ИТЭФ 86 – 185

ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

Н.В.СТЕПАНОВ

МЕТОД МНОГОКРАТНЫХ ПРОДОЛЖЕНИЙ И СИЛЬНОРЕГУЛЯРНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Препринт

Москва – ЦНИИатоминформ – 1986

УДК 517

[illegible] ОПЕРАТОРОВ: Препринт [illegible]

Н.В.Степанов – М.: ЦНИИатоминформ, [illegible]

How one can extract [illegible] nonperturbative results? In this paper [illegible] possible way is to use the method of [illegible] We determ the strong [illegible] spaces and [illegible] rems for relatively [illegible] regular one. The strong [illegible] general. Some criteria of strong regularity [illegible]

[illegible]

I. ВВЕДЕНИЕ

В приложениях часто возникает проблема доказательства устойчивости свойств операторного семейства вида $C_\lambda = A + \lambda B$, где A, B – линейные операторы, λ – числовой параметр. Для малых λ такие задачи решаются с помощью теории возмущений. Получение непертурбативных результатов обычно связано с гораздо бо́льшими трудностями. В связи с этим представляется перспективным простой метод, который мы далее будем называть методом многократных продолжений (м.м.п.), аналогичный методу аналитического продолжения. Суть м.м.п. заключается в том, что доказательство устойчивости данного операторного свойства для больших значений параметра проводится за несколько шагов, на каждом из которых возмущение уже можно считать малым. Очевидно, что м.м.п. будет работать далеко не во всех задачах, для этого нужно накладывать некоторые ограничения на возмущающий оператор B, которые, вообще говоря, могут быть разными для различных задач.

В этой работе мы введём свойство сильной регулярности (с-регулярности) возмущений и покажем, что некоторые классические теоремы устойчивости для относительно ограниченных возмущений остаются в силе, если свойство малости возмущения заменить на свойство сильной регулярности, при этом сильно регулярные возмущения уже не обязательно малы; и обсудим также один простой критерий с-регулярности, связанный со свойством замкнутости.

В доказательствах будет систематически использоваться м.м.п.

Обозначения и определения

Пусть А -линейный оператор из сепарабельного банахова пространства X в *сепарабельное банахово пространство* $Y\ (A:(X\to Y))$, тогда соответственно, $A\in B_0(X,Y), B(X,Y), \mathcal{B}_0(X,Y), \mathcal{B}(X,Y)$, если А -компактен, ограничен, замыкаем, замкнут; $\bar{A}$ -замыкание, если $A\in \mathcal{B}_0(X,Y)$. В случае $A:(X\to X)$ второй индекс опускается. Далее, $D(A)=\{u\in X/\ \|Au\|<\infty\}$ - область определения А, $R(A)=\{v\in Y/\ v=Au, u\in D(A)\}$ - область значений, $nul(A)=\{u\in D(A)/\ Au=O_Y\}$ -нульпростанство, $R_A(\mu)=(A-\mu)^{-1}$ -резольвента А, $P(A)=\{\zeta\in C/\ R_A(\zeta)\in B(X,X)\}$ - *резольвентное множество*. $\Theta(A)=\{\xi\in C/\ \xi=(Au,u), \|u\|=1\}$ - числовая область значений оператора в гильбертовом пространстве (ниже в тексте линейные операторы будем называть просто операторами). Все используемые нами пространства определений - пространства над С, поэтому имеется взаимно однозначное соответствие между полуторалинейными $a(u,v)$ и квадратичными $a(u)=a(u,u)$ формами (далее мы будем называть такие объекты просто формами). Для формы a $D(a)$ - область определения, $\Theta(a)=\{\xi\in C/\ \xi=a(u), u\in D(a), \|u\|=1\}$ -числовая область значений.

Определение I. /I/

Оператор (форма) называется секториальным, если $\Theta(A)(\Theta(a))\subset \{\xi/\ |\arg(\xi-\gamma)|\le\varphi, \gamma\in R, 0\le\varphi<\pi/2\}$ и м-секториальным, если он также не имеет собственных секториальных продолжений. Все остальные необходимые определения вводятся в основном тексте. Мы придерживаемся обозначений, принятых в /I/.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. Во втором разделе приводятся необходимые для дальнейшего сведения об относительно ограниченных операторах и формах и определяется сильная регулярность возмущений. Третий раздел посвящён доказательству устойчивости замкнутости для с-регулярных возмущений и обсуждению критерия с-регулярности, связанного со свойством замкнутости. В четвёртом разделе рассматривается связь с-регулярности и голоморфности семейств операторов и форм. В остальных разделах мы рассматриваем устойчивость самосопряжённости, свойства "порождать квазиограниченную полугруппу", свойства "иметь компактную резольвенту", используя полученные в первых четырех разделах результаты о сильнорегулярных возмущениях.

2. Относительная ограниченность и сильная регулярность операторов и форм

При построении теории возмущений неограниченных операторов и форм одной из основных проблем является определение подходящего критерия малости. Мы будем использовать не самое общее, но широко применяемое определение малости возмущения, основанное на понятии относительной ограниченности /I,2/ .

