ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

ITEF -- 67 (1987).

А.В.ТУРБИНЕР

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ И КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ

Препринт №67

Москва — ЦНИИатоминформ — 1987

УДК 517 М-16
СПЕКТРАЛЬНЫЕ РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫЕ ЗАДАЧИ: Препринт ИТЭФ 87-67/ А.В.Турбинер – М.: ЦНИИатоминформ, 1987 – 11с.

Показано, что для каждой точнорешаемой в методе факторизации Инфельда-Халла задачи Штурма-Лиувилля существует ассоциированная с ней квази-точнорешаемая задача с известными N первыми состояними. Эти задачи содержат несколько свободных параметров и известные собственные значения образуют N -листную риманову поверхность, отделенную от остального спектра. В пределе $N \to \infty$ происходит расплетение собственных значений и возникает точнорешаемая задача.

SPECTRAL RIEMANN SURFACES OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS AND QUASI-EXACTLY-SOLUBLE PROBLEMS

It is shown that there exists for each exactly-soluble problem (in sense of Infeld-Hull factorization method) the associated quasi-exactly-soluble one, for which the first N-th eigenstates are known exactly. These problems contains some free parameters and the first N-th states form the N-sheet Riemanian surface, which is separated from the whole spectral, infinitely-sheet - Riemann surface. In the limit $N \to \infty$ the plaited eigenvalues are unplaited and the ordinary exactly-soluble problem appears.

Рис. - , список лит. - 10 наим.

В этой работе строятся одномерные операторы Шредингера, зависящие от параметров, у которых несколько собственных функций и собственных значений могут быть найдены либо явно, либо с помощью решения алгебраического уравнения. Эти собственные значения сплетаются, образуя конечнолистную риманову поверхность, полностью отделенную от бесконечнолистной римановой поверхности остальных состояний. В пределе бесконечного числа таких собственных значений возникают точнорешаемые в методе факторизации /I/ задачи, для которых спектр полностью расплетается.

А. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^1)$ задачу на собственные значения для одномерного оператора Шредингера

$$H\Psi = \lambda\Psi, \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x). \tag{I}$$

В работе /2/ в рамках квазиклассического приближения для потенциала $V(x) = \gamma x^2 + x^4$ было показано: что: I) собственные значения как функции параметра γ имеют бесконечное число комплексно-сопряженных корневых точек ветвления, сгущающихся к бесконечности по лучу $\arg\gamma = \pi$; каждая особенность отвечает пересечению собственных значений; 2) собственные значения одинаковой четности образуют единую риманову поверхность; 3) интеграл от квадрата собственной функции в особенности обращает в нуль и возникает жорданова клетка. Некоторые строгие результаты по этому поводу получены Саймоном /3/, а положения первых ветвлений были найдены в недавнем численном расчете /4/.

Сделаем преобразование /5/

$$\psi(x) = p(x)\exp(-\varphi(x)), \tag{2}$$

где p -функция, содержащая минимальным образом информацию о нулях (например, в простейшем случае p -полином степени n, имеющий n действительных корней, когда ищется n-я собственная функция). Полагая $y = \varphi'(x)$, получаем из (I) с учетом (2):

$$y' - y^2 - \frac{p'' - 2yp'}{p} = \lambda - V(x). \tag{3}$$

Рассмотрим теперь конкретные случаи.

I. Обобщенный потенциал Морза. Возьмем

$$y = -a\exp(-\alpha x) + b + c\exp(\alpha x) \tag{4}$$

и рассмотрим сначала случай p = I. Подставляя (4) в (3), получим

$$V_0 = a^2 e^{-2\alpha x} - a(\alpha + 2b)e^{-\alpha x} + c(2b-\alpha)e^{\alpha x} + c^2 e^{2\alpha x}, \quad \lambda_0 = 2ac - b^2. \tag{5}$$

Таким образом, в потенциале (5), зависящем от параметров a, b, c, α, известно одно собственное значение, являющееся однозначной аналитической функцией по переменным a, b, c, α и отделенное от остального спектра. При выбранных значениях параметров мы получаем таким образом растущий при $|x| \to \infty$ потенциал и основное состояние, т.к. собственная функция убывает и положительна. Теперь возьмем $p = \exp(-\alpha x) + A$

