



ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

СФ 80-04

ИТЕФ -- 88 (1987).

А.В.ТУРБИНЕР

**МНОГОМЕРНЫЙ АНИЗОТРОПНЫЙ
АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР**

(количественный подход)

Препринт №88

Москва — ЦНИИАтоминформ — 1987

МНОГОМЕРНЫЙ АНИЗОТРОПНЫЙ АНГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР:

Препринт ИТЭФ 87-88

А.В. Турбинер - М.: ЦНИИатоминформ, 1987 - 88 - 48с.

В рамках единого подхода, основанного на методе "нелинейаризации" для d -мерного анизотропного ангармонического осциллятора проведен прецизионный расчет энергий нескольких первых состояний при $d=2$ и первых 17 состояний при $d=3$. Поведение спектра в пределе $d \rightarrow \infty$ исследовано, и изучены вопросы точности данного подхода. Впервые подробно исследованы свойства узловых поверхностей данной задачи. Для нескольких первых состояний построена обычная теория возмущений по степеням параметра возмущения.

Рис. - 3, список лит. - 14 назм.

Широко известно, что учет ангармонических эффектов играет существенную роль при рассмотрении различных физических ситуаций в разных областях физики. Более того, часто оказывается, что реальной физической картине отвечает область сильного ангармонизма. Поэтому очевидно, что разработка количественных методов учета ангармонических эффектов представляет большую важность.

В данной работе мы попытаемся с единой точки зрения исследовать спектр d -мерного ангармонического осциллятора, описываемого гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^d \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + m^2 x_i^2 \right) + g \left(\sum_{i=1}^d x_i^4 + 2c \sum_{\substack{i,j \\ i < j}}^d x_i^2 x_j^2 \right), \quad (1.1)$$

где m , g , c - параметры, причем g имеет смысл параметра возмущения, а c - асимметрии. Отметим, что при $d=1$ (одномерный случай) задача (1.1) сводится к обычной проблеме одномерного ангармонического осциллятора, исследованию которой посвящено бесчисленное множество работ (см., например, обзоры [1-3] и ссылки в них), причем их поток не иссякает и в настоящее время. Обычно, эта задача является пробным камнем при создании новых приближенных методов. Однако простейшее ее обобщение на двумерный случай ($d=2$) приводит к резкому возрастанию трудностей, что отмечалось в немногочисленных работах на эту тему [1-9]. Одной из существенных трудностей является проблема классификации состояний в многомерном случае, в связи с отсутствием аналога осцилляционной теоремы (см. обсуждение в [3]). В случае $d > 2$ количественные исследования спектра состояний, по-видимому, не проводились, хотя рассматривалась задача о числе состояний с энергией, меньше данной [5], а также изучались количественные характеристики энергии основного состояния [8].

Целью данной работы является количественное исследование нескольких первых уровней энергии осциллятора (1.1) при $d=2, 3$ в режиме сильной $g=2$ ($m=1$) и ультрасильной ($m=0$) связи в рамках метода "нелинеаризации". Мы покажем, что адекватный выбор гамильтониана нулевого приближения позволяет получить аналитические выражения для уровней энергии, с высокой точностью описывающие их

*) Случай, когда переменные разделяются ($c=0, 1$), мы относим к одномерным.

поведение при любых значениях $0 < g < \infty$ и $-(d-1)^{-1} < C < 1$ в произвольной размерности d . Мы демонстрируем, что учет одной или двух поправок в нашем методе позволяет получить при $d=2$ те же или много более высокие точности, чем подход Hioe et al [1], основанный на баргмановском представлении гамильтониана и матриц размера вплоть до 121×121 .

Отметим, что данный подход ранее с успехом применялся к различным задачам квантовой механики, таким, в частности, как одномерный ангармонический осциллятор, эффект Зеемана и Штарка на водороде, молекула водорода в магнитном поле и др. (см. обзор [3] и ссылки в нем). На примере потенциала кваркония было показано, что метод позволяет вычислять не только глобальные характеристики системы, такие как энергия, но и локальные, как волновая функция.

План статьи следующий. В разделе 2 кратко формулируется метод. Разделы 3 и 4 посвящены подробному рассмотрению случаев $d=2$ и $d=3$, соответственно. В разделе 5 кратко обсуждается предел $d=\infty$. Раздел 6 - выводы и заключение. В Приложении строится обычная расходящаяся теория возмущений в рамках метода "нелинеаризации" и анализируется устройство узловых поверхностей в случае $d=2$; в частности, разбирается ситуация, когда исследуемое состояние вырождено, а возмущение снимает вырождение.

*) Легко показать, что известное соотношение Симанчика

$E(m^2, g) = g^{3/2} E\left(\frac{m^2}{g^{3/2}}, 1\right)$ остается справедливым для спектра гамильтониана (1.1).

2. М е т о д

Метод "нелинейнизации"^{*} состоит из трех составных частей: (1) теории возмущений в форме, не требующей знания всего спектра невозмущенной задачи; (2) факта, что результат любого вариационного расчета может трактоваться как первые два члена некоторой теории возмущений и (3) критерия адекватного выбора невозмущенной задачи. Остановимся кратко на каждом из пунктов.

1) Теория возмущений (ТВ). Рассмотрим уравнение Шредингера

$$\Delta \Psi + (E - V)\Psi = 0, \quad (2.1)$$

Сделаем нелинейную замену волновой функции

$$\Psi = f \exp(-\varphi), \quad (2.2)$$

Тогда (2.1) преобразуется к следующему виду

$$\Delta \varphi - (\nabla \varphi)^2 - \frac{\Delta f - 2\nabla \varphi \nabla f}{f} = E - V. \quad (2.3)$$

Поскольку преобразование (2.2) неоднозначно, потребуем, чтобы предэкспонента $f(x)$ содержала только информацию об узловых поверхностях, причем минимально возможным образом. Предположим теперь, что

$$V = V_0 + \lambda V_1, \quad (2.4)$$

где λ — некоторый формальный параметр. Разовьем теперь ТВ по степеням параметра λ :

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \lambda^n, \quad (2.5a)$$

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \lambda^n, \quad (2.5b)$$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \lambda^n. \quad (2.5c)$$

Тогда уравнение на поправку

$$\Delta \varphi_n - 2\nabla \varphi_0 \nabla \varphi_n - \frac{\Delta f_n - 2\nabla \varphi_0 \nabla f_n - 2\nabla \varphi_n \nabla f_0}{f_0} + f_n \frac{\Delta f_0 - 2\nabla f_0 \nabla \varphi_0}{f_0^2} = E_n - Q_n \quad (2.6)$$

*) Подробности изложены в [3-4]

$$E_n = \int dx Q_n \psi_0^2 / \int dx \psi_0^2, \quad (2.7)$$

$$\text{где } Q_1 \equiv V_1, \quad Q_n \equiv - \sum_{i=1}^{n-1} \nabla \psi_i \nabla \psi_{n-i} - f_0^{-1} \left[\sum_{k=1}^{n-1} f_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} \nabla \psi_i \nabla \psi_{n-k-i} - \right. \right. \\ \left. \left. - \Delta \psi_{n-k} + E_{n-k} \right) - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \nabla \psi_k \nabla f_{n-k} \right], \quad n \geq 2, \quad (2.8)$$

причем поправка $f_n(x)$ определяется из требования отсутствия сингулярностей решения уравнения (2.6) для ψ_n . Стоит особо подчеркнуть, что в тех случаях, когда вид узловых поверхностей известен заранее и они не деформируются под влиянием возмущения, ситуация резко упрощается:

$$\Delta \psi_n - 2 \nabla \psi_0 \nabla \psi_n + 2 \frac{\nabla \psi_n \nabla f_0}{f_0} = E_n - Q_n \quad (2.9)$$

и

$$Q_1 \equiv V_1, \quad Q_n \equiv - \sum_{i=1}^{n-1} \nabla \psi_i \nabla \psi_{n-i}. \quad (2.10)$$

Простейшим примером является основное состояние, для которого известно, что волновая функция не имеет нулей и поэтому без потери общности можно положить $f=1$.

2) Вариационный расчет с точки зрения теории возмущений.

Возьмем некоторую нормированную пробную вариационную функцию ψ_0 . Найдем потенциал, ей соответствующий

$$V_0 - E_0 = \frac{\Delta \psi_0}{\psi_0} \quad (2.11)$$

Построим гамильтониан, отвечающий ψ_0 : $H_0 = P^2 + V_0$.
Напишем цепочку равенств

$$E_{\text{вар.}} = \int \psi_0 H \psi_0 dx = \int \psi_0 H_0 \psi_0 dx + \int \psi_0 (H - H_0) \psi_0 dx = \\ = E_0 + \int \psi_0 (V - V_0) \psi_0 dx = E_0 + E_1, \quad (2.12)$$

где E_1 - первая поправка к энергии в ряду ТВ с потенциалом возмущения $V_1 = V - V_0$. Вычисление следующих поправок итерационно повышает точность вариационной энергии (конечно, если ТВ сходится).

3) Выбор нулевого приближения

Сформулируем рецепт выбора нулевого приближения, обеспечивающего сходимость ТВ:

построим волновую функцию нулевого приближения таким образом, чтобы потенциал ей соответствующий (см. (2.11)), максимально полно воспроизводил все сингулярности исходного потенциала и его асимптотические свойства.

На этом мы закончим описание метода "нелинеаризации" и приступим к решению задачи (1.1).

3. Двумерный ангармонический осциллятор

а) общее рассмотрение

Итак, рассмотрим задачу (1.1) при $d=2$

$$V = m^2(x^2 + y^2) + g(x^4 + y^4 + 2cx^2y^2) \quad (3.1)$$

и сначала опишем общие свойства решений.

Симметрия этой задачи совпадает с симметрией квадрата.

Существует преобразование [4]

$$x = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad (3.2)$$

переводящее уравнение Шредингера само в себя с заменой

$$c = \frac{(3-c)}{2}, \quad g = \frac{g}{2}(1+c). \quad (3.3)$$

+

Поскольку потенциал (3.1) ограничен снизу при $c > -1$ при $m=0$ и $c > -1$ при $m \neq 0$, то область связанных состояний расположена при

$$-1 < c < \infty, \quad (3.4)$$

но, как следствие (3.3), достаточно рассмотреть область

$$-1 < c < 1. \quad (3.5)$$

Подчеркнем, что энергии связанных состояний должны содержать сингулярность при $c = -1$.

Симметрия задачи помогает нам провести классификацию состояний. Поскольку операторы четности P_x, P_y по переменным x и y коммутируют с гамильтонианом, то существуют четыре группы состояний: $(+, +)$, $(-, +)$, $(+, -)$, $(-, -)$. Оператор перестановки координат $x \leftrightarrow y$ также коммутирует с гамильтонианом. Как следствие этого каждое состояние второй группы двукратно вырождено, т.к. имеется его партнер из 3-й группы. Состояния из 1-й и 4-й групп двух типов: четные и нечетные относительно замены $x \leftrightarrow y$.

Конечно, эта классификация неполна, поскольку не проклассифицированы состояния внутри каждой из групп. Полная внутренняя классификация^{*} состояний может быть выполнена только в двух случаях $c=0$ (разделение переменных в декартовых координатах, состояние характеризуется квантовыми числами (n_1, n_2)) и $c=1$ (разделение в

* Под внутренней классификацией мы понимаем классификацию, основанную на свойствах волновой функции, аналогичную той, которая в одномерном случае давалась осцилляционной теоремой.

полярных координатах, квантовые числа $(n, l)^{**})$.

В качестве примера приведем функциональный вид f для нескольких первых состояний четырех групп:

а) первая группа $(+, +)$:

$${}_1f_0^+(x) = 1 \rightarrow \{0, 0\}; (0, 0), \quad (3.6a)$$

$${}_1f_1^+(x) = (x^2 + y^2 - d_0^2 + d_1 x^2 y^2 + \sum d_i x^{2i} y^{2i}) \rightarrow \{1, 0\}; (2, 0), (0, 2), \quad (3.6b)$$

$${}_1f_1^-(x) = (x^2 - y^2) \rightarrow \{0, 2\}; (2, 0), (0, 2), \quad (3.6b)$$

$${}_1f_n^+(x) = P_+(x^2 + y^2, x^2 y^2), \quad (3.6г)$$

$${}_1f_n^-(x) = P_-(x^2 + y^2, x^2 y^2) (x^2 - y^2); \quad (3.6д)$$

б) вторая группа $(-, +)$:

$${}_2f_0 = x \rightarrow \{0, 1\}; (1, 0), \quad (3.7a)$$

$${}_2f_1^+ = x(x^2 + d_1 y^2 - d_0^2 + d_2 x^2 y^2 + \dots) \rightarrow \{1, 1\}; (3, 0), \quad (3.7б)$$

$${}_2f_1^- = x(d_1 x^2 - 3y^2 + d_0 + d_2 x^2 y^2 + \dots) \rightarrow \{0, 3\}; (1, 2), \quad (3.7в)$$

$${}_2f_n = x P(x^2, y^2, x^2 y^2); \quad (3.7г)$$

в) четвертая группа $(-, -)$:

$${}_4f_0 = xy \rightarrow \{0, 2\}; (1, 1), \quad (3.8a)$$

$${}_4f_1^+ = xy(x^2 + y^2 - d_0^2 + d_1 x^2 y^2 + \dots) \rightarrow \{1, 2\}; (3, 1), (1, 3), \quad (3.8б)$$

$${}_4f_1^- = xy(x^2 - y^2) \rightarrow \{0, 4\}; (3, 1), (1, 3), \quad (3.8в)$$

$${}_4f_n^+ = xy P_+(x^2 + y^2, x^2 y^2), \quad (3.8г)$$

$${}_4f_n^- = xy(x^2 - y^2) P_-(x^2 + y^2, x^2 y^2), \quad (3.8д)$$

*) Обозначение состояний как в [1].

