ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ
ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ СССР
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

И Ф В Э 85–122
ОТФ

А.Н.Валл

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВАЯ ПРИРОДА ПРИЦЕЛЬНОГО ПАРАМЕТРА И УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ АДРОНОВ

Серпухов 1985

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ
ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ СССР

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

И Ф В Э 85-122
ОТФ

А.Н.Валл*)

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВАЯ ПРИРОДА ПРИЦЕЛЬНОГО ПАРАМЕТРА И УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ АДРОНОВ

---

*) Иркутский государственный университет
им. А.А.Жданова

Серпухов 1985

УДК 539.12.01 М-24

Аннотация

Валл А.Н. Теоретико-групповая природа прицельного параметра и упругое рассеяние адронов: Препринт ИФВЭ 85-122. – Серпухов, 1985. – 15 с., библиогр.: 12 назв.

На основе классических выражений компонент вектора максимального сближения двух свободных бесспиновых частиц получена и исследована группа прицельного параметра. Вычислены матричные элементы основной непрерывной унитарной серии, являющиеся естественным базисом разложения упругой амплитуды. Показано, что неунитарная конечномерная серия группы $SO(2,1)$ может описывать процесс рассеяния с сохранением прицельного параметра. Вычислена и исследована соответствующая упругая амплитуда.

Abstract

Vaal A.N. Theoretical Group Nature of Inpact Parameter and Hadron Elastic Scattering. Preprint IHEP 85-122. - Serpukhov, 1985. - p. 15, refs.: 12.

The impact parameter group has been obtained and studied on the basis of classical expressions for the vector components of minimal distance between two free spinless particles. The matrix elements of the main continuous unitary series have been calculated, they are quite a natural basis for elastic amplitude decomposition. The final dimensional nonunitary series of the SO(2.1) group is shown to be able to describe scattering processes with impact parameter conservation. The corresponding elastic amplitude has been calculated and studied.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что при феноменологическом описании взаимодействия адронов в области высоких энергий наиболее естественным является язык прицельного параметра, позволяющий выразить амплитуду рассеяния через геометрические характеристики адрона, такие как радиус, неупругая функция перекрытия и связанные с ней размеры адрона и т.д. Формально переход к описанию в плоскости прицельного параметра производится через "высокоэнергетическую" замену:

$$P_\ell(\cos\theta) \to J_0(\rho\, q_\perp), \; \rho q = \ell, \; q_\perp = q\sin\theta. \qquad (1)$$

Такая замена предполагает малые углы $\theta \sim 0$ и большие прицельные параметры ρ. Физически это соответствует слабому искажению падающей плоской волны.

В связи с переходом (1) возникают следующие вопросы:

а) Классическое соотношение $\rho q = \ell$ устанавливает соответствие между относительным орбитальным моментом ℓ и прицельным параметром ρ. Важным здесь является то, что орбитальный момент ℓ, кроме номера парциальной волны, несет еще одну существенную смысловую нагрузку. Он является собственным значением оператора Казимира группы вращения $O(3)$. Что можно сказать о групповой природе прицельного параметра ρ? Можно ли его связать с оператором Казимира какой-либо группы? Определив групповую природу прицельного параметра, мы тем самым вскроем его квантовую природу. Вопрос, насколько она существенна в области высоких энергий, связан со спектром оператора Казимира и будет исследован ниже.

Можно надеяться также, что объединение группы прицельного параметра с группой вращения приведет к более широкой группе с динамическими свойствами аналогично динамической группе $O(4)$ для атома водорода. Это позволило бы понять некоторые стороны динамики адронов, связанные с сохранением прицельного параметра. На наш взгляд, выделение из амплитуды той ее части, которая соответствует рассеянию на керне (если он существует), связано с построением инвариантной относительно преобразований группы прицельного параметра амплитуды рассения.

б) Преобразование (1) приводит к разложению амплитуды упругого рассеяния в интеграл Фурье-Бесселя с коэффициентами $f(\rho, q)$, зависящими от прицельного параметра ρ и импульса q. Вопрос заключается в том, насколько правомочно продолжать это представление в область больших углов. Очевидно, что при этом приходится решать две независимые проблемы. Это, во-первых, возможность разложения физической амплитуды $T(s, t)$ в интеграл Фурье-Бесселя, во-вторых, возможность интерпретации коэффициентов разложения $f(\rho, q)$ как матричных элементов перехода в состояние с прицельным параметром ρ в случае, когда угол существенно не малый, т.е. в области малых ρ – именно эта область ρ канонически сопряжена с областью больших углов. Если первая проблема является чисто математической, то вторая однозначно связана с ответом на вопрос: является ли функция Бесселя $J_0(\rho q)$ собственной функцией оператора прицельного параметра, или это есть приближение малых углов. Ответ на этот вопрос требует физически корректного определения прицельного параметра. Необходимость такой постановки вопроса связана, во-первых, с естественным требованием, чтобы коэффициенты разложения имели физическое содержание. Во-вторых, это вопрос экстраполяции в область больших углов и тесно связанный с ним вопрос о квантовой природе прицельного параметра.