и параметр A будем определять из условия отсутствия особенностей при действительных x в потенциале (см. (3)). Тогда из (3) возникает добавка к потенциалу (5)

$$V_1 = -2\alpha a \exp(-\alpha x) \qquad (6)$$

и

$$\psi_{0,1} = \left(4a e^{-\alpha x} - \alpha - 2b \pm \sqrt{(\alpha+2b)^2 + 16ac}\right) \exp\left\{-\frac{a}{\alpha} e^{-\alpha x} - bx - \frac{c}{\alpha} e^{\alpha x}\right\}$$

$$\lambda_{0,1} = 2ac - b^2 - \alpha\left[\alpha + 2b \pm \sqrt{(\alpha+2b)^2 + 16ac}\right]/2,$$

где знак плюс отвечает нижнему (собственная функция положительна при конечных x), а знак минус - первому состоянию в потенциале (5), (6). Эти собственные значения сплетаются, образуя двулистную риманову поверхность с ветвлениями в точках $(\alpha+2b) = \pm 4i\sqrt{ac}$. Легко показать, что когда $p = \exp(-N\alpha x) + A_1 \exp[-(N-1)\alpha x] + \dots + A_N$, то условие сократимости в (3) приводит к

$$V_N(x) = a^2 e^{-2\alpha x} - a\left[\alpha(2N+1) + 2b\right] e^{-\alpha x} + c(2b-\alpha) e^{\alpha x} + c^2 e^{2\alpha x}, \qquad (7)$$

для которого первые N собственных значений могут быть найдены как решение алгебраического уравнения N-й степени. Можно показать, что это уравнение дается детерминантом якобиевой матрицы размера $N \times N$. Они образуют N-листную риманову поверхность. Предел $N \to \infty$ в (7) при подходящем выборе зависимости от N параметров отвечает $c = 0$. При этом спектр расплетается и возникает известный точнорешаемый потенциал Морза.

<u>2. Обобщенный потенциал Пешля-Теллера</u>. Рассмотрим

$$y = a\,\mathrm{th}\,\alpha x + c\,\mathrm{sh}^2\alpha x. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (3) при $\rho = 1$, получим

$$\lambda_0 = 2ac - a^2 - \alpha c,$$
$$V_0 = -\frac{(a^2+\alpha a)}{\mathrm{ch}^2\alpha x} - c(c+2\alpha-2a)\,\mathrm{ch}^2\alpha x + c^2\,\mathrm{ch}^4\alpha x \tag{9}$$

и, следовательно, в потенциале (9) известно одно собственное значение, отделенное от остального спектра. При $\rho = \mathrm{th}\,\alpha x$ возникает добавка к потенциалу (9)

$$V_1 = -\frac{2\alpha(a+\alpha)}{\mathrm{ch}^2\alpha x}, \quad \lambda_1 = 2ac - a^2 + \alpha c, \tag{10}$$

отвечающее первому состоянию в спектре (9), (10). Отметим, что возникшие потенциалы четны и поэтому римановы поверхности четных и нечетных состояний разделены. Когда $\rho = \mathrm{th}^2\alpha x + A$, добавка к (9) равна

$$V_{02} = -\frac{2\alpha(2a+3\alpha)}{\mathrm{ch}^2\alpha x}$$

и

$$\psi_{0,2} = \left[(2a+3\alpha)\,\mathrm{th}^2\alpha x - a - c - 2\alpha \pm \sqrt{(a+c+2\alpha)^2 + 2\alpha(2a+3\alpha)}\right](\mathrm{ch}\,\alpha x)^{-\frac{a}{\alpha}} \exp\left(-\frac{c}{4\alpha}\,\mathrm{ch}\,2\alpha x\right),$$

$$\lambda_{0,2} = -2\alpha\left[a - c + \alpha \pm \sqrt{(a+c+2\alpha)^2 + 2c(2a+3\alpha)}\right] + 2ac - a^2 - \alpha c,$$

При $p = \mathrm{th}\,\alpha x\,(\mathrm{th}^2\alpha x + A)$ добавка к (10)

$$V_{13} = -\frac{6\alpha(a+2\alpha)}{\mathrm{ch}^2\alpha x}$$

и

$$A_{1,3} = \left[-a - c - 4\alpha \pm \sqrt{(a+c+4\alpha)^2 - 3\alpha(2a+5\alpha)}\right]/(2a+5\alpha)$$
$$\lambda_{1,3} = -2\alpha\left[a - 2c + \alpha \pm \sqrt{(a+c+4\alpha)^2 - 3\alpha(2a+5\alpha)}\right] + 2ac - a^2 + \alpha c.$$

Ситуация отличается от описанной в п.I только тем, что два уровня одинаковой четности образуют двулистную поверхность. Когда $p = th^k \alpha x + A_1 th^{k-1} \alpha x + \ldots + A_k$, возникает

$$V_k = -\frac{\alpha k(\alpha k + \alpha + 2a)}{ch^2 \alpha x},$$

для которого известны первые $N = [k/2] + 1$ состояний четности $(-I)^k$. Они сплетаются, образуя N -листную риманову поверхность. При $k \to \infty$ происходит расплетение, $c = 0$ и возникает точнорешаемый потенциал Пешля-Теллера.