**) Для каждого $f(x)$ после стрелки указаны состояния, в которые они переходят при $C=1$ и $C=0$.

где все параметры в (3.6)-(3.8) являются функциями от μ , ξ , ζ (см. (3.1)). Формулы (3.6г-д), (3.7г), (3.8г-д) дают общий вид уравнений узловых поверхностей. Для получения явной функциональной структуры узловых поверхностей (3.6)-(3.8) мы использовали ТВ по степеням параметра g , рассматривая

$$V_4 = x^4 + y^4 + 2cx^2y^2 \quad (3.9)$$

в качестве возмущения. Эта часть работы изложена в Приложении.

Теперь, когда понятно, как устроен предэкспоненциальный фактор в (2.2) для разных состояний, можно перейти к расчетам спектра. Вначале, рассмотрим сферически-симметричное нулевое приближение.

б) Сферически-симметричное нулевое приближение

Перепишем потенциал (3.1) в полярных координатах (r, θ) :

$$V \equiv V^{(0)} + V^{(4)} \cos 4\theta = m^2 r^2 + g^2 r^4 - \frac{g(\zeta-1)}{4} r^4 \cos 4\theta, \quad g^2 \equiv g(1 + \frac{\zeta-1}{4}) \quad (3.10)$$

и выберем нулевое приближение, адекватно описывающее сферически-симметричную часть потенциала (3.10), взяв

$$\Psi_0 = f_0(x) \exp(-\varphi_0(x)), \quad \varphi_0 \equiv q^3/3g^2, \quad q(r) = (a^2 + g^2 r^2)^{1/2} \quad (3.11)$$

(см. (2.3)), где a -некоторый параметр. Потенциал, отвечающий (3.11), имеет вид

$$V_0 = a^2 r^2 + g^2 r^4 - g^2 r^2/q(r) - 2q(r) + V_0^*, \quad (3.12)$$

где

$$V_0^* = [\Delta f_0 - 2r q(r) \frac{\partial f_0}{\partial r}] / f_0 \quad (3.12a)$$

для простоты $E_0 = 0$. Отметим, что в пределе $g \rightarrow 0$ точно воспроизводится решение для гармонического осциллятора. Видно, что воспроизвелась наиболее сингулярная при $r \rightarrow \infty$ сферически-симметричная часть потенциала $V^{(0)}$ в (3.10). Потенциал возмущения

$$V_1 \equiv V - V_0 = (m^2 - a^2)r^2 + g^2 r^2/q(r) + 2q(r) - V_0^* - \frac{g(\zeta-1)}{4} r^4 \cos 4\theta. \quad (3.13)$$

Отметим, что в (3.10) $|V^{(4)}| > |V^{(0)}|$ при больших r и $\zeta > -1$. Поскольку мы воспроизвели $V^{(0)}$ при $r \rightarrow \infty$, то ТВ по V_1 сходится, т.к. явления типа неустойчивости Дайсона [10] не возникает (см. критерий выбора нулевого приближения в разд.2 и обсуждение в [4].) Теперь перейдем к рассмотрению конкретных состояний.

1) Основное состояние, $f(x)=1$

В этом случае потенциал возмущения дается (3.13) при $V_0''=0$.
Уравнение на первую поправку (2.6) приобретает вид

$$\Delta \psi_1 - 2V_0' \nabla \psi_1 = E_1 - V_1, \quad (3.14)$$

а E_1 дается (2.7). Поскольку потенциал возмущения (3.13) содержит линейную суперпозицию нулевой и четвертой гармоник, будем искать ψ_1 в виде

$$\psi_1 = \psi_{10}(r) + \psi_{14}(r) \cos 4\theta. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.14), получим уравнение на коэффициентные функции

$$\psi_{10}'' + \left(\frac{1}{r} - 2V_0'\right) \psi_{10}' = E_1 - (m^2 - a^2)r^2 - g^2 r^2/q - 2q, \quad (3.16a)$$

$$\psi_{14}'' + \left(\frac{1}{r} - 2V_0'\right) \psi_{14}' - \frac{16}{r^2} \psi_{14} = \frac{g(k-1)}{4} r^4. \quad (3.16b)$$

Решение (3.16a) пишется сразу

$$r \psi_{10}' e^{-2V_0} = \int_0^r [E_1 - (m^2 - a^2)r^2 - g^2 r^2/q - 2q] e^{-2V_0(r')} r' dr', \quad (3.17)$$

где

$$E_1 = \frac{\int_0^\infty [(m^2 - a^2)r^2 + g^2 r^2/q + 2q] e^{-2V_0} r dr}{\int_0^\infty e^{-2V_0} r dr} \quad (3.18)$$

совпадает с (2.7) и одновременно соответствует условию обращения в нуль при $r \rightarrow \infty$ левой части (3.17), реализуя тем самым граничное условие для (3.14) (см. обсуждение в [3]).

Более сложная ситуация с уравнением (3.16b): оно не имеет явного решения. Поскольку для дальнейшего желательно иметь аналитические выражения для ψ_{14} , то будем его находить итерационным способом. Для того, чтобы выбрать разумное нулевое приближение, проведем анализ асимптотик производной

$$\psi_{14}' = \begin{cases} a_1 r^2 + a_2 r^5 + O(r^7), & r \rightarrow 0, \\ b_1 r^2 + b_2 + O(1/r), & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.19a)$$

$$\psi_{14}' = \begin{cases} a_1 r^2 + a_2 r^5 + O(r^7), & r \rightarrow 0, \\ b_1 r^2 + b_2 + O(1/r), & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3.19b)$$

Легко установить, что член $(-2V_0'(r)\psi_{14}')$ в (3.16b) полностью определяет первые два коэффициента разложения (3.19b), а также

он генерирует правильную функциональную структуру разложений (3.19а, б)^{*)}. Используем его в качестве нулевого приближения

$$[\psi_{n'}]_0 = - \frac{\psi_{n'} - \psi}{\psi_{n'}} r^2 \quad (3.20)$$

и разовьем итерационную процедуру

$$[\psi_{n'}]_1 = \frac{1}{2\sigma(q\mu)} \left[\psi_{n'}^0 + \frac{1}{r} \psi_{n'}^1 - \frac{\mu}{r^2} \psi_{n'}^0 \right]_{i-1}. \quad (3.21)$$

На рис.1 на примере первых итераций продемонстрирована сходимость этой процедуры. В области $r \sim 1$, существенной для дальнейших вычислений, сходимость довольно быстрая и кроме того знаки последовательных итераций чередуются. Поэтому оказалось достаточным учесть только нулевое приближение (3.20) для получения относительной точности в E_2 на уровне 10^{-3} (см. ниже).

Зная ψ_0 (3.17) и $\psi_{n'}$ (3.20)-(3.21), находим Q_2 и поправку E_2 (см. (2.7), (2.8), (2.10)):

$$-Q_2 = \psi_{10}^{12} + \frac{1}{2} \psi_{14}^{12} + 8 \frac{\psi_{10}^2}{r^2} + 2\psi_{10}' \psi_{14}' \cos 4\theta + \left(\frac{\psi_{14}^2}{2} - \frac{8}{r^2} \psi_{10}^2 \right) \cos 8\theta, \quad (3.22)$$

$$E_2 = - \frac{\int_0^\infty r dr e^{-2\mu r} \left(\psi_{10}^{12} + \frac{1}{2} \psi_{14}^{12} + 8 \frac{\psi_{10}^2}{r^2} \right)}{\int_0^\infty r dr e^{-2\mu r}}. \quad (3.23)$$

Подстановка (3.22), (3.23) в уравнение (2.9) при $n=2$ показывает, что вторая поправка имеет вид

$$\psi_2 = \psi_{20} + \psi_{24} \cos 4\theta + \psi_{28} \cos 8\theta \quad (3.24)$$

и возникает три уравнения для определения коэффициентных функций ψ_{20} , ψ_{24} , ψ_{28} , аналогичных (3.16). Уравнение на ψ_{20} решается точно, как и (3.16а), а уравнения на ψ_{24} , ψ_{28} решаются с помощью итерационной процедуры, описанной выше. Поправка E_3 дается формулой

$$E_3 = - \frac{\int_0^\infty r dr e^{-2\mu r} \left(2\psi_{10}' \psi_{20}' + \psi_{14}' \psi_{24}' + \frac{\mu}{r^2} \psi_{10} \psi_{20} \right)}{\int_0^\infty r dr e^{-2\mu r}}. \quad (3.25)$$

Результаты расчетов приведены в табл.1, где энергия в 1-м приближении дается частичной суммой

$$E^{(1)} = \sum_{n=0}^i E_n. \quad (3.26)$$

*) Это обстоятельство отражает более общее утверждение, что решение уравнения (2.6) хорошо моделируется решением уравнения

$$-2\mu^2 \psi_{10} = E_0 - Q_0.$$

Параметр α находится из условия минимальности E_0 . Анализ показывает, что каждая поправка E_n примерно на порядок меньше предыдущей E_{n-1} . Наши результаты сравниваются с полученными в [1] с помощью обрезанного матричного гамильтониана в представлении Бергмана размером 121×121 . Видно, что точности сравнимы. Мы провели расчет при $m=1$ и 0 при $g=2$, что эквивалентно сильной и ультра-сильной ($g \rightarrow \infty$) связи (см. стр.2), и точности оказались сравнимы в этих случаях. Это означает, что наш, почти аналитический метод одинаково хорошо работает при любых $g \in [0, \infty)$ и $s > -1$.

г) Состояние $f_0 = x^2 - y^2$

В этом случае $V_0 = -4q$ и потенциал возмущения (3.13) равен

$$V_1 = (m^2 - a^2)r^2 + g^2 r^2 / q + 6q - \frac{g(k-1)}{4} r^4 \ln 4q. \quad (3.27)$$

Уравнение на первую поправку (2.10) в данном случае имеет вид

$$\Delta \psi_1 - 2\nabla \psi_0 \nabla \psi_1 + \frac{4}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} - \frac{q}{r^2} \lg 2\theta \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = E_1 - V_1. \quad (3.28)$$

Ищем ψ_1 в виде (3.15). Из (3.28) возникают уравнения

$$\psi_{10}'' + \left(\frac{5}{r} - 2\psi_0'\right)\psi_{10}' + \frac{16}{r^2}\psi_{10} = E_1 - (m^2 - a^2)r^2 - g^2 r^2 / q - 6q, \quad (3.29a)$$

$$\psi_{14}'' + \left(\frac{5}{r} - 2\psi_0'\right)\psi_{14}' - \frac{32}{r^2}\psi_{14} = \frac{g(k-1)}{4} r^4. \quad (3.29b)$$

Разделим уравнение (3.29b) на 2 и сложим с (3.29a). В результате получим

$$\left(\psi_{10} + \frac{1}{2}\psi_{14}\right)'' + \left(\frac{5}{r} - 2\psi_0'\right)\left(\psi_{10} + \frac{1}{2}\psi_{14}\right)' = E_1 - (m^2 - a^2)r^2 - g^2 r^2 / q - 6q + \frac{g(k-1)}{8} r^4, \quad (3.30)$$

решение которого

$$\left(\psi_{10} + \frac{1}{2}\psi_{14}\right)' r^5 e^{-2\psi_0(r)} = \int_0^r \left(E_1 - (m^2 - a^2)r^2 - g^2 r^2 / q - 6q + \frac{g(k-1)}{8} r^4\right) r^{15-2\psi_0} dr \quad (3.31)$$

и первая поправка к энергии

$$E_1 = \frac{\int_0^{\infty} r^5 dr e^{-2\psi_0} \left[(m^2 - a^2)r^2 + g^2 r^2 / q + 6q - \frac{g(k-1)}{8} r^4 \right]}{\int_0^{\infty} r^5 dr e^{-2\psi_0}}. \quad (3.32)$$

Для нахождения ψ_{14} используем процедуру, аналогичную описанной выше.

Вторая поправка к энергии имеет вид

$$E_2 = - \int_0^{\infty} r^2 dr e^{-2\eta_0} \left[\left(\eta_0' + \frac{\eta_0''}{2} \right)^2 + \frac{\eta_0''^2}{4} + \frac{g}{r^2} \eta_0'^2 \right] / \int_0^{\infty} r^2 dr e^{-2\eta_0}. \quad (3.33)$$

Результаты расчета приведены в табл.2. Видно, что наш расчет практически полностью согласуется с [1] на уровне не менее 10^{-2} , что совпадает с оценкой точности наших результатов. Подчеркнем, что при $C > 0$ точность наших расчетов более высокая, чем в [1].

В заключение отметим, что результаты расчета состояний с $f=1$ и $f=x^2-y^2$ были нами приведены в качестве иллюстрации работоспособности метода. Вычисление следующих поправок позволяет повышать точности, если это необходимо. Заметим, что сходимость метода сильно зависит от величин параметра асимметрии: с его уменьшением точность расчета падает. Это является следствием использования сферически-симметричного нулевого приближения (3.11), в котором не учтено наличие сингулярности при $C=-1$.