Определение 2

Оператор $B:(X\to Y)$ ограничен относительно оператора $A:(X\to Z)$,

если:

I) $D(A)\subset D(B)$

2) $\exists\, a,b\geq 0 \,/\, \|Bu\|\leq a\|u\| + b\|Au\| \;\forall u\in D(A)$ (I)

Нижняя грань всех таких b , для которых выполняется (I), называется А -границей оператора B . Условие (I) эквивалентно условию $\|Bu\|^2\leq a^2\|u\|^2 + b^2\|Au\|^2$ (2)

Аналогично определяется относительная ограниченность форм в гильбертовом простанстве. Форма t ограничена относительно s ,

если:

I) $D(s)\subset D(t)$

2) $\exists a, b \geq 0 \ / \ |t(u)| \leq a\|u\|^2 + b|S(u)| \quad \forall u \in D(S)$ (3)

Многие свойства операторов и форм устойчивы при их относительно ограниченных возмущениях, если граница достаточно мала. В частности, устойчиво и свойство относительной ограниченности.

Лемма I. /I/

Пусть оператор B ограничен относительно оператора A с A-границей b, тогда для $\forall\lambda \,/\, |\lambda| < 1/b$ оператор T, ограниченный относительно A, ограничен и относительно операторов $C_\lambda = A + \lambda B$, причем его C_λ-граница не превосходит $b_A/(1-|\lambda| b)$, где b_A – его A – граница.

Аналогичный результат справедлив и для форм.

По аналогии со свойством относительной ограниченности, мы определим свойство сильной регулярности (с-регулярности).

Определение 3

Оператор (форма) B с-регулярен относительно оператора (формы) A на множестве $S \subset C$, если для $\lambda \in S$ оператор (форма) B ограничен относительно оператора (формы) $C_\lambda = A + \lambda B$.

Обозначим через S_{con} максимальную связную окрестность нуля множества S. Как будет показано ниже, некоторые теоремы устойчивости, справедливые для относительно ограниченных возмущений, легко переносятся с помощью метода мультипродолжений на случай с-регулярных возмущений.

Замечание I

Из леммы I следует: I) Любое относительно ограниченное возмущение с-регулярно по крайней мере в малой окрестности нуля; 2) S всегда открытое подмножество C .

3. Устойчивость замкнутости и критерий с-регулярности, связанный с этим свойством

Свойства замыкаемости и замкнутости устойчивы при относительно ограниченных возмущениях. Справедлива следующая теорема.

Теорема I. /I/

Пусть A, B -операторы из $X \to Y$, причем B A - ограничен с А -границей b. Для $\forall \lambda / |\lambda| < 1/b$ операторы $C_\lambda = A + \lambda B \in b_0(X,Y)$ тогда и только тогда, когда $A \in b_0(X,Y)$; в этом случае $D(\bar{A}) = D(\bar{C_\lambda})$. В частности, $C_\lambda \in b(X,Y)$ тогда и только тогда, когда $A \in b(X,Y)$.

Аналогичный результат справедлив и для с-регулярных возмущений.

Теорема 2

Пусть $A \in b(X,Y)(b_0(X,Y))$, В с-регулярен относительно А в области S, тогда для $\forall \lambda \in S_{con}$ операторы $C_\lambda \in b(X,Y)(b_0(X,Y))$, $D(\bar{C_\lambda}) = D(\bar{A})$.

Доказательство.

I. Выберем произвольную точку $\tilde{\lambda} \in S_{con}$ и некоторый путь $\Gamma \in S_{con}$, соединяющий точки 0 и $\tilde{\lambda}$. По условию теоремы, для $\forall \lambda \in \Gamma$ оператор В C_λ-ограничен, т.е. выполняется (I) с некоторыми $a_\lambda, b_\lambda \geq 0$. Из леммы I следует, что функции a_λ, b_λ -непрерывные функции параметра λ для $\forall \lambda \in \Gamma$. Следовательно, $\exists a, b \geq 0 / \forall \lambda \in \Gamma,\ a_\lambda \leq a,\ b_\lambda \leq b$.

Выберем на Γ конечное число точек λ_i, так, что $\lambda_1 = 0$, $\forall i \quad dist(\lambda_{i-1}, \lambda_i) < 1/b$

2. Применим теперь м.м.п. На первом шаге рассмотрим в качестве невозмущенного оператор $C_{\lambda_1} = A$. По теореме I для $\forall \lambda / |\lambda_1 - \lambda| < 1/b$ операторы $C_\lambda \in b(X,Y)(b_0(X,Y))$. В частости,

оператор $C_{\lambda_2} \in \mathcal{B}(X,Y)\ (\mathcal{B}_0(X,Y))$, т.е. мы распространили свойство замкнутости (замыкаемости) вдоль пути Γ вплоть до точки λ_2 . На втором шаге рассмотрим в качестве невозмущенного C_{λ_2} и опять воспользуемся теоремой I. Очевидно, что за конечное число шагов свойство замкнутости (замыкаемости) можно распространить на некторую окрестность всего пути Γ, следовательно, и на всю область S_{con} , т.к. точка $\tilde{\lambda}$ - точка, принадлежащая S_{con}.

Замечание 2

Доказательство теорем устойчивости ряда других свойств операторов и форм при их с-регулярных возмущениях полностью аналогично доказательству теоремы 2.

Все обсуждавшиеся теоремы об устойчивости замкнутости переносятся и на случай форм.

Обсудим теперь критерий с-регулярности, связанный со свойством замкнутости.

