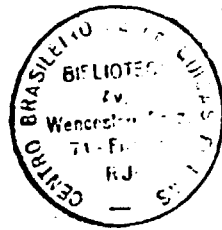


ESPECTRO RETARDADO DE RAIOS  $\beta$  EM FRAGMENTOS

DE FISSÃO DO  $^{235}\text{U}$



Tese de Mestrado

PAULO REGINALDO PASCHOLATI

T 95  
P 279

ESPECTRO RETARDADO DE RAIOS  $\beta$  EM FRAGMENTOS  
DE FISSÃO DO  $^{235}\text{U}$

TESE DE MESTRADO

defendida por

**PAULO REGINALDO PASCHOLATI**

no Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Orientador: Prof. Takeshi Kodama

em 13 de dezembro de 1973

perante a banca integrada pelos senhores professores

*Takeshi Kodama*  
Professor Visitante do C.B.P.F.

*Alfredo Marques de Oliveira*  
Professor Titular do C.B.P.F.

*Mario Novello*  
Professor Adjunto do C.B.P.F.

*José Goldenberg*  
Professor do Instituto de Física da U.S.P.

*A.F.R. Toledo Piza*  
Professor do Instituto de Física da U.S.P.

E R R A T A

<u>Pág.</u>	<u>Linha</u>	<u>Onde se lê</u>	<u>Leia-se</u>
Sumário	8	concostância	concordância
2	7	$E = a_A  Z - Z_O(A) ^2 + b_A$	$E = a_A (Z - Z_O(A))^2 + b_A$
2	22	$= \lambda_{Z-1,4} n_{Z-1,A}(t)$	$= \lambda_{Z-1A} n_{Z-1A}(t)$
2	23	contante	constante
5	8	constante	contraste
7	2	$+ \lambda_{Z-1A}^\beta n_{ZA}(t)$	$\lambda_{Z-1A}^\beta n_{Z-1A}(t)$
8	4	$N_{ZA}(t) = \infty$	$N_{ZA}(\infty) = \infty$
12	4	$+ \int_{E_Y}^E dE_1$	$+ \int_E^{E_0} dE_1$
12	4	$\int_0^E n(E_0, E_Y)$	$\int_0^{E_0} n(E_0, E_Y)$
12	9	$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^E$	$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{E_0}$
13	3	$(E_0, E_1, \dots, E_n)$	$(E_0, E_1, \dots, E_n, 0)$
13	8	$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^E$	$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{E_0}$
24	1	decaimento, $\epsilon_0(E)$	decaimento, $D_\Omega(E, \epsilon)$ é a função distribuição, $\epsilon_0(E)$
24	18	porque para	porque $\omega(E, \epsilon) = 1$ para
25	1	$\int_{\max(\epsilon_{\min})}^{\epsilon_1} d\epsilon$	$\int_{\max(\epsilon_{\min})}^{\epsilon_1}$

<u>Pág.</u>	<u>Linha</u>	<u>Onde se lê</u>	<u>Leia-se</u>
25	1	$+ 3  G_T $	$+ 3  G_{GT} ^2$
25	15	$\int_{-Q}^{Q_\Omega}  M_\Omega(E) ^2 dE$	$\int_{-Q}^{Q_\Omega}  M_\Omega(E) ^2 dE$
39	8	por fissão achada	por fissão $\bar{e}$ achada
39	9	$13.3 \pm 1.0\text{cm}^2$	$13,3 \pm 1,0\text{cm}^2$
48	Fig.11	Tsouldanidis	Tsoulfanidis
	7		
50	Fig.19	ordena	ordenada
	3		
21	eq. 48	$\left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\}, (\langle \phi_\Omega   \phi_\Omega \rangle)^{-1}$

# Í N D I C E

	Página
DEDICATÓRIA .....	1
AGRADECIMENTOS .....	II
RESUMO .....	III
ABSTRACT .....	IV
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....	5
2.1 - CÁLCULO DO ESPECTRO .....	5
2.2 - CÁLCULO DO ESPECTRO DE $\gamma$ EM CASCATA .....	10
3. CÁLCULO DAS CONSTANTES DE DECAIMENTO E DO ESPECTRO INDIVIDUAL .....	17
3.1 - REVISÃO DA "GROSS THEORY" .....	18
3.2 - CÁLCULO DO ESPECTRO INDIVIDUAL .....	26
3.3 - CÁLCULO DA CONSTANTE DE DECAIMENTO $\lambda_{ZA}^n$ .....	28
4. MÉTODO DE CÁLCULO .....	30
4.1 - MASSAS NUCLEARES .....	30
4.2 - DISTRIBUIÇÃO DE MASSA E CARGA DOS PRODUTOS DE FISSÃO .....	31
4.3 - CÁLCULO NUMÉRICO .....	35
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	37
6. CONCLUSÃO .....	42
TABELA .....	43
BIBLIOGRAFIA .....	44
FIGURAS .....	47

À

Florentino, Maria Antonia e

Maria Cândida

## AGRADECIMENTOS

Ao Professor Takeshi Kodama pela dedicação, paciência e incentivo constante com que me orientou durante o trabalho de tese.

Ao Professor Alfredo Marques de Oliveira, juntamente com o pessoal da Divisão de Física Nuclear, pelas proveitosas discussões.

A Equipe da Divisão do Computador, liderada pelo Professor Georges Schwachheim e Paulo Cesar G. F. Oliveira, pela valiosa colaboração prestada.

Ao Dr. Kohji Takahashi da Universidade de Aarhus, Dinamarca, pela colaboração prestada.

Ao Professor Luiz Tauhata pela discussão e colaboração na revisão do manuscrito.

Ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas pela acolhida que me foi dispensada e pelas condições de trabalho que me proporcionou.

Ao Conselho Nacional de Pesquisas e à Coordenação e Aperfeiçoamento do Pessoal do Nível Superior, criando condições necessárias para o desenvolvimento e concretização dos cursos de pós-graduação e desta tese.

Finalmente às datilografas Srtas. Morgana Tavares e Laís de Carvalho Ventura pela eficiência e cooperação.

## SUMÁRIO

Os espectros de elétrons atrasados de produtos de fissão do  $^{235}\text{U}$ , induzida por neutrons térmicos, são calculados.

É utilizada a "Gross Theory" para o cálculo das constantes de decaimento e espectro de elétrons individuais.

O número de elétrons e a energia média por eles carregada por fissão, é também calculada.

Comparação dos espectros calculados com os experimentais evidenciam boa concordância.



## ABSTRACT

The time-dependent electron spectra of fission fragments from the thermal-neutron-induced fission of  $^{235}\text{U}$  are calculated. The Gross Theory of nuclear beta decay is used to obtain the decay constant and individual electron spectra. The mean energy per fission carried by the electrons and the number of electrons per fission are also calculated.

Comparison of these calculated spectra to experimental ones shows good agreement.

## 1. INTRODUÇÃO

Atualmente, é grande o interesse no conhecimento das propriedades estruturais dos núcleos, estáveis ou não. Os primeiros podem ser pesquisados por processos estáticos ou dinâmicos, enquanto que os últimos somente por processos dinâmicos.

Nos vários processos dinâmicos para o estudo dos núcleos instáveis, o decaimento  $\beta$  tem grande importância. No estudo das propriedades dos núcleos longe da linha de estabilidade  $\beta$ , na região de núcleos ricos em neutrons, é usado o decaimento  $\beta^-$ . Tomando a linha de estabilidade  $\beta$  no plano N-Z, tem-se acima, os processos de captura de elétrons e decaimento  $\beta^+$  e abaixo o decaimento  $\beta^-$ .

A fissão de um núcleo pesado produz fragmentos ricos em neutrons, que se localizam em torno da reta que une o ponto (0,0) ao ponto  $(N_F, Z_F)$ , onde  $N_F$  e  $Z_F$  representam o número de neutrons e o número de protons, respectivamente, do núcleo que fissiona. Os fragmentos de fissão se distribuem na região de números de massa entre 70 e 160 aproximadamente e o número de fragmentos produzidos é em torno de 450.

No processo de fissão, neutrons e gamas são emitidos, chamados de neutrons e gamas prontos, logo após a fissão. A radiação pronta é importante no estudo do mecanismo de fissão. Após esse estágio, os fragmentos tendem a aumentar a sua carga, migrando para a linha de estabilidade  $\beta$ , através da emissão de elétrons, acompanhados por neutrons se possível energeticamente, chamados de neutrons atrasados.

O estudo da atividade dos produtos de fissão de núcleos pesados tem grande importância no uso pacífico da energia nuclear, principalmente na en-

genharia de reatores, e também para o conhecimento da estrutura e comportamento dos núcleos; em particular, a atividade  $\beta$  tem grande importância porque é um bom caminho de acesso na pesquisa das propriedades nucleares.

Way e Wigner <sup>1</sup> num primeiro trabalho teórico obtiveram o espectro de elétrons por um tratamento puramente estatístico das propriedades de conjunto dos núcleos, baseando-se na suposição de que a energia do núcleo  $(Z, A)$  pode ser expressa por  $E = a_A |Z - Z_0(A)|^2 + b_A$ , onde  $Z_0(A)$  é o número atômico do isôbaro mais estável (não necessariamente um número inteiro) e  $a_A$  e  $b_A$  são valores empíricos. Para o caso de  $Z$  ímpar, a expressão se reduz a  $a_A(Z - Z_0(A))$ . O número atômico do fragmento leve mais provável, supondo dois fragmentos de fissão, é tal que a energia de radiação dos fragmentos:

$$E = a_\lambda (Z_0(A_\lambda) - Z)^2 + a_p (Z_0(A_p) - 92 + Z)^2 \quad (1)$$

seja um mínimo. Os índices  $\lambda$  e  $p$  referem-se aos fragmentos leve e pesado, respectivamente. É usada a regra de Glendenin <sup>2</sup> de que as séries isobáricas são aproximadamente do mesmo comprimento. Foram calculados o número médio de elétrons por fissão e a energia média de todas as radiações (gama, elétron e neutrino), bem como foram apresentadas fórmulas aproximadas para o número de elétrons e para a energia total emitidos por segundo, para um tempo  $t$  após a fissão, sendo  $t$  maior que um dia.

Recentemente, Heller e colaboradores <sup>3</sup> e Heller <sup>4</sup> calcularam o espectro de raios  $\beta$  dependente do tempo, por meio da equação de decaimento:

$$\frac{d n_{ZA}(t)}{dt} + \lambda_{ZA} n_{ZA}(t) = \lambda_{Z-1,A} n_{Z-1,A}(t) \quad (2)$$

onde  $n_{ZA}(t)$  é a abundância do núcleo  $(Z, A)$  no tempo  $t$  e  $\lambda_{ZA}$  é a constante de

decaimento. O número de elétrons emitidos com energia entre  $E$  e  $E + dE$  é dado pela expressão:

$$P(E, t)dE = \sum_A \sum_Z \beta_{ZA}(t) P_{ZA}(E)dE \quad (3)$$

onde  $\beta_{ZA}(t) = n_{ZA}(t)\lambda_{ZA}$  é a razão de decaimento do núcleo  $(Z, A)$  e  $P_{ZA}(E)$  é a probabilidade que o elétron emitido tenha energia entre  $E$  e  $E + dE$ . A primeira soma se refere à contribuição de todas as séries isobáricas e a segunda; à de todos os isóbaros de uma série. Nesse método, a emissão de neutrons atrasados foi levada em conta na preparação dos dados iniciais da equação diferencial. Foram usados valores experimentais das constantes de decaimento, quando possível, e os valores obtidos através da sistemática de decaimento  $\beta$ ; entretanto, foi utilizada uma expressão bastante intuitiva para  $P_{ZA}(E)$ .

Para se obter informação sobre o espectro de elétrons é necessário um método mais sofisticado. O método de cálculo pelo modelo de camadas é bastante complexo para ser aplicado a este problema e existem dificuldades na extrapolação para núcleos não conhecidos. Porém, já se dispõe de uma teoria estatística, "Gross Theory" <sup>5-8</sup>, que pode ser usada para o cálculo do espectro de elétrons. Recentemente, experiências realizadas sobre as funções intensidade (strength functions) <sup>9-10</sup> mostram boa concordância com os resultados obtidos pela "Gross Theory" na região de alta energia.

O trabalho experimental de maior amplitude foi realizado por Tsoulfanidis e colaboradores <sup>11</sup> em 1971, para a fissão induzida por neutrons térmicos do <sup>235</sup>U. O espectro de elétrons atrasados ou dependente do tempo, foi medido para três diferentes situações: - "startup" - o espectro é medido após

o início de razão constante de fissão na amostra limpa; - "shutdown" - o espectro foi obtido após o corte de 8 horas de razão constante de fissão; "pulse" - o espectro foi produzido por uma fissão súbita resultante de um pulso de potência do reator. O número total de elétrons emitidos por fissão e a energia dos elétrons por fissão foram também medidos.

Neste trabalho, será usada a "Gross Theory" para o cálculo dos espectros de elétrons para "pulse" e "shutdown" e a energia dos elétrons por fissão, correspondente.

Os fragmentos produzidos pela fissão induzida por neutrons térmicos do  $^{235}\text{U}$  serão usados porque apresentam maior quantidade de dados experimentais e teóricos, embora tal conjunto seja incompleto. Essa escolha permitirá comparações entre os resultados que serão obtidos e os anteriores.

Na seção 2, serão mostrados a formulação do problema e o método de cálculo das quantidades correspondentes à experiência. Também será apresentada uma formulação para o cálculo do espectro de cascata de raios  $\gamma$  atrasados. O espectro não será calculado aqui.

Serão apresentados, na seção 3, os métodos de cálculo para se obter as constantes de decaimento e o espectro individual dos núcleos,  $P_{ZA}(E)$ , pela "Gross Theory", incluindo uma pequena revisão dessa teoria.

Os métodos numéricos serão mostrados na seção 4.

A seção 5 será dedicada aos resultados e discussão. A conclusão tomará lugar na seção 6.

## 2. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Os produtos de fissão se distribuem numa região longe da linha de estabilidade  $\beta$ , e se dirigem para ela emitindo elétrons. Os tempos de vida dos fragmentos abrangem uma região muito larga, que vai de segundos até vários anos.

As equações diferenciais para o decaimento, similares à equação (2) podem ser construídas conhecendo-se as constantes de decaimento dos núcleos. A emissão de neutrons atrasados é levada em conta nas próprias equações diferenciais, em constante com o tratamento de Heller<sup>3-4</sup>.

Uma equação diferença também é deduzida para determinar-se o comportamento assintótica da solução.

### 2.1 - CÁLCULO DO ESPECTRO $\beta$

Tsoufanidis e colaboradores<sup>11</sup>, mediram a dependência no tempo do espectro de elétrons de fragmentos de fissão em três casos diferentes:

- a) espectro "startup", constituído após obtida a razão de fissão constante no alvo limpo, irradiado por um feixe de neutrons térmicos;
- b) espectro "shutdown", sendo o espectro, no tempo, após o término abrupto de 8 horas de razão constante de fissão;
- c) espectro "pulse", obtido pela irradiação de um pulso de neutrons, quando o reator produz um pulso de potência, correspondendo ao espectro médio de uma fissão.