в) Асимметричное нулевое приближение

Давайте сконструируем нулевое приближение, учитывающее (а) наличие сингулярности в спектре при $C=-1$ и (б) правильно воспроизводящее потенциал при $|r| \rightarrow \infty$. Для этого нам необходимо найти асимптотику $\psi(r)$ при $r \rightarrow \infty$. К сожалению, эта задача точно не решается, и поэтому мы можем удовлетворить условию (б) приближенно. Простейшая реализация экспоненты ψ (см. (2.2)):

$$\varphi_0(x,y) = \frac{a}{2}(x^2+y^2) + \frac{b}{3}g^{1/2} \frac{(x^4+y^4+2cx^2y^2)}{(x^2+y^2+d^2)^{1/2}}, \quad (3.34)$$

где a, b, d -параметры. Потенциал, отвечающий (3.34) при $f=1$ (основное состояние):

$$V_0 = (\nabla \varphi_0)^2 - bg^{1/2} \left[\frac{4}{3}(c+3) \frac{(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+d^2)^{1/2}} - \frac{10}{3} \frac{(x^4+y^4+2cx^2y^2)}{(x^2+y^2+d^2)^{1/2}} + \frac{(x^2+y^2)(x^4+y^4+2cx^2y^2)}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \right] \quad (3.35)$$

$$E_0 = 2a, \quad (3.36)$$

где

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = x \left[a + \frac{4}{3}bg^{1/2} \frac{(x^2+cy^2)}{(x^2+y^2+d^2)^{1/2}} - \frac{1}{3}bg^{1/2} \frac{(x^4+y^4+2cx^2y^2)}{(x^2+y^2+d^2)^{3/2}} \right], \quad (3.37a)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} (x \leftrightarrow y). \quad (3.37b)$$

Потенциал (3.35) правильно воспроизводит исходный потенциал при $M \rightarrow \infty$, когда x или y - фиксированы, и не совсем точно воспроизводит (3.10) при $r \rightarrow \infty$ по другим направлениям. Однако, даже такой приближенный учет асимметрии потенциала позволяет резко повысить точность вычислений ТВ. В табл.1 приведены результаты расчета основного состояния с учетом первой поправки к энергии

$$E_1 = \int dx dy e^{-2\varphi_0} (V - V_0) / \int dx dy e^{-2\varphi_0}. \quad (3.38)$$

Параметры a , b , d находились из условия минимальности $E^{(0)} = E_0 + E_1$, и поэтому наши результаты - это оценка энергии сверху. Видно, что для СЭО получаются более точные результаты, чем в [1], в остальном наблюдается практически полное согласие на уровне 10^{-3} .

Рассмотрим возбужденное состояние (1) $f_0 = x^2 - y^2$. В этом случае невозмущенная энергия

$$E_0 = 6a, \quad (3.39)$$

а добавка к невозмущенному потенциалу

$$V_0^* = -\frac{4bg^{1/2}}{3} \left[4(x^2 + y^2) - \frac{(x^4 + y^4 + 2cx^2y^2)}{(x^2 + y^2 + d^2)} \right] / (x^2 + y^2 + d^2)^{1/2}. \quad (3.40)$$

Первая поправка к энергии

$$E_1 = \int dx dy (x^2 - y^2)^2 e^{-2\varphi_0} (V - V_0 - V_0^*) / \int dx dy (x^2 - y^2)^2 e^{-2\varphi_0}. \quad (3.41)$$

Результаты для $E^{(0)}$ даны в табл.2. Мы видим, что наш расчет дает значительно более высокую точность, чем в [1].^{*)} Подчеркнем, что, как и в предыдущем случае, наши результаты - оценка сверху точных значений.

И последнее состояние, которое мы рассмотрим, относится к первой группе, f_1^* (см. (3.66)):

$$f = x^2 + y^2 - d^2 + \beta x^2 y^2 - \gamma x^4 y^4, \quad (3.42)$$

*) Отсюда можно сделать вывод, что реальная точность расчетов этого состояния в [1] на уровне 10^{-3} .

где d, β, χ - параметры. Потребуем ортогональности этого состояния к основному, которое найдено ранее. Поскольку мы нашли основное состояние с точностью $10^{-3} \div 10^{-4}$, то можно надеяться, что систематическая ошибка будет того же порядка. E_0 дается (3.36), а добавка к (3.35) вычисляется по формуле:

$$V_0^* = (\Delta f_0 - 2\chi \nabla f_0) / f_0. \quad (3.43)$$

Как и в предыдущих случаях, параметры находятся из минимальности $E^{(0)}$ и плавно, и довольно слабо зависят от C . Результаты приведены в табл.3. Отметим, что наш расчет энергии систематически идет ниже, чем в [1], на уровне $10^{-2} - 10^{-3}$, кроме точки $C=-1$. Видимо, это нельзя объяснить погрешностью при ортогонализации, поэтому мы оцениваем нашу точность на уровне $10^{-3} \div 10^{-4}$. При $C=0$ состояние вырождено с f_1^- и наши вычисления согласуются.

Мы провели расчеты еще нескольких возбужденных состояний для проверки картины деформации спектра при изменении параметра C , предложенной в [1], рис.2. Эта картина полностью подтверждается. Мы не будем приводить результаты расчетов, а продемонстрируем только, как деформируются узловые поверхности некоторых состояний (см.рис.2) при вариации C . Подчеркнем важное свойство узловых поверхностей: при наложении рисунков узловых поверхностей состояний f_1^+ и f_1^- , $2f_1^+$ и $2f_1^-$ при одинаковом значении C в точках пересечения узловые линии перпендикулярны. Видимо, этот результат имеет общий характер (см.также [11]).

Особо отметим устройство узловых поверхностей в этом случае. При учете в (3.42) только "сферически-симметричной" части, $\beta, \chi=0$ точность расчета довольно низкая $10^{-1} \div 10^{-2}$. Учет первой гармоники: $\beta \neq 0$ оказался существенным. Параметр β (см.таб.3) оказался порядка α , и точность в энергии возросла до $\sim 10^{-3}$. При включении второй гармоники $\chi \neq 0$ получилось, что его вклад как минимум на порядок меньше β и точность в энергии повысилась до $\sim 10^{-4}$. Вклад более высоких волн, видимо, пренебрежимо мал при данных точностях. Объяснение этого явления возможно на языке ТВ по степеням g (см. Приложение): $d \sim g^0, \beta \sim g, \chi \sim g^3$ и коэффициент при n -й волне $\sim g^{2n-1}$. Аналогичная ситуация возникает и для других состояний:

вклад первой волны ($\sim X^2 Y^2$) - велик, а вклады последующих волн ($\sim X^4 Y^4$ и т.д.) - резко убывают.

4. Трехмерный ангармонический осциллятор

Потенциал (1.1) в этом случае

$$V = m^2(x^2 + y^2 + z^2) + g(y^4 + y^4 + z^4 + 2c(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)) \quad (4.1)$$

и его симметрия совпадает с симметрией куба. Область изменения параметра C дается

$$-\frac{1}{2} \leq C < \infty. \quad (4.2)$$

Преобразований, аналогичных (3.2)–(3.3), не существует.

Как в случае $d=2$, можно провести классификацию состояний с помощью операторов четности по X , Y , Z . Существуют восемь групп состояний: $(+++)$, $(++-)$, $(+-+)$, $(-++)$, $(+--)$, $(-+-)$, $(--+)$, $(---)$. Как следствие перестановочной симметрии $X \leftrightarrow Y$, $X \leftrightarrow Z$, $Y \leftrightarrow Z$ состояния групп 2–4 и 5–7 вырождены. Состояния первой и восьмой группы шести типов: четные и нечетные относительно замен $X \leftrightarrow Y$, $X \leftrightarrow Z$, $Y \leftrightarrow Z$; причем состояния, полностью четные или полностью нечетные относительно этих замен, невырождены, тогда как каждое из остальных состояний трехкратно вырождено.

Также, как при $d=2$, эта классификация неполна, поскольку не проклассифицированы состояния внутри каждой из групп. Полная внутренняя классификация возможна только при $C=0$ (случай разделения переменных в декартовых координатах, состояние имеет квантовые числа (n_1, n_2, n_3)) и $C=1$ (сферически симметричный случай, квантовые числа (n, l, m)).

Для изучения предэкспоненциального фактора f также, как и в предыдущем случае, может быть использована ТВ по степеням g . Также можно показать, что узловые поверхности хорошо приближаются совокупностью алгебраических кривых. Для примера выпишем f для нескольких первых состояний:

1) первая группа $(+++)$:

$$f_0 = 1, \quad (4.3a)$$

$$f_1^- = (x^2 - y^2), (x^2 - z^2), \quad (4.3b)$$

$$f_1^+ = x^2 + y^2 + z^2 - a_0^2 + a_1(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + \dots; \quad (4.3b)$$

2) вторая группа (+-):

$${}_2f_0 = z, \quad (4.4a)$$

$${}_2f_1^- = z(x^2 - y^2), \quad (4.4b)$$

$${}_2f_1^+ = z [d_1(x^2 + y^2) + z^2 - d_0^2 + d_2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + \dots]; \quad (4.4b)$$

3) пятая группа (+-):

$${}_5f_0 = yz, \quad (4.5a)$$

$${}_5f_1^- = yz[y^2 - z^2], \quad (4.5b)$$

$${}_5f_1^+ = yz [x^2 + d_1(y^2 + z^2) - d_0^2 + d_2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + \dots]; \quad (4.5b)$$

4) восьмая группа (---):

$${}_8f_0 = xyz, \quad (4.6a)$$

$${}_8f_1^- = xyz(x^2 - y^2), \quad xyz(x^2 - z^2), \quad (4.6b)$$

$${}_8f_1^+ = xyz [x^2 + y^2 + z^2 - d_0^2 + d_2(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + \dots]; \quad (4.6b)$$

Все параметры в (4.3)-(4.6) являются функциями m , g , c .

Теперь, когда ясна структура предэкспоненциального фактора в (2.2) для разных состояний, перейдем к расчетам спектра.

б) Сферически-симметричное нулевое приближение

Потенциал (4.1) в сферических координатах (r, θ, ϕ) имеет вид:

$$V \approx V^{(0)}(r) + V^{(20)}(r)Y_0^0 + V^{(40)}(r)Y_4^0 = m^2r^2 + g^2r^4 - \frac{2g^2c}{5}r^4Y_4^0 - \frac{g^2c}{20}r^4Y_4^0, \quad (4.7)$$

где $g^2 \approx g[1 + 2(c-1)/5]$; $Y_4^0, Y_4^{\pm 4}$ - сферические гармоники в стандартной записи [12]. Как и в случае $d=2$, выберем волновую функцию нулевого приближения в виде (3.11). Потенциал, ей соответствующий,

$$V_0 = m^2r^2 + g^2r^4 - g^2r^2/q_0 - 1q_0 + V_0^*, \quad (4.8)$$

где $q(r) = (a^2 + g^* r^2)^{1/2}$, а V_0^* дается (3.12а). Как и в случае $d=2$, данный выбор нулевого приближения адекватен рассматриваемой задаче (см. обсуждение на стр. 8). Потенциал возмущения

$$V_1 \equiv V - V_0 = (m^2 - a^2)r^2 + g^* r^2 / q(r) + 3q(r) - V_0^* + V^{(40)} Y_4^0 + V^{(44)} Y_4^4 \quad (4.9)$$

Перейдем к расчету конкретных состояний.

1) Основное состояние $f=1$.

в этом случае $V_0^* = 0$ и потенциал возмущения дается (4.9). Как и при $d=2$, ищем φ_1 в виде разложения по гармоникам

$$\varphi_1 = \varphi_{10}(r) + \varphi_{14}(r) Y_4^0 + \varphi_{144}(r) Y_4^4, \quad (4.10)$$

Уравнения на коэффициентные функции (ср. (3.16))

$$\varphi_{10}'' + \left(\frac{2}{r} - 2\varphi_0'\right)\varphi_{10}' = E_1 - (m^2 - a^2)r^2 - g^* r^2 / q(r) - 3q(r), \quad (4.11a)$$

$$\varphi_{14}'' + \left(\frac{2}{r} - 2\varphi_0'\right)\varphi_{14}' - \frac{20}{r^2}\varphi_{14} = \frac{2g(c-1)}{5} r^4, \quad (4.11b)$$

$$\varphi_{144}'' + \left(\frac{2}{r} - 2\varphi_0'\right)\varphi_{144}' - \frac{20}{r^2}\varphi_{144} = \frac{g(c-1)}{420} r^4. \quad (4.11в)$$

Решение (4.11а) дается (ср. (3.17), (3.18)):

$$r^2 \varphi_{10}' e^{-2\varphi_0} = \int_0^r r'^2 dr' e^{-2\varphi_0(r')} \left[E_1 - (m^2 - a^2)r'^2 - g^* r'^2 / q(r') - 3q(r') \right], \quad (4.12)$$

где

$$E_1 = \frac{\int_0^\infty r^2 dr e^{-2\varphi_0} [(m^2 - a^2)r^2 + g^* r^2 / q + 3q]}{\int_0^\infty r^2 dr e^{-2\varphi_0}} \quad (4.13)$$

(см. (2.7)). Для нахождения φ_{14} и φ_{144} используем итерационную процедуру, аналогичную описанной выше (см. стр. 9-10). После этого можно вычислить вторую поправку к энергии

$$E_2 = - \int_0^\infty r^2 dr e^{-2\varphi_0} \left[\varphi_{10}'' + \frac{\varphi_{14}''}{9} + 2240 \varphi_{144}'' + \frac{20}{9} \frac{\varphi_{14}^2}{r^2} + \frac{4480 \varphi_{144}^2}{r^2} \right] \int_0^\infty r^2 dr e^{-2\varphi_0}. \quad (4.14)$$

Учет нулевого приближения в φ_{14} , φ_{144} позволяет вычислить E_2 с абсолютной точностью 10^{-3} . Результаты расчета при $m=0, 1$, $g=2$ и $c \in [-0.5, 1]$ приведены в табл. 4. Точность расчета может быть повышена с помощью вычисления E_3 . Процедура нахождения E_3 аналогична

описанной ранее (см. стр. 10).