Замыкаемые операторы обладают следующим важным [illegible] свойством.

Лемма 2. /I/

Пусть $A, B \in \mathcal{B}_0(X,Y)$, тогда оператор B ограничен относительно A , если $D(B) \supset D(A)$.

Из этой леммы и теоремы I вытекает следующий результат.

Лемма 3

Пусть $A, B \in \mathcal{B}_0(X,Y)$, $S \in C / \forall \lambda \in S, D(C_\lambda) \subset D(B)$, $C_\lambda \in \mathcal{B}_0(X,Y)$.
Тогда оператор B с-регулярен относительно A в области S .
Пусть S_i -связные куски области S , тогда $\forall i, \forall \lambda \in S_i$ $D(C_\lambda) = D_i$
Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Лемма 2 справедлива для секториальных форм, поэтому и приведенный критерий справедлив для таких форм.

Для эффективного применения полученного критерия с-регулярности мы должны располагать непертурбативными критериями замкнутости. Рассмотрим общий случай:

$$A \in \mathcal{B}(X,Y),\quad B \in \mathcal{B}_0(X,Y),\quad D = D(A) \subset D(B) \qquad (4)$$

Введем G_{AB} -множество значений параметра, для которого операторы $C_\lambda = A + \lambda B \in \mathcal{B}(X,Y)$, $D(C_\lambda) = D$, G°_{AB}-максимальную связную окрестность нуля в G_{AB} , а также $W_{AB} = C \setminus G_{AB}$. Из леммы I следует, что В – А -ограничен с некоторой А -границей β и, следовательно, по теореме I, G°_{AB} содержит открытый круг $|\lambda| < 1/\beta$. Если

$$B \in \mathcal{B}(X,Y),\quad D(B) = D, \qquad (5)$$

то также и А – В -ограничен с некоторой В -границей d (причём $\beta d \geq 1$) и W_{AB} содержится в кольце $1/\beta \leq |x| \leq d$, так как для $\forall |\mu| < 1/d$ операторы $B + \mu A \in \mathcal{B}(X,Y)$, $C_\lambda = \lambda(B + \frac{1}{\lambda}A)$. Очевидно также, что G_{AB}, G°_{AB} -открытые подмножества С , кроме того, область с-регулярности В относительно А совпадает с G_{AB} . Пусть теперь $P(A) \neq \emptyset$. Тогда оператор

$$K_{AB}(\zeta) = B R_A(\zeta) \in B(X,Y) \quad \forall \zeta \in P(A) \qquad (6)$$

и

$$\forall \lambda \quad C_\lambda = (1 + \lambda K_{AB}(\zeta))(A - \zeta) + \zeta, \qquad (7)$$

при этом

$$\| K_{AB}(\zeta) \| \leq a \| R_A(\zeta) \| + \beta. \qquad (8)$$

Представление (7) позволяет сформулировать простой критерий замкнутости.

Лемма 4

Пусть А,В удовлетворяют (4), тогда оператор $C_\lambda \in \mathcal{B}(X,Y)$, если оператор $1 + \lambda K_{AB}(\zeta)$ обратим для некоторого $\zeta \in P(A)$.

Это утверждение следует из одного более общего результата (см., например /I/): пусть $A \in \mathcal{B}(Z,X)$, $B \in \mathcal{B}(Y,Z)$, $A^{-1} \in B(X,Z)$, тогда $AB \in \mathcal{B}(Y,Z)$.

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих многообразие возможных вариантов.

I. Пара операторов $A, B = A + C$, где С – А -ограничен с А -границей меньшей I, даёт пример, когда W_{AB} состоит по крайней мере из одной точки. Если теперь $C \in B(X,X)$ или С – А компактен /I,3/ , то W_{AB} состоит из одной и только одной точки. Если $B \in B(X,X)$ или А -компактен, то $W_{AB} = \emptyset$.

2. Пусть А -самосопряжён и неограничен снизу, тогда пара А, В = /А/ даёт пример, когда $W_{AB} = \{-1, 1\}$ (определение самосопряжённости и модуля оператора см. в разделах 5,6).

3. Оператор А + В не обязательно будет замыкаемым, если даже $A, B \in \mathcal{B}(X,X)$ и $D(A) = D(B)$. Явный пример даёт следующая пара. Пусть $\{u_n\}$ -некоторый ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, $\{\lambda_n\}$ – расходящаяся неубывающая последовательность неотрицательных чисел. Определим А следующим образом: $Au_n = \lambda_n u_n$

$$D(A) = \{ u \in \mathcal{H} \,/\, \sum_n \lambda_n^2 \overline{(u,u_n)}(u,u_n) < \infty \} \qquad (9)$$

Оператор А -самосопряжен, неотрицателен и неограничен. В качестве С выберем квазипроектор:

$$Cu_n = \lambda_n v \cdot \psi_n \ , \ v \in \mathcal{H} \qquad (I0)$$

Оператор С неограничен, незамыкаем, но А-ограничен, т.к.

$$\forall u \in D(A) \ \|Cu\|^2 = \overline{\sum_n \lambda_n (u,u_n)} \sum_n \lambda_n (u,u_n) \|v\|^2 \le 2\|v\|^2 \|Au\|^2 \qquad (II)$$

и мы можем выбрать $B = \lambda C - A$, который замкнут по теореме I для $\forall \lambda / |\lambda| < (\sqrt{2}\|v\|)^{-1}$. Оператор А + В не замыкаем.