Segundo a nomenclatura de Tsoufanidis, são calculados neste trabalho

os espectros "pulse" e "shutdown". O "startup" não será tratado porque esse espectro depende da história como foi obtida a razão constante de fissão.

As equações diferenciais para o cálculo do espectro de elétrons são construídas a seguir. Estas equações são usadas para o cálculo dos espectros "pulse" e "shutdown" com condições iniciais diferentes.

Seja  $(Z, A)$  um núcleo que faz decaimento, conforme mostra a figura 1. A priori, tal decaimento pode ocorrer para qualquer estado do núcleo filho  $(Z+1, A)$ .

Se o núcleo  $(Z, A)$  decai para um estado excitado do núcleo filho  $(Z+1, A)$ , acima da energia de separação de neutron  $S_n$ , pode ocorrer a emissão de neutron, formando então o núcleo  $(Z+1, A-1)$ .

Esse processo pode ser representado, como o decaimento efetivo do núcleo  $(Z, A)$  formando os estados fundamentais do núcleo  $(Z+1, A)$  ou do núcleo  $(Z+1, A-1)$ , com constantes de decaimento  $\lambda_{ZA}^\beta$  e  $\lambda_{ZA}^n$ , respectivamente, se as escalas de tempo de emissão de neutron e decaimento  $\gamma$  são desprezíveis em relação a vida-média de decaimento  $\beta$ . Os índices dos  $\lambda$ 's são o número atômico e o número de massa nessa ordem, e o índice superior é o tipo de emissão.

O núcleo  $(Z, A)$  pode ser produzido de duas maneiras: pelo decaimento  $\beta$  do núcleo  $(Z-1, A)$  ou pelo decaimento  $\beta$  do núcleo  $(Z-1, A+1)$  seguido da emissão atrasada de neutron. Por outro lado o núcleo  $(Z, A)$  decairá da mesma forma produzindo o núcleo  $(Z+1, A)$  ou o núcleo  $(Z+1, A-1)$ . Na figura 2, os modos de decaimento e formação do núcleo  $(Z, A)$  são mostrados.

A variação da abundância por fissão do núcleo  $(Z, A)$ , denominada

$n_{ZA}(t)$ , é dada pela expressão:

$$\frac{dn_{ZA}(t)}{dt} = -\lambda_{ZA}^T n_{ZA}(t) + \lambda_{Z-1A}^{\beta} n_{ZA}(t) + \lambda_{Z-1 A+1}^n n_{Z-1 A+1}(t) \quad (4)$$

onde  $\lambda_{ZA}^T$  é a constante total de decaimento  $\beta$ , isto é,  $\lambda_{ZA}^T = \lambda_{ZA}^{\beta} + \lambda_{ZA}^n$ .

Para se conhecer a abundância de cada núcleo, é necessário resolver um sistema de equações diferenciais para o decaimento de todos os núcleos produzidos a partir da fissão. Na equação (4) o efeito de isômeros não é considerado, de acordo com a aproximação da "Gross Theory" <sup>5</sup>. \*

O espectro "pulse" é dado por:

$$P_{\text{"pulse"}}(E, t) = \sum_Z \sum_A P_{ZA}(E) n_{ZA}(t) \quad (5)$$

onde  $P_{ZA}(E)$  é o espectro individual de cada núcleo calculado usando a "Gross-Theory".

A equação (4) poderia ser utilizada para "shutdown", com condições iniciais apropriadas. Entretanto, para evitar a repetição do cálculo da equação diferencial um outro método é usado.

O espectro "shutdown" pode ser pensado como sendo produzido por uma série infinita de pulsos de fissão, desde um tempo  $t = -\infty$  até  $t = 0$ , conforme a figura 3. Então a abundância para o "shutdown",  $N_{ZA}(t)$ , do núcleo  $(Z, A)$  é obtida da seguinte forma: - cada pulso de fissão ocorrido num tempo  $t'$  irá produzir uma abundância  $\delta N_{ZA}(t)$  no tempo  $t$  dada por:

---

\* A vida-média de decaimento  $\gamma$  de isômeros não pode ser desprezada em relação ao decaimento  $\beta$ .



$$\delta N_{ZA}(t) = n_{ZA}(t-t') \delta t' \quad (6)$$

integrando ambos os membros da equação (6), desde  $t = -\infty$  a  $t = 0$ , segue:

$$N_{ZA}(t) = \int_{-\infty}^0 n_{ZA}(t-t') dt' \quad (7)$$

onde  $N_{ZA}(\infty) = 0$  para os núcleos instáveis e  $N_{ZA}(t) = \infty$  para os núcleos estáveis, porém os últimos não têm significado porque não contribuem para o espectro.

Fazendo uma mudança de variáveis,  $t - t' \rightarrow t'$ , na equação (7) resulta:

$$N_{ZA}(t) = \int_0^{\infty} n_{ZA}(t') dt' \cdot \int_0^t n_{ZA}(t') dt' \quad (8)$$

Analogamente a equação (5), o espectro "shutdown" é dado por:

$$P_{\text{"shutdown"}}(E, t) = \sum_Z \sum_A P_{ZA}(E) N_{ZA}(t) \quad (9)$$

No cálculo atual a equação (4) é resolvida numericamente por computador através do método de Runge-Kutta-Gill<sup>36</sup>, com o segundo termo da direita da equação (8) calculado simultaneamente. \* O primeiro termo poderia ser calculado da mesma maneira, entretanto, a integral até  $t = \infty$  necessita de muito tempo de computação por causa da existência de núcleos com vida média muito longa e também porque a solução numérica para tempo muito grande acumula considerá-

---

\* Tomando  $I(t) = \int_0^t n_{ZA}(t) dt$ , diferenciando ambos os membros em relação a  $t$  obtem-se a seguinte equação diferencial  $\frac{dI}{dt} = n_{ZA}(t)$ . A quantidade  $I(t)$  é calculada a partir desta equação.

vel erro. Então, é necessário outro modo para se calcular o primeiro termo da equação (9).

Integrando ambos os membros da equação (4), de  $t = 0$  a  $t = \infty$ , tem-se:

$$\int_0^{\infty} \frac{dn_{ZA}(t)}{dt} dt = -\lambda_{ZA}^T \int_0^{\infty} n_{ZA}(t) dt + \lambda_{Z-1A}^{\beta} \int_0^{\infty} n_{Z-1A}(t) dt + \lambda_{Z-1 A+1}^n \int_0^{\infty} n_{Z-1 A+1}(t) dt \quad (10)$$

escrevendo:

$$N_{ZA} = n_{ZA}(0) = \int_0^{\infty} n_{ZA}(t) dt \quad (11)$$

colocando a equação (11) em (10):

$$n_{ZA}(\infty) - n_{ZA}(0) = -\lambda_{ZA}^T N_{ZA} + \lambda_{Z-1A}^{\beta} N_{Z-1 A} + \lambda_{Z-1 A+1}^n N_{Z-1 A+1} \quad (12)$$

as quantidades  $n_{ZA}(\infty)$  se anulam para os núcleos instáveis e  $n_{ZA}(0)$  coincide com a distribuição inicial dos produtos de fissão  $F(Z, A)$  para o espectro "pulse". Então, a seguinte equação diferença é obtida:

$$\lambda_{ZA}^T N_{ZA} - \lambda_{Z-1A}^{\beta} N_{Z-1A} - \lambda_{Z-1 A+1}^n N_{Z-1 A+1} = F(Z, A) \quad (13)$$

com as condições de contorno  $N_{ZA} = 0$  para  $Z < Z_0(A)$ , onde  $Z_0(A)$  é o valor mínimo de  $Z$  para os produtos de fissão  $F(Z, A)$  em cada série isobárica.

A solução formal da equação diferença é:

$$N_{ZA} = \sum_{Z', A'} \frac{F(Z', A')}{\lambda_{Z', A'}^T} \sum_{\{A_i\}} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_{Z_i, A_i}^{r_i}}{\lambda_{Z_i, A_i}^T} \quad (14)$$

onde o índice superior  $r_i$  é  $\beta$  se  $A_i - A_{i+1} = 0$ , e  $n$  se  $A_i - A_{i+1} = 1$ . A primeira soma é efetuada sobre todos os núcleos ancestrais que podem produzir o núcleo  $(Z, A)$  por decaimento sucessivo com ou sem a emissão de neutron atrasa

do, a segunda soma é feita sobre todos os possíveis caminhos de decaimento do núcleo  $(Z', A')$  para o núcleo  $(Z, A)$ , o produto final é efetuado para todos os núcleos intermediários no caminho de decaimento, isto é,  $(Z', A') \equiv (Z_1, A_1) \rightarrow (Z_2, A_2) \rightarrow \dots \rightarrow (Z_n, A_n) \equiv (Z, A)$ .

A equação (8) é reescrita:

$$N_{ZA}(t) = N_{ZA} - \int_0^t n_{ZA}(t') dt' \quad (15)$$

onde  $N_{ZA}$  é obtida da expressão (14). Se não houvesse a emissão de neutrons atrasados a equação (14) se reduziria a:

$$N_{ZA} = \sum_{Z'} \frac{F(Z', A)}{\lambda_{Z'A}^T} (Z-Z') \quad (16)$$

O número total de elétrons emitidos por fissão, é dado por:

$$n_T = \int_0^{\infty} \lambda_{ZA}^T n_{ZA}(t) dt = \sum_Z \sum_A N_{ZA} \lambda_{ZA}^T \quad (17)$$

A energia média por fissão dependente do tempo levada pelos elétrons, é:

$$\langle E \rangle_t = \int_0^{\infty} E P(E, t) dE \quad (18)$$

para "pulse" e "shutdown" com o respectivo  $P(E, t)$ .

## 2.2 - CÁLCULO DO ESPECTRO DE $\gamma$ EM CASCATAS

Nesta sub-seção é mostrado um método para calcular o espectro de cascata de  $\gamma$ .

O cálculo do espectro de cascata é feito, em geral, por simulação de Monte

Carlo <sup>12</sup>. Este tratamento tem as desvantagens de baixa precisão e de cálculos demorados. Um modo para o cálculo do espectro de cascata de  $\gamma$  é sugerido através de uma equação integral.

Suponha que a figura 4, represente os níveis excitados de um núcleo. Seja  $P(E, E-E_\gamma)$  a probabilidade de decaimento  $\gamma$  de um nível  $E$  com energia  $E_\gamma$ , onde  $E-E_\gamma$  é a energia do nível final. A função  $P(E, E-E_\gamma)$  deve ter aproximadamente a forma:

$$P(E, E-E_\gamma) \approx E_\gamma^2 \rho(E-E_\gamma) |\langle E-E_\gamma | M_\gamma | E \rangle|^2 \quad (19)$$

onde  $E_\gamma$  é a energia do  $\gamma$ ,  $\rho(E-E_\gamma)$  é a densidade de níveis do estado final e  $\langle E-E_\gamma | M_\gamma | E \rangle$  é o elemento de matriz de transição  $\gamma$  do nível inicial  $E$  para o nível final  $E-E_\gamma$ . A densidade de níveis e o elemento de matriz podem ser calculados por meio de um modelo nuclear. A função  $P(E, E-E_\gamma)$  deve ser normalizada:

$$\int_0^E P(E, E-E_\gamma) dE_\gamma = 1 \quad (20)$$

A probabilidade de emissão de  $\gamma$  com energia  $E_\gamma$  do nível de energia  $E$  em primeira chance, é:

$$P_1 = P(E, E-E_\gamma) \quad (21)$$

A probabilidade de emissão de  $\gamma$  com energia  $E_\gamma$  do nível de energia  $E$  em segunda chance, conforme a figura 5, é:

$$P_2 = \int_{E_\gamma}^E dE_1 P(E, E_1) P(E_1, E_1 - E_\gamma) \quad (22)$$

Em terceira chance, figura 6, é:

$$P_3 = \int_{E_Y}^E dE_1 \int_{E_Y}^{E_1} dE_2 P(E, E_1) P(E_1, E_2) P(E_2, E_2 - E_Y) \quad (23)$$

Continuando, seriam obtidas as probabilidades de emissão para todas as chances. O espectro de cascata  $\gamma$ , originário do nível  $E_0$ , é dado por:

$$n(E_0, E_Y) = P(E_0, E_0 - E_Y) + \int_{E_Y}^E dE_1 P(E_0, E_1) P(E_1, E_1 - E_Y) +$$

$$+ \int_{E_Y}^{E_0} dE_1 \int_{E_Y}^{E_1} dE_2 P(E_0, E_1) P(E_1, E_2) P(E_2, E_2 - E_Y) + \dots \quad (24)$$

Naturalmente que:

$$\int_0^E n(E_0, E_Y) dE_Y = 1 \quad (25)$$

A equação (24), pode ser reescrita da seguinte forma:

$$n(E_0, E_Y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^E \int_0^{E_1} \dots \int_0^{E_{n-1}} dE_1 dE_2 \dots dE_n \quad (26)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta(E_i - E_{i+1} - E_Y) P(E_0, E_1) P(E_1, E_2) \dots P(E_{n-1}, E_n)$$

onde foi feita a convenção de  $P(E_i, E_f) = 0$  se  $E_f < 0$ .

Esta expressão pode ser interpretada fisicamente da seguinte maneira:

- o produto dos P's dá a probabilidade de desdobramento do intervalo de energia  $(E_0, 0)$  para  $(E_0, E_1, \dots, E_n)$ , a soma  $\sum_i \delta(E_i - E_{i+1} - E_\gamma)$  seleciona apenas o desdobramento em que a diferença de energia entre dois níveis próximos é igual a  $E_\gamma$  e as integrais levam em conta a soma sobre todas as possibilidades.

Se as funções  $\delta$ 's forem tiradas do integrando da equação (26), obtém-se a probabilidade total de decaimento do nível  $E_0$ :

$$P_{\text{total}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^E dE_1 \dots \int_0^{E_{n-1}} dE_n P(E_0, E_1) \dots P(E_{n-1}, E_n) \quad (27)$$

que resulta igual a unidade. Este resultado é naturalmente esperado.

A equação (24) pode ser escrita na forma de equação integral sobre  $n(E_0, E_\gamma)$ :

$$n(E_0, E_\gamma) = P(E_0, E_0 - E_\gamma) + \int_{E_\gamma}^{E_0} dE_1 P(E_0, E_1) n(E_1, E_\gamma) \quad (28)$$

então, se  $P(E_0, E_0 - E_\gamma)$  é conhecida, pode-se calcular  $n(E_0, E_\gamma)$  pelo método de iteração.

Para verificar se a equação (24) é plausível, calcula-se a energia total da cascata  $\gamma$  partindo de um nível com energia  $E$  para o estado fundamental; o resultado tem que ser obviamente igual a  $E$ .