2) Состояние $f=2$.

Как следствие симметрии задачи узловая поверхность не деформируется при изменении от параметров потенциала. Добавка к потенциалу возмущения (см. (4.9)):

$$V_0^* = -2q(r).$$

Поправка φ_1 имеется в виде

$$\varphi_1 = \varphi_{10}(r) + \varphi_{120}(r) Y_2^0 + \varphi_{140}(r) Y_4^0 + \varphi_{144}(r) Y_4^4. \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15) в (2.9), получаем систему уравнений:

$$\varphi_{10}'' + \left(\frac{4}{r} - 2\varphi_0'\right)\varphi_{10}' - \frac{16}{3} \frac{\varphi_{140}}{r^2} - 4 \frac{\varphi_{120}}{r^2} = E_1 - V_{10}, \quad (4.16)$$

$$\varphi_{120}'' + \left(\frac{4}{r} - 2\varphi_0'\right)\varphi_{120}' - \frac{10}{r^2} \varphi_{120} + \frac{40}{3} \frac{\varphi_{140}}{r^2} = 0, \quad (4.17)$$

$$\varphi_{140}'' + \left(\frac{4}{r} - 2\varphi_0'\right)\varphi_{140}' - \frac{28}{r^2} \varphi_{140} = -V_{140}, \quad (4.18)$$

$$\varphi_{144}'' + \left(\frac{4}{r} - 2\varphi_0'\right)\varphi_{144}' - \frac{28}{r^2} \varphi_{144} = -V_{144}. \quad (4.19)$$

Система (4.16)-(4.19) может быть диагонализирована с помощью введения новых функций:

$$\tilde{\varphi}_{10} = \varphi_{10} + \frac{2}{3} \varphi_{120}, \quad (4.20)$$

$$\tilde{\varphi}_{120} = \varphi_{120} + \frac{20}{27} \varphi_{140}. \quad (4.21)$$

В результате, вместо (4.16)-(4.17) возникают уравнения

$$\tilde{\varphi}_{10}'' + \left(\frac{4}{r} - 2\varphi_0'\right)\tilde{\varphi}_{10}' = E_1 - V_{10}, \quad (4.16a)$$

$$\tilde{\varphi}_{120}'' + \left(\frac{4}{r} - 2\varphi_0'\right)\tilde{\varphi}_{120}' - \frac{10}{r^2} \tilde{\varphi}_{120} = -\frac{20}{27} V_{140}. \quad (4.17a)$$

Решение (4.16a) имеет вид

$$r^4 \tilde{\varphi}_{10}' e^{-2\varphi_0} = \int_0^r r'^4 dr' e^{-2\varphi_0(r')} (E_1 - V_{10}), \quad (4.22)$$

где

$$E_1 = \frac{\int_0^\infty V_{10} r^4 e^{-2\varphi_0} dr}{\int_0^\infty r^4 e^{-2\varphi_0} dr}. \quad (4.23)$$

Решения уравнений (4.17а), (4.18), (4.19) находятся с помощью итерационной процедуры, описанной ранее (см. стр. 9). Легко вычислить вторую поправку к энергии:

$$E_2 = - \int_0^{\infty} r^4 dr e^{-2\varphi_0} \left[\tilde{\Psi}_{10}^{12} + \frac{28}{125} \tilde{\Psi}_{120}^2 + \frac{25}{297} \Psi_{140}^{12} + \frac{6720}{11} \Psi_{144}^{12} + \right. \\ \left. + \frac{54}{5} \frac{\tilde{\Psi}_{120}^2}{r^2} + \frac{700}{297} \frac{\Psi_{140}^2}{r^2} + \frac{18960}{11} \frac{\Psi_{144}^2}{r^2} \right] / \int_0^{\infty} r^4 dr e^{-2\varphi_0}. \quad (4.24)$$

Результаты расчета приведены в табл. 5. Данное состояние трехкратно вырождено.

3) Состояние $f=x_2$

Узловая поверхность не деформируется, и добавка к потенциалу возмущения (см. (4.9)) равна

$$V_0^x = -4q(r). \quad (4.25)$$

Поправка Ψ_4 ищется в виде

$$\Psi_4 = \Psi_{10} + \Psi_{120} Y_2^0 + \Psi_{122} Y_2^2 + \Psi_{140} Y_4^0 + \Psi_{144} Y_4^2. \quad (4.26)$$

Возникающая система уравнений для определения коэффициентных функций диагонализуется путем введения новых функций

$$\tilde{\Psi}_{10} = \Psi_{10} - \frac{6}{7} \Psi_{122} + \frac{1}{7} \Psi_{120} - \frac{4}{21} \Psi_{140}, \quad (4.27)$$

$$\tilde{\Psi}_{120} = \Psi_{120} + \frac{5}{33} \Psi_{140} + \frac{280}{11} \Psi_{144}, \quad (4.28)$$

$$\tilde{\Psi}_{122} = \Psi_{122} - \frac{280}{11} \Psi_{144} \quad (4.29)$$

и окончательно

$$\tilde{\Psi}_{10}'' + \left(\frac{6}{r} - 2\varphi_0' \right) \tilde{\Psi}_{10}' = E_1 - V_0 + \frac{4}{21} V_{140}, \quad (4.30)$$

$$\tilde{\Psi}_{120}'' + \left(\frac{6}{r} - 2\varphi_0' \right) \tilde{\Psi}_{120}' - 14 \frac{\tilde{\Psi}_{120}}{r^2} = -\frac{5}{33} V_{140} - \frac{280}{11} V_{144}, \quad (4.31)$$

$$\tilde{\Psi}_{122}'' + \left(\frac{6}{r} - 2\varphi_0' \right) \tilde{\Psi}_{122}' - 14 \frac{\tilde{\Psi}_{122}}{r^2} = \frac{280}{11} V_{144}, \quad (4.32)$$

$$\Psi_{140}'' + \left(\frac{6}{r} - 2\varphi_0' \right) \Psi_{140}' - 36 \frac{\Psi_{140}}{r^2} = -V_{140}, \quad (4.33)$$

$$\varphi_{144}'' + \left(\frac{6}{r} - 2\varphi_0'\right)\varphi_{144}' - 36 \frac{\varphi_{144}}{r^2} = -V_{144}, \quad (4.34)$$

решение уравнения (4.30)

$$r^6 \tilde{\varphi}_{10}' e^{-2\varphi_0} = \int_0^r r'^6 dr' e^{-2\varphi_0(r')} \left(E_1 - V_{10} + \frac{4}{21} V_{140}\right), \quad (4.35)$$

где

$$E_1 = \frac{\int_0^{\infty} r'^6 dr' e^{-2\varphi_0} \left(V_{10} - \frac{4}{21} V_{140}\right)}{\int_0^{\infty} r'^6 dr' e^{-2\varphi_0}}. \quad (4.36)$$

Решения уравнений (4.31)–(4.34) находятся с помощью итерационной процедуры, описанной выше. После этого вычисляется поправка E_2 , формула для которой легко находится из (2.7). Результаты приведены в табл.6. Данное состояние трехкратно вырождено.

4) Состояние $f=x^2 - y^2$.

Узловая поверхность не деформируется и добавка к потенциалу возмущения дается (4.25), т.е. такая же, как и в предыдущем случае. Поправка φ_1 ищется в виде (4.15). Возникающая система уравнений на коэффициентные функции диагонализуется после введения

$$\tilde{\varphi}_{10} = \varphi_{10} - \frac{2}{7} \varphi_{120} + \frac{4}{21} \varphi_{140} + 40 \varphi_{144}, \quad (4.37)$$

$$\tilde{\varphi}_{120} = \varphi_{120} - \frac{10}{11} \varphi_{140} - \frac{560}{11} \varphi_{144}, \quad (4.38)$$

и окончательный вид системы

$$\tilde{\varphi}_{10}'' + \left(\frac{6}{r} - 2\varphi_0'\right)\tilde{\varphi}_{10}' = E_1 - V_{10} - \frac{4}{21} V_{140} - 40 V_{144}, \quad (4.39)$$

$$\tilde{\varphi}_{120}'' + \left(\frac{6}{r} - 2\varphi_0'\right)\tilde{\varphi}_{120}' = 14 \frac{\tilde{\varphi}_{120}}{r^2} = \frac{10}{11} V_{140} + \frac{560}{11} V_{144}, \quad (4.40)$$

где уравнения на φ_{140} и φ_{144} совпадают с (4.33) и (4.34).

Решение (4.39)

$$r^6 \tilde{\varphi}_{10}' e^{-2\varphi_0} = \int_0^r \left(E_1 - V_{10} - \frac{4}{21} V_{140} - 40 V_{144}\right) r'^6 e^{-2\varphi_0(r')} dr', \quad (4.41)$$

$$E_1 = \frac{\int_0^{\infty} \left(V_{10} + \frac{4}{21} V_{140} + 40 V_{144}\right) r'^6 e^{-2\varphi_0} dr}{\int_0^{\infty} r'^6 e^{-2\varphi_0} dr}. \quad (4.42)$$

Решения уравнений (4.40), (4.33), (4.34) находились с помощью итерационной процедуры, описанной выше. Затем вычислялась поправка E_2 . Результаты приведены в табл.7. Данное состояние трехкратно вырождено.

5) Состояние $f=xyz$.

Узловая поверхность не деформируется, и добавка к потенциалу возмущения

$$V_0^* = -6q(r). \quad (4.43)$$

Поправка ψ имеет вид (4.15). Возникающая система уравнений на коэффициентные функции диагонализуется после введения

$$\tilde{\Psi}_{10} = \Psi_{10} - \frac{7}{33} \Psi_{140} - \frac{280}{11} \Psi_{144}, \quad (4.45)$$

$$\tilde{\Psi}_{120} = \Psi_{120} - \frac{10}{39} \Psi_{140} + \frac{560}{11} \Psi_{144}. \quad (4.46)$$

Окончательный вид системы:

$$\tilde{\Psi}_{10}'' + \left(\frac{p}{r} - 2\psi_0'\right) \tilde{\Psi}_{10}' = E_1 - V_{10} + \frac{7}{33} V_{140} + \frac{280}{11} V_{144}, \quad (4.47)$$

$$\tilde{\Psi}_{120}'' + \left(\frac{p}{r} - 2\psi_0'\right) \tilde{\Psi}_{120}' - \frac{18}{r^2} \tilde{\Psi}_{120} = 0, \quad (4.48)$$

$$\Psi_{140}'' + \left(\frac{p}{r} - 2\psi_0'\right) \Psi_{140}' - \frac{44}{r^2} \Psi_{140} = -V_{140}, \quad (4.49)$$

$$\Psi_{144}'' + \left(\frac{p}{r} - 2\psi_0'\right) \Psi_{144}' - \frac{44}{r^2} \Psi_{144} = -V_{144}. \quad (4.50)$$

Решение уравнения (4.47)

$$r^2 \tilde{\Psi}_{10}' e^{-2\psi_0} = \int_0^r \left(E_1 - V_{10} + \frac{7}{33} V_{140} + \frac{280}{11} V_{144}\right) r_1^2 e^{-2\psi_0(r_1)} dr_1, \quad (4.51)$$

$$E_1 = \frac{\int_0^\infty \left(V_{10} - \frac{7}{33} V_{140} - \frac{280}{11} V_{144}\right) r^2 e^{-2\psi_0} dr}{\int_0^\infty r^2 e^{-2\psi_0} dr}. \quad (4.52)$$

Решение (4.48)

$$\tilde{\chi}_{120} = 0, \quad (4.53)$$

а решения (4.49), (4.50) находятся с помощью итерационной процедуры, описанной ранее. Результаты расчетов приведены в таб.8. Данное состояние невырождено.

На этом мы завершаем рассмотрение спектра трехмерного ангармонического осциллятора (4.1) в рамках сферически-симметричного нулевого приближения и переходим к расчетам в рамках несимметричного нулевого приближения.