Другой возможный подход к проблеме замкнутости может быть основан на следующих рассуждениях. Пусть для $\forall\lambda$, D_λ –линейное подмногообразие, являющееся областью определения некоторого собственного продолжения C_λ, в частности, если для некоторого λ_0, $C_{\lambda_0} \in \mathcal{B}_0(X,Y)$, то $D_{\lambda_0} = D(\bar{C}_{\lambda_0})$; пусть также $\tilde{D}_\lambda = D_\lambda \setminus D$. Оператор $C_\lambda \in \mathcal{B}(X,Y)$, когда $C_\lambda \in \mathcal{B}_0(X,Y)$ и $D_\lambda = D$. Таким образом, каждой паре операторов A, B удовлетворяющим условию (4), мы сопоставим семейство всюду плотных линейных подмногообразий в X. Следующая лемма определяет некоторые интересные свойства этого семейства.

Лемма 5

Если A, B удовлетворяют (4), то

1) $\forall \lambda_1, \lambda_2 / \lambda_1 \neq \lambda_2$, $\tilde{D}_{\lambda_1} \cap \tilde{D}_{\lambda_2} = \emptyset$

2) $\forall \lambda$ $\tilde{D}_\lambda \cap D(B) = \emptyset$

3) Пусть $\{u_i\}$ $i = 1 \dots N$ –последовательность векторов в X такая, что $\forall i$ $u_i \in D_{\lambda_i}$, и существуют по крайней мере два номера $k, p \leq N$ такие, что $u_k \in \tilde{D}_{\lambda_k}$, $u_p \in \tilde{D}_{\lambda_p}$. Тогда $\exists \lambda / \sum u_i \in D_\lambda$

Доказательство

1. Допустим, что $\exists u / u \in \tilde{D}_{\lambda_1} \cap \tilde{D}_{\lambda_2}$, т.е. $\infty > |\lambda_2| \, \|C_{\lambda_1} u\| + |\lambda_1| \, \|C_{\lambda_2} u\| \geq \|(\lambda_1 - \lambda_2) A u\| = \infty$. Получаем противоречие.

Утверждение 2 доказывается аналогично.

3. Допустим, что такая последовательность существует, тогда

$$\infty > \sum_i \frac{1}{|\lambda_i|} \|C_{\lambda_i} u_i\| + \frac{1}{|\lambda|} \|C_\lambda \sum_i u_i\| \geq \frac{1}{\lambda} \| A \sum_i (1 - \lambda/\lambda_i) u_i \|$$

т.е. мы получим, что $\sum (1 - \lambda/\lambda_i) u_i \in D$. При $N = 2$ это противоречит пункту I леммы, общий случай легко доказывается по индукции.

В некоторых случаях используя лемму 5, удаётся показать, что $\tilde{D}_\lambda = \emptyset$ в широкой области значений параметра. Один такой пример мы обсудим ниже. Рассмотрим сначала аналогичную проблему для секториальных форм. Без ограничения общности будем полагать, что a, b – замкнуты. Далее, можно указать такое подмножество $S \subset C \ (R_+ \subset S)$, что λb -секториальная форма, если $\lambda \in S$. Рассмотрим семейство

$$c_\lambda = a + \lambda b, \ \lambda \in S, \ D(c_\lambda) = D(a) \cap D(b) = D \qquad (12)$$

В отличие от аналогичного случая для операторов, справедлив следующий результат.

Лемма 6

1. Формы c_λ (12) замкнуты для $\forall \lambda \in S$ /см.1/.
2. $\forall \lambda \in S \setminus \{0\}$ форма b ограничена относительно формы c_λ (следствие леммы 2). Если $D(a) \subset D(b)$, то форма b a -с-регулярна для $\forall \lambda \in S$ (следствие леммы 3).

Приведем один критерий замкнутости операторов, использующий это свойство секториальных форм.

Лемма 7

Пусть A,B -секториальные операторы, S -область значений параметра, для которого λB -секториален, a, b -формы, ассоциированные с A, B ; $D(A) \subset D(B)$. Тогда B A- с-регулярен в области S, если:

I. $D(a) \subset D(b)$, или II. $D(b) \cap D(a) = D(A)$

Доказательство

$\forall \lambda \in S$, C_λ -секториален, следовательно, $C_\lambda \in \mathcal{C}_0(\mathcal{H})$ Далее, $D(\bar{C}_\lambda) \subset D(c_\lambda) = D(a) \cap D(b)$. Если выполняется I, то $D(\bar{C}_\lambda) \subset D(b)$, следовательно, по лемме 5, $D(\bar{C}_\lambda) = D(A)$. Если выполняется II, то $D(\bar{C}_\lambda) = D(A)$. Утверждение данной леммы следует из леммы 3.

4. С-регулярность, замкнутость и голоморфность

В этом разделе мы рассмотрим связь свойств с-регулярности и некоторых критериев голоморфности семейств операторов и форм. Голоморфность семейства операторов или форм, встретившегося в приложении, позволяет применить для его исследования хорошо развитую аналитическую теорию возмущений.