3. Обобщенный гармонический осциллятор. Возьмем, следуя /6–8/

$$y = ax^3 + bx. \tag{II}$$

Состояния разной четности в силу четности возникающих потенциалов образуют две раздельные римановы поверхности. При $p = I$

$$V_0 = a^2x^6 + 2ab\,x^4 + (b^2 - 3)x^2, \quad \lambda_0 = b, \tag{I2}$$

а при $p = x$

$$V_1 = a^2x^6 + 2ab\,x^4 + (b^2 - 5)x^2, \quad \lambda_1 = 3b. \tag{I3}$$

Когда $p^2 = x^2 + A$, добавка к (I2) равна $V_{02} = -2ax^2$ и

$$\Psi_{0,2} = \left(2ax^2 + b \pm \sqrt{b^2 + 2a}\right) \exp\left(-ax^4/4 - bx^2/2\right),$$

$$\lambda_{0,2} = 3b \pm 2\left(-\sqrt{b^2 + 2a}\right).$$

Когда $p = x(x^2 + A)$, добавка к (I3) равна $V_{13} = V_{02} = -2ax^2$ и

$$\Psi_{1,3} = x\left(2ax^2 + b \pm \sqrt{b^2 + 6a}\right) \exp\left(-ax^4/4 - bx^2/2\right),$$

$$\lambda_{1,3} = 5b \pm 2\left(-\sqrt{b^2 + 6a}\right).$$

Как и в предыдущих случаях, $\lambda_{1,2}$ и $\lambda_{1,3}$ образуют двулистные римановы поверхности с ветвлениями в точках $b = \pm i\sqrt{2a}$ и $b = \pm i\sqrt{6a}$, соответственно. Когда $p = x^k + A_1 x^{k-1} + \ldots + A_k$, возникает потенциал

$$V_k = a^2x^6 + 2abx^4 + \left[b^2 - a(2k+3)\right]x^2,$$

для которого известно $N = [k/2] + 1$ состояний четности $(-1)^k$. Каждое λ_i содержит $(N-1)$ пару корневых точек ветвления, отвечающих пересечениям с собственными значениями из этого семейства. Предел $k \to \infty$ соответствует $a = 0$, спектр расплетается и возникает точнорешаемый потенциал.

Б. При рассмотрении аналогичным способом радиальной части d -мерного оператора Шредингера со сферически-симметричным потенциалом $V(r)$ и весовой функцией $\rho(r)$ возникает уравнение

$$y' + r^{-1}(2\ell+d-1)y - y^2 - p^{-1}\left\{p'' + \left[r^{-1}(2\ell+d-1) - 2y\right]p'\right\} = \lambda\rho(r) + V(r),$$

где ℓ – угловое квантовое число, равное степени соответствующего гармонического полинома (задача рассматривается на полуоси $(0, \infty)$).

4. Обобщенный гармонический осциллятор, d – любое, $\rho \equiv 1$. Аналог (11):

$$y = ar^3 + br + cr^{-1}.$$

Потенциал с первыми N сплетенными собственными значениями

$$V_N = a^2r^6 + 2abr^4 + \left[b^2 - a(4N+2\ell+d+2-2c)\right]r^2 + c(c-2\ell-d+2)r^{-2}.$$

В пределе $N \to \infty$ $a = 0$, спектр расплетается и возникает известная точнорешаемая задача (см., напр., /9/, с.158).

5. Обобщенная кулоновская задача I, d – любое, $\rho = r^{-1}$.
Возьмем

$$y = a + br + cr^{-1}. \qquad (14)$$

Случаю ρ = I (основное состояние) отвечает потенциал

$$V_0 = b^2r^2 + 2abr + [a^2 - b(2\ell + d - 2c)] - a(2\ell + d - 1 - 2c)r^{-1} + c(c - 2\ell - d + 2)r^{-2}, \qquad (15)$$

в котором нижнее состояние с $\lambda_0 = 0$ отделено от остального спектра. При $\rho = r + A$ добавка к (15) $V_1 = -2b$, а собственные значения

$$\lambda_{0,1} = -\left[a \pm \sqrt{a^2 + 2b(2\ell + d - 1 - 2c)}\right]$$

образуют двулистную риманову поверхность. Сплетению N состояний отвечает добавка к (15) $V_N = -2Nb$. При $b = 0$ происходит расплетение и возникает точнорешаемый потенциал Кратцера (см. /9/, с.157), являющийся обобщением кулоновской задачи.