В этой работе мы на основе классических выражений для векторов максимального сближения и после их квантования получаем алгебру генераторов группы $SO(3.1)$. Ее подгруппа $SO(2.1)$ определяет группу прицельного параметра, в которой он играет роль оператора Казимира. Эта группа некомпактная, обладает непрерывной основной серией унитарных представлений, описывающих свободную частицу с определенным прицельным параметром и дискретной конечномерной серией неунитарных представлений. Ее интерпретация в конфигурационном пространстве требует доопределения в сингулярной точке. Мы показываем, что физически это доопределение означает выделение из полной волновой функции падающей волны, после чего оставшаяся часть описывает распределение по импульсам рассеянной волны, т.е. амплитуду рассеяния. Это и есть $SO(2.1)$-инвариантная амплитуда, причем номер представления, в котором лежит волновая функция, может быть интерпретирован как число системы двух сталкивающихся адронов.

1. Рассмотрим две свободные бесспиновые частицы одинаковой массы, которые движутся с произвольными начальными импульсами $P_i^{(1)}$ и $P_i^{(2)}$. Расстояние $D(t)$ между частицами в любой момент времени t определяется компонентами вектора $\Delta r_i(t)$:

$$\Delta r_i(t) = 2\,\frac{q_i}{E}\,(t - t_o) + \xi_i\,(t_o) \qquad (2)$$

и равно $D^2(t) = (\Delta r \cdot \Delta r)$. Здесь $E = (q^2 + m^2)^{1/2}$, $q_i = \frac{1}{2}\left(P_i^{(1)} - P_i^{(2)}\right)$ – компоненты импульса в системе центра масс; $\xi_i = x_i^{(1)}(t) - x_i^{(2)}(t)$ – относительная координата. В какой-то момент времени $t = \tau$ расстояние $D(t)$ будет иметь минимальное значение. Это расстояние мы будем называть расстоянием максимального сближения двух свободно движущихся частиц. Время τ определяется экстремальным условием

$$\frac{d}{dt}\,(\Delta r\,(t) \cdot \Delta r\,(t)) = 0 \quad \text{при} \quad t = \tau. \qquad (3)$$

Используя соотношение (2), получим отсюда

$$\tau = t_o - E(\xi \cdot q)(2q^2)^{-1}. \qquad (4)$$

Подставляя это значение в (2), мы получим классическое выражение компонент вектора максимального сближения d_i

$$d_i \equiv \Delta r_i\,(t = \tau) = -\frac{q_i}{q^2}\,(\xi \cdot q) + \xi_i \qquad (5)$$

или в более компактной форме:

$$d_i = \frac{1}{q^2}\,\epsilon_{ijk} q_j L_k. \qquad (6)$$

Это выражение мы примем за основу при построении оператора квадрата прицельного параметра. Классический прицельный параметр определяется как длина вектора максимального сближения при условии, что этот вектор лежит в плоскости, перпендикулярной к оси z. Таким образом, квадрат прицельного параметра есть $\rho^2 = d^2 = d_1^2 + d_2^2$ при условии, что $d_3 = 0$. Переход к квантово-механическому описанию заключается теперь в стандартной процедуре замены "С"-чисел в соотношении (6) соответствующими операторами.

2. Мы будем использовать канонические коммутационные соотношения между относительным импульсом q_i и относительной координатой ξ_i, $[\xi_i\, q_j]_{\sim} = i\delta_{ij}$. Построим вспомогательные самосопряженные операторы $\tilde{d}_i$:

$$\tilde{d}_i = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\{q_j\, L_k\}_+ = \epsilon_{ijk} q_j L_k - iq_i. \qquad (7)$$