Определение 4 /I/

Семейство операторов $T(x)\in \mathcal{B}(X,Y)$, $\forall x\in D_0$ называется голоморфным типа (А), если:

I) $D(T(x)) = D \quad \forall x\in D_0$

2) Вектор-функция $T(x)u$ голоморфна в D_0 для $\forall u\in D$.

В этом случае $T(x)u$ имеет разложение Тейлора в каждой точке D_0, в частности, если $0\in D_0$, то

$$T(x)u = Tu + xT^1u + \ldots x^n T^n u + \ldots, \quad u\in D \qquad (I3)$$

Радиус сходимости ряда (I3) не зависит от u. T^n-линейные операторы $(X\to Y)$ с областью определения D.

Существует следующий основной критерий (А)-голоморфности.

Теорема 3 /I,4/

Пусть $T\in \mathcal{B}_0(X,Y)$, $T^n:(X\to Y)$, n = I,2... такие, что $D(T)\subset D(T^n)$

Предположим, что $\exists\, a, b, c \geq 0$ /

$$\| T^n u \| \leq c^{n-1}(a\|u\| + b\|Tu\|) \quad u\in D \qquad (I4)$$

Тогда ряд (I5) для $\forall |x| < 1/c$ определяет оператор $T(x)$/ $D(T(x)) = D$.

Если $|x| < (b+c)^{-1}$, то $T(x)\in \mathcal{B}_0(X,Y)$ и $\overline{T(x)}$ образуют (А)-голоморфное семейство. В частном случае $T^i = 0\ \forall i > 1$ можно положить С = 0.

Аналогично определяется (а)-голоморфное семейство секториальных форм. Так как каждой замкнутой секториальной форме соответствует единственный м-секториальный оператор (см., напр., /I/), то (а)-голоморфное семейство форм порождает некоторое семейство операторов, называемое (В)-голоморфным. В этом случае уже не обязательно $D(T(x)) = D,\ \forall x \in D_0$. Как и раньше, мы рассмотрим частный случай голоморфных семейств, которые линейно зависят от параметра.

Справедлив следующий результат.

Лемма 8

Пусть $A, B \in \mathcal{B}_0(X,X)$, $D(B) \supset D(A)$; S_{con}-связная окрестность 0. Тогда следующие условия эквивалентны:

I) В – с-регулярен относительно A в области S_{con}.

2) $C_\lambda = A + \lambda B \in \mathcal{B}_0(X,X)\ \forall \lambda \in S_{con},\ D(B) \supset D(C_\lambda)$

3) $\overline{C_\lambda}$ – (А) -голоморфное семейство в S_{con}.

Доказательство

Эквивалентность (I), (2) следует из теоремы 2 и леммы 3. (I) $\Rightarrow$ (3) легко доказывается с помощью м.м.п. – на каждом шаге нужно использовать критерий (А) -голоморфности из теоремы 3.

(3) $\Rightarrow$ (I). Из того, что $\overline{C_\lambda}$ – (А) -голоморфное семейство, следует (см. /I/), что

I) $\forall \lambda \in S_{con},\ D(\overline{C}_\lambda) = D,$ (I5)

2) $\forall \lambda \in S_{con}\ \ \exists a_\lambda, b_\lambda \geq 0\ /,$

$$\| C'_\lambda u \| \leq a_\lambda \| u \| + b_\lambda \| \overline{C}_\lambda u \| \quad \forall u \in D. \qquad (I6)$$

Линейный оператор C'_λ определяется равенством

$$C'_\lambda u = d(C_\lambda u)/d\lambda.$$

Нам же нужно показать, что

$\forall \lambda \in S_{con}\ \ \exists a_\lambda, b_\lambda\ /,$

$$\| Bu \| \leq a_\lambda \| u \| + b_\lambda \| Au \| \quad \forall u \in D, \qquad (I7)$$

Так как по условию $A, B \in \mathcal{B}_0(X,X)$ и $D(B) \supset D(A)$, то по лемме 2 B – A -ограничен с некоторой A -границей b_0 и, по теореме I,

$D(\bar{C}_\lambda) = D(\bar{A})\ \forall\lambda / |\lambda| < 1/b$. Тогда из (I5) следует, что $D(\bar{C}_\lambda) = D(\bar{A})\ \forall\lambda \in S_{con}$. В этом случае $C_\lambda = B\ \forall\lambda \in S_{con}$ и справедливость (I7) следует из (I6).

Замечание 3

Лемма 8 допускает очевидное обобщение. Пусть $A, B_i \in \mathcal{B}_0(X,Y)$ и для $\forall i \leq k$ B_i -с-регулярен относительно A в области S_i . Рассмотрим K -параметрическое семейство $C_{\bar{\lambda}} = A + \sum \lambda_i B_i$. Используя лемму 4, можно легко показать, что $\bar{C}_{\bar{\lambda}}$ - (A) -голоморфное семейство в области $S_{con} = S_{1con} \otimes \ldots S_{kcon}$. Рассмотрим теперь семейство $C_x = A + \sum x^i B_i$. Выберем в S_{1con} подмножество $S_1^1 = \{\forall x \in S_{1con} / x^i \in S_{icon}\}$. Тогда $\bar{C}_x$-(A) -голоморфное семейство в области S_1^1 .

Для случая секториальных форм можно получить более сильный результат, т.к. свойство замкнутости более устойчиво.