A energia total de  $\gamma$  é obtida pela equação (24):

$$\int_0^E dE_Y E_Y P(E, E-E_Y) =$$

$$\int_0^E dE_Y E_Y P(E, E-E_Y) + \int_0^E dE_Y E_Y \int_{E_Y}^E dE_1 P(E, E_1) P(E_1, E_1 - E_Y) + \dots \quad (29)$$

Fazendo uma mudança de variáveis no primeiro termo do segundo membro da equação (29),  $E_Y \rightarrow E-E'$ , resulta:

$$\int_0^E dE_Y E_Y P(E, E-E_Y) =$$

$$= E \int_0^E P(E, E') dE' - \int_0^E E' P(E, E') dE' = E - \int_0^E E' P(E, E') dE' \quad (30)$$

Pela convenção  $P(E_i, E_f) = 0$  para  $E_f < 0$ , o segundo termo da (29) se torna:

$$\int_0^E dE_Y E_Y \int_0^E dE_1 P(E, E_1) P(E_1, E_1 - E_Y) =$$

$$= \int_0^E dE_1 \int_0^{E_1} dE_Y E_Y P(E, E_1) P(E_1, E_1 - E_Y) \quad (31)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $E_1 - E_Y \rightarrow E'$ , na equação (31):

$$\int_0^E dE_1 \int_0^E dE' (E_1 - E') P(E, E_1) P(E_1, E') =$$

$$= \int_0^E E_1 P(E, E_1) dE_1 - \int_0^E dE_1 P(E, E_1) \int_0^E dE' E' P(E, E') \quad (32)$$

A soma da equação (30) com a equação (32) cancela o segundo termo da direita de (30) com o primeiro termo da direita de (32). Por procedimento análogo, até o n-ésimo termo:

$$\int_0^E E_Y n(E, E_Y) dE_Y =$$

$$= E - \int_0^E dE_1 \dots \int_0^{E_{n-1}} dE_n E_n P(E, E_1) \dots P(E_{n-1}, E_n)$$

O último termo da equação (33), pode ser mostrado que se anula no limite  $n \rightarrow \infty$ .

Escrevendo:

$$\frac{1}{E} \int_0^E E' P(E, E') dE' = \alpha(E) \quad (34)$$

onde  $\alpha(E)$  é a razão entre a energia média e a energia máxima e  $\alpha(E)$  é menor que a unidade. Tomando o valor máximo de  $\alpha(E)$  como  $\alpha$ , segue:



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^E dE_1 \int_0^{E_1} dE_2 \dots \int_0^{E_{n-1}} dE_n E_n P(E, E_1) P(E_1, E_2) \dots$$

$$\dots P(E_{n-1}, E_n) < \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n E = 0 \quad (35)$$

segue então:

$$\int_0^E E_Y n(E, E_Y) dE_Y = E \quad (36)$$

### 3. CÁLCULO DAS CONSTANTES DE DECAIMENTO E DO ESPECTRO INDIVIDUAL

Para resolver a equação diferencial (4) é necessário conhecer explicitamente:  $\lambda_{ZA}^T$ ,  $\lambda_{ZA}^n$  e  $P_{ZA}(E)$ . O cálculo pelo método de camada, por exemplo, é muito complicado e impossível de ser aplicado a núcleos com estrutura desconhecida. Porém, já se tem disponível uma teoria estatística, a "Gross Theory" proposta por Takahashi e colaboradores<sup>5-8</sup>, que pode ser utilizada para esse fim.

Nesta seção é feita uma breve revisão da "Gross Theory" inicialmente, e depois é mostrada a sua aplicação para o cálculo das constantes de decaimento total, de decaimento através de neutrons atrasados e de espectro individual de energia.

O núcleo  $(Z, A)$  ao fazer decaimento  $\beta^-$  para o núcleo  $(Z+1, A)$  pode ir, a priori, para qualquer nível do núcleo filho, desde que energeticamente possível. Isso sugere a possibilidade de um tratamento estatístico do decaimento.

Dada a grande quantidade de núcleos e a natureza dos decaimentos, é usada a "Gross Theory" para o cálculo das constantes de decaimento e do espectro individual de energia. Esta teoria é preferível aqui, em vista que ela trata as propriedades médias de conjunto ao invés das propriedades individuais dos núcleos.

A "Gross Theory" supõe válida a teoria C. V. C. (corrente vetorial conservada) e a soma sobre os estados finais dá lugar a integral, sobre todos os estados possíveis, da média do valor absoluto ao quadrado do elemento de matriz nuclear multiplicado pela densidade de níveis. A aplicação da "Gross Theory" ao decaimento de primeira proibição<sup>8</sup> e aos neutrons atrasados<sup>14</sup> é mostrada por Takahashi.

### 3.1 REVISÃO DA "GROSS THEORY"

As propriedades de decaimento são consideradas médias sobre todas as transições para diferentes estados finais do núcleo filho, porque o decaimento em geral pode ir para muitos níveis. Desta forma não se está considerando as propriedades de transição para estados finais definidos.

Por simplicidade, é revisado somente o caso de transições permitidas.

A constante de decaimento total para transição permitida segundo as aproximações usuais <sup>13</sup>, é:

$$\lambda^T = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \sum_j \{ |G_F|^2 |\mathcal{M}_j|^2 + |G_{GT}|^2 |\mathcal{M}_{GT}|^2 \} f(E_i - E_j) \quad (37)$$

onde  $j$  refere-se a um estado final definido do núcleo filho,  $m_e$  é a massa do elétron,  $G_F$  e  $G_{GT}$  são as constantes de acoplamento de interação de Fermi e Gamow-Teller, respectivamente,  $E_i$  é a energia do estado inicial e  $E_j$  a do estado final, e  $\mathcal{M}_j$  é o elemento de matriz de Fermi para o estado final  $j$  e  $\mathcal{M}_{GT}$  é o elemento de matriz de Gamow-Teller, e a função  $f(E_i - E_j)$  é a função usual de Fermi integrada.

A passagem da expressão de  $\lambda^T$  para a "Gross Theory" é feita representando a soma por integração em relação a  $E$ , onde  $E (E = E_j - E_i)$  é tomada como variável contínua. Então:

$$\lambda^T = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_{-Q}^0 \{ |G_F|^2 |M_F(E)|^2 + |G_{GT}|^2 |M_{GT}(E)|^2 \} f(-E) dE \quad (38)$$

onde  $Q$  é o valor- $Q$  do estado fundamental,  $|M_F(E)|^2$  e  $|M_{GT}(E)|^2$  são os elementos de matriz de Fermi e Gamow-Teller, respectivamente, multiplicados pelas densidades de níveis finais e tomados em média sobre um intervalo apropriado de energia.

Das funções  $|M_F(E)|^2$  e  $|M_{GT}(E)|^2$  podem ser derivadas muitas propriedades de decaimento que independem da estrutura individual detalhada dos níveis finais.

Para a investigação do caráter de  $|M_\Omega(E)|^2$ , onde  $\Omega$  representa F ou GT, considere o estado:  $|\phi_\Omega\rangle = \Omega|\psi_i\rangle$ , onde  $\Omega$  é o operador de decaimento  $\beta$  e  $|\psi_i\rangle$  é o estado inicial.

O estado  $|\phi_\Omega\rangle$ , que não está normalizado, pode ser caracterizado razoavelmente bem pelas quantidades: - sua norma  $\langle\phi_\Omega|\phi_\Omega\rangle$ , - o valor esperado de energia  $\langle\phi_\Omega|H|\phi_\Omega\rangle$ , e - o segundo momento de sua distribuição de energia  $\langle\phi_\Omega|H^2|\phi_\Omega\rangle$ .

Relacionando estas quantidades com  $|M_\Omega(E)|^2$ :

$$\langle\phi_\Omega|\phi_\Omega\rangle \approx \int_{-Q}^{\infty} |M_\Omega(E)|^2 dE, \quad (39)$$

$$\frac{\langle\phi_\Omega|(H-E_i)|\phi_\Omega\rangle}{\langle\phi_\Omega|\phi_\Omega\rangle} \approx \frac{\int_{-Q}^{\infty} E|M_\Omega(E)|^2 dE}{\int_{-Q}^{\infty} |M_\Omega(E)|^2 dE}, \quad (40)$$

$$\frac{\langle\phi_\Omega|(H-E_i)^2|\phi_\Omega\rangle}{\langle\phi_\Omega|\phi_\Omega\rangle} \approx \frac{\int_{-Q}^{\infty} E^2|M_\Omega(E)|^2 dE}{\int_{-Q}^{\infty} |M_\Omega(E)|^2 dE}. \quad (41)$$

O operador de decaimento  $\beta$  pode ser escrito como uma soma de operadores de partícula simples  $\omega_k$  que atua no k-ésimo núcleo,  $\Omega = \sum_k \omega_k$  com  $\omega_k = \tau_k^\mp$  para a transição de Fermi, e  $\omega_k = \tau_k^\mp \sigma_k$  para a transição de Gamow-Teller, onde  $\tau_k^-$  e  $\tau_k^+$  são os operadores de isospin para decaimento

$\beta^+$  e  $\beta^-$ , respectivamente.

Usando esta notação pode-se escrever a equação (39), da seguinte forma:

$$\langle \phi_{\Omega} | \phi_{\Omega} \rangle = \sum_k \langle \psi_i | \omega_k^+ \omega_k | \psi_i \rangle + \sum_{l>m} \langle \psi_i | \omega_k^+ \omega_m^- \omega_m^+ \omega_k | \psi_i \rangle. \quad (42)$$

Para a transição de Fermi resulta:

$$\langle \phi_{\Omega} | \phi_{\Omega} \rangle_F = N_1 + (P_3 - P_1)NZ, \quad (43)$$

onde  $N_1$  é o número total de neutrons para o decaimento  $\beta^-$ ,  $P_3$  e  $P_1$  são as probabilidades de se achar o par neutron-proton com isospin triplet ou singlet, respectivamente.

Para a transição de Gamow-Teller, se os núcleos pais não são polarizados tem-se:

$$\langle \phi_{\Omega} | \phi_{\Omega} \rangle_{GT} = N_1 + \left( \frac{1}{3} P_{33} + P_{11} - \frac{1}{3} P_{13} - P_{31} \right), \quad (44)$$

onde  $P_{33}$ ,  $P_{11}$ ,  $P_{13}$ ,  $P_{31}$  são as probabilidades de se achar o par neutron-proton com isospin triplet e spin triplet, isospin singlet e spin singlet, isospin singlet e spin triplet, e isospin triplet e spin singlet, respectivamente.

O segundo termo da direita das equações (43) e (44) são consideravelmente menores que  $N_1$  para os modelos usuais (por exemplo: modelo de camadas).

Considerando o hamiltoniano nuclear não relativístico como sendo:

$$H \approx H_K + H_N + H_C, \quad (45)$$

onde  $H_K$  representa a parte de energia cinética,  $H_N$  a de energia potencial das forças nucleares e  $H_C$  a somas de energia coulombiana e a diferença de

massa neutron-hidrogenio.

Para se estimar as equações (40) e (41) há a necessidade de se conhecer as relações de comutação entre o operador de decaimento  $\beta$  e o hamiltoniano. Para o caso de decaimento permitido, e desprezando-se o pequeno efeito da diferença de massa neutron-proton,  $\Omega$  comuta  $H_K$ . Assumindo que as forças nucleares independem da carga, segue que  $H_N$  comuta o operador de isospin  $\tau^\pm$ .

Embora uma parte de dependência na carga das forças nucleares seja difícil de separar, ela é provavelmente pequena. Tomando então somente o termo coulombiano com a dependência de carga, tem-se:

$$H_C = \frac{1}{2} \sum_{k \neq l} \frac{1 + \tau_k^{(3)}}{2} \frac{1 + \tau_l^{(3)}}{2} \frac{e^2}{r_{kl}} + \Delta_{nH} \sum_m \frac{1 - \tau_m^{(3)}}{2}, \quad (46)$$

onde  $\Delta_{nH}$  é a diferença de massa neutron-hidrogenio.

Como para a transição de Fermi:

$$\Omega = T_{\mp} = \sum_k \tau_k^{\mp}, \quad (47)$$

a equação (40) pode ser escrita comò:

$$\frac{\langle \phi_\Omega | (H - E_i) | \phi_\Omega \rangle}{\langle \phi_\Omega | \phi_\Omega \rangle} = \frac{\langle \psi_i | T_{\pm} [H_C, T_{\mp}] | \psi_i \rangle}{\langle \psi_i | T_{\pm} T_{\mp} | \psi_i \rangle} \quad (48)$$

$$= \mp \left\{ \langle \phi_\Omega | \sum_{k \neq l} \frac{1 + \tau_l^{(3)}}{2} \frac{e^2}{r_{kl}} \tau_k^{\mp} | \psi_i \rangle - \Delta_{nH} \right\},$$

porque  $\langle \phi_\Omega | (H - E_i) | \phi_\Omega \rangle = \langle \psi_i | \Omega^\dagger [H, \Omega] | \psi_i \rangle$ , na aproximação  $[H, \Omega] = [H_C, \Omega]$ .

A equação (48) indica que o valor esperado de energia do estado  $\phi_\Omega$  é menor que a energia inicial  $E_i$  para o decaimento  $\beta^+$  e maior para o  $\beta^-$ . Estas diferenças são iguais a energia coulombiana de decaimento do núcleo menos a diferença de massa neutron-hidrogênio. De acordo com a equação (40) a energia média da função distribuição  $|M_\Omega(E)|^2$  é determinada por essa diferença de energia.

O mesmo efeito é esperado para a transição de Gamow-Teller, porém a parte das forças nucleares  $H_N$ , dependente do spin, não comuta com o operador de Gamow-Teller. É possível estimar o comutador usando uma forma de potencial nuclear, porém essa estimativa não é quantitativamente conclusiva por causa da falta de conhecimento das forças nucleares e do problema de muitos corpos.

A inclusão da parte dependente de spin nas forças nucleares aumenta algo na energia média de  $|M_{GT}(E)|^2$ , porque o operador de Gamow-Teller perturba a orientação dos spins nucleares que são arranjados para minimizar a energia do estado fundamental inicial. O aumento de energia não é provavelmente muito grande porque as orientações dos spins iniciais dos nucleons não são muito diferentes da orientação ao acaso. Daí então, decorre que o centro de energia de  $|M_{GT}(E)|^2$  não está muito longe do centro de energia de  $|M_F(E)|^2$ .

O estado  $|\phi_\Omega\rangle$  não é um auto estado de energia, por exemplo; a energia coulombiana é diferente da média dependendo da posição do nucleon que decai.

No centro ou perto de outro proton a energia coulombiana é maior que a média, enquanto que na periferia é menor. Esses efeitos são as causas da difusão de energia de  $|M_F(E)|^2$ , que é muito pequena como observada nos esta-

dos isobáricos análogos.

De outro lado, o efeito de mudança de orientação do spin (spin flip) na transição de Gamow-Teller fará uma difusão de energia em  $|M_{GT}(E)|^2$  muito mais larga do que  $|M_F(E)|^2$ .

Desde que o operador de decaimento é uma soma de operadores de partícula simples, a diferença de energia  $E$  pode ser representada como a diferença de energia entre as energias do nucleon que decai nos núcleos pai e filho. Colocando a existência dessa "energia de nucleon simples", denomina-se  $E$  a energia do núcleo pai. Um modelo mais simples para representar isso é o modelo de camadas.

A energia de nucleon simples  $E$  pode ser definida como uma soma da energia cinética, energia potencial entre este nucleon e os outros e a energia da diferença de massa neutron-proton.

A energia de partícula prevista pelo modelo de camadas é bem próxima da energia  $E$ , quando o nucleon considerado não está muito perto de outros nucleons. Quando o nucleon está próximo de outro nucleon, o modelo de camadas super-estima a energia da partícula. Esse fato decorre que a forte interação entre os nucleons diminui a energia, porque a parte repulsiva do potencial é menos efetiva que a atrativa.