Непосредственным вычислением можно получить, что

$$[\tilde{d}_i\, q^2] = 0. \qquad (8)$$

Поэтому в дальнейшем все операторы будем определять на пространстве состояний $|\psi\rangle$, удовлетворяющих следующему условию:

$$q^2|\psi\rangle = Q^2\,|\psi\rangle, \qquad (9)$$

где Q^2 – квадрат импульса в системе центра масс. Соотношения (7) и (8) позволяют нам ввести эрмитовы операторы d_i:

$$d_i = \frac{1}{q^2}\tilde{d}_i = \frac{1}{q^2}(\epsilon_{ijk} q_j L_k - i q_i), \tag{10}$$

которые в классическом пределе $\hbar \to 0$ переходят в величины (6). Таким образом, это есть искомые операторы компонент вектора максимального сближения. Используя канонический коммутатор, непосредственным вычислением устанавливается следующее:

$$[d_i d_j] = -\frac{1}{q^2}\epsilon_{ijk} L_k, \quad [L_i L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k, \quad [d_i L_j] = i\epsilon_{ijk} d_k,$$

$$[d_i q^2] = 0, \quad [d_i q_j] = i\left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}\right), \tag{11}$$

$$[d_i, q_k q_j] = i\left(q_k \delta_{ij} + q_j \delta_{ik} - 2\frac{q_i q_j q_k}{q^2}\right),$$

. . . . и т.д.

Эти соотношения определяют алгебру компонент прицельного параметра. Мы видим, что в отличие от существующих подходов /1,2/ операторы d_i не коммутируют между собой, а также они не являются канонически сопряженными величинами к импульсам q_i. Поэтому, как будет видно ниже, разложение амплитуды как функции на группе, задаваемой алгеброй (11), существенно отличается от известных разложений во всей области изменения импульсов. Эти различия и приводят в конечном счете к тому, что алгебра (11) реализуется не на функциях Бесселя, а на функциях конуса, которые в пределе малых углов переходят в функции Бесселя. Из соотношений (11) видно, что шесть генераторов d_i и L_j образуют замкнутую алгебру. Это алгебра $SO(3,1)$. Нетрудно убедиться, что единственным нетривиальным оператором Казимира является q^2.

Как было отмечено выше, классический квадрат прицельного параметра есть $\rho^2 = d_\perp^2$ при условии, что $d_3 = 0$. Однако из (11) следует, что невозможно одновременно диагонализовать величины $d_\perp^2$ и d_3. Чтобы корректно определить квадрат прицельного параметра, в данном случае заметим, что три оператора d_1, d_2 и L_3 образуют алгебру $SO(2,1)$ с нетривиальным оператором Казимира. Действительно, имеем

$$[d_1\, d_2] = -\frac{i}{d^2} L_3, \quad [d_1\, L_3] = -id_2,$$
$$[d_2\, L_3] = id_1, \quad K = d_\perp^2 - \frac{1}{q^2} L_3^2, \quad [d_i\, K] = 0. \tag{12}$$

Свойства этой алгебры подробно изучены и представлены в монографии[3]. Эта алгебра обладает непрерывной серией (основная серия) и дискретной бесконечномерной серией унитарных представлений в пространстве квадратично-интегрируемых функций. Она обладает еще конечномерной серией неунитарных представлений, которые будут играть в нашем рассмотрении важную роль. Оператор Казимира этой группы, определенный в (12), является естественным обобщением понятия квадрата прицельного параметра на квантово-механический случай. Таким образом, мы определим оператор $K = d_\perp^2 - \frac{1}{q^2} L_3^2$ как оператор квадрата прицельного параметра. При этом остается свойство $[Kd_3] \neq 0$. Поэтому вырождение спектра оператора K мы будем снимать не диагонализацией d_3, а диагонализацией L_3, так как $[KL_3] = 0$. Нетрудно показать, что состояние с определенным значением $K|\psi\rangle = \rho^2 |\psi\rangle$ физически соответствует тому, что столкновение произошло на расстоянии $R \geqslant \rho$ (так как мы не можем зафиксировать d_3).

В случае, когда рассеиваются две бесспиновые частицы, различные значения L_3 соответствуют различной ориентации оси z по отношению к плоскости движения частиц. В частности, при $L_3 = 0$ ось z лежит в этой плоскости. Таким образом, полная система уравнений, определяющих состояние с заданным квадратом прицельного параметра ρ^2, имеет следующий вид:

$$q^2 |\psi\rangle = Q^2 |\psi\rangle, \quad K|\psi\rangle = \rho^2 |\psi\rangle, \quad L_3 |\psi\rangle > 0, \quad K = d_\perp^2 - \frac{1}{q^2} L_3^2. \tag{13}$$