Лемма 9

Пусть a, b -секториальные замкнутые формы. $D(a) \cap D(b) = D$; S -такое подмножество в C, что $\forall\lambda \in S$ форма λb секториальна. Тогда $c_\lambda = a + \lambda b$ - (a) -голоморфное семейство форм на $S_0 = S \setminus \{0\}$, а если $D = D(a)$, то и на S . Операторы C_λ , ассоциированные с формами c_λ , образуют (B) -голоморфное семейство на $S_0\ (S)$.

Доказательство

Из леммы 6 следует, что формы c_λ -замкнуты для $\forall\lambda \in S$ и $D(c_\lambda) = D$ для $\forall\lambda \in S_0$. Кроме того, $\forall\lambda \in S_0$ b-c_λ-ограничена по лемме 2. Далее доказательство (a) -голоморфности проводится с использованием м.м.п. - на каждом шаге можно опять применять критерий из теоремы 3.

Замечание 4

Лемма 9 также допускает обобщение на многопараметрический и полиномиальный случай (см. замечание 3).

5. Устойчивость самосопряжённости

Определение 5 /I,2/

Плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве называется симметричным (эрмитовым, симметрическим), если $T \subset T^*$, т.е. $D(T) \subset D(T^*)$ и $\forall u \in D(T)$ $Tu = T^*u$. Эквивалентная запись:

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in D(T) \tag{18}$$

Симметрический оператор всегда замыкаем: $\overline{T} = T^{**} \subset T^*$. Оператор называется самосопряженным, если $T = T^*$. Наконец, симметричный оператор называется существенно самосопряженным, если $\overline{T} = T^{**} = T^*$. Для любого симметричного оператора

$$\Theta(T) \in \underline{R} \tag{19}$$

Определение 6 /I,2/

Симметричный оператор ограничен снизу, если

$$\exists \gamma \in R \mid (Tu, u) \geq \gamma(u, u) \quad \forall u \in D(T) \tag{20}$$

Следующая теорема содержит основные результаты теории устойчивости самосопряженности для относительно ограниченных возмущений.

Теорема 4. /I,2/

I. Пусть оператор A самосопряжен (существенно самосопряжен), а оператор B симметричен и A-ограничен. Тогда $\forall \varkappa \in R \mid |\varkappa| < 1/b$ оператор $C_\varkappa = A + \varkappa B$ самосопряжен (существенно самосопряжен).

2. Если, кроме того, A ограничен снизу, то $\forall \varkappa \in R \mid |\varkappa| < 1/b$ оператор $C_\varkappa$ также ограничен снизу, причем его нижняя грань удовлетворяет неравенству $\gamma_{C_\varkappa} \geq \gamma_A - \max\left(\frac{a}{1-|\varkappa| b}, a + |\varkappa| b |\gamma_A|\right)$.

Аналогичный результат справедлив и для с-регулярных возмущений.

Теорема 5

Пусть оператор A самосопряжен (существенно самосопряжен), а оператор B симметричен и A -с-регулярен в области S. Тогда для $\forall \varkappa \in R \cap S_{loc}$ оператор $C_\varkappa$ самосопряжен (существенно самосопряжен); если A ограничен снизу, то и $C_\varkappa$ ограничен снизу.

Доказательство

Самосопряженность (существенная самосопряженность) легко доказывается с использованием м.м.п. -на каждом шаге нужно использовать теоремой 4. Ограниченность снизу следует из того факта, что, согласно лемме 6, $\overline{C_\varkappa}$ - (A)-голоморфное самосопряженное семейство в некоторой области, содержащий $R \cap S_{loc}$.

Из теоремы 5 и леммы 3 следует лемма IC.

Лемма IC

Пусть A существенно самосопряжен, B симметричен и $D(A) \subset D(B)$. Пусть [illegible] $S \subset C / \forall \varkappa \in S$ $D(\overline{A+\varkappa B}) \subset D(B)$. Тогда для $\forall \varkappa \in R \cap S_{loc}$ операторы $C_\varkappa$ существенно самосопряжены и ограничены снизу, если A ограничен снизу.

6. Возмущение квазиограниченных операторных полугрупп

В этом разделе мы рассмотрим теорию возмущений одного класса полугрупп, которые часто встречаются в приложениях (интересный пример можно найти в работе /5/).

Определение 7 /I/

Оператор A порождает квазиограниченную полугруппу класса $\mathcal{G}(M,\beta)$, если:

I. $A \in \mathcal{C}(X)$, $D(A)$ плотно в X.

2) $(\beta,\infty] \subset P(-A)$ и

$$\|(A+\mu)^{-k}\| \leq M(\mu-\beta)^{-k},\ \forall \mu \in (\beta,\infty],\ k=1,2\ldots \qquad (2I)$$

В этом случае операторы $U(t)=e^{-tA}$ образуют полугруппу, причём $U(0)=1,\ \|U(t)\| \leq M e^{\beta t}$.

В частности, A порождает сжимающую полугруппу, если $A \in \mathcal{G}(1,0)$. Нижняя грань всех β, для которых выполняется (2I), называется типом полугруппы.

Для относительно ограниченных возмущений имеет место следующий результат.

Теорема 6 /I,6/

Пусть $A \in \mathcal{G}(1,\beta)$, $B \in \mathcal{G}(1,\beta')$ и B A -ограничен. Тогда для $\forall\lambda \in [0,1/26)$ оператор $A+\lambda B \in \mathcal{G}(1,\ \beta+\lambda\beta')$.