в) Несимметричное нулевое приближение

Простейшее асимметричное нулевое приближение, максимально правильно воспроизводящее поведение потенциала на больших расстояниях и учитывающее наличие сингулярности при $C=-1/2$, является непосредственным обобщением (3.34)

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{a}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{bg^{1/2}}{3} \frac{\mathcal{W}(x, y, z)}{r_d}, \quad (4.54)$$

где a, b, d -параметры; введены обозначения $r_d = (x^2 + y^2 + z^2 + d^2)^{1/2}$, $\mathcal{W}(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + 2c(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$. Тогда потенциал, отвечающий (4.54) ($f_0=1$ -основное состояние):

$$V_0 = (\nabla \varphi_0)^2 - \frac{bg^{1/2}}{d} \left[\frac{4}{3}(3+2c)(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{\mathcal{W}}{r_d^2} \left(\frac{11}{3} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{r_d^2} \right) \right], \quad (4.55)$$

а

$$E_0 = 3a, \quad (4.56)$$

где

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = x \left\{ a + \frac{4bg^{1/2}}{3} \frac{(x^2 + c(y^2 + z^2))}{r_d} - \frac{bg^{1/2}}{3} \frac{\mathcal{W}}{r_d^3} \right\}, \quad (4.57a)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = y \left\{ a + \frac{4bg^{1/2}}{3} \frac{(y^2 + c(x^2 + z^2))}{r_d} - \frac{bg^{1/2}}{3} \frac{\mathcal{W}}{r_d^3} \right\}, \quad (4.57b)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = z \left\{ a + \frac{4bg^{1/2}}{3} \frac{(z^2 + c(x^2 + y^2))}{r_d} - \frac{bg^{1/2}}{3} \frac{\mathcal{W}}{r_d^3} \right\}. \quad (4.57c)$$

Потенциал (4.55) правильно воспроизводит исходный потенциал при $|r| \rightarrow \infty$ и фиксации двух переменных, но дает неправильную кон-

станту при $r \rightarrow \infty$ по другим лучам; но эти константы отличаются слабо. Даже такой приближенный учет асимметрии позволяет резко повысить точность расчетов ТВ. В табл.4 приведены результаты расчета энергии основного состояния с учетом первой поправки.

$$E_1 = \int dx dy dz e^{-2\varphi_0} (V - V_0) / \int dx dy dz e^{-2\varphi_0} \quad (4.58)$$

Параметры a, b, d находились из требования минимальности $E^* = E_0 + E_1$, и поэтому наши результаты - оценка сверху точных значений энергии. Видно, что практически для всех значений параметра C данный расчет дает более высокую точность, чем основанный на сферически-симметричном нулевом приближении (см. п.4а). Этот контраст особенно разителен при $m=0$.

Рассмотрим возбужденные состояния. В этом случае появляется добавка к потенциалу V_0 , равная

$$V_0^* = (\Delta f_0 - 2\nabla\varphi_0 \nabla f_0) / f_0 \quad (4.59)$$

и меняется энергия нулевого приближения E_0 .

1) состояние $f=x$. Поправка к потенциалу и энергия E_0 .

$$V_0^* = -\frac{2}{3} \frac{bg^{4k}}{f_0^2} \left[4(x^2 + c(y^2 + z^2)) - \frac{W}{f_0^2} \right], \quad E_0 = 5a \quad (4.60)$$

Результаты расчета приведены в табл.5.

2) состояние $f=xy$. Поправка к потенциалу и E_0 .

$$V_0^* = -\frac{4}{3} \frac{bg^{3k/2}}{f_0} \left[2(x^2 + y^2 + c(x^2 + y^2 + z^2)) - \frac{W}{f_0^2} \right], \quad E_0 = 7a \quad (4.61)$$

Результаты расчета приведены в табл.6.

3) состояние $f=x^2 - y^2$. Поправка к потенциалу

$$V_0^* = -\frac{2}{3} \frac{bg^{4k}}{f_0} \left[4(x^2 + y^2 + cz^2) - \frac{W}{f_0^2} \right], \quad E_0 = 7a \quad (4.62)$$

Результаты расчета приведены в табл.7.

4) состояние $f=xyz$. Поправка к потенциалу и E_0 .

$$V_0^* = -\frac{2}{3} \frac{bg^{4k}}{f_0} \left[8(1+2c)(x^2 + y^2 + z^2) - 3 \frac{W}{f_0^2} \right], \quad E_0 = 9a \quad (4.63)$$

Результаты расчета приведены в табл.8.

5) состояние $f=x(y^2-z^2)$. Поправка к потенциалу и E

$$V_0^* = -\frac{2}{3} \frac{b_2^*}{r_2} \left[4(1+2c)x^2 + 4(2+c)(y^2+z^2) - 3 \frac{W}{r_2} \right] \quad (4.64)$$

а E_0 дается (4.63). Результаты расчета E в табл.9.

6) состояние $f=x^2+y^2+z^2-\alpha^2+\beta(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)$

Энергия нулевого приближения совпадает с (4.63). Мы не будем приводить явной формулы для V_0^* вследствие ее громоздкости. Результаты расчета $E^{(0)}$, α , β приведены в табл.10. Отметим, что это состояние аналогично (3.42) при $d=2$. В первом приближении узловая поверхность представляет собой сфер увеличивающегося радиуса α с уменьшением параметра C , с растущими на ней по биссекторным направлениям выпуклостями. Это состояние невырождено и при $C=1$ переходит в $\{1,0,0\}$.

7) состояние $f=x(y^2+z^2-\alpha^2+\beta y^2z^2)$

Энергия нулевого приближения совпадает с (4.63). Явный вид V_0^* достаточно громоздок, и мы не будем его приводить. Состояние трехкратно вырождено. В точках $C=0,1$ это состояние дополнительно вырождено с состоянием типа 4 и 5.

Итак, мы посчитали первые 17 состояний в потенциале (4.1). На рис.3, аналогичном рис.2 из работы [1], показаны движения уровней при $m=1$ в зависимости от параметра C . К сожалению, нам не удалось обнаружить ни одной точки квазипересечений уровней.

В заключение попытаемся оценить точность наших расчетов. Это можно сделать только в точках $C=0,1$. При $C=0$ (разделение переменных в декартовых координатах) мы вычислили энергии состояний через спектр энергий одномерного осциллятора, найденный в [1]. Результаты приведены в таб.11. При $C=1$ (сферический случай) энергия основного состояния совпадает с найденной в [13] при $m=0$, однако точность в определении энергий других состояний в работе [13] более низкая.

5. d-мерный ангармонический осциллятор

В данном разделе мы рассмотрим d-мерный случай (1.1). Запишем исходный потенциал в d-мерных сферических координатах:

$$V = m^2 r^2 + g^* r^4 + g(1-c)r^4 \langle Y \rangle, \quad g^* = g \left[c + \frac{3(1-c)}{d+2} \right], \quad r = \left(\sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^{1/2}, \quad (5.1)$$

где $\langle Y \rangle$ — полный шнур по всем индексам симметричного тензора четвертого ранга Y_{lmnk} . Этот тензор реализует неприводимое представление группы $SO(n)$ и его явный вид

$$Y_{lmnk} = n_l n_m n_n n_k - \frac{1}{d+4} (n_l n_m \delta_{nk}) + \frac{1}{(d+2)(d+4)} \delta_{lm} \delta_{nk}, \quad (5.2)$$

где $n_i = x_i / r$. Квадратные скобки подразумевают симметризацию. Данное представление для нас более удобно, чем использование d-мерных сферических гармоник. Легко убедиться, что в точке $C = -(d-1)^{-1}$ должна быть сингулярность, задача становится нефизической, ибо при меньших C потенциал (5.1) неограничен снизу.

Цель данного раздела чисто методическая: убедиться, что сферически-симметричное нулевое приближение, аналогичное (3.11), осмысленно и дает разумные результаты. В самом деле, (3.11) легко обобщается на случай произвольных d

$$\Psi_0 = f_0(x) \exp \left\{ -\frac{1}{3g^*} (a^2 + g^* r^2)^{1/2} \right\}. \quad (5.3)$$

Соответствующий потенциал

$$V_0 = a^2 r^2 + g^* r^4 - g^* r^2 / (a^2 + g^* r^2)^{1/2} - d (a^2 + g^* r^2)^{1/2} + V_0^*, \quad (5.4)$$

где V_0^* дается (3.12), $E_0 = 0$.

Мы рассмотрим наихудшую при $d \rightarrow \infty$ точку: $C=0$. В этой точке переменные в исходном уравнении Шредингера разделяются, энергия выражается через энергии при $d=1$ и, в частности, ответ для основного состояния равен:

$$E_d^0 = d \cdot E_1^0, \quad (5.5)$$

где E_1^0 — энергия основного состояния одномерной задачи.

Остановимся подробно на случае основного состояния. Первая

поправка к энергии

$$E^{(1)} = \int_0^{\infty} r^{d-1} dr \left[(m^2 - a^2)r^2 - g^2 r^2 (a^2 + g^2 r^2)^{-1/2} - d(a^2 + g^2 r^2)^{1/2} \right] e^{-2(a^2 + g^2 r^2)^{3/2} / 3g^2} / \int_0^{\infty} r^{d-1} dr e^{-2(a^2 + g^2 r^2)^{3/2} / 3g^2}. \quad (5.6)$$

Нетрудно показать, что в пределе $d \rightarrow \infty$

$$E^{(1)} = \begin{cases} 3^{1/3} \cdot 2^{-1/3} g^{1/3} d + \dots, & m=0, a^2 = (3g)^{2/3} / 2 \\ 13/2^{10/3} \cdot d + \dots, & m=1, g=2, a^2 = 5/2. \end{cases} \quad (5.7)$$

Отметим, что асимптотика при $m=0$ совпадает с полученной в [8], ф-ла (4.19).

В табл.12 приведены результаты расчетов при $d=1 \div 10$ и $d=\infty$ по формуле (5.6) с минимизацией $E^{(1)}$ по параметру a , по асимптотической формуле (5.7), а также результаты пересчета энергии основного состояния (5.5). Видно, что расхождения (5.6), (5.7) с точными результатами (5.5) не превосходят 1-2%. Стоит подчеркнуть поразительную точность асимптотических формул (5.7). Отметим также, что асимптотика первых возбужденных состояний дается формулами (5.7).

Не представляет особого труда вычислить поправки к (5.6), (5.7). Процедура аналогична описанной ранее, в разд. 3,4.

6. Заключение

Итак, мы описали процедуру нахождения спектра многомерного ангармонического осциллятора (1.1). Видно, что она оказалась достаточно проста и прозрачна. Сферически-симметричное нулевое приближение позволило при учете первых двух-трех поправок получить точности при $d=2$, сравнимые с полученными в [1] с помощью обрезанного представления Баргмана размером 121×121 . Более прогрессивным по сравнению с [1] нам кажется метод характеристических функций, предложенный в [6] и близко связанный с методом Ланцоша. Этот метод позволяет получать высокие точности, однако сопряжен с трудностями вычисления большого числа коэффициентов стандартной ТВ Релея-Шредингера. Подчеркнем, что в [6] с учетом первых 43 коэффициентов стандартной ТВ были найдены первые 4 уровня при $d=2$. Отметим, что при $C=1$ наши результаты совпадают с [6] на уровне 10^5 - 10^6 .

Нами впервые были найдены первые 17 уровней при $d=3$. Движение уровней как функция C показано на рис.3.

Важным вопросом является изучение деформаций узловых поверхностей. Мы выделили все узловые поверхности, которые не деформируются под влиянием возмущения. Для тех же поверхностей, которые деформируются, можно исследовать их функциональную структуру с помощью ТВ по степеням g : она оказалась довольно простой. Важным обстоятельством является малость вкладов высших гармоник. Видно, этот результат имеет общий характер и справедлив не только для тех состояний, которые исследовались.

Вселяет надежду факт, что сферически-симметричное приближение (3.11) при больших размерностях $d \gg 1$ адекватно даже в точке $C=0$ (разделение переменных в декартовых координатах). Учет первой поправки дает точность в энергии основного состояния порядка процента. Дальнейшие уточнения не представляют каких-либо принципиальных трудностей.

В заключение я хотел бы выразить свою благодарность К.А.Тер-Мартirosяну, А.Г.Ушверидзе, М.А.Шубину за полезные обсуждения, интерес к работе и поддержку.

Приложение

Стандартная теория возмущений для волновых функций двумерного ангармонического осциллятора (1.1)

Для того, чтобы разобраться в устройстве узловых поверхностей возбужденных состояний, построим ТВ по степеням ε , с гармоническим осциллятором $V_0 = x^2 + y^2$ в качестве невозмущенной задачи.

Эта задача интересна сама по себе. Впервые она рассматривалась (но только для основного состояния) в [4], а затем в [2]. В работах [2-3] было показано, что при построении стандартной ТВ в рамках метода "нелинеаризации" имеет место алгебраизация ТВ, когда поправки f_n и φ_n являются конечными полиномами. Таким образом, построение ТВ сводится к решению рекуррентных соотношений. Одним из важных моментов этой процедуры является существование равенства

$$(\Delta f_0 - 2 \nabla \varphi_0 \nabla f_0) / f_0 = -2k, \quad (\text{П.1})$$

где f_0 представляет собой суперпозицию парных произведений полиномов Эрмита $H_{k_1}(x)$, $H_{k_2}(y)$ с фиксированным значением $k = k_1 + k_2$. Суть задачи: в согласованном решении рекуррентных соотношений для φ_n , f_n , R_n (см. [3]) в классе полиномов:

$$\Delta f_n - 2 \vec{x} \nabla f_n + 2k f_n = \sum_{i=0}^{n-1} (2 \nabla f_i \nabla \varphi_{n-i} - f_i R_{n-i}), \quad (\text{П.2})$$

$$\Delta \varphi_n - 2 \vec{x} \nabla \varphi_n + R_n = E_n - Q_n, \quad (\text{П.3})$$

где Q_n дается (2.10). В случаях, когда узловая поверхность не деформируется под влиянием возмущения, т.е. когда $f_n = 0$ ($n > 0$), тогда и $R_n = 0$, и нужно решать только уравнение (П.3).