Из первого уравнения имеем для решения в импульсном представлении

$$\psi(q) = \delta(q^2 - Q^2)\, \Phi(\theta, \phi), \tag{14}$$

где θ, ϕ – угловые переменные в сферической системе координат, а из последнего – что $\Phi(\theta, \phi)$ от угла ϕ не зависит. Регулярным решением в непрерывном спектре является функция конуса[4]

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} P_{-\frac{1}{2} + i\mu}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right), \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2},$$
$$\mu = \left(Q^2 \rho^2 - 1/4\right)^{\frac{1}{2}}, \quad Q^2 \rho^2 \geqslant \frac{1}{4}. \tag{15}$$

Физический смысл условия $\rho^2 \geqslant 1/4\, Q^2$ заключается в том, что состояние с прицельным параметром, меньшим комптоновской длины инвариантной массы, не может быть реализовано. Это находится в соответствии с обычными квантово-механическими представлениями и может рассматриваться как соотношение неопределенности между инвариантной массой и прицельным параметром. Разложение амплитуды как функции на группе по решениям (15) сводится к разложению в интеграл Меллера-Фока /5/ и имеет следующий вид:

$$\cos\theta\, T^{\pm}(\cos\theta) = \int_0^{\infty} P_{-1/2+i\mu}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right) f^{\pm}(\mu)\, d\Omega_\mu,$$

$$f^{\pm}(\mu) = \int_0^1 T^{\pm}(z) P_{-1/2+i\mu}\left(\frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z}, \qquad (16)$$

$$0 \leqslant z \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad d\Omega_\mu = \mu\, \mathrm{th}(\pi\mu)\, d\mu.$$

$T^{\pm}(\cos\theta)$ – четная и нечетная части амплитуды. Появление сигнатуры является следствием квантования прицельного параметра и впервые было введено в работе /6/. Переход к представлению амплитуды через интеграл Фурье-Бесселя получается из (16), если воспользоваться для функции конуса разложением Фока /5/:

$$P_{-1/2+i\mu}(\mathrm{ch}\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\mathrm{sh}\theta}}\left\{J_0(\mu\theta) + \frac{1}{8\mu}\left(\mathrm{cth}\theta - \frac{1}{\theta}\right)J_1(\mu\theta) + \ldots\right\}. \qquad (17)$$

Удерживая в (16) первый член, получим из (15)

$$f(s,\mu) \underset{\mu\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{q^2}\int_0^{\infty} q_\perp J_0(\rho q_\perp) T(q_\parallel, q_\perp)\, dq_\perp. \qquad (18)$$

Таким образом, представления (15) и (17) при одной и той же модели профильной функции $f(s,\mu)$ будут приводить к различным результатам в области больших углов $q_\perp \sim Q$ и совпадать при $q_\perp \sim 0$ (малые углы). Как будет видно ниже, это есть отражение геометрических свойств пространства перпендикулярного импульса, для которого операторы d_i являются естественными операторами движения. При этом область пространства $q_\perp \sim 0$ оказывается евклидово-плоской, а область $q_\perp \sim 0$ – пространством постоянной кривизны. Обобщение на случай частиц с произвольным спином делается заменой в определении операторов d_i орбитального момента на полный момент /7/.

3. Операторы d_i, заданные соотношением (10), определяют движения пространства перпендикулярного импульса. Действительно, рассмотрим инфинитезимальные преобразования

$$q_j' = e^{-i(\lambda d)} q_j e^{i(\lambda d)} = q_j + \lambda_j - \frac{q_j}{q^2}(\lambda q) + O(\lambda^2),$$
$$j = 1, 2; \quad (\lambda d) = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \qquad (19)$$

λ_i – параметры. Эти преобразования допускают инвариантный метрический тензор

$$G_{ik}(q_\perp) = \frac{Q^2}{q_3^2}\left(\delta_{ik} + \frac{q_i q_k}{q_3^2}\right), \qquad i, k = 1,2 \tag{20}$$

со свойствами

$$G_{ik}(q'_\perp)\, dq'_i\, dq'_k = Q_{ik}(q_\perp) dq_i\, dq_k. \tag{21}$$

Тензор Риччи, соответствующий этому иметрическому тензору, имеет вид

$$R_{km} = -\frac{1}{q_3^2}\left(\delta_{km} + \frac{q_k q_m}{q_3^2}\right). \tag{22}$$