Para a obtenção da distribuição de energia, pode-se usar a seguinte maneira: - suponha que os nucleons estão contidos em uma caixa em que o fundo é uma superfície irregular. A superfície superior é a superfície de Fermi. Supondo essa superfície plana, pode-se escrever:

$$|M_{\Omega}(E)|^2 \approx \int_{\epsilon_0(E)}^{\epsilon_1} D_{\Omega}(E_1, \epsilon) \frac{dN_1}{d\epsilon} d\epsilon, \quad (49)$$



onde  $\frac{dN_1}{d\epsilon}$  é a densidade de nucleons que podem fazer decaimento,  $\epsilon_0(E)$  é a energia do nucleon do fundo da caixa e  $\epsilon_1$  é a energia máxima dos estados de nucleon simples cheios.

O princípio da exclusão de Pauli pode ser colocado no limite inferior da integral, tomando:

$$\epsilon_0(E) = \max(\epsilon_{\min}, \epsilon_1 - Q - \epsilon) , \quad (50)$$

pois o princípio pode ser expresso pela desigualdade:

$$\epsilon + E > \epsilon_1 - Q . \quad (51)$$

A equação (49) tem duas características: não leva em conta o efeito quanto-mecânico da interferência, decorrente do fato que o operador de decaimento  $\beta$  não é um simples operador de partícula simples, mas uma soma deles; e o fato do princípio de exclusão de Pauli estar incluído no limite inferior da integral.

Se as superfícies são difusas a expressão correta é:

$$|M_{\Omega}(E)|^2 = \int_{\epsilon_0(E)}^{\epsilon_1} D_{\Omega}(E, \epsilon) \frac{d\Omega_1}{d\epsilon} \omega(E, \epsilon) d\epsilon \quad (52)$$

onde  $\omega(E, \epsilon)$  é uma função peso que leva em conta o princípio de exclusão, ou reflete o grau de desocupação dos estados finais. Supondo superfícies planas esta equação é igual a (49), porque para  $E + \epsilon > \epsilon_1 - Q$  e zero para  $\epsilon + E \leq \epsilon_1 - Q$ .

Usando (49) e (52) pode-se escrever as expressões de  $\lambda^T$ : - para superfícies planas:

$$\lambda^T = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_{-Q}^0 dE \int_{\max(\epsilon_{\min}, \epsilon_1 - Q - E)}^{\epsilon_1} d\epsilon \{ |G_F|^2 D_F(E, \epsilon) + 3 |G_T|^2 \cdot D_{GT}(E, \epsilon) \} \times \frac{dN_1}{d\epsilon} f(-E), \quad (53)$$

e - para superfícies difusas:

$$\lambda^T = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_{-Q}^0 dE \int_{\max(\epsilon_{\min}, \epsilon_1 - Q - E)}^{\epsilon_1} d\epsilon \{ |G_F|^2 D_F(E, \epsilon) + 3 |G_{GT}|^2 \cdot D_{GT}(E, \epsilon) \} \frac{dN_1}{d\epsilon} \omega(E, \epsilon) f(-E). \quad (54)$$

Uma discussão análoga para a transição de primeira proibição leva a seguinte expressão:

$$\lambda^T = \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} \int_{-Q}^0 \sum_{\Omega} |G_{\Omega}|^2 |M_{\Omega}(E)|^2 f_{\Omega}(-E) dE \quad (55)$$

onde  $\Omega$  denota o tipo de transição, por exemplo:  $\Omega = f(\vec{r} \times \vec{p})$ ,  $f B_{ij}$  etc. e  $f_{\Omega}(-E)$  é a função correspondente a função de Fermi que inclui o fator de forma <sup>8</sup>.

A expressão geral de  $\lambda^T$  incluindo os decaimentos permitido e de primeira proibição é:

$$\lambda^T = \sum_{\Omega} \frac{C}{2\pi^3} |G_{\Omega}|^2 \left| \int_{-Q}^0 |M_{\Omega}(E)|^2 f_{\Omega}(-E) dE + f_{\Omega}(Q_{\Omega}) \int_{-Q}^{Q_{\Omega}} |M_{\Omega}(E)|^2 dE \right. \quad (56)$$

onde  $Q_{\Omega}$  é o maior valor-Q para a transição do tipo  $\Omega$  e  $G_{\Omega}^2$  é igual a  $G_V^2$ ,  $3G_A^2$ ,  $3G_A^2/(\hbar/m_e c)^2$ ,  $3G_V^2/(\hbar/m_e c)^2$ ,  $6G_A^2/(\hbar/m_e c)^2$  e  $20G_A^2/(\hbar/m_e c)^2$ , para os ca-

os  $\Omega = F, GT, 10A, 11A$  e  $12A$  (estes símbolos representam as transições: de Fermi, de Gamow-Teller, de primeira proibição grau 0, de primeira proibição grau 1 e de primeira proibição grau 2) <sup>13</sup> e  $f_F = f_{GT} = f_0$ .

Se o valor- $Q$  de decaimento  $\beta$  é conhecido, pode-se calcular numericamente  $\lambda^T$  usando expressões explícitas para  $|M_\Omega(E)|^2$  e  $f(-E)$ .

Takahashi e colaboradores parametrizaram a forma da função intensidade e determinaram os parâmetros empiricamente. Estes autores propõem duas funções adequadas para representar a função intensidade: -a distribuição de Lorentz-modificada:

$$D_\Omega(E) = \frac{(\sigma_\Omega^2 + \gamma^2)(\sigma_\Omega^2/\gamma)}{\pi} \cdot \frac{1}{(E-\Delta_F)^2 + (\sigma_\Omega/\gamma)^2} \cdot \frac{1}{(E-\Delta_\Omega)^2 + \gamma^2} \quad (57)$$

e - a distribuição de Gauss:

$$D_\Omega(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\Omega} \exp \{-(E-\Delta_\Omega)^2/(2\sigma_\Omega^2)\} \quad (58)$$

Recentemente, foram realizadas experiências do Projeto ISOLDE <sup>9, 10</sup> para a determinação da função intensidade, que concordam qualitativamente bem com as calculadas pela "Gross Theory".

### 3.2 - CÁLCULO DO ESPECTRO INDIVIDUAL

A constante de decaimento  $\beta$  é dada pela expressão (56) através da "Gross Theory". Nessa expressão todos os estados finais dos elétrons são somados; então, para o cálculo do espectro individual de elétron tem que se achar a expressão da constante de decaimento parcial de ser emitido um elétron com

energia  $E_e$ . Na equação (56) a função de Fermi é dada pela integral sobre a energia do elétron, como:

$$f_{\Omega}(E) = \int_1^{W_0} F_0(Z, W) C_{\Omega}(Z, A, W_0, W) PW(W_0 - W)^2 dW \quad (59)$$

onde  $W_0 = E + 1^*$ ,  $p = \sqrt{W^2 - 1}$ ,  $F_0(Z, W)$  é a função de Fermi de correção coulombiana da função de onda do elétron e  $C(Z, A, W_0, W)$  é o fator de forma da transição. Seguindo o hábito, nesta expressão é usada a unidade de energia em  $mc^2$ .

A equação (56) deve ser reescrita para o cálculo de  $P_{ZA}(E_e)$ , da seguinte forma:

$$\lambda^T = \int_{-Q_{\Omega}}^0 dE \int_1^{W_0} dW I(E, W, W_0 - W) \quad (60)$$

onde  $-E$  é a energia do decaimento,  $W$  é a energia do elétron inclusive massa de repouso,  $W_0 - W$  é a energia do neutrino emitido e  $I$  é o integrando de (56). Para o cálculo do espectro individual do elétron é colocada na expressão (60) a função  $\delta(W - E_e - 1)$  que seleciona o elétron com energia cinética  $E_e$ , com a restrição física de  $W_0 - W > 0$ .

Então tem-se:

$$P_{ZA}(E_e) = \int_{-Q}^{-E_e} \sum_{\Omega} |G_{\Omega}|^2 |M_{\Omega}(E)|^2 F_0(Z, W) C_{\Omega}(Z, E, W) x PW(E+W)^2 dE \quad (61)$$

onde  $W = E + 1$ .

---

\* O fator 1 representa a massa de repouso do elétron.

$P_{ZA}(E_e)$ , então pode ser calculado de maneira análoga a  $\lambda^T$  com pequenas modificações.

### 3.3. CÁLCULO DE $\lambda^n$

A "Gross Theory" é usada também para calcular a constante de decaimento com a emissão de neutron atrasado <sup>14</sup>.

A emissão de neutron atrasado pode tomar lugar quando o decaimento  $\beta$  chega a um estado excitado do núcleo filho, acima da energia de separação de neutron  $S_n$  (figura 1). Seja  $\frac{d\lambda}{dE}$  a constante de decaimento parcial com energia de decaimento  $E$ , que dá a constante de decaimento para um estado de energia  $Q-E$  do núcleo filho. A razão da emissão de neutron atrasado em competição com o decaimento  $\gamma$  pode ser dado por:

$$\frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma_n(E) + \Gamma_\gamma(E)}, \quad (62)$$

onde  $\Gamma$  representa a largura.

A constante de decaimento com a emissão de neutron atrasado é:

$$\lambda^n = \int_{-Q}^0 \frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma_n(E) + \Gamma_\gamma(E)} \frac{d\lambda}{dE} dE, \quad (63)$$

onde em geral  $\Gamma_n \gg \Gamma_\gamma$  para  $-E < Q - S_n$ , e caso contrário  $\Gamma_n = 0$ , então pode-se representar (62), por:

$$\frac{\Gamma_n(E)}{\Gamma_n(E) + \Gamma_\gamma(E)} = \Theta(E - Q + S_n) \quad (64)$$

Então a equação (63), toma a forma:

$$\lambda^n = \int_{-Q}^{-(Q-S_n)} \sum_{\Omega} |G_{\Omega}|^2 |M_{\Omega}(E)|^2 f_{\Omega}(-E) dE \quad (65)$$

De acordo com Kodama e Takahashi <sup>15</sup>, a expressão de  $\lambda^n$  é bem aproximada pela forma:

$$\lambda^n \approx 4,88 \times 10^{-6} (Q - S_n)^{4,5} \quad (66)$$

onde  $Q$  e  $S_n$  são medidas em  $mc^2$ .

O cálculo de  $\lambda^n$  foi efetuado, por simplicidade, pela equação (66).

#### 4. MÉTODO DE CÁLCULO

É tratado, nesta seção, o método de cálculo em detalhe.

Para calcular  $\lambda_{ZA}^T$ ,  $\lambda_{ZA}^n$  e  $P_{ZA}(E)$  é necessário conhecer a massa nuclear do estado fundamental. As massas nucleares usadas são apresentadas na sub-seção 4.1.

Para resolver a equação diferencial (4) é preciso especificar as condições iniciais, que são os produtos de fissão tratados na sub-seção 4.2. A sub-seção 4.3 é dedicada à técnica numérica aplicada para este problema.

##### 4.1 - MASSAS NUCLEARES

O cálculo de  $\lambda_{ZA}^T$ ,  $\lambda_{ZA}^n$  e  $P_{ZA}(E)$  exige o conhecimento dos valores  $Q$  e  $S_n$  de cada núcleo, definidos da seguinte forma:

$$Q(Z,A) = E_x(Z,A) - E_x(Z+1,A) \quad (67)$$

$$S_n(Z,A) = E_x(Z,A) - E_x(Z+1,A-1) - E_x(n) \quad (68)$$

onde  $E_x(Z,A)$  é o excesso de massa definido como  $E_x(Z,A) = E(Z,A) - (m_u c^2)A$ , sendo  $E$  a energia do núcleo  $(Z,A)$  e  $m_u$  a unidade de massa atômica ( $m_u c^2 = E(^{12}\text{C})/12$ ) e  $E_x(n)$  o excesso de massa do neutron, que tem valor numérico igual a 8,07144 MeV.

Neste trabalho, são usados valores experimentais quando possível; os valores calculados tomam lugar quando os primeiros inexistem, porque a função intensidade foi ajustada usando valores experimentais das massas nucleares<sup>4</sup>.

A tabela de excesso de massa de Wapstra e colaboradores<sup>16</sup> de 1965 foi usada para este propósito. Como porém esta tabela não abrange todos os núcleos, outra fonte foi tomada para se obter o excesso de massa. Existem muitas fórmulas de massa, que utilizam até modelo de camadas. De acordo com comparação realizada por Wing<sup>17</sup>, a fórmula de massa de Garvey e colaboradores<sup>18</sup>, baseada em uma inter-relação de massas nucleares, tem a menor dispersão média no teste de  $\chi^2$ . A extrapolação das fórmulas de massa para região longe da linha de estabilidade  $\beta$  é ainda discutível.

Aqui, é usada a fórmula de massa de Garvey e colaboradores; entretanto, é mostrado um exemplo de cálculo com a fórmula de massa de Myers e Swiatecki<sup>19</sup>, para comparação.

#### 4.2 - DISTRIBUIÇÃO DE MASSA E CARGA DOS PRODUTOS DE FISSÃO

As condições iniciais da equação diferencial (4) para  $n_{ZA}(t)$  são obtidas da distribuição dos produtos de fissão após o processo pronto ter ocorrido.

A fissão a baixa energia de núcleo pesado produz, em geral, dois fragmentos de massas diferentes. O fragmento de massa leve apresenta o número de massa mais provável em torno de 95 e o de massa pesada em torno de 134. Na região média, a presença de fragmentos é pequena. A distribuição de massa é representada por uma curva de dois picos no gráfico, em função do número de massa, conforme a figura 8. A escala é semi-logarítmica porque a diferença entre intensidades nos picos e no vale é pronunciada, a razão de 600:1 obtida por meio de técnicas radioquímicas<sup>21</sup>. A distribuição de massa dos fragmentos ocupa a região entre os números de massa de 70 a 165. A figura 8 é a curva da distribuição de massa para a fissão induzida por neutrons térmicos<sup>21</sup> do  $^{235}\text{U}$ ,



que é o núcleo físsil usado neste trabalho. No caso da fissão térmica do  $^{235}\text{U}$ , os fragmentos se distribuem entre os números de massa 72 a 161.

A curva de distribuição apresenta uma estrutura fina nos números de massa 100 e 134, que Thomas e Vanderbosch<sup>22</sup> propuseram ser devida ao efeito de empilhamento nos fragmentos, enquanto que Wiles e colaboradores<sup>23</sup> sugeriram ser devida ao efeito de camadas no ato da fissão.

Experimentalmente, através de técnicas de espectroscopia de massa e radioquímicas, já se dispõe de curvas de distribuição de massa para diversos tipos de fissão e de núcleos físséis. A melhor conhecida é a do  $^{235}\text{U}$  fissionado por neutrons térmicos, mesmo assim apresenta incerteza na região de baixa intensidade (vale). Recentemente, com o aperfeiçoamento dos detetores de semicondutor, mediu-se a intensidade por meio de técnicas puramente instrumentais, porém tais medidas não atingiram a razão pico-vale (600:1) estabelecida pelas técnicas radioquímicas e de espectroscopia de massa.