В случае гильбертова пространства определения можно положить $\lambda \in [0,1/6)$.

Сформулируем аналогичный результат для с-регулярных возмущений.

Теорема 7

Пусть $A \in \mathcal{G}(1,\beta)$, $B \in \mathcal{G}(1,\beta')$ и B A-с-регулярен. Тогда для $\forall\lambda \in R_+ \cap S_{con}$ оператор $A+\lambda B \in \mathcal{G}(1,\ \beta+\lambda\beta')$.

Доказательство основано на применении м.м.п. –на каждом шаге нужно использовать теорему 6.

Заметим, что в этом случае также можно пользоваться формулой Троттера для произведения /6/, т.е.

$$e^{-t(A+\lambda B)} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-\frac{t}{n}A}\, e^{-\frac{t}{n}\lambda B}\right)^n \qquad (22)$$

Из теоремы 7 и леммы I немедленно следует лемма II.

Лемма II

В теореме 6 можно положить $\lambda \in [0,1/8)$ в случае общего банахова пространства определения.

Это в два раза улучшает оценку на малость возмущений без всяних дополнительных ограничений.

7. Операторы с компактной резольвентой

Этот раздел посвящен доказательству одного неожиданного результата об операторах с компактной резольвентой, т.е. таких, что $R_A(\zeta) \in B_0(Y,X)$ для некоторого, а следовательно и любого $\zeta \in P(A)$. Спектр таких операторов состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Они естественно возникают в физических приложениях. Приведём несколько характерных примеров /7,8/.

I. Гамильтонианы с потенциалами, растущими на бесконечности, напр., гамильтониан осциллятора.

2. Любой неотрицательный самосопряжённый дифференциальный эллиптический оператор над компактным римановым многообразием.

Кроме того, они интересны как обратные к компактным. Мы покажем, что свойство "быть областью определения оператора с компактной резольвентой" (CR-свойство) является характеристическим для плотного линейного подмногообразия в гильбертовом пространстве.

Теорема 8.

Пусть $D \in \mathcal{H}$ – плотное линейное подмногообразие в $\mathcal{H}$. Тогда либо все замкнутые операторы с областью определения D, для которых $P(T) \neq \emptyset$, имеют компактную резольвенту, либо ни один из них.

Доказательство

Докажем сначала утверждение теоремы для самосопряжённых неотрицательных операторов. Пусть A, B – такие операторы и $D(A)=D(B)=D$. Из леммы 2 следует, что $B\ A$ – ограничен и $A\ B$ – ограничен, т.е. $\exists\, a, b, c, d > 0 \,/\, \forall u \in D$

$$\|Bu\| \le a\|u\| + b\|Au\|$$
$$\|Au\| \le c\|u\| + d\|Bu\| \qquad (23)$$

Пусть теперь a, b -симметричные формы, соответствующие операторам A, B. Тогда b a-ограничена и a b-ограничена, $D(a)=D(b)=D^1$ /I/.

Рассмотрим теперь следующие семейства:

$C_\lambda = A+\lambda B$, $c_\lambda = a+\lambda b$, $c_\lambda^1 = b+\lambda a$, $C_\lambda^1 = B+\lambda A$

Операторные семейства C_λ, C_λ^1 -(A)-голоморфны соответственно в $S=\{|\lambda|<1/b\}$, $S^1=\{|\lambda|<1/d\}$ по теореме 3. Семейства форм c_λ, c_λ^1 -(a)-голоморфны по крайней мере для $\forall\lambda/\mathrm{Re}\lambda>0$, т.к. в этом случае $\lambda a, \lambda b$ секториальны и, следовательно, применима лемма 9. Таким образом, они порождают (B)-голоморфное семейство операторов, которые мы обозначим через $\tilde{C}_\lambda$, $\tilde{C}_\lambda^1$.

Пусть теперь A имеет компактную резольвенту. Тогда $\forall\lambda\in S$ операторы C_λ имеют компактную резольвенту по известной теореме о (A)-голоморфных семействах /I/. Далее, для $\forall\lambda\in(0,1/b)$, $C_\lambda=\tilde{C}_\lambda$, т.к. с каждой секториальной формой ассоциирован один и только один м-секториальный оператор. Следовательно, все операторы из (B)-голоморфного семейства $\tilde{C}_\lambda$ имеют компактную резольвенту по соответствующей теореме для (B)-голоморфных семейств.

Выберем теперь $\lambda_0\in R_+/1/\lambda_0<1/d$. Так как оператор $C_{\lambda_0}=\lambda_0 C^1_{1/\lambda_0}$, то C_{λ_0} самосопряжён вместе с C^1_{1/λ_0} по теореме 4. Следовательно, опять $\tilde{C}_\lambda=C_\lambda$ по крайней мере для достаточно больших $\lambda\in R_+$, т.е. C_λ и $C^1_{1/\lambda}$ имеют для таких λ компактную резольвенту. Тогда и B также имеет компактную резольвенту, т.к. $B\in C_\lambda^1$ -(A)-голоморфному семейству.

