений

$$(\psi')_n^i = (\psi \tilde{M}^{-1} [Q' - \alpha])_n^i = 0 \quad (3.40)$$

относительно коэффициентов  $\alpha_m^j$ , и она разрешима, если разрешима последняя задача. Здесь

$$\varphi' = Q' + (\tilde{C} - C)\psi, \quad (\psi')_n^i = 0. \quad (3.41)$$

Отметим, что процедура (3.39)-(3.40) аналогична процедуре Галёркина решения уравнения

$$\psi' = \tilde{M}^{-1} (Q' - \alpha) = 0, \quad (3.42)$$

когда искомое решение  $\alpha$  ищется в виде линейной комбинации (3.39) функций  $\varphi_m^j = \theta_m^j \varphi$  с финитным носителем, а коэффициенты  $\alpha_m^j$  определяются из условий (3.38) ортогональности невязки элементом  $\theta_n^i$  второй координатной последовательности. В плане этой аналогии особенностью данной задачи является тот факт,

что известно точное решение её:  $\alpha = \varphi'$ . Это обстоятельство может быть использовано в целях разработки приближённых методов учёта условий (3.38).

Таким образом, задача (3.39)-(3.40) всегда имеет решение  $\alpha = \varphi'$ . Это решение тривиально в том смысле, что если  $\alpha = \varphi'$ , то  $\psi' \equiv 0$ , а уравнения (3.37) трансформируются к уравнению (3.1) и, следовательно, многогрупповой подход в данном случае фактически отсутствует. Поэтому представляют интерес нетривиальные решения задачи, когда  $\alpha \neq \varphi'$ . Вводя функции  $\psi_{ni}$ , удовлетворяющие уравнению

$$M^{*} \psi_{ni} = \theta_n^i \quad (3.43)$$

и переписывая (3.40) с учётом (3.18) в виде

$$\sum_{m,j} (\psi_{ni}, \varphi_{mj}^j) \alpha_m^j = (\psi_{ni}, \varphi'), \quad \varphi_{mj}^j = \theta_m^j \varphi, \quad (3.44)$$

приходим к выводу о том, что проблема существования нетривиальных решений задачи (3.39)-(3.40) сводится к проблеме подбора базисных функций  $\varphi_{mj}^j$ , обеспечивающего разрешимость системы уравнений (3.44), т.е. обеспечивающего, например, невырожденность смешанной матрицы Грама  $\|(\psi_{ni}, \varphi_{mj}^j)\|$  и т.д.

Возможность такого подбора не вызывает, вообще говоря, сомнений и для каждого данного выбора базисных функций  $\varphi_{mj}^j$  может быть проверена в соответствии с [7], стр.241. Если же речь идёт лишь об установлении факта разрешимости в принципе обсуждаемой проблемы перераспределения потока нейтронов между решениями  $\psi, \psi'$  уравнений (3.37) с целью сохранения чисел процессов за счёт подбора источника  $\alpha$  типа (1.29)-(1.30), то в этом случае достаточно положить

$$\alpha = \sum_{m,j} \alpha_m^j \psi_{mj}^-, \quad \psi_{mj}^{\pm} = (\psi_{mj} \pm U \psi_{mj})/2, \quad (3.45)$$

ибо можно показать, что  $\psi_{mj}^-$  - линейно-независимые функции,  $(\psi_{mj}^-)_n = 0$ ,  $(\psi_{mj}^+, \psi_{ni}^-) = 0$ ,  $m, n = 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 1, 2, \dots, I$ , так что уравнение (3.44) переходит в уравнение

$$\sum_{m,j} (\psi_{ni}, \psi_{mj}^-) \alpha_m^j = (\psi_{ni}, \varphi') \quad (3.46)$$

с положительно определённой матрицей Грама ([7], стр. 241), которое всегда разрешимо.