6. Обобщенная кулоновская задача II, d – любое, $\rho = r^{-2}$.
Возьмем

$$y = a + cr^{-1} + br^{-2}. \qquad (16)$$

Потенциал основного состояния (ρ = I):

$$V_0 = b^2r^{-4} + b(2c - 2\ell - d + 3)r^{-3} + [c(c - 2\ell - d + 2) + 2ab]r^{-2} - a(2\ell + d - 1 - 2c)r^{-1} + a^2 \qquad (17)$$

и $\lambda_0 = 0$. При $\rho = r + A$ добавка к (17) $V_{10} = -2ar^{-1}$ и возникают

$$\Psi_{0,1} = \left(4ar - 2\ell - d + 1 - 2c \pm \sqrt{(2\ell + d - 1 - 2c)^2 - 16ab}\right) r^{\ell - c} \exp\{-ar + br^{-1}\},$$

$$\lambda_{0,1} = -\left[1/2 - \ell - d/2 + c \pm \sqrt{(2\ell + d - 1 - 2c)^2 - 16ab}/2\right],$$

образующие двулистную риманову поверхность. Сплетению N состояний отвечает добавка $V_N = -2\alpha N r^{-1}$. При $b = 0$ происходит расплетение и возникает потенциал Кратцера (см. п.5).

7. Обобщенный потенциал Морза II, $d = 1$, $\rho = e^{-\alpha x}$. Возьмем

$$y = -ce^{-2\alpha x} + ae^{-\alpha x} + b, \quad c \geq 0,\ \alpha > 0,\ b > 0.$$

Потенциал, отвечающий данному y с N первыми сплетенными состояниями,

$$V_N = c^2 e^{-4\alpha x} - 2ace^{-3\alpha x} + \left[a^2 - 2c(b + \alpha + \alpha N)\right] e^{-2\alpha x} + a(2b + \alpha) e^{-\alpha x} + b^2. \tag{18}$$

Волновые функции имеют вид

$$\Psi_i = P_N(e^{-\alpha x}) \exp\left\{-\frac{c}{2\alpha} e^{-2\alpha x} + \frac{a}{\alpha} e^{-\alpha x} - bx\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

При $c = 0$ спектр расплетается и возникает потенциал Морза.

8. Обобщенный потенциал Морза III, $d = 1$, $\rho = e^{\alpha x}$. Возьмем

$$y = ce^{2\alpha x} + ae^{\alpha x} - b, \quad c \geq 0,\ \alpha > 0,\ b > 0.$$

Возникающий при таком выборе потенциал с N сплетенными уровнями

$$V_N = c^2 e^{4\alpha x} + 2ace^{3\alpha x} + \left[a^2 - 2c(b + \alpha)\right] e^{2\alpha x} - a(2b + \alpha) e^{\alpha x} + b^2 + \alpha N(\alpha - 2b). \tag{19}$$

Этим уровням отвечают волновые функции

$$\Psi_i = P_N(e^{-\alpha x}) \exp\left\{-\frac{c}{2\alpha} e^{2\alpha x} - \frac{a}{\alpha} e^{\alpha x} + bx\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots N.$$

Как и в предыдущем случае, при $c = 0$ происходит расплетение уровней и возникает потенциал Морза.

9. Обобщенный потенциал Пешля-Теллера II, $d = 1$, $\rho = ch^{-2} \alpha x$. Возьмем

$$y = b\,th^3 \alpha x + a\,th\,\alpha x.$$

Поскольку в задаче имеется симметрия $x \to -x$, то сплетаются состояния с одинаковой четностью. Потенциал с N сплетенными первыми уровнями четности $(-1)^k$

$$V_N=-b^2 ch^{-6}\alpha x+b\left[2a+3b+\alpha(2k+3)\right]ch^{-4}\alpha x-\left[(a+3b)(a+b+\alpha)+2\alpha bk\right]ch^{-2}\alpha x+(a+b)^2, \quad (20)$$

где $N=\left[k/2\right]+1$. Волновые функции этих состояний

$$\psi_i = p_k(th\alpha x)(ch\alpha x)^{-\frac{(a+b)}{\alpha}} \exp\left\{\frac{b}{2\alpha} th^2\alpha x\right\}, \quad i=1,2,3,\dots N.$$

При $b=0$ уровни расплетаются и возникает потенциал Пешля-Теллера.