Распространим теперь доказательство на общий случай. Каждый оператор $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ допускает представление в виде $T = U|T|$, где $|T|$ –самосопряжённый неотрицательный оператор (модуль T), причём $D(|T|) = D(T)$, $Nul(|T|) = Nul(T)$, а U –частично изометричный оператор из $\overline{R(|T|)}$ в $\overline{R(T)}$ /I/. Доказательство теоремы завершает следующая лемма.

Лемма I2

Пусть $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P(T) \neq \emptyset$. Резольвента оператора T компактна тогда и только тогда, когда компактна резольвента $|T|$.

Доказательство.

I. $R_T(\zeta) \in B_0(\mathcal{H})$, $\forall \zeta \in P(T)$

$$R_{T^*T}(-1) = 1/(1+T^*T) = \frac{T-\zeta}{1+T^*T} R_T(\zeta) \qquad (24)$$

Оператор $C = (T-\zeta)/(1+T^*T) \in B(\mathcal{H})$, $\|C\| \leq 1+|\zeta|$.
Следовательно, T^*T имеет компактную резольвенту. Но $|T| = (T^*T)^{1/2}$ и также имеет компактную резольвенту по теореме о квадратном корне /I/.

2. $R_{|T|}(\zeta) \in B_0(\mathcal{H})$, $\forall \zeta \in P(|T|)$.

Выберем некоторое $\zeta \in P(T)$, тогда $Nul(T-\zeta) = Nul(|T-\zeta|) = \emptyset$, следовательно, $R(T-\zeta) = R(|T-\zeta|) = \mathcal{H}$. В этом случае оператор U_ζ в разложении $T-\zeta = U_\zeta |T-\zeta|$ унитарен.

$$R_T(\zeta) = (T-\zeta)^{-1} = R_{|T-\zeta|}(0)\, U_\zeta^{-1} = R_{|T-\zeta|}(0)\, U_\zeta^*.$$

Поскольку $U_\zeta^* \in B(\mathcal{H})$, то $R_T(\zeta) \in B_0(\mathcal{H})$, если $R_{|T-\zeta|}(0) \in B_0(\mathcal{H})$. Как было показано выше, последнее следует из $R_{|T|}(\zeta) \in B_0(\mathcal{H})$.

Замечание 5

Пусть подмногообразие $\mathcal{D}$ в $\mathcal{H}$ обладает CR–свойством. Тогда в $\mathcal{H}$ есть ещё много подмногообразий, ассоциированных с $\mathcal{D}$, которые также обладают CR–свойством. Например, если $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P(T) \neq \emptyset$ и $D(T) = \mathcal{D}$, то $D(T^*)$ CR–подмногообразие; для любой функции

F, такой, что оператор $F(|T|)$ неограничен, $D(F(|T|))$ cR-подмногообразие; далее, $\forall S \in B(\mathcal{H})/S^{-1} \in B(\mathcal{H})$, $D(S^{-1}TS)$ cR-подмногообразие/9/. Отметим также, что cR-подмногообразия легко строить явно (см. пример 3 из разд.3). Подробному рассмотрению свойств операторов с компактной резольвентой будет посвящена отдельная работа.

8. Заключение

Мы показали, что теоремы устойчивости замкнутости, самосопряжённости, свойства порождать квазиограниченную полугруппу, свойства иметь компактную резольвенту для относительно ограниченных возмущений, легко переносятся на случай с-регулярных возмущений. Так как область с-регулярности не обязательно является малой окрестностью нуля, доказанные теоремы устойчивости позволяют, в принципе, получать непертурбативные результаты. Однако для этого нужны эффективные критерии с-регулярности. Один такой критерий, связанный со свойством замыкаемости, обсуждался выше. Поскольку большинство встречающихся в приложениях операторов замыкаемы, этот критерий не слишком ограничивает класс доступных возмущений. В некоторых конкретных задачах выполнение условий с-регулярности можно проверить прямыми вычислениями.

Автор пользуется случаем выразить свою признательность В.Е. Шестопалу за интерес к работе и многочисленные полезные обсуждения, а также М.В.Степановой за помощь в редактировании рукописи.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.-М.:Мир, 1972.

2. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Функциональный анализ.-М.:Мир, 1977.

3. Balslev E. Math.Scand., v.11, p.131-148, 1962.

4. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Гармонический анализ. Самосопряжённость.-М.:Мир, 1978.

5. Nelson E. J.Math.Phys., v.5, p.332-34[illegible]

6. Trotter H.F. Proc.Am.Math.Soc., v.[illegible], p.545-5[illegible], 1959.

7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Анализ операторов.-М.:Мир, 1982.

8. Харт Н. Геометрическое квантование в действии.-М.:Мир, 1985.

9. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах.-М.:Мир, 1970.

Н.В.Степанов

Метод многократных продолжений и сильнорегулярные возмущения линейных операторов

Редактор И.Н.Ломакина   Корректор О.Ю.Ольховникова

Работа поступила в ОНТИ 11.11.86

Подписано к печати 28.11.86   Т23344   Формат 60х90 1/16
Офсетн.печ. Усл.-печ.л.1,25. Уч.-изд.л.0,9. Тираж 120 экз.
Заказ 185   Индекс 3624   Цена 13 коп.

Отпечатано в ИТЭФ, 117259, Москва, Б.Черемушкинская, 25

13 коп

ИНДЕКС 3624

М.,ПРЕПРИНТ ИТЭФ, 1986, № 185, с.1-21