Após o processo pronto da fissão, os fragmentos começam a migrar para a linha de estabilidade  $\beta$  através da emissão de elétrons. A distribuição inicial de carga é difícil de ser medida porque a emissão de elétrons é mais rápida do que as técnicas radioquímicas de medida (as técnicas de espectroscopia de massa são usadas para núcleos estáveis ou quase estáveis).

Wahl e colaboradores<sup>23</sup> estudando seis séries de decaimento verificaram que a distribuição de carga pode ser representada por uma curva gaussiana. Assim a abundância relativa de um núcleo com número atômico  $Z$  em uma série isobárica é dada por:

$$\frac{1}{\sqrt{2-c}} \exp \left\{ - (Z-Z_p)^2/c \right\} \quad (69)$$

onde  $Z_p$  é o valor da carga mais provável (não necessariamente um número inteiro) e  $C$  é o parâmetro de dispersão de carga. Estes autores fazem a suposição de que a curva de distribuição de carga é gaussiana para todas as séries isobáricas. Iyer e Ganguly<sup>24</sup>, usando um modelo para o núcleo que fissiona, chegaram à conclusão que a curva não é exatamente gaussiana, mas pode ser por ela representada aproximadamente.

O valor de  $C$ , apresentado por Wahl e colaboradores<sup>25</sup> no estudo de seis isobáricas, é 0,94. Wahl<sup>26</sup> apresenta 0,86 para dez séries isobáricas e finalmente Wahl e colaboradores<sup>21</sup> apresentam 0,8 no estudo de dezenove séries.

A função  $Z_p$  é bem conhecida experimentalmente para cerca de uma dezena de séries com alta intensidade. Assim a função  $Z_p$  é estimada supondo que a equação (69) seja aplicável à todas as séries. Wahl e colaboradores<sup>25</sup> afirmam que os erros podem ser maiores se uma tal distribuição de carga não for assumida.

O valor  $Z_p$  varia de 0,5 em torno do valor  $Z_{UCD}$  (distribuição de carga inalterada), onde  $Z_{UCD}$  é dado pela razão entre o número atômico e o número de massa do núcleo físsil multiplicada pela massa primária,  $Z_{UCD} = (Z_F/A_F)A'$ . A figura 9 mostra o gráfico, daqui por diante referido como gráfico de Wahl, da diferença  $Z_p - Z_{UCD}$  em função das massas primárias (pré-emissão de neutrons). As massas primárias são calculadas a partir das massas secundárias (pós-emissão de neutrons) pelas expressões "suavizadas"<sup>25</sup>:

$$A'_2 = A_2 + \nu_2 \quad ,$$

$$A'_p = A_p + \nu_p \quad ,$$

(70)

com

$$\begin{aligned} \nu_p &= 0.531 + 0.062 (A_p - 143), \\ \nu_l &= 0.531 + 0.062 (A_l + 143 - A_F), \end{aligned} \tag{71}$$

onde os índices  $p$  e  $l$  se referem a pesado e leve, respectivamente,  $\nu$  é o número de neutrons evaporados no processo de fissão. O valor médio de  $\nu$  proposto<sup>21</sup> é 2,48, calculado através da equação (71), enquanto que o valor experimental<sup>27</sup> é  $2,42 \pm 0,03$ .

Wahl e colaboradores<sup>25</sup> inicialmente apresentaram o gráfico que não continha os valores de  $Z_p$  na região de número de massa entre 106 e 127 e depois um gráfico completo entre as massas 72 a 161<sup>21</sup>. Esse vazio é devido ao fato de que no vale a intensidade é muito pequena, daí se torna difícil medir não só a intensidade fracionária como também a intensidade total da série.

Runalis e colaboradores<sup>27</sup> verificaram que, para alguns números de massa, os isóbaros de  $Z$  ímpar apresentam uma produção menor que a produção dos  $Z$  par. Glendenin e colaboradores<sup>28</sup>, determinaram que a largura da dispersão de produtos de fissão depois da emissão de neutrons prontos é maior que a largura antes da emissão.

Em 1965, Strom e colaboradores<sup>30</sup> com novas informações sobre a emissão de neutrons propuseram uma revisão no gráfico de Wahl para o  $^{235}\text{U}$ , conforme a figura 9. Estes autores mostraram que o efeito produzido pela camada de 50 protons em  $Z_p$  é pequena.

Recentemente, com o aumento dos dados disponíveis da produção da fissão in

duzida por neutrons térmicos do  $^{235}\text{U}$ , Wahl e colaboradores<sup>21</sup> apresentaram novos valores para  $Z_p$  e para a distribuição de massa. O parâmetro de dispersão de carga é colocado constante para todas as séries isobáricas e igual a 0,8.

Finalmente, os produtos de fissão são dados por:

$$F(Z,A) = F(A) \frac{1}{\sqrt{2\pi}C} \exp \left\{ - (Z-Z_p)^2 / C \right\}, \quad (72)$$

onde  $F(A)$    a intensidade de produção total da série com número de massa  $A$ . Neste trabalho foram tomadas algumas combinações de  $F(A)$ ,  $Z_p$  e  $C$  propostos, que serão mencionados oportunamente.

#### 4.3 - CÁLCULO NUMÉRICO

No cáculo numérico é usado o algoritmo de Runge-Kutta-Gill<sup>36</sup> que resolve a equação diferencial correspondente  precisão de  $\Delta t$  até o quarto grau, onde  $\Delta t$    o incremento de tempo. O erro de cáculo depende da largura de  $\Delta t$  tomado e da curvatura da função. Para economizar tempo dentro do erro permitido, tem que se fazer uma escolha conveniente do conjunto de  $\Delta t$ . A escolha de  $\Delta t$  é condicionada  constante de decaimento dos núcleos, assim, para  $t$  pequeno  $\Delta t$  tem que ser da ordem de 0,01 s para levar em conta os núcleos que decaem muito rápido, enquanto que para  $t$  grande pode-se tomar  $\Delta t$  maior, sem perda de precisão porque o decaimento se torna vagaroso.

A estimativa do erro que acontece no cáculo, pode ser conhecida através da quantidade conservada no sistema de equações diferenciais, isto é,  $N = \sum n_{ZA}(t)$  (que é normalizada em 200) neste caso. Para o conjunto de  $\Delta t$  es

colha, o erro até  $t = 3$  horas é menor que 0,1%. Para  $t$  maior, por exemplo 17 horas, a solução da equação diferencial mostra uma pequena flutuação em  $n_{ZA}(t)$ , que indica erro não desprezível acumulado. Por isso a quantidade para  $t = \infty$  foi estimada por equação diferença, como mencionado na seção 2. A coincidência entre os resultados da equação diferencial e da equação diferença, para núcleo com vida média menor que 3 horas, é total, naturalmente.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nas figuras 10 e 11, são apresentados os resultados dos cálculos para o espectro "pulse" e "shutdown", nos quais foi usada a função intensidade (strength function) do tipo Lorentz- modificado com  $\sigma_N = 12,0$  MeV e  $\gamma = 100$  MeV<sup>31</sup>. Os produtos de fissão foram obtidos usando a equação (72) com valores de  $F(A)$  e  $Z_p$  de Wahl e colaboradores<sup>25,21</sup> com o parâmetro de dispersão de carga igual a 0,8 para todas as séries isobáricas.

As mesmas figuras mostram as curvas experimentais correspondentes apresentadas por Tsoufanidis e colaboradores<sup>11</sup>. Pode-se notar uma boa concordância entre as curvas experimentais e calculadas, exceto na região de baixa energia, que para o "shutdown" apresenta valores calculados maiores que os experimentais e para o "pulse" valores menores. O primeiro fato pode ser explicado como decorrente de que os valores experimentais são medidos de  $t = 8$  horas após a fissão, enquanto que os calculados são obtidos de integrais infinitas que levam em conta o decaimento de todos os núcleos com vida maior que 8 horas, e então, não são medidos experimentalmente. Em ambos os casos pode-se fazer o uso do argumento de que a "Gross Theory" não apresenta ótimos resultados para os decaimentos de baixa energia.

Na região de energia média aparece também uma diferença embora menor que na região de baixa energia, entre as curvas experimentais e calculadas para o "pulse", que se desloca para a região de menor energia com o aumento do tempo. Este comportamento pode ser interpretado como sendo devido à distribuição dos produtos de fissão pela abundância sobre-estimada de núcleos com valor  $Q$  muito alto, de maneira que o decaimento desses núcleos vai produzir abundâncias sobre-estimadas de núcleos descendentes. Resta lembrar ainda, que o espectro

"pulse" possui maior incerteza por causa da dificuldade na determinação da razão de fissão<sup>11</sup>.

Para comparação, é mostrado na figura 12 o resultado do cálculo feito por Heller<sup>4</sup>, que mostra desvio maior que este trabalho.

O número total de elétrons por fissão é calculado como 6,2. De acordo com a equação (17) o número de elétrons por fissão depende muito fracamente dos valores das constantes de decaimento. Pode-se notar que essa dependência recai apenas na emissão de neutrons atrasados, e é fácil de ver, com as equações (16) e (17), que se essa emissão não ocorrer, o número total de elétrons por fissão não depende das constantes de decaimento.

Se o valor experimental for  $5,8 \pm 0,3$  proposto por Tsoufanidis e colaboradores<sup>11</sup>, essa diferença é atribuída principalmente à distribuição dos fragmentos de fissão. Então esta diferença está coerente com a interpretação dada sobre o desvio da curva calculada em relação à experimental do espectro na região de energia média citada no terceiro parágrafo desta seção. Entretanto, o valor experimental de  $n_f$  é divergente; por exemplo Ambruster e Meister<sup>22</sup> apresentam  $6,9 \pm 0,4$  e Specht e Seyfarth<sup>23</sup>  $5,9 \pm 0,2$ . Tais resultados estão resumidos na tabela I. A dificuldade em determinar essa quantidade vem do fato de ser necessário contar todos os elétrons emitidos até  $t = \infty$ .

A dependência no tempo do número de elétrons para "pulse" e "shutdown" são colocados nas figuras 13 e 14, juntamente com os valores experimentais correspondentes. O número de elétrons que é emitido no espectro "pulse" tem boa concordância com valor experimental, embora o este último tenha incerteza significativa. A curva do número de elétrons dependente do tempo para uma fissão no "shutdown" apresenta diferença em relação à curva experimental, mas a maior

parte desta diferença tem que ser atribuída ao valor estimado do número total de elétrons para uma fissão que deve ser afetada pelo corte de irradiação após 8 horas.

As curvas calculadas da energia levada pelos elétrons por uma fissão são apresentadas nas figuras 15 e 16 na unidade de  $mc^2$  para o "pulse" e "shutdown", juntamente com os valores experimentais respectivos. A concordância entre as curvas calculadas e os valores experimentais, em ambos casos, é ótima.

As quantidades de "shutdown" para  $t = 0$  dão os valores médios por fissão. A energia levada pelos elétrons por fissão achada é  $12,9 mc^2$  enquanto que o valor experimental é  $13,3 \pm 1,0 mc^2$  indicando bastante coincidência, mesmo se o número total de elétrons tem desvio de aproximadamente de 7%.

A princípio, este fato pode insinuar inconsistência entre os resultados, números e energias de elétrons, porém isso decorre do fato de que foram contados elétrons provenientes de núcleos com vida maior que 8 horas e que possuem energia muito baixa, assim eles contribuem para o número de elétrons sem alterar sensivelmente a energia. Isso reforça o argumento de que a diferença entre o valor  $n_T$  experimental e o calculado é produzida pelo término finito do tempo usado na construção da curva "before" na figura 12.

Com o intuito de testar a mudança dos resultados com a variação na distribuição dos produtos de fissão foram tentadas outras combinações de  $Z_p$  e  $F(A)$  na equação (72). Num trabalho anterior sobre  $Z_p$  e  $F(A)$ , Wahl e colaboradores<sup>25</sup> sugeriram valores de  $Z_p$  com a distribuição de massa de Katcoff<sup>34</sup>. A diferença de  $Z_p$ 's, novo e velho, é mostrada na figura 9 em que a abcissa é a massa primária e a ordenada é a diferença entre  $Z_p$  e  $Z_{UCD}$ . O espectro de "pulse" para ambos os casos é apresentado na figura 17, que não mostra dife-



rença significativa entre os resultados de  $Z_p$ 's novo e velho. Consequentemente todas as quantidades também não mostram diferenças sensíveis.

Após o primeiro trabalho de Wahl e colaboradores, Strom e colaboradores<sup>30</sup> sugeriram valores modificados de  $Z_p$  usando um método de Huizenga-Vanderbosch para estimar a população de estados isoméricos e novos dados sobre a emissão individual de neutrons pelos produtos de fissão. Os valores de  $Z_p$  propostos por estes autores são apresentados na figura 9. Não foi notada diferença perceptível nos resultados do espectro.

Assim a variação na forma da distribuição dos produtos de fissão não produz mudança nos resultados, se  $Z_p$  varia dentro de limites razoáveis. Para valores  $Z_p$  em que a não emissão de neutrons prontos é assumida, percebe-se um aumento da atividade de elétrons em aproximadamente 10%.

O valor do parâmetro de dispersão até aqui foi tomado igual a 0,8; porém experimentalmente  $C$  não é constante para todas as séries isobáricas e também varia de experimento para experimento. Por isso os cálculos foram feitos com outros valores de  $C$ . Entretanto, os resultados não mostram mudanças significativas para  $C = 0,7$  e  $C = 1,0$ .

A massa nuclear produz dois efeitos: um na posição relativa das curvas para tempos diferentes (mudança no valor da constante de decaimento) e outro na forma do espectro. A forma do espectro é sensível com relação ao valor  $Q$ . Para mostrar isso foram tomados valores de massa da fórmula de Myers e Swiatecki<sup>31</sup>. Essa fórmula de massa tem a tendência de sobre-estimar o valor  $Q$  na região de núcleos ricos em neutrons e conseqüentemente, o espectro calculado apresenta valores maiores na região de alta energia de curva "before" na figura 18, entretanto para  $t$  maior o espectro de Myers-Swiatecki cai mais rápido.

Os autores da "Gross Theory" sugerem as funções-intensidade baseadas na distribuição tipo Lorentz-modificado e tipo Gauss. O efeito que aparece sobre o espectro devido a função-intensidade é mostrado na figura 10, onde o espectro é normalizado à unidade. Como aparece nessa figura o espectro calculado através da função tipo Gauss é deslocado para a esquerda em relação ao espectro calculado pela Lorentz-modificado, significando que, o decaimento  $\beta$  tem preferência maior para os níveis excitados do núcleo filho no primeiro caso que no segundo. Essa diferença aparece naturalmente na figura 20, em que são mostrados os espectros de "shutdown" calculados com  $P_{ZA}(E)$  tipo Gauss e tipo Lorentz-modificado, mas os  $\lambda$ 's são tomados comuns. A diferença entre eles não é muito grande como no caso da figura (18).

Se for usado o valor da constante de decaimento obtido com a função intensidade do tipo Gauss, acha-se diferenças maiores entre os espectros calculados dessa maneira e o Lorentz-modificado, mas neste caso as constantes de decaimento para ambos os tipos de função-intensidade mostram diferença sistemática, como se vê na figura 21.