Отсюда для скалярной кривизны будем иметь

$$R = -2/q^2. \tag{23}$$

Таким образом, двумерное многообразие, получаемое движениями (19), является пространством постоянной кривизны (отрицательной) с метрикой (20) и радиусом, задаваемым инвариантной массой сталкивающихся частиц. Инвариантный элемент площади в этом пространстве есть

$$d\sigma = \sqrt{G}\, dq_1\, dq_2, \tag{24}$$

где G – определитель метрического тензора:

$$G = (Q^2/q_3^2)^3.$$

Интегрируя бесконечномалые преобразования (19), получим все пространство перпендикулярного импульса из фиксированного элемента $q_\perp$:

$$q'_\perp = q_\perp \oplus \varkappa = \left\{\left(A + \frac{(\varkappa q_\perp)}{\varkappa^2}\right) + \left(1 - \frac{\varkappa^2}{Q^2}\right) q_\perp\right\}\left[1 + \frac{(\varkappa q_\perp)}{Q^2}\right]^{-1}, \tag{25}$$

где

$$A = 1 - (1 - \varkappa^2/Q^2)^{1/2}.$$

Операция $\oplus$ не является групповой, хотя обладает рядом групповых свойств. Причина, что она не образует группу, связана с тем, что произведение двух таких операций не сводится к такой же операции с новыми параметрами, а еще содержит дополнительный поворот пространства. Однако операция $\oplus$ допускает инвариантный элемент длины (21) и инвариантный элемент площади (24). Поэтому для любой функции, интегрируемой на группе, справедливо соотношение

$$\int \psi(q_\perp) d\sigma = \int \psi(q_\perp \oplus \varkappa) d\sigma. \tag{26}$$

4. Генераторы d_1, d_2, L_3, образующие группу прицельного параметра, переводят плоскость перпендикулярного импульса саму в себя. Непроводимое пространство собственных значений оператора Казимира этой алгебры является канонически сопряженным к пространству перпендикулярного импульса. Связь между этими пространствами в смысле фурье-трансформации осуществляется плоскими волнами, являющимися матричными элементами унитарных преобразований, генерируемых указанной алгеброй. Ввиду некоммутативности операторов d_i плоскость прицельного параметра ρ^2 не может строиться как многообразие собственных значений операторов d_1 и d_2. Ситуация здесь аналогична задаче о построении релятивистского конфигурационного пространства /8/. В этом случае роль операторов координаты играют генераторы движения импульсного пространства, реализованного на верхнем поле двухполостного гиперболоида $E^2 - q^2 = m^2$.

Аналогичные вычисления в нашем случае приводят к следующему выражению для плоской волны /9/:

$$\psi(q_\perp) = \frac{Q}{q_3}\left(\frac{Q + (nq_\perp)}{q_3}\right)^{-\frac{1}{2} \pm i\rho Q} . \tag{27}$$

Многообразие $\rho = n\rho$ интерпретируется как плоскость прицельного параметра. Аналогия с релятивистским конфигурационным пространством становится полной, если ввести новые переменные u_i

$$u_0 = Q/q_3 , \quad u_1 = q_1/q_3 , \quad u_2 = q_2/q_3 , \tag{28}$$

которые переводят сферу $Q^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$ в двухполостной гиперболоид $u^2 = u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 = 1$, причем передняя полусфера $q_3 > 0$ соответствует верхней поле гиперболоида. Если еще ввести изотропный вектор на конусе $k^2 = k_0^2 - k_1^2 - k_2^2 = 0$ с $k_0 = 1$, то волновую функцию (28) можно записать в следующем виде:

$$\psi(u) = u_0 (uk)^{-\frac{1}{2} \pm i\rho q} , \tag{29}$$

где скалярное произведение определено на метрике $(+ - -)$. Отвлекаясь от множителя u_0, мы видим, что функция $\psi(u)$ есть двумерная функция Шапиро частицы с $m^2 = 1$. Вопросы полноты и соответствующие преобразования с функциями $\psi(u)$ исследованы в общем виде в работах /10,11/. Мы приведем окончательный результат. Пусть

$$\Phi(\sigma, \phi) = \int f(n)(uk)^{\sigma} \frac{d^2 u}{u_0} , \tag{30}$$

где $\sigma = -1/2 + i\rho q$, $\frac{d^2 u}{u_0}$ — инвариантная мера на гиперболоиде, $(uk) = u_0 - (nu)$, $n_1 = \cos\phi$, $n_2 = \sin\phi$, а интегрирование ведется по всей верхней поле гиперболоида $u^2 = 1$. Тогда обратное преобразование имеет вид

$$f(u) = \frac{1}{i8\pi^2} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \sigma \operatorname{cth}\pi\sigma \int_0^{2\pi} d\phi \Phi(\sigma, \phi)(uk)^{-\sigma-1} d\sigma. \tag{31}$$