Стоит подчеркнуть, что поправка φ_n всегда имеет вид полинома от двух переменных x^2 и y^2 степени $(n+1)$:

$$\varphi_n = a(x^{2n+2} + y^{2n+2}) + b x^2 y^2 (x^{2n-2} + x^{2n-4} y^2 + \dots + y^{2n-2}) + \sum_{\substack{i+j=n \\ i,j \geq 0}} b_{ij} x^{2i} y^{2j},$$

причем старшие коэффициенты a , b не зависят от рассматриваемого состояния [3], могут быть найдены явно и выражаются через числа

Каталана. Например, $a = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n} (n+1)! (n-1)!}$.

а). Основное состояние $f_0 = 1$

Уравнение (П.3) при $n=1$ принимает вид

$$\Delta \varphi_n - 2\vec{x} \cdot \nabla \varphi_n = E_1 - x^4 - y^4 - 2cx^2y^2. \quad (\text{П.4})$$

Ищем его решение в виде четного полинома четвертой степени. Простая арифметика дает ответ:

$$\varphi_1 = \frac{1}{8}(x^4 + y^4) + \frac{c}{4}x^2y^2 + \left(\frac{3}{8} + \frac{c}{8}\right)(x^2 + y^2), \quad (\text{П.5})$$

$$E_1 = \frac{3}{2} + \frac{c}{2}. \quad (\text{П.6})$$

С помощью (П.5) вычисляется $Q_2 = -(\nabla \varphi_1)^2$ (см. (2.10)) и легко находятся вторые поправки

$$-\varphi_2 = \frac{1}{64}(x^6 + y^6) + \frac{c(c+2)}{48}x^2y^2(x^2 + y^2) + \frac{(4+8c+c^2)}{64}(x^4 + y^4) + \frac{c(2c+5)}{8}x^2y^2 + \left[\frac{21}{32} + \frac{c(c+6)}{16}\right], \quad (\text{П.7})$$

$$E_2 = \frac{21}{8} + \frac{3c}{2} + \frac{c^2}{4}. \quad (\text{П.8})$$

Продолжая данную процедуру далее, можно найти любое желаемое (но конечное) число поправок.

б). Возбужденное состояние $f_0 = (x^2 + y^2 - 1)$ (см. (3.66))

Рассмотрим $n=1$. В этом случае $k=2$ (см. (п.1)).

Уравнение (П.2) имеет вид:

$$\Delta f_1 - 2\vec{x} \cdot \nabla f_1 + 4f_1 = 2\nabla \varphi_0 \cdot \nabla f_0 - R_1 f_0. \quad (\text{П.9})$$

Вполне очевидно, что R_1 , которое является результатом деления нацело двух полиномов (знаменатель равен f_0 , см. (2.6)), должно быть полиномом второй степени:

$$R_1 = A_1 x^2 + A_2 y^2 + B. \quad (\text{П.10})$$

Поскольку поправка φ_1 — четный полином четвертой степени, что следует из (П.3), то единственный разрешенный вид поправки к f_0 :

$$f_1 = \beta x^2 y^2 + \delta (x^2 + y^2) + \gamma. \quad (\text{П.11})$$

Так как нас не интересует нормировка волновой функции, то без потери общности можно положить $\delta = 0$. Подставляя (П.10)-(П.11) в (П.9), а затем в (П.3), получим

$$\psi_1 = \frac{1}{8} (x^4 + y^4) + \frac{c}{4} x^2 y^2 + \frac{7+c}{8} (x^2 + y^2), \quad (\text{П.12})$$

$$f_1 = (4-c)x^2 y^2 + \frac{7+3c}{4}, \quad (\text{П.13})$$

$$E_1 = \frac{21}{2} + \frac{7c}{2}. \quad (\text{П.14})$$

Аналогично находится вторая поправка:

$$-\psi_2 = \frac{1}{48} (x^6 + y^6) + \frac{c(c+2)}{48} x^2 y^2 (x^2 + y^2) + \left[\frac{23}{64} + \frac{c}{24} + \frac{c^2}{192} \right] (x^4 + y^4) + \quad (\text{П.15})$$

$$+ \frac{7c^2 + 7c - 1}{16} x^2 y^2 + \left[\frac{27}{8} + \frac{c(13c+35)}{48} \right] (x^2 + y^2),$$

$$f_2 = \frac{(c-1)(25c+63)}{12} x^2 y^2 - \left(\frac{27}{8} + \frac{13c}{24} + \frac{13c^2}{6} \right), \quad (\text{П.16})$$

$$E_2 = -\frac{159}{4} - \frac{63c}{4} - \frac{15c^2}{2}. \quad (\text{П.17})$$

Отметим, что при $c=0$ (П.14), (П.17) согласуются с известными одномерными ответами: при $c=1$, узловая поверхность является окружностью (см. (П.13), (П.16)). В принципе, процесс построения следующих поправок может быть продолжен и связан только с возрастанием трудоемкости при переходе от n к $n+1$.

Можно показать, что в третьей и четвертой поправках f_3 и f_4 генерируется одинаковый дополнительный член к (П.11) $\sim x^4 y^4$. В $f_{2,6}$ возникает член $\sim x^6 y^6$ и т.д. Общая структура узловой поверхности:

$$f = x^2 + y^2 - d_0^2 + d_1 x^2 y^2 + d_2 x^4 y^4 + \dots + d_i x^{2i} y^{2i} + \dots, \quad (\text{П.18})$$

где $d_i = d_i(m, g, c)$. Отметим важное свойство:

$$d_i \sim \tilde{d}_i(m, c) g^{2i-1} (1 + O(g)). \quad (\text{П.19})$$

Это означает, что "высшие гармоники" дают малый вклад при малых g . Это свойство остается справедливым при любых g (см. обсуждение на стр.14 и табл.3).

в). Возбужденное состояние $f_0 = x(x^2 + ry^2 - \frac{3}{2} - \frac{r}{2})$ (см. (3.76, в)). Во второй группе состояний $(-, +)$ имеются состояния f_1^+ и f_1^- , которые вырождены при $g=0$. При построении стандартной ТВ Релея-Шредингера требуется решать секулярное уравнение [14]. В данном подходе вместо этого возникает условие разрешимости уравнений (П.2)-(П.3) в классе полиномов. Итак, ищем предэкспоненциальные факторы f , которые обеспечивают ортогональности рассматриваемых состояний при любых C в каждом порядке по g . Поэтому возьмем в качестве f суперпозицию состояний гармонического осциллятора $f_{01} = x(x^2 - 3/2)$ и $f_{02} = x(y^2 - 1/2)$ с весом r

$$f_0 = f_{01} + r f_{02} = x(x^2 + ry^2 - \frac{3}{2} - \frac{r}{2}). \quad (\text{П.20})$$

Для рассматриваемых состояний $K=3$ (см. (п.1)). Ищем решение (П.2), (П.3) в виде (П.10) для R_1 , полинома четвертой степени для φ_1 и

$$f_1 = x(\beta x^2 y^2 + \gamma y^2). \quad (\text{П.21})$$

Ответ имеет вид

$$\varphi_1 = \frac{1}{8}(x^4 + y^4) + \frac{C}{4} x^2 y^2 + \frac{(g+C)}{8} x^2 + \frac{(7+3C)}{8} y^2, \quad (\text{П.22})$$

$$f_1 = x \left\{ \frac{(1+r)(1-C)}{2} x^2 y^2 + \frac{(3+r)(11+2C+Cr)}{4} y^2 \right\}, \quad (\text{П.23})$$

$$E_1 = \frac{3g}{2} + C \left(\frac{7}{2} + r \right), \quad (\text{П.24})$$

причем это решение существует при

$$r = 2 - \frac{3}{C} \pm \sqrt{3 + \left(2 - \frac{3}{C} \right)^2}. \quad (\text{П.25})$$

Разные знаки отвечают разным состояниям, в частности, знак $+$ при $C=1$ ($r=1$) отвечает состоянию $\{1,1\}$, а знак $-$ при $C=1$ ($r=-3$) - состоянию $\{0,3\}$. Анализ высших поправок показывает, что предэкспоненциальные факторы рассматриваемых состояний имеют вид

$$f = x \left\{ d_0 y^2 + d_1 + d_2 x^2 y^2 + d_3 x^4 y^2 + d_4 x^2 y^4 + \dots \right\}.$$

г). Возбужденное состояние $f_0 = xy(x^2 + y^2 - 3)$ (см. (3.26))

Данное состояние относится к четвертой группе $(-, -)$. Коэффициент $k=4$ (см. (П.1)). Поправку f_1 ищем в виде

$$f_1 = xy(\beta x^2 y^2 + \gamma). \quad (\text{П.26})$$

Решая (П.2), (П.3), находим сначала первые поправки

$$\varphi_1 = \frac{1}{8}(x^4 + y^4) + \frac{c}{4}x^2 y^2 + \frac{3}{8}(3+c)(x^2 + y^2), \quad (\text{П.27})$$

$$f_1 = xy \left[(1-c)x^2 y^2 + \frac{27}{4}(1+c) \right], \quad (\text{П.28})$$

$$E_1 = \frac{45}{2} + \frac{27c}{2}, \quad (\text{П.29})$$

а затем вторые

$$\begin{aligned} -\varphi_2 = & \frac{1}{48}(x^6 + y^6) + \frac{c(c+2)}{48}x^2 y^2(x^2 + y^2) + \frac{(29+8c+c^2)}{64}(x^4 + y^4) + \\ & + \frac{(29c^2 + 31c - 3)}{48}x^2 y^2 + \frac{45+8c-5c^2}{8}(x^2 + y^2), \end{aligned} \quad (\text{П.30})$$

$$f_2 = xy \left[\frac{(c-1)(41c+87)}{12}x^2 y^2 - \frac{369+546c+234c^2}{8} \right], \quad (\text{П.31})$$

$$-E_2 = \frac{435}{4} + \frac{125}{2}c + \frac{45}{4}c^2. \quad (\text{П.32})$$

Окончательный вид предэкспоненциального фактора

$$f = xy(x^2 + y^2 - \alpha_0^2 + \alpha_1 x^2 y^2 + \alpha_2 x^4 y^2 + \dots), \quad (\text{П.33})$$

причем α_i устроены аналогично (П.19).

В заключение отметим, что подобным образом могут быть рассмотрены любые состояния при любой размерности пространства d .

Таблица 1
 Энергия основного состояния двумерного осциллятора (3.1) при $\rho=2$ и $m=0,1$ как функция параметра асимметрии C . Энергия приведена в соответствии с нормировкой в [1]: $E_{\text{н.д.}}=E/2$. Формулы указывают, какое приближение взято в качестве нулевого (см. текст). Результаты сравниваются с [1].
 а) - в ответе учтен вклад третьей поправки E_3 ; б) - расчет, выполненный в работе [6].

m = 0											
C	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
n min	1.108	1.1418	1.1737	1.2105	1.2409	1.2657	1.2953	1.3193	1.3459	1.3712	1.3944
$E_0 + E_1$	1.1727	1.2105	1.2461	1.2798	1.3118	1.3424	1.3715	1.3995	1.4265	1.4524	1.477455
- E2	0.0641 ^{а)}	0.0413	0.0284	0.0189	0.0124	0.0081	0.0046	0.0025	0.0012	0.0005	0.000305
$E^{\text{н.д.}}(3.11)$	1.1086 ^{а)}	1.1692	1.2177	1.2609	1.2994	1.3345	1.3669	1.3970	1.4253	1.4519	1.477150
Nice et al	1.1002	1.1717	1.2213	1.2637	1.3016	1.3360	1.3678	1.3975	1.4255	1.4519	1.477150 ^{б)}
$E^{\text{н.д.}}(3.34)$	1.10873	1.17174	1.22134	1.26379	1.30160	1.33602	1.36783	1.39753	1.42549	1.45196	1.477158
m = 1											
C	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
n min	1.442	1.4671	1.4974	1.5178	1.5409	1.565	1.5871	1.6083	1.6296	1.6510	1.671
$E_0 + E_1$	1.4761	1.5056	1.5338	1.5608	1.5867	1.6116	1.6357	1.6589	1.6814	1.7032	1.724321
- E2	0.0325 ^{а)}	0.0234	0.0159	0.0104	0.0076	0.0044	0.0029	0.0016	0.0008	0.0003	0.000142
$E^{\text{н.д.}}(3.11)$	1.4436 ^{а)}	1.4822	1.5179	1.5494	1.5791	1.6072	1.6328	1.6573	1.6806	1.7029	1.724179
Nice et al	1.44378 ^{б)}	1.4840	1.5192	1.5510	1.5802	1.60754 ^{б)}	1.6332	1.6576	1.6808	1.7029	1.724184 ^{б)}
$E^{\text{н.д.}}(3.34)$	1.44399	1.48406	1.51919	1.55096	1.58026	1.60757	1.63325	1.65759	1.68076	1.70292	1.724187

Таблица 2

То же, для состояния $f=x^2-y^2$ ($d=2$)