Daí, então, pode-se notar que a maior influência no espectro de elétrons dos produtos de fissão é principalmente devida à constante total  $\lambda^T$  de decaimento  $\beta$ .

Como o efeito de isômeros estimado é pequeno, ele é desprezado neste trabalho. Para levar em conta esse efeito tem-se que esperar uma formulação microscópica do decaimento  $\beta$ . Este problema deve ser atacado associando "Gross Theory" com modelo de camadas.

## 6. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi feito um tratamento do espectro de elétrons dependente do tempo dos produtos de fissão que pode ser bastante importante para o uso pacífico da energia nuclear e para o estudo do comportamento nuclear longe da linha de estabilidade  $\beta$ .

Foi usada a "Gross Theory" para calcular o espectro de elétron. A possibilidade de se calcular o espectro de cascata  $\gamma$  também foi mostrada.

A computação feita, indica que a concordância entre as quantidades calculadas pela "Gross Theory" e os valores experimentais é boa. Notou-se também que o espectro de elétrons não depende fortemente da distribuição dos produtos de fissão.

A possibilidade de previsão, da atividade de elétrons dos produtos de fissão de núcleos, ainda não estudados experimentalmente, conhecida a sua distribuição dos produtos fissão, é colocada.

Finalmente, existe a possibilidade destes cálculos serem aplicados ao cálculo da variação de luminosidade de supernova<sup>35</sup>.

TABELA I

NÚMERO TOTAL DE ELÉTRONS E ENERGIA CINÉTICA  
DE ELÉTRONS POR FISSÃO

$n_T$	E	mc <sup>2</sup>	AUTOR
5.8 ± 0.3	13.3	1.0	Tsoufanidis e colaboradores <sup>11</sup>
6.9 ± 0.4	15.7	0.8	Ambruster e Meister <sup>32</sup>
5.9 ± 0.2		/	Specht e Seyfarth <sup>33</sup>
6.2	12.9		Este Trabalho

## BIBLIOGRAFIA

- (1) Way, K., e Wigner, E.P. - Phys. Rev. 73 (1948) 1318.
- (2) Glendenin, L.E., Coryell, C.D., Edwards, R.R., e Feldman, M.H. - CL - LEG  
- LEG - 1.
- (3) Heller, R.B., Chakravarty, S., Frawley, J., e Silver, M. - Nucleonics 23  
(1965) 92.
- (4) Heller, R.B. - Comunicação particular.
- (5) Takahashi, K., e Yamada, M. - Prog. Theor. Phys. 41 (1969) 1470.
- (6) Yamada, M., Takahashi, K., e Koyama, S.I. - Proceedings do the International  
Conference on the Properties of Nuclei far from the Region of  
Beta-Stability Line, Leysin, 1970 (CERN 70-30, volume 1, Genebra, 1970) 397.
- (7) Koyama, S.I., Takahashi, K. e Yamada, M. - Prog. Theor. Phys. 44  
(1970) 663.
- (8) Takahashi, K. - Prog. Theor. Phys. 45 (1971) 1466.
- (9) Duke, C.L., Hansen, P.G., Nielsen, O.B., Rudstam, G. e ISOLDE Collaboration,  
CERN - Nucl. Phys. A151 (1970) 609.
- (10) Johansen, K.H., Nielsen, K.B. e Rudstam, G. - Nucl. Phys. A203 (1973) 481.
- (11) Tsoufanidis, N., Wehring, B.W. e Wyman, M.E. - Nucl. Sci. Eng. 43  
(1971) 42.
- (12) Por exemplo: Monte Carlo Method. Proceeding - United States department of  
Commerce - National Bureau of Standards Applied Mathematics. Series  
12. 1051.

- (13) For exemplo: Konopinsky, E.J. - "Theory of Beta Radio-Activity - Oxford, 1966.
- (14) Takahashi, K. - Prog. Theor. Phys. 47 (1972) 1500.
- (15) Kodama, T., e Takahashi, K. - Phys. Letters, 43B (1973) 167.
- (16) Wapstra, A.H., Mattauch, J.H.E., e Thiele, W. - Nucl. Phys. 67 (1965) 1.
- (17) Wing, J. - A120 (1968) 369.
- (18) Garvey, G.R., Gerace, W.J., Jaffe, R.L., e Talmi, I. - Rev. Mod. Phys. 41 (1969) S1.
- (19) Myers, W.D., e Swiatecki, W.J. - Nucl. Phys. 81 (1966) 1.
- (20) Pappas, A.C., Alstad, J., e Hagebø, E. - Proceedings do Second IAEA Symposium on Physics and Chemistry of Fission, Viena, 1969 (IAEA, Viena, 1969) 669.
- (21) Wahl, A.C., Norris, A.E., Rouse, R.A., e Williams, J.C. - Proceedings do Second IAEA Symposium on Physics and Chemistry of Fission, Viena, 1969 (IAEA, Viena, 1969) 813.
- (22) Thomas, T.D., e Vanderbosch, R. - Phys. Rev. B133 (1964) 976.
- (23) Wiles, D.R., Smith, B.W., Horley, R., e Thode, H.G. - Can. J. Phys. 31 (1953) 419.
- (24) Ganguly, A.K., e Iyer, M.R. - Phys. Rev. C3 (1971) 785.
- (25) Wahl, A.C., Ferguson, R.L., Nethaway, D.R., Troutner, D.E., e Wolfsberg, K. - Phys. Rev. 126 (1962) 1112.

- (26) Wahl, A.C. - Proceedings do Symposium on Physics and Chemistry of Fission, Salzburg, 1965 (IAEA, volume I, Viena, 1965) 317.
- (27) Hopkins, J.C., e Diven, B.C. - Nucl. Phys. 48 (1963) 433.
- (28) Runnalis, N.G., Troutner, D.E., e Ferguson, R.L. - Phys. Rev. 179 (1969) 1188.
- (29) Glendenin, L.E., Unik, J.P., Griffin, H.C., e Reisdorf, W. - Proceedings do Second IAEA Symposium on Physics and Chemistry of Fission, Viena, 1969 (IAEA, Viena, 1969) 781.
- (30) Strom, P.O., Grant, G.R., e Pappas, A.C. - Can. J. Phys. 43 (1965) 2493.
- (31) Takahashi, K. - Comunicação Particular.
- (32) Armbruster, P. e Meister, H. - Z. Physik 170 (1962) 274.
- (33) Specht, H.J., e Seyfarth, H., - Proceedings do Symposium on Physics and Chemistry of Fission, Salzburg, 1965 (IAEA, volume II, Viena, 1965) 253.
- (34) Katcoff, S. - Nucleonics 18 (1960) 201.
- (35) Colgate, S.A., e Write, R.H. - Ap. J. 143 (1966) 626.
- (36) Por exemplo: Numerical Mathematical Analysis J.B. Scarborough, Oxford, London 1958.

## ÍNDICE E EXPLICAÇÃO DAS FIGURAS

- FIGURA 1 - Esquema de decaimento do núcleo  $(Z, A)$  mostrando a possibilidade de emissão de neutrons atrasados.  $Q$  e  $S_n$  são o valor- $Q$  e a energia de separação, respectivamente.
- FIGURA 2 - Esquema de decaimento e formação do núcleo  $(Z, A)$  no plano  $N-Z$ , número  $N$  de neutrons pelo número  $Z$  de protons. Os  $\lambda$ 's são as constantes de decaimento onde o índice superior indica se é decaimento  $\beta$  apenas ( $\beta$ ) ou se é decaimento  $\beta$  com a emissão de neutron atrasado ( $n$ ).
- FIGURA 3 - Gráfico explicativo da obtenção da abundância para o "shutdown" ( $N_{ZA}(t)$ ) através da abundância para o espectro "pulse". A abcissa é o tempo contado a partir do corte da razão constante de fissão.
- FIGURA 4 - Esquema da emissão de cascata  $\gamma$  com energia  $E_\gamma$  em primeira chance.  $E$  é a energia do nível inicial e  $E_f = E - E_\gamma$  é a energia do nível final.
- FIGURA 5 - Esquema da emissão de cascata  $\gamma$  com energia  $E_\gamma$  em segunda chance.
- FIGURA 6 - Esquema de emissão de cascata  $\gamma$  com energia  $E_\gamma$  em terceira chance.
- FIGURA 7 - Esquema de decaimento do núcleo  $(Z, A)$  com a emissão de neutrons atrasados.  $Q$  é o valor  $Q$ ,  $S_n$  é a energia de separação de neutron e  $\lambda$  é a constante de decaimento parcial com energia de decaimento  $E$ .
- FIGURA 8 - Distribuição da produção (%) das séries isobáricas em função do número de massa.



FIGURA 9 - Gráfico de Wahl - A ordenada é o número de massa primária e a abcissa é a diferença  $Z_p - Z_{UCD}$ .

— — — Wahl e colaboradores <sup>25</sup>.  
 ————— Strom e colaboradores <sup>30</sup>.  
 ⊙ ⊙ ⊙ Wahl e colaboradores <sup>21</sup>.

FIGURA 10 - Comparação entre as curvas calculadas e experimentais do espectro "pulse". \* A abcissa é a energia cinética do elétron em unidade de  $mc^2$  e a ordenada é o número de elétrons emitidos por unidade de energia (em  $mc^2$ ) por segundo por fissão.

—————  $Z_p$  e  $F(A)$  de Wahl e colaboradores <sup>21</sup>.  
 —○—○— resultados experimentais de Tsoulfanidis e colaboradores <sup>11</sup>.

FIGURA 11 - Comparação entre as curvas calculadas e experimentais do espectro "shut-down". \* A abcissa é a energia cinética do elétron em unidade de  $mc^2$  e a ordenada é o número de elétrons emitidos por unidade de energia (em  $mc^2$ ) por fissão.

————— resultados calculados com  $Z_p$  e  $F(A)$  de Wahl e colaboradores <sup>21</sup>.  
 —○—○— resultados experimentais de Tsoulfanidis e colaboradores <sup>11</sup>.

FIGURA 12 - Comparação entre as curvas experimentais de Tsoulfanidis e colaboradores <sup>11</sup> e as curvas calculadas por Heller <sup>4</sup> para o espectro "pulse".

---

\* Se nenhuma menção foi feita, significa que a função intensidade é do tipo Lorentz modificada e as massas nucleares obtidas da tabela de Wapstra e colaboradores <sup>16</sup> juntamente com a fórmula de massa de Garvey e colaboradores <sup>18</sup>.

————— resultados calculados por Heller <sup>24</sup>  
 ○ ○ ○ ○ resultados experimentais de Tsoufanidis e colaboradores <sup>11</sup>.

**FIGURA 13** - Comparação entre os resultados calculados e experimentais da dependência no tempo do número de elétrons emitidos por uma fissão para o "pulse".

A abcissa é o tempo em segundo, e a ordenada é o número de elétrons emitidos por segundo por fissão.

————— resultados calculados com  $Z_p$  e  $F(A)$  de Wahl e colaboradores <sup>21</sup>.

○ resultados experimentais de Tsoufanidis.

**FIGURA 14** - Comparação entre os resultados calculados e os experimentais da dependência no tempo do número de elétrons emitidos por uma fissão para "shutdown".

A abcissa é o tempo em segundo e a ordenada é o número de elétrons emitidos por fissão.

————— resultados calculados com  $Z_p$  e  $F(A)$  de Wahl.

○ resultados experimentais de Tsoufanidis.

**FIGURA 15** - Comparação entre os resultados calculados e os experimentais da dependência no tempo da energia cinética dos elétrons emitidos por uma fissão.

A abcissa é o tempo em segundo e a ordenada é a energia levada pelos elétrons por segundo por fissão.

————— resultados calculados com  $Z_p$  e  $F(A)$  de Wahl.

○ resultados experimentais de Tsoufanidis.

FIGURA 16 - Comparação entre os resultados calculados e experimentais da dependência no tempo da energia cinética dos elétrons emitidos por uma fissão para "shutdown".

———— resultados calculados com  $Z_p$  e  $F(A)$  de Wahl.  
 ○ resultados experimentais de Tsoulfanidis.

FIGURA 17 - Comparação entre os resultados calculados e os experimentais usando distribuições dos produtos de fissão diferentes para o espectro "pulse".

————  $Z_p$  de Wahl e colaboradores e  $F(A)$  de Katcoff <sup>34</sup>.  
 - - - - -  $Z_p$  e  $F(A)$  de Wahl e colaboradores <sup>21</sup>.

FIGURA 18 - Comparação entre as curvas "Before" calculadas para o espectro "shutdown" com as massas nucleares diferentes.  $Z_p$  e  $F(A)$  são obtidos de Wahl e colaboradores <sup>25</sup> e de Katcoff <sup>34</sup>.

———— tabela de Wapstra e colaboradores <sup>16</sup> e fórmula de massa de Garvey e colaboradores <sup>18</sup>.  
 - - - - - fórmula de massa de Myers e Swiatecki <sup>19</sup>.

FIGURA 19 - Comparação entre o espectro individual de elétron para funções-intensidade diferentes.

A abcissa é o valor-Q em Mev e a ordenada é o espectro  $P_{ZA}(E)$ .

———— tipo Lorentz-modificado.  
 - - - - - tipo Gauss.

FIGURA 20 - Comparação entre as curvas calculadas e as experimentais para o espectro "shutdown" em que as constantes de decaimento são as mesmas e os espectros individuais do tipo Lorentz-modificado e do tipo Gauss.

———— Lorentz-modificado  
----- Gauss

FIGURA 21 - Comparação entre as constantes de decaimento total beta obtidas pelas funções do tipo Lorentz-modificado e do tipo Gauss.

A abcissa é o valor-Q em Mev e a ordenada é o logarítmo de base dez do quociente da constante de decaimento do tipo Lorentz-modificado sobre a do tipo Gauss. Onde \* significa que existe apenas 1 ponto no gráfico naquele lugar, 1 significa dois pontos, ..... 9 significa dez pontos e G significa mais de dez pontos.