Таким образом, в рамках сделанных предположений задача подбора источника типа (1.29)-(1.30) с целью удовлетворения условий (3.38) всегда разрешима. Отметим, что вопрос о разрешимости проблемы подбора источника типа (1.31) остаётся открытым.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена задача о построении алгоритмов подбора групповых гомогенизированных констант, обеспечивающих для заданного группового разбиения сохранение определённой совокупности функционалов типа  $K_{\alpha}$ , чисел процессов, потоков и токов при переходе от исходной задачи к многогрупповой с любой наперёд заданной точностью, лимитируемой, разумеется, погрешностями ядерных данных. Такая постановка вопроса приводит к неуниверсальным системам констант, своим для каждой данной задачи, и в настоящее время не является общепринятой. Однако в недалёком будущем, по мере роста возможностей ЭВМ, положение может, по-видимому, измениться. Кроме того, такого рода постановка задачи уже сейчас правомерна при рассмотрении вопросов свёртки групп, когда, например, требуется перейти от решения многогрупповой задачи к решению малогрупповой задачи, сохраняя требуемую совокупность функционалов.

В §1 излагаются некоторые сведения о возможных путях решения рассматриваемой задачи, констатируется факт принципиальной неоднозначности выбора структуры многогрупповой задачи и намечаются пути использования этого обстоятельства в целях расширения круга сохраняемых функционалов. Учёт неоднозначности структуры многогрупповой задачи, являющийся одной из отличительных черт данной работы, приводит к нетрадиционному рассмотрению вопросов выбора числа и вида моментов в разложении индикатрисы рассеяния, коэффициентов диффузии и т.п., когда соответствующие величины выбираются в зависимости от выбора весовой функции  $\mathcal{J}$  из условия минимизации погрешности групповой аппроксимации.

В §2 конструируются конкретные алгоритмы итерационного подбора групповых гомогенизированных констант, особенностью которых является наличие процедур подбора некоторых "источников" (или граничных условий), а также использование идеи расщепления исходной задачи на многогрупповую задачу и задачу для погрешности  $\psi'$  многогрупповой аппроксимации. Отметим, что алгоритмы §2 являются также некоторыми алгоритмами гомогенизации, вытекающими из иных, вообще говоря, принципов, нежели алгоритмы работ [10-13].

В §3 рассмотрены некоторые вопросы математического обоснования алгоритмов §2 подбора групповых гомогенизированных констант.

Автор признателен Г.Я.Румянцеву за полезные замечания.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Марчук Г.И. Методы расчёта ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961.
2. Николаев М.И. и др. Многогрупповое приближение в теории переноса нейтронов. М.: Энергоатомиздат, 1984.
3. Шихов С.Б., Троянский В.Е. Теория ядерных реакторов. Газокинетическая теория. М.: Энергоатомиздат, 1983.
4. Шихов С.Б. Вопросы математической теории реакторов. М.: Атомиздат, 1973.
5. Владимиров В.С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Труды Математического института им. В.А.Стеклова, *ЛХ/*, М.: Изд-во АН СССР, 1961.
6. Гермогорова Т.А. Обобщённые решения краевых задач для уравнения переноса. - "ЖВМ и МЭ", 1969, т.9, №3, с.605.
7. Красносельский М.А. и др. Приближённое решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
8. Функциональный анализ / Под ред. С.Г.Крейна. М.: Наука, 1972.
9. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа к теории операторов. М.: "МИР", 1983.
10. Григорьев И.С., Новиков В.М. Диффузия нейтронов в гетерогенных средах. М.: Атомиздат, 1966.
11. Галанин А.Д. Теория гетерогенного реактора. М.: Атомиздат, 1971.
12. Румянцев Г.Я. Линейно-алгебраическая теория переноса нейтронов в плоских решётках. М.: Атомиздат, 1979.
13. Laletin N.I. Basic Principles for Developing Equations for Heterogeneous Reactors A Modification of Homogenization Method, NSE, v.85, N2, October 1983, p. 133.



Технический редактор Н.П.Герасимова.

---

Подписано к печати 8.02.1985 г. Т-06620 Формат 60x90 1/16

Офсетная печать Усл.п.л. 2 Уч.-изд.л. 1,5 Тираж 85 экз.

Цена 23 коп. ФЭИ-1668 Индекс 3624 33 / 3

---

Отпечатано на ротационте ФЭИ, г. Обнинск.

23 коп.

Индекс 3624

**Принципы итерационного подбора групповых гомогенизированных констант.**

**ФЭИ-1668, 1985, 1-31.**