Отметим, что потенциалы, описанные в пп.5-9, допускают интерпретацию на языке стандартной спектральной задачи (I). Имеется семейство из N потенциалов, связанных друг с другом аналитическим продолжением по параметрам, для которых i-е состояние i-го потенциала (i =I,2,... N) имеет одну и ту же энергию.

<u>Утверждение.</u> Не существует других потенциалов в классе полиномов от x, либо от r, r^{-1}, либо от $ch\alpha x$, $ch^{-1}\alpha x$, либо от $e^{-\alpha x}$, $e^{\alpha x}$, для которых применима описанная выше процедура построения $N>2$ состояний.

Для ранее исследованных точнонерешаемых на уровне дифференциального уравнения задач сплетается каждое собственное значение с каждым (см. /4/ и ссылки в ней). Для точнонерешаемых задач, нахождение спектра которых сводится к решению трансцендентных уравнений, имеются собственные значения, которые не сплетаются (см.,напр., /I0/, где k-й уровень сплетается только с $(k-1)$ и $(k+1)$ уровнями). В случае точнорешаемых задач спектр полностью расплетается и уровни не пересекаются. Для квазиточнорешаемых задач отфакторизовывается часть спектра, сплетенная внутри себя и несплетенная с остальным спектром. Пытаясь проклассифицировать спектральные задачи, введем символическую, симметричную матрицу T, в которой $T_{ik}\neq 0$

при сплетении i -го и k-го состояний и $T_{ik}=0$ при отсутствии сплетения. Тогда можно сформулировать следующую

Гипотезу об иерархии спектральных задач:

1. Для точнонерешаемых на уровне дифференциальных уравнений задач матрица T не имеет нулевых матричных элементов;
2. Для точнонерешаемых задач, допускающих сведение к трансцендент-уравнениям, существуют $T_{ik}=0$;
3. Для квазиточнорешаемых задач $\widetilde{T}$ имеет блочную структуру вдоль главной диагонали; если известно одно или два возбужденных состояния, то возникает блочная структура общего вида;
4. Для точнорешаемых задач матрица T диагональна.

Сделаем два замечания. Во-первых, когда исходный гамильтониан обладает группой симметрии, то данная гипотеза относится к состояниям с определенной симметрией. Во-вторых, данная гипотеза относится только к одномерным и сферически-симметричным задачам.

В заключение, хотелось бы выразить глубокую благодарность К.А.Тер-Мартиросяну, А.Г.Ушверидзе и, особенно, М.А.Шубину за полезные обсуждения и интерес к работе.

Литература

1. Infeld L., Hull T.E. Rev.Mod.Phys., 1951, v.23, p.21-84
2. Bender C., Wu T.T. Phys.Rev., 1969, v.184, p.1231-1250
3. Simon B. Ann.Phys., 1970, v.58, p.76-136
4. Shanley P.E. Phys.Lett., 1986, v.A117, p.161-165
5. Турбинер А.В. УФН, 1984, т.144, с.36-72
6. Гершензон М.Е., Турбинер А.В. ЯФ, 1982, т. 35, с.1437-1445
7. Leach P.G.L. J.Math.Phys., 1984, v.25, p.974-982
8. Турбинер А.В., Ушверидзе А.Г. Препринт ИТЭФ, 1987, № 55
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, М.: Наука, 1974.
10. Карнаков Б.М. и др. Препринт ИТЭФ, 1985, № 158.

А.В.Турбинер

Спектральные римановы поверхности оператора Штурма-Лиувилля
и квазиточнорешаемые задачи.

Редактор И.Н.Ломакина Корректор О.Ю.Ольховникова

Работа поступила в ОНТИ 23.04.87

Подписано к печати 24.04.87 Т12102 Формат 60х90 1/16
Офсетн.печ. Усл.-печ.л.0,75. Уч.-изд.л.0,5. Тираж 295 экз.
Заказ 67 Индекс 3624 Цена 7 коп.

Отпечатано в ИТЭФ, 117259, Москва, Б.Черемушкинская,25

7 коп.

ИНДЕКС 3624

М.,ПРЕПРИНТ ИТЭФ, 1987, № 67, с.1-12