В следующем пункте при построении SO(2,1)-симметричной амплитуды рассеяния нам будет необходимо "узнавать" состояние свободной частицы на больших прицельных расстояниях μ. Используя асимптотическое выражение для функции конуса, получим/12/

$$P_{-\frac{1}{2} + i\mu}(\operatorname{ch}a) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\mu \operatorname{sh}a}} \sin(a\mu + \pi/4), \quad \mu \to \infty. \tag{32}$$

Для нас будет представлять интерес, когда частица летит почти перпендикулярно к оси z, т.е. $a \sim \frac{1}{\epsilon}$, $\epsilon \to 0$. В этом случае соотношение (34) имеет такой вид:

$$\operatorname{ch}a \, P_{-\frac{1}{2} + i\mu}(\operatorname{ch}a) \sim \frac{e^{\frac{1}{2}\epsilon}}{(\pi\mu)^{\frac{1}{2}}} \sin\left(\frac{\mu}{\epsilon} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{33}$$

Мы воспользуемся этим результатом в следующем пункте.

5. Квадрат импульса q^2 в системе центра масс двух сталкивающихся адронов остается неизменным при преобразованиях алгебры SO(2,1). Предположим, что существует взаимодействие, инвариантное относительно указанных преобразований. Это означает, что эволюция начального состояния ψ_0 происходит в соответствии с групповыми свойствами:

$$\psi(t) = \psi_0 + \delta\psi = \psi_0 + i(\lambda d)\psi_0, \tag{34}$$

где $\lambda(t)$ - параметры, зависящие от времени. Тогда единственно возможным оказывается взаимодействие "контактного" типа такое, чтобы q^2 сохранялся везде, а направление импульса изменялось бы в некоторых особых точках, которые могли бы играть роль точечных составляющих адрона. Эти интуитивные соображения реализуются естественным образом на неунитарных конечномерных представлениях группы SO(2,1). Матричные элементы этих представлений удовлетворяют уравнению

$$\left(d_\perp^2 - \frac{1}{Q^2} L_3^2\right)\psi = -\frac{n(n+1)}{Q^2}\psi$$
$$n = 0, 1, 2, \ldots \quad L_3\psi = m\psi, \quad |m| = 0, 1, \ldots n. \tag{35}$$

Таким образом, представление характеризуется номером n и оно $(2n+1)$-кратно вырождено. Прежде чем исследовать решения, проследим, как эрмитовые генераторы d_i приводят к неунитарным представлениям. Рассмотрим унитарное преобразование $u(\lambda) = \exp(i\lambda d)$. Оно обладает тем свойством, что, будучи примененным к постоянной превращает ее в функцию от λ, т.е. не оставляет ее инвариантной:

$$U(\lambda)\,1 = \left(1 + \frac{\mathscr{K} q}{Q^2}\right)^{-1}\left(1 - \frac{\mathscr{K}^2}{Q^2}\right), \qquad \mathscr{K} = n\lambda\,\mathrm{th}(\lambda/Q). \tag{36}$$

Сделаем над операторами d_1 и d_2 преобразование эквивалентности и перейдем к новым операторам D_i:

$$d_i \to D_i = \frac{q_3}{Q} d_i \frac{Q}{q_3} \equiv \cos\theta\, d_i \frac{1}{\cos\theta}\,. \tag{37}$$

Преобразованные генераторы D_i обладают следующим свойством:

$$e^{i(\lambda D)}\,1 = 1. \tag{38}$$

Физический смысл преобразования (37) заключается в том, что операторы D_i совместно с L_3 имеют тензорную размерность 3-вектора на группе $SO(2.1)$, в отличие от прежних операторов d_i. Оператор L_3 инвариантен относительно преобразований (37). В силу того, что это преобразование не является унитарным, полученные операторы D_i перестали быть эрмитовыми. Эта интересная связь между тензорной размерностью и эрмитовостью операторов трансляции приводит к тому, что конечномерные представления $SO(2.1)$ являются неунитарными. Действительно, преобразование

$$\exp(i\lambda D)\psi(q_\perp) = \Lambda(\lambda)\,\psi(q_\perp) \tag{39}$$

генерирует конечномерное представление $\Lambda(\lambda)$, зависящее от тензорной размерности $\psi(q_\perp)$. Инфинитезимальные преобразования имеют вид

$$\delta\Lambda = i\lambda_i D_i, \tag{40}$$

где D_i и L_3 матрицы, удовлетворяюшие условию

$$[D_1 D_2] = -\frac{i}{Q^2} L_3, \quad [D_1 L_3] = -iD_2, \quad [D_2 L_3] = iD_1. \tag{41}$$