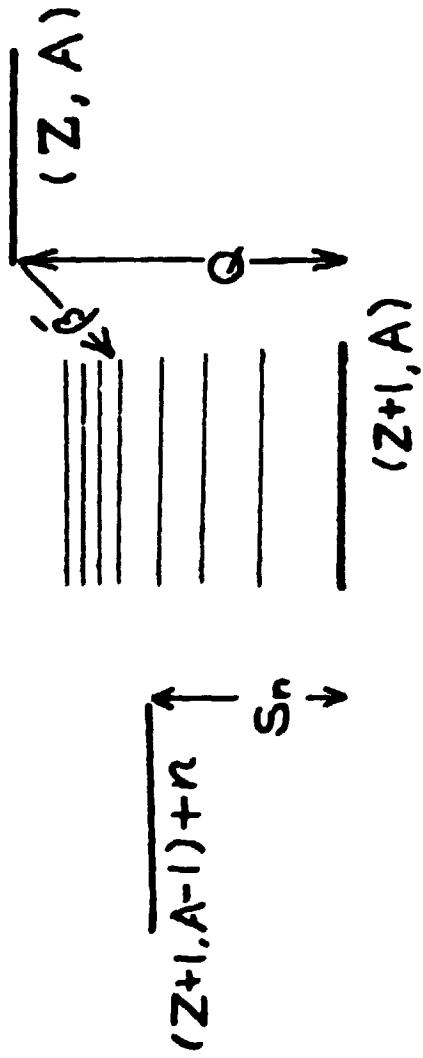


FIG. 1

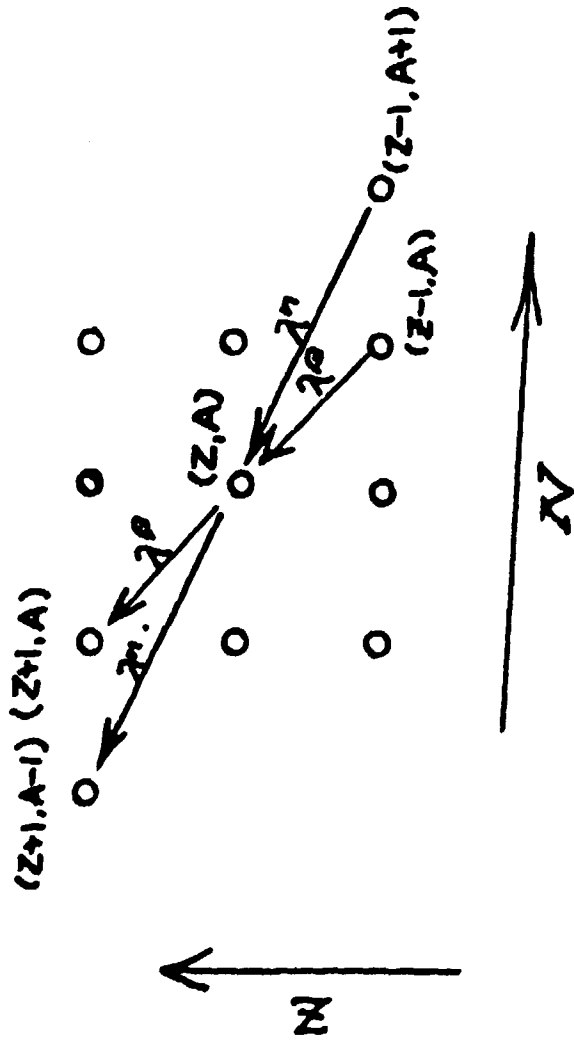


FIG. 2

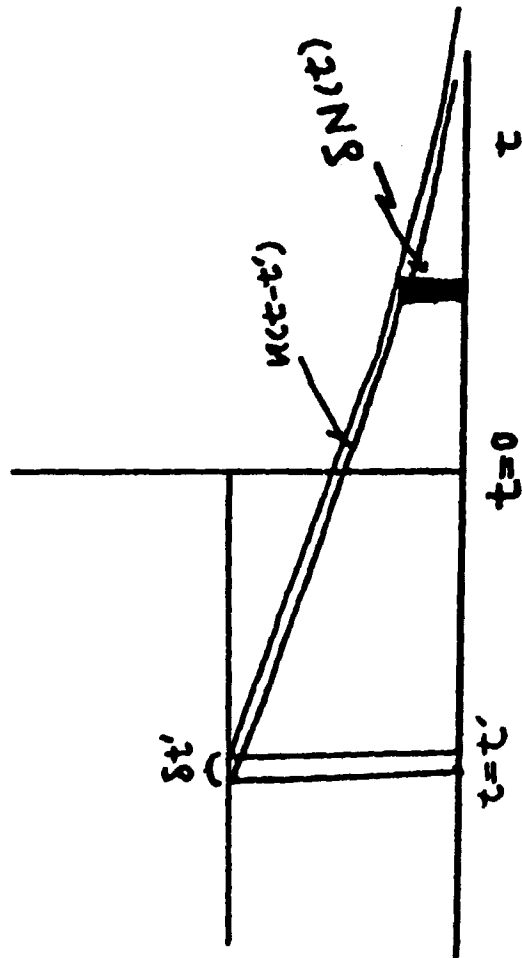


FIG. 3

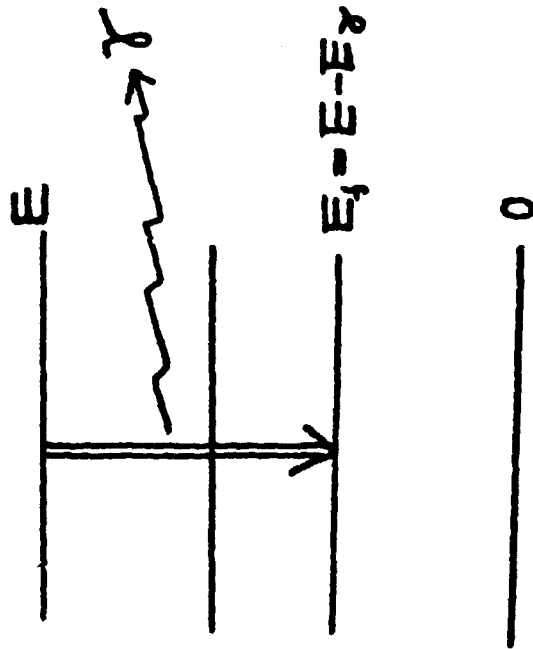


Fig. 6



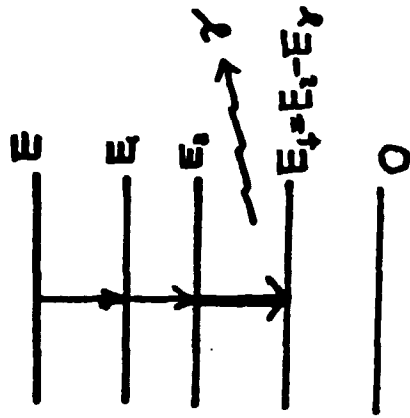


FIG. 5

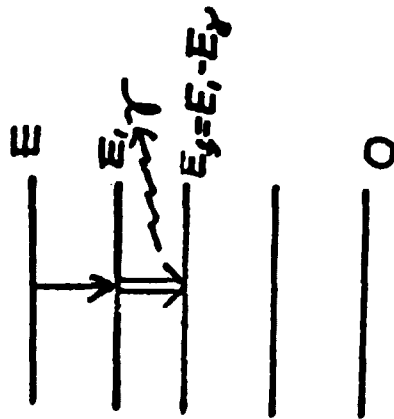


FIG. 6

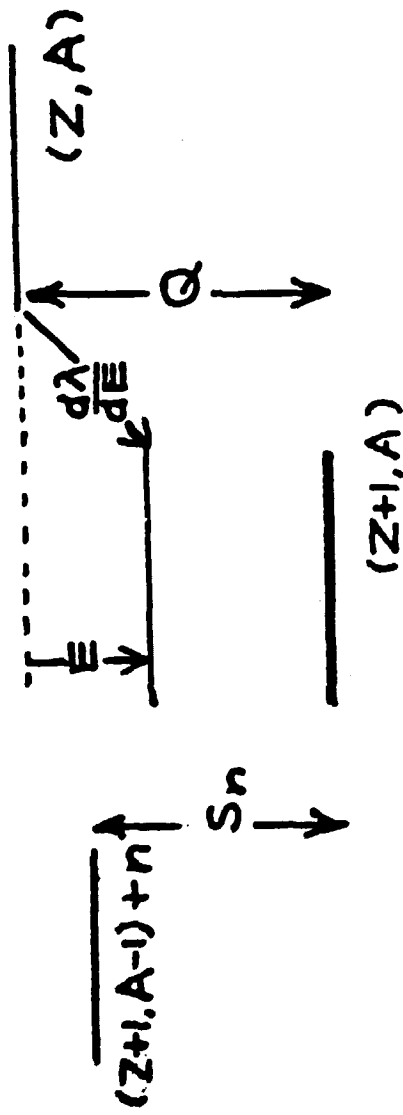