$n = 0$											
c	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
λ_{\min}	1.8366	1.8272	1.8201	1.8106	1.8031	1.7937	1.7906	1.7812	1.7750	1.77500	1.76875
$E_0 + E_1$	5.1122	5.1676	5.2220	5.2754	5.3279	5.3795	5.4302	5.4801	5.5291	5.57740	5.62488
$-E_2$	0.0897	0.0683	0.0558	0.0368	0.0255	0.0168	0.0102	0.0055	0.0025	0.00087	0.00053
$E^H(3,11)$	5.0225	5.0993	5.1712	5.2367	5.3024	5.3627	5.4201	5.4746	5.5267	5.57652	5.62434
Hise et al	5.016	5.101	5.177	5.246	5.309	5.364	5.426	5.479	5.531	5.580	5.62434 ^{b)}
$E^H(3,34)$	5.01267	5.09709	5.17204	5.24099	5.30486	5.36481	5.42152	5.47548	5.52716	5.57662	5.62442
$n = 1$											
c	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
λ_{\min}	2.0446	2.0398	2.0327	2.0257	2.0186	2.0115	2.0068	2.0068	1.9973	1.9973	1.99258
$E_0 + E_1$	5.7570	5.8060	5.8542	5.9017	5.9484	5.9943	6.0396	6.0842	6.1282	6.17146	6.21415
$-E_2$	0.0655	0.0501	0.0375	0.0273	0.0191	0.0126	0.0077	0.0041	0.0018	0.00060	0.00033
$E^H(3,11)$	5.6915	5.7559	5.8167	5.8744	5.9293	5.9817	6.0319	6.0801	6.1264	6.17086	6.21382
Hise et al	5.690	5.759	5.821	5.879	5.934	5.983	6.035	6.083	6.129	6.173	6.21382
$E^H(3,34)$	5.68712	5.75508	5.81760	5.87592	5.93093	5.98309	6.03290	6.08071	6.12660	6.17093	6.21422

Таблица 3

То же, для состояния $f = x^2 + y^2 - z^2 + \beta x^2 y^2 - \gamma x^4 y^2$ ($d=2$)

n = 0											
C	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
α	0.9899	0.8672	0.8169	0.7874	0.7640	0.7468	0.7326	0.7200	0.7106	0.7022	0.7181
β	1.5934	1.2240	1.0033	0.7939	0.6060	0.4710	0.3257	0.2240	0.1376	0.0643	0.0000
γ	-0.1532	-0.0084	0.0034	0.0150	0.0198	0.0168	0.0253	0.0119	0.0086	0.0039	0.0000
$E^0(3.34)$	3.5197	4.2935	4.6839	4.9622	5.1818	5.3648	5.5224	5.6614	5.7860	5.89929	6.00348
Hioe et al	3.521	4.297	4.688	4.967	5.187	5.364	5.526	5.665	5.790	5.903	6.00739 ^{h)}
n = 1											
C	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
α	0.8273	0.7827	0.7557	0.7342	0.7195	0.7074	0.6971	0.6885	0.6805	0.6742	0.6682
β	1.3599	1.0513	0.8524	0.6396	0.5021	0.3924	0.2891	0.1986	0.1292	0.0605	0.0000
γ	-0.1628	-0.0449	-0.0106	0.0005	0.0097	0.0177	0.0191	0.0196	0.0084	0.0044	0.0000
$E^1(3.34)$	4.7717	5.1706	5.4415	5.6537	5.8304	5.9831	6.1180	6.2394	6.3500	6.45195	6.54663
Hioe et al	4.775	5.174	5.445	5.657	5.834	5.983	6.121	6.242	6.352	6.454	6.549

Таблица 4

Энергия основного состояния трехмерного осциллятора (4.1) при $g=2$ и $m=0,1$ как функция параметра C . Нормировка энергии как в [1]: $E_{\text{табл.}} = E/2$. Формулы указывают, какое приближение взято в качестве нулевого (см. текст).

$n = 0$											
C	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$A \text{ min}$	1.1081	1.1467	1.1814	1.2100	1.2434	1.2703	1.3232	1.3731	1.4200	1.4640	1.5048
$E_0 + E_1$	1.7639	1.8209	1.8745	1.9251	1.9733	2.01926	2.10523	2.18474	2.25886	2.32840	2.39402
$- E_2$	0.0358	0.0266	0.0199	0.0150	0.0112	0.00830	0.00451	0.00230	0.00109	0.00053	0.00038
$E^A(3.11)$	1.7281	1.7943	1.8546	1.9102	1.9621	2.01086	2.10072	2.18244	2.25776	2.32798	2.39364
$E^B(4.54)$	1.69009	1.76887	1.83680	1.89739	1.95280	2.00407	2.09721	2.18087	2.25713	2.32774	2.39365
$n = 1$											
C	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$A \text{ min}$	1.4456	1.4714	1.4973	1.5235	1.5461	1.56875	1.6145	1.6531	1.6921	1.7274	1.7611
$E_0 + E_1$	2.2170	2.2615	2.3040	2.3446	2.3836	2.42115	2.49232	2.55900	2.62186	2.68142	2.73808
$- E_2$	0.0199	0.0154	0.0118	0.0091	0.0069	0.00525	0.00289	0.00148	0.00068	0.00029	0.000199
$E^A(3.34)$	2.1971	2.2461	2.2922	2.3356	2.3767	2.41590	2.48943	2.55752	2.62118	2.68112	2.73788
$E^B(4.54)$	2.17732	2.23171	2.28139	2.32746	2.37062	2.41136	2.48698	2.55634	2.62072	2.68102	2.73789

Таблица 5

То же, для состояния $f=x$ ($d=3$)

n = 0											
C	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
A min	1.2456	1.2839	1.3232	1.3587	1.3947	1.4273	1.4662	1.5423	1.5954	1.6454	1.69206
E0 + E1	3.2998	3.4063	3.5066	3.6014	3.6915	3.7773	3.9383	4.0870	4.2257	4.35577	4.478531
- E2	0.1576	0.1176	0.0876	0.0655	0.0486	0.0359	0.0189	0.0091	0.0037	0.00117	0.000491
E ⁿ (3.11)	3.1422	3.2887	3.4190	3.5359	3.6429	3.7414	3.9194	4.0779	4.2220	4.35460	4.478040
E ⁿ (4.54)	3.07963	3.25602	3.40042	3.52290	3.63378	3.73498	3.91638	4.07643	4.22135	4.35555	4.478087
n = 1											
C	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
A min	1.5498	1.5840	1.6107	1.6415	1.6687	1.6960	1.7492	1.7990	1.8423	1.8839	1.9233
E0 + E1	3.9797	4.0671	4.1502	4.2296	4.3056	4.3787	4.5169	4.6461	4.7676	4.88254	4.99172
- E2	0.0947	0.0723	0.0557	0.0424	0.0322	0.0242	0.0130	0.0064	0.0026	0.00079	0.00029
E ⁿ (3.34)	3.8850	3.9948	4.0945	4.1872	4.2734	4.3545	4.5039	4.6397	4.7650	4.88175	4.99143
E ⁿ (4.54)	3.85400	3.97458	4.08103	4.17753	4.26649	4.34915	4.50113	4.63845	4.76596	4.88189	4.99181

Таблица 6

То же, для состояния $f=xy$ ($d=3$)

$n = 0$											
c	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$A \min$	0.9800	1.0066	1.1727	1.2568	1.3232	1.3874	1.5011	1.5992	1.6840	1.7710	1.83925
$E0 + E1$	4.5061	4.7415	4.9559	5.1533	5.3367	5.5083	5.8229	6.1069	6.3667	6.6069	6.830877
$-E2$	0.3230	0.2199	0.1529	0.1068	0.0761	0.0540	0.0267	0.0124	0.0050	0.0016	0.000568
$E^3(3.11)$	4.1831	4.5217	4.8029	5.0465	5.2606	5.4543	5.7962	6.0945	6.3617	6.6054	6.830309
$E^4(4.54)$	4.15918	4.53357	4.81756	5.05744	5.26901	5.46024	5.79079	6.09553	6.36205	6.60541	6.830305
$n = 1$											
c	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$A \min$	1.3623	1.4346	1.4992	1.5612	1.6145	1.6648	1.7631	1.8433	1.9210	1.9879	2.05611
$E0 + E1$	5.4762	5.6687	5.8468	6.0137	6.1695	6.3173	6.5913	6.8413	7.0735	7.2894	7.492137
$-E2$	0.1859	0.1328	0.0961	0.0693	0.051	0.0371	0.0189	0.0090	0.0036	0.0011	0.000361
$E^3(3.34)$	5.2903	5.5359	5.7507	5.9434	6.1185	6.2802	6.5724	6.8329	7.0690	7.2883	7.491775
$E^4(4.54)$	5.28697	5.54059	5.75644	5.94807	6.12222	6.28289	6.57355	6.83334	7.06997	7.28883	7.491789

Таблица 7

То же, для состояния $f=x^2-y^2$ ($d=3$)

n = 0											
C	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\mu \min$	1.7274	1.7314	1.7393	1.7472	1.7531	1.7591	1.7790	1.7910	1.8070	1.8231	1.83925
$E0 + E1$	5.6695	5.7620	5.8516	5.9387	6.0234	6.1058	6.2643	6.4154	6.5597	6.6980	6.830877
- E2	0.1190	0.0955	0.0758	0.0597	0.0466	0.0359	0.0200	0.0100	0.0041	0.0014	0.000568
$E^0(3, 11)$	5.5504	5.6664	5.7758	5.8791	5.9768	6.0698	6.2443	6.4053	6.5555	6.6966	6.830309
$E^0(4, 54)$	5.42684	5.57923	5.71245	5.83227	5.94072	6.04329	6.23023	6.39865	6.55302	6.69621	6.830305
n = 1											
C	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\mu \min$	1.9497	1.9538	1.9578	1.9659	1.9728	1.98165	1.9974	2.0132	2.0259	2.0418	2.05611
$E0 + E1$	6.4576	6.5394	6.6170	6.6935	6.7682	6.8412	6.9822	7.1173	7.2469	7.3718	7.492137
- E2	0.0841	0.0682	0.0550	0.0436	0.0343	0.0265	0.0150	0.0076	0.0031	0.0009	0.000361
$E^1(3, 34)$	6.3735	6.4701	6.5620	6.6499	6.7339	6.8147	6.9672	7.1097	7.2438	7.3708	7.491775
$E^1(4, 54)$	6.29306	6.40786	6.51513	6.61603	6.70844	6.79440	6.95698	7.10435	7.24177	7.37047	7.491789

Таблица 8

То же, для состояния $f=xyz$ ($d=3$)

n = 0											
G	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
A min	0.1649	0.6425	0.8691	1.0353	1.1705	1.2839	1.4695	1.6222	1.7551	1.8697	1.97453
E0 + E1	5.3676	5.8391	6.2472	6.6093	6.9363	7.2355	7.7699	8.2401	8.6623	9.0471	9.401756
- E2	0.7090	0.3058	0.2355	0.1515	0.1004	0.0678	0.03136	0.0140	0.0055	0.0018	0.000633
E ³ (3.11)	4.6586	5.4533	6.0117	6.4578	6.8359	7.1677	7.7386	8.2261	8.6567	9.0453	9.401122
E ⁴ (4.54)	4.78555	5.54560	6.06784	6.49290	6.85778	7.18126	7.74392	8.22805	8.65730	9.04538	9.401185
n = 1											
G	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
A min	0.9801	1.1553	1.2884	1.4019	1.5011	1.5840	1.7393	1.8717	1.9828	2.0769	2.1705
E0 + E1	6.6942	7.7032	7.4099	7.7147	7.9942	8.2532	8.7226	9.1417	9.5224	9.8725	10.197472
- E2	0.3454	0.2157	0.1427	0.0970	0.0670	0.0470	0.0226	0.0103	0.0042	0.0013	0.000426
E ³ (3.34)	6.3488	6.8575	7.2672	7.6177	7.9272	8.2062	8.7000	9.1314	9.5183	9.8711	10.197045
E ⁴ (4.54)	6.39979	6.89486	7.29303	7.63485	7.93845	8.21386	8.70309	9.13259	9.51881	9.87229	10.197086

Таблица 9

То же, для состояния $f = \chi(y^2 - z^2)$ ($d=3$)

n = 0											
c	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$E^M(4.54)$	6.42095	6.75823	7.04901	7.30841	7.54476	7.76294	8.15777	8.51022	8.83084	9.12626	9.401192
n = 1											
$E^M(4.54)$	7.60809	7.87501	8.11423	8.32664	8.53511	8.72457	9.07204	9.38604	9.67625	9.94514	10.197089

Таблица 10

То же, для состояния $f = \chi^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 + \beta(x^2 y^2 + x^2 z^2 + y^2 z^2)$ ($d=3$)

n = 0											
c	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
α	1.1489	1.0770	1.0309	0.9951	0.9666	0.9423	0.9048	0.8771	0.8554	0.8385	0.8236
β	0.7635	0.7991	0.7327	0.6525	0.5641	0.4745	0.3223	0.2050	0.1146	0.0526	0.0004
$E^M(4.54)$	4.5686	5.0321	5.3555	5.6155	5.8377	6.0433	6.3704	6.6562	6.9069	7.13155	7.33581
n = 1											
c	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
α	1.0072	0.9733	0.9460	0.9230	0.9016	0.8852	0.8577	0.8389	0.8218	0.8072	0.7957
β	0.7021	0.6738	0.6182	0.5424	0.4456	0.3860	0.2446	0.1884	0.1040	0.0432	0.0000
$E^M(4.54)$	5.7142	6.0042	6.2402	6.4435	6.6240	6.7956	7.0762	7.3271	7.5516	7.75529	7.94251

таблица 11

Сравнение расчета, основанного на (4.54), при $C=0$ с пересчетом энергий через спектр при $d=1$, найденный в [1].