Матрицы D_i не являются эрмитовыми и не соответствуют определенным динамическим величинам. Однако оператор Казимира $D_\perp^2 - \frac{1}{Q^2} L_3^2$ является эрмитовой матрицей и, как увидим дальше, его собственное значение может быть интерпретировано как число конституентов в системе сталкивающихся адронов. Действительно, регулярным решением уравнения (30) являются присоединенные полиномы Лежандра

$$\psi_{nm}(\theta, \phi) = \frac{1}{\cos\theta} P_n^m \left(\frac{1}{\cos\theta}\right) e^{im\phi}, \tag{42}$$

θ, ϕ – полярные углы, $n = 0,1,2,\ldots$, $|m| = 0,1,\ldots n$. Хорошо известным фактом является то, что все решения с $n = 2,3\ldots$ могут быть построены из фундаментального решения с $n = 1$ в виде тензорных произведений со шпуром, равным нулю:

$$\psi_n^{\alpha\beta\ldots\gamma} = \psi_1^\alpha \otimes \psi_2^\beta \otimes \ldots \otimes \psi_1^\gamma, \quad Sp\psi_n = 0 \tag{43}$$

Это позволяет интерпретировать число n как число составных частей системы двух адронов.

Какие состояния двухчастичной системы описывает решение (42)? Функция конуса (14) реализует представление в непрерывном спектре и описывает свободную частицу с прицельным параметром ρ. Если в этом решении перейти к конфигурационному пространству, то мы увидим стоячие волны. Для интерпретации решения (14) нужно также перейти к пространственному описанию. Однако сразу же убеждаемся, что соответствующие интегралы расходятся в точке $\theta = \pi/2$. Мы сталкиваемся с необходимостью доопределения волновой функции в дискретном спектре, чтобы фиксировать определенную картину процесса в конфигурационном пространстве, например, задавая способ обхода точки $\theta = \pi/2$. Такое доопределение – это выход за рамки исходной схемы, это нечто внешнее, дополнительное к уравнению (35). Это подтверждается тем, что после взятия интеграла регуляризация не снимается. Действительно, введем вместо решения (42) "регуляризованную" волновую функцию

$$\psi_n^{Reg}(z) = \theta\left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{z}\right)\frac{1}{z} P_n\left(\frac{1}{z}\right); \quad \begin{matrix} m = 0 \\ z = \cos\theta \end{matrix}. \tag{44}$$

Эта функция будет удовлетворять уравнению (35) везде, за исключением ϵ-окрестности точки $z = 0$. Вместо конфигурационного пространства рассмотрим более естественное при данном подходе пространство – плоскость прицельного параметра. Профильная функция, соответствующая $\psi_n^{Reg}(z)$, имеет вид

$$\psi_n^{Reg}(\mu) = \int^{1/\epsilon} P_n(t) P_{-\frac{1}{2}+i\mu}(t)dt. \tag{45}$$

Для исследования интеграла воспользуемся следующим известным представлением сферической функции:

$$P_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+1)}(2z)^\nu F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2} - \nu; \frac{1}{z}\right) + (\nu \to -\nu - 1) \tag{46}$$

$|z| > 1, \quad |\arg z| < \pi.$

Непосредственные вычисления интеграла (45), приводят к следующему результату. Оказывается, что $\psi_n^{Reg}(\mu)$ представляется в виде двух слагаемых, из которых первое нерегулярно при $\epsilon \to 0$, а второе регулярно, причем

$$\psi_n^{Reg}(\mu) = c_n \frac{e^{1/2\epsilon}}{(\pi\mu)^{1/2}} (\epsilon\mu)^{-n} \sin\left(\frac{\mu}{\epsilon} - \frac{\pi}{4}\right) + \psi_2(\mu), \tag{47}$$

где $\psi_2(\mu)$ от ϵ не зависит, c_n – некоторая константа. Сравнивая с (32), мы видим, что на больших прицельных расстояниях, когда $\mu \sim 1/\epsilon$, первое слагаемое в (47) описывает свободную частицу, падающую почти перпендикулярно оси z, а второе слагаемое – рассеянную волну. Таким образом, волновая функция (44) при $z>\epsilon$ описывает распределение по импульсам рассеяний частицы, причем угол рассеяния считается от направления, перпендикулярного оси z. Поэтому амплитуда рассеяния имеет вид

$$A_n(\theta) = \frac{c(Q)}{\sin\theta} P_n\left(\frac{1}{\sin\theta}\right), \tag{48}$$

где $c(Q)$ – неизвестная константа или, в терминах инвариантных переменных,

$$A_n(s, t) = \gamma(s) \frac{s}{\sqrt{ut}} P_n\left(\frac{s}{2\sqrt{ut}}\right). \tag{49}$$

Полученная нами амплитуда описывает $SO(2.1)$–симметричное взаимодействие адронов. Сохраняющимися величинами при таком взаимодействии будут величина импульса Q и величина n, являющаяся собственным значением оператора Казимира. Все представления строятся как n-кратное тензорное произведение фундаментального представления с $n = 1$. Это позволяет интерпретировать квантовое число n как число составляющих системы двух взаимодействующих адронов. Такая интерпретация согласуется с обычной партонной картиной и соответствующим ей автомодельным режимом дифференциального сечения. Действительно, из (49) имеем

$$\frac{d\sigma}{dt} = \beta(s) \frac{1}{ut} P_n^2\left(\frac{s}{2\sqrt{ut}}\right). \tag{50}$$

Мы написали здесь произвольный коэффициент $\beta(s)$, так как нам неизвестна нормировка амплитуды. В области передач, где мы можем считать, что

$$P_n\left(\frac{s}{2\sqrt{ut}}\right) \sim \left(\frac{s}{t}\right)^{n/2}. \tag{51}$$

Поэтому для сечения в этой области получим

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim 1/t^{n+1}.$$

Если представить $n = n_A + n_B$ и считать n_A и n_B числом валентных кварков частиц A и B, то получим $n + 1 = 5,6,7$ соответственно для мезон-мезонного, мезон-барионного и барион-барионного рассеяния. В общем же случае такая интерпретация не обязательна в нашей модели, так как n характеризует всю двухчастичную систему в целом и должно подбираться из эксперимента. Взаимодействие, нарушающее SO(2,1)-симметрию, должно перемешивать мультиплеты между собой. Можно представить ситуацию, когда это нарушение слабое, тогда соответствующая амплитуда будет иметь вид

$$A_n = \sum_m c_n(m) \frac{1}{\sin\theta} P_m\left(\frac{1}{\sin\theta}\right), \qquad (52)$$

причем функция распределения $c_n(m)$ по m будет иметь пик при $n = m$. В этом случае можно говорить о валентных партонах и о "морских" партонах.

В заключение отметим, что предложенный нами феноменологический подход к упругим адронным взаимодействиям допускает обобщение на случай произвольного спина, содержит естественный механизм нарушения SO(2,1)-симметрии в рамках группы SO(3,1) (включение генератора d_3) и допускает "сход" с поверхности $q^2 = Q^2$, позволяющий вскрыть зависимость не только от угла, но и от энергии s.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андрианов А.А. – ТМФ, 1973, т.17, с.407.
2. Huszar M. – Nuovo Cim. 1976, v.31A, p.297.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования. – М.: Наука, 1974.
4. Валл А.Н., Макеев Н.А. – ЯФ, 1978, т.27, с. 588.
5. Фок В.А. – ДАН СССР, 1943, т.39, с. 7.
6. Elvekjaer F., Petersen T.L. – Preprint TH 1971, CERN, February 3, 1975.
7. Бараховский В.В., Валл А.Н. – Препринт 10-80, СибИЗМИР, Иркутск, 1980.
8. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.А., Скачков Н.Б. – ЭЧАЯ, 1972, т.2, с.3.
9. Валл А.Н. – ЯФ, 1978, т.28, №4 (10), с.1091.
10. Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. – М.: Физматгиз, 1963.
11. Виленкин Н.Я., Смородинский Я.А. – ЖЭТФ, 1964, т.46, №5.
12. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. – М.: ГИ ФМЛ, 1963.

Рукопись поступила 23 мая 1985 года.

А.Н.Валл.

Теоретико-групповая природа прицельного параметра и упругое рассеяние адронов.

Редактор В.В.Герштейн. Технический редактор Л.П.Тимкина.
Корректор Т.Д.Галкина.

Подписано к печати 05.06.1985 г. Т-13603. Формат 60x90/16.
Офсетная печать. Печ.л. 0,94. Уч.-изд.л. 1,08. Тираж 250.
Заказ 917. Индекс 3624. Цена 16 коп.

Институт физики высоких энергий, 142284, Серпухов Московской обл.

Цена 16 коп. Индекс 3624

ПРЕПРИНТ 85-122, ИФВЭ, 1985