		c = 0						
state		(0,0,0)	(1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)	(1,1,0) (1,0,1) (0,1,1)	(2,0,0) (0,2,0) (0,0,2)	(1,1,1)	(0,1,2) (1,0,2) (0,2,1) (2,1,0) (1,2,0) (2,0,1)	
n=0	$E^M(4.54)$	2.00407	3.73498	5.46024	6.04329	7.18126	7.76294	
	E_R	2.00396	3.72962	5.45527	6.03277	1.18093	7.75843	
n=1	$E^M(4.54)$	2.41136	4.34915	6.28289	6.79440	8.21386	8.72457	
	E_R	2.41131	4.34543	6.27955	6.78683	8.21367	8.72095	

Таблица 12

Сравнение при $C=0$ расчетов энергии основного состояния при различных d с помощью ϕ -ял (5.6), асимптотических формул (5.7) и пересчета через спектр при $d=1$ [1] $E_d = dE_0$, где E_0 — энергия основного состояния при $d=1$

n = 0											
d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$E^{\phi}(5.6)$	0.668179	1.34235	2.01920	2.69746	3.37657	4.05623	4.73626	5.41656	6.09705	6.77770	
$E^{\phi}(5.7)$	0.681420	1.36284	2.04426	2.72568	3.40710	4.08852	4.76994	5.45136	6.13278	6.81420	0.68142 (2.012)
E_F	0.667986	1.33597	2.00396	2.67195	3.33993	4.00792	4.67590	5.34389	6.01188	6.67986	0.667986
n = 1											
$E^{\phi}(5.6)$	0.803848	1.61163	2.42115	3.23161	4.04259	4.85395	5.66554	6.47731	7.28920	8.10119	
$E^{\phi}(5.7)$	0.81250	1.62500	2.43750	3.25000	4.06250	4.87500	5.68750	6.50000	7.31250	8.12500	0.8125 (1.092)
E_F	0.803771	1.60754	2.41131	3.21508	4.01886	4.82263	5.62640	6.43017	7.23394	8.03771	0.803771

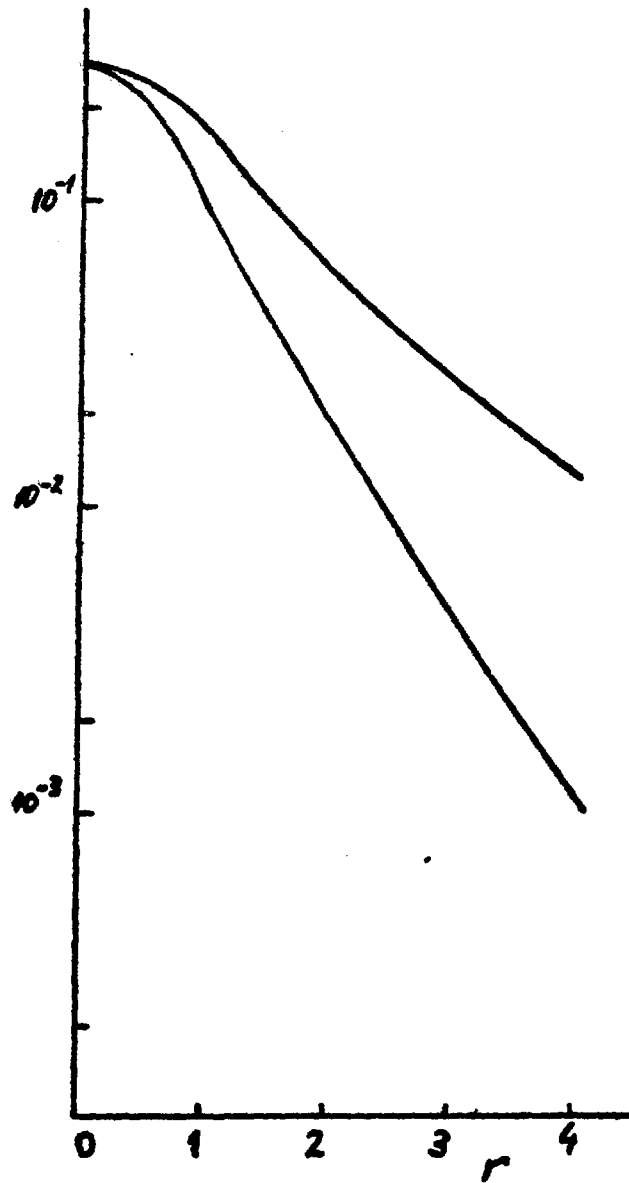


Рис.1. Последовательные итерации уравнения (3.166) (см. (3.20), (3.21). Верхняя кривая $[\varphi'_{10}]_4 / [\varphi'_{10}]_0$, нижняя - $[\varphi'_{10}]_2 / [\varphi'_{10}]_0$.

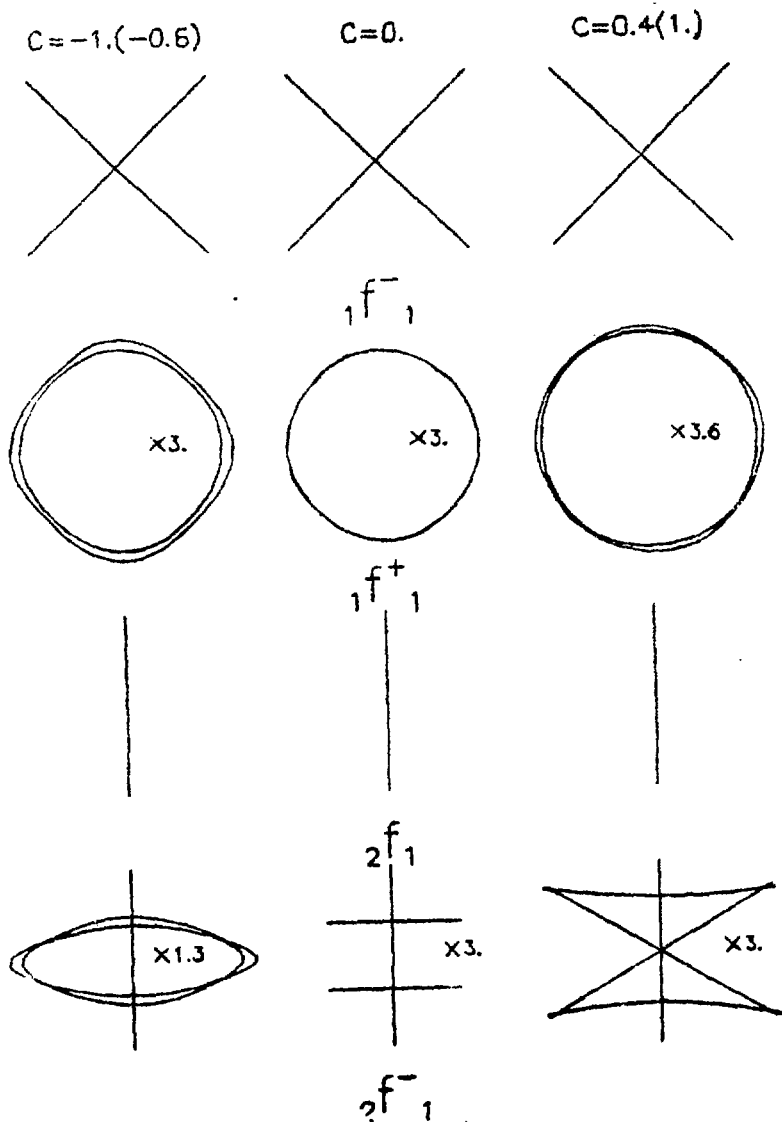


Рис.2. Деформации узловых поверхностей при $d=2, g=2, m=1$ в зависимости от параметра асимметрии C . Указаны относительные размеры рисунков.

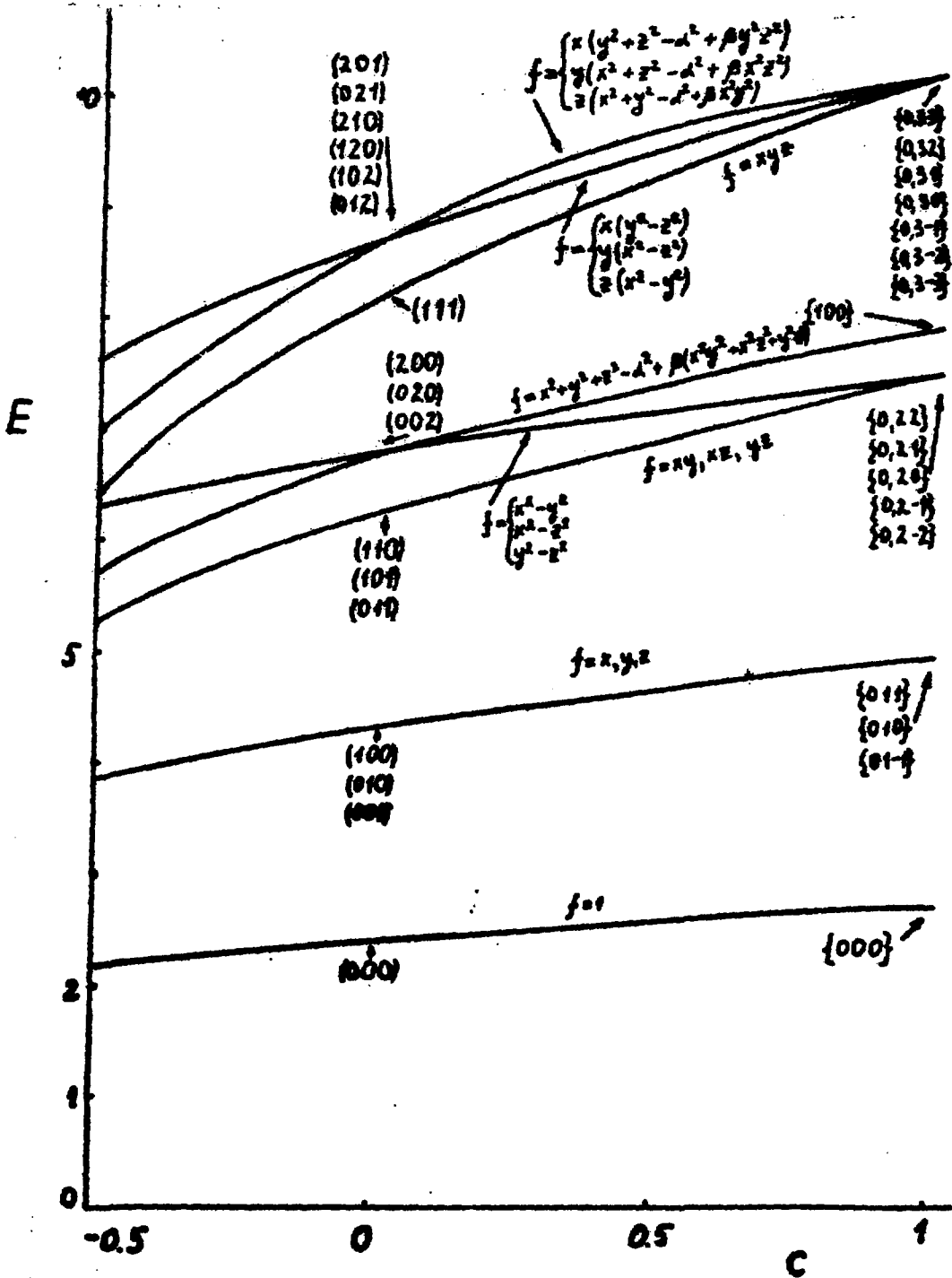


Рис. 3. Движения уровней при $d=3$ ($q=2, m=1$) в зависимости от параметра асимметрии C .

Л и т е р а т у р а

1. Hioe F.T. Mac Millen D., Montroll E.H. - Phys. Reps., 1987 43C 305.
2. Турбинер А.В. лекция на 9-й школе физики ИТЭФ. Вып.2, М.: Энергоатомиздат, 1982 с.39.
3. Турбинер А.В. - УФН, 1984 144 35.
4. Banks T., Bender C.M., Wu T.T. - Phys.Rev., 1973 D8 3346, Banks T., Bender C.M. 1973 ibid, D8 3366.
5. Hioe F.T. - Phys. Rev., 1977 D15 488.
6. Ari N., Demiralp M. - J. Math.Phys., 1985 26 1179.
7. Fernandez F.M., Meson A.M., Castro E.A. - Phys.Lett., 1985 112A 107.
8. Bozzolo G., Esebhad C., Plastino A. - Phys.Rev., 1982 D26 801.
9. Killingbeck J., Jones M.N. - J.Phys., 1986 A19 705.
10. Dyson F. - Phys.Rev., 1952 85 631.
11. Korsch H.J. - Phys.Lett., 1983 97A 77.
12. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений - М.: Наука, 1971.
13. Makagewicz J. - J.Phys., 1984 A.17 1449.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.

А.В.Турбинер

Многомерный анизотропный ангармонический осциллятор
(количественный подход)

Редактор И.Н.Ломкина

Корректор О.В.Ольховникова

Работа поступила в ОНТИ 5.06.87

Подписано к печати 8.06.87 Т13457 формат 60x90 1/16
Объем печ. Усл.-печ.л.3,0. Уч.-изд.л.2,2. Тираж 200 экз.
Заказ 88 Индекс 3624 Цена 53 коп.

Отпечатано в ИТО, 117250, Москва, П.Тереховская, 25