FIG. 7

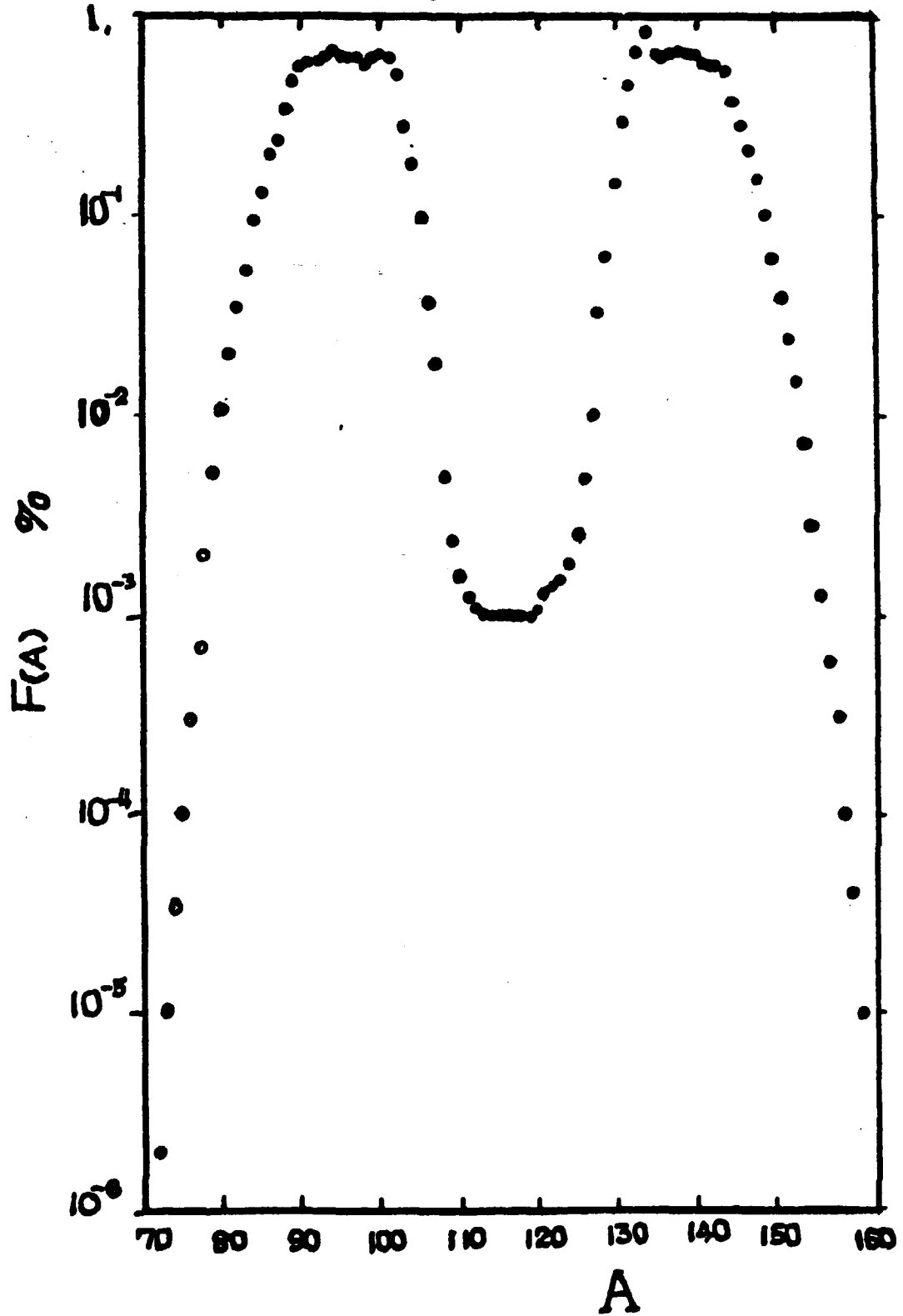


FIG. 3

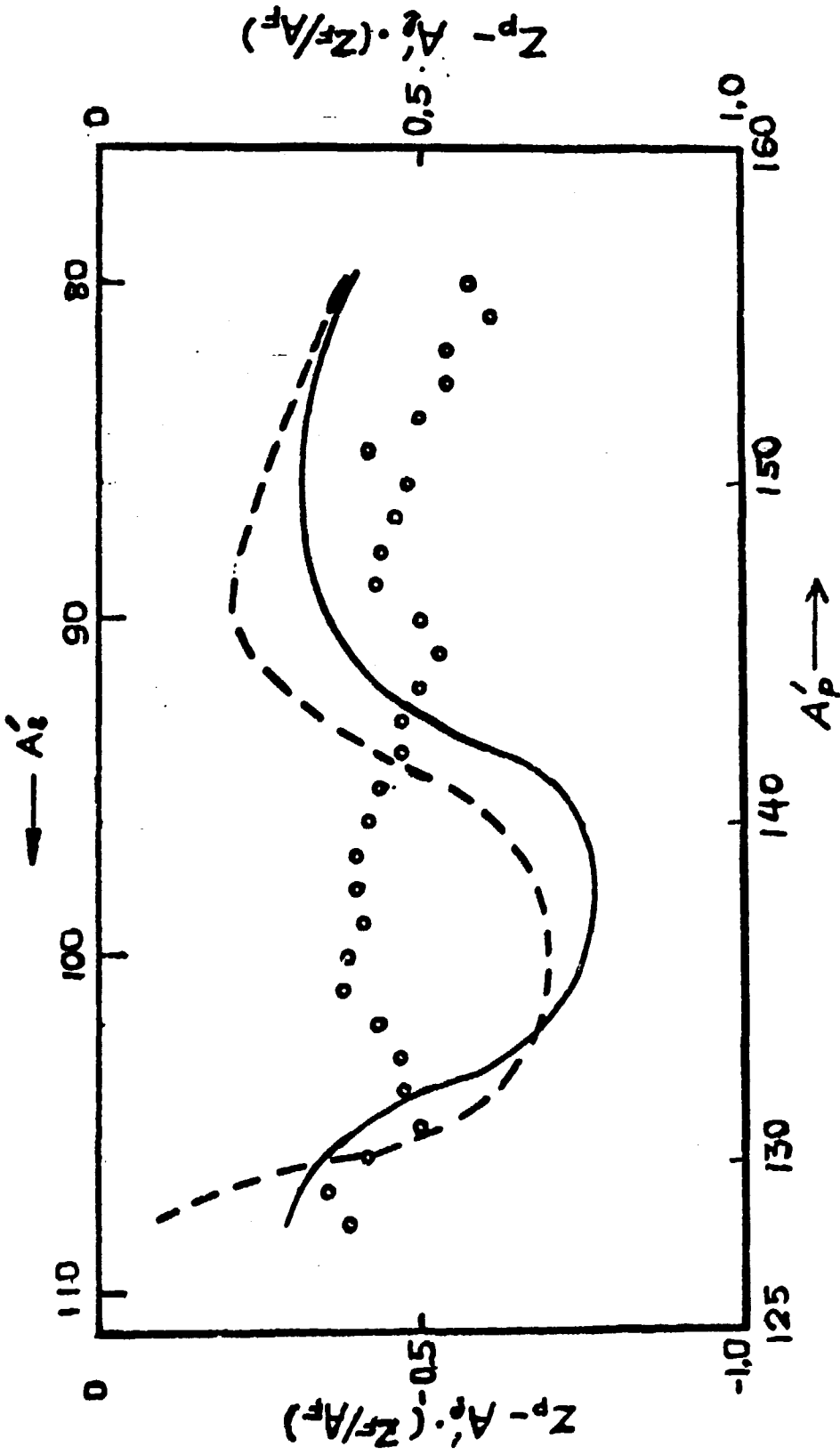


FIG 9

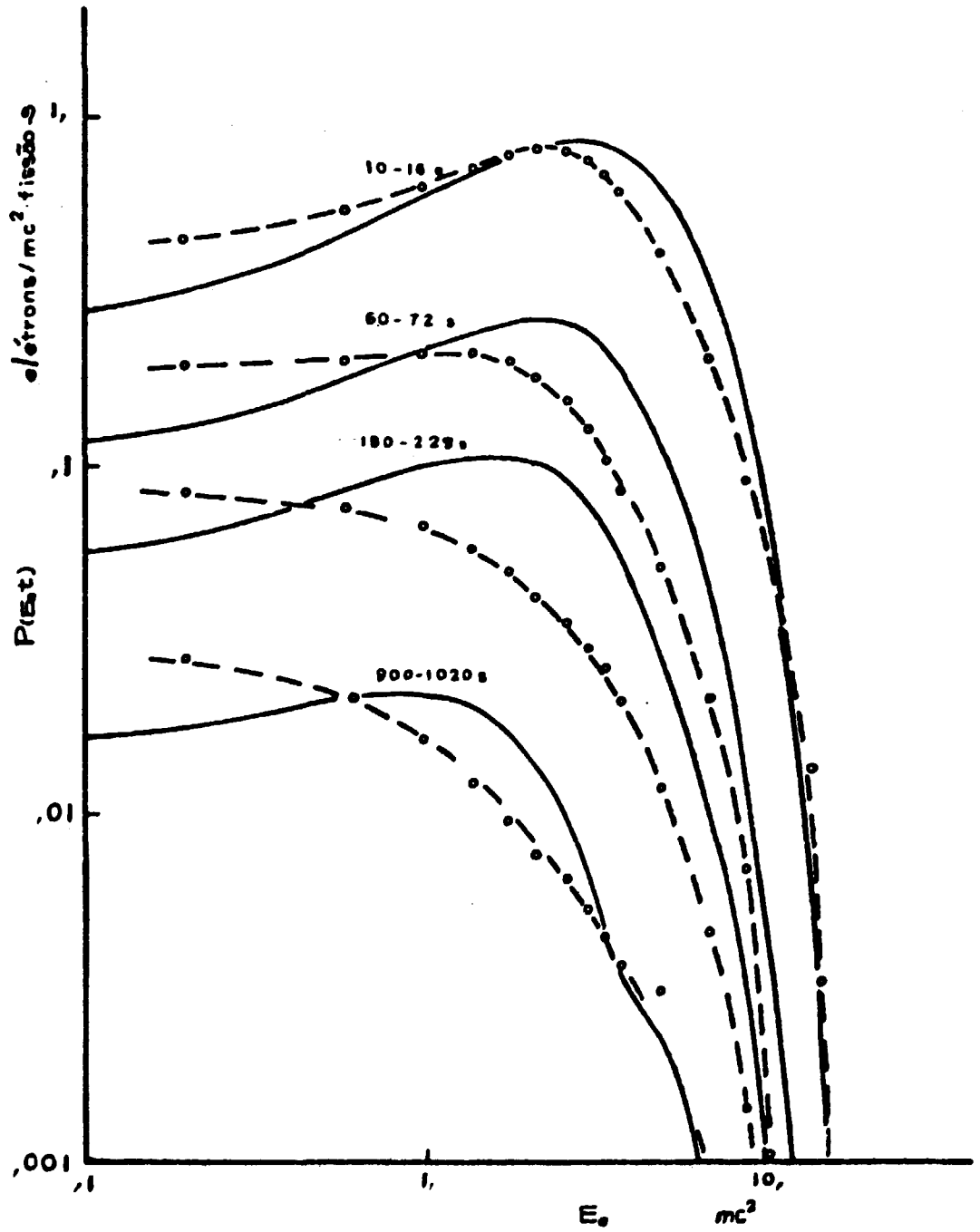
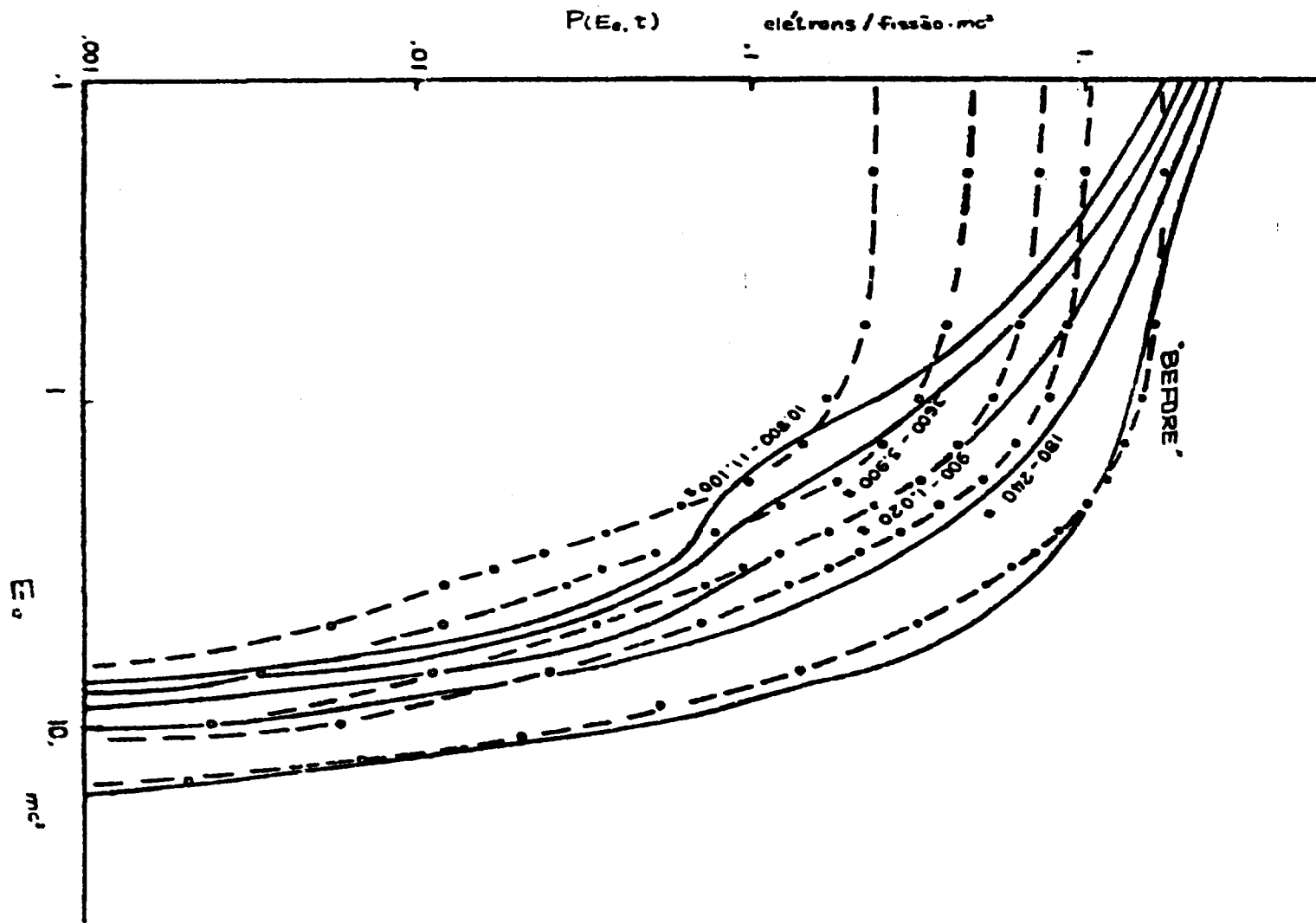


FIG. 10

FIG. 11



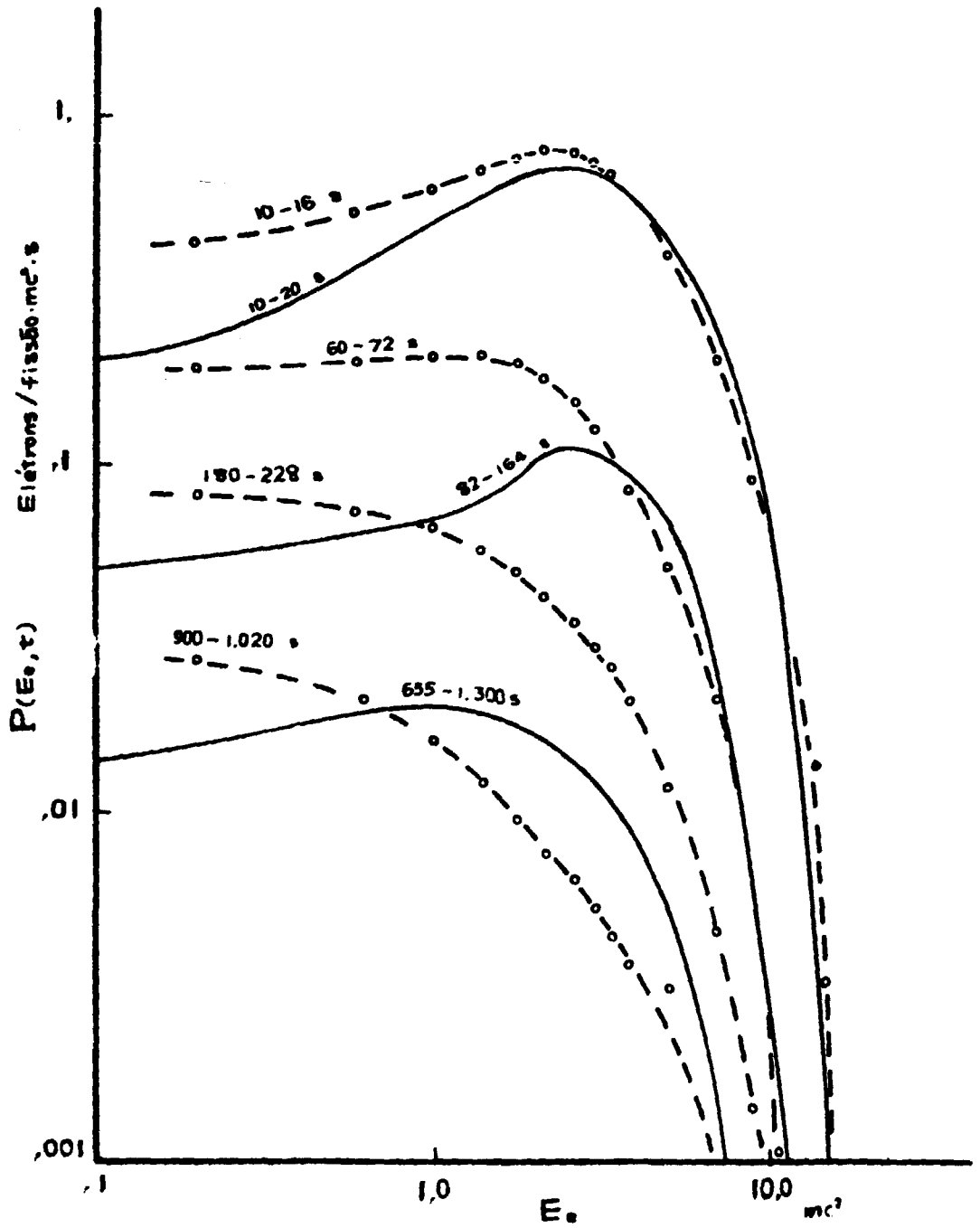


FIG. 12

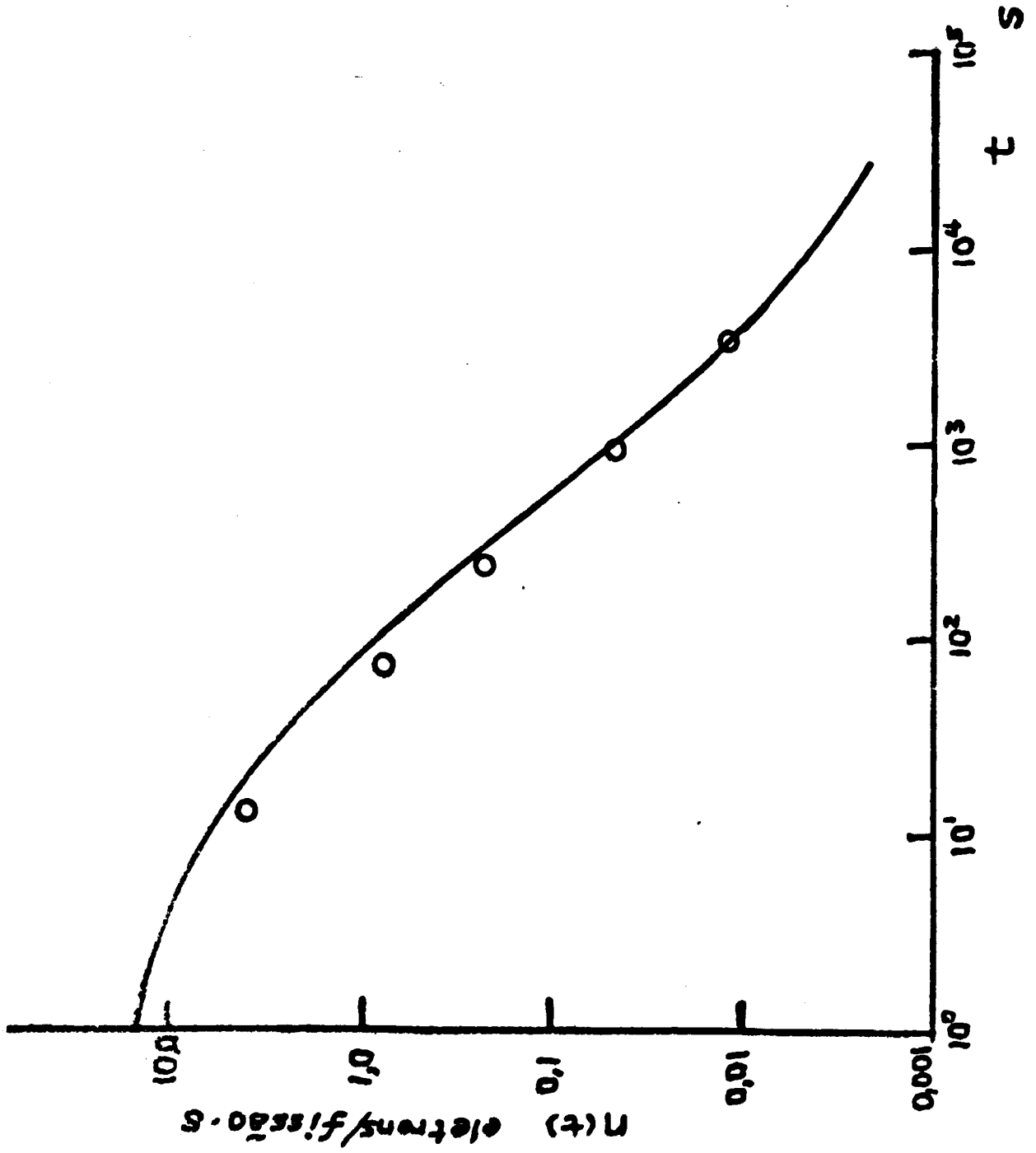


FIG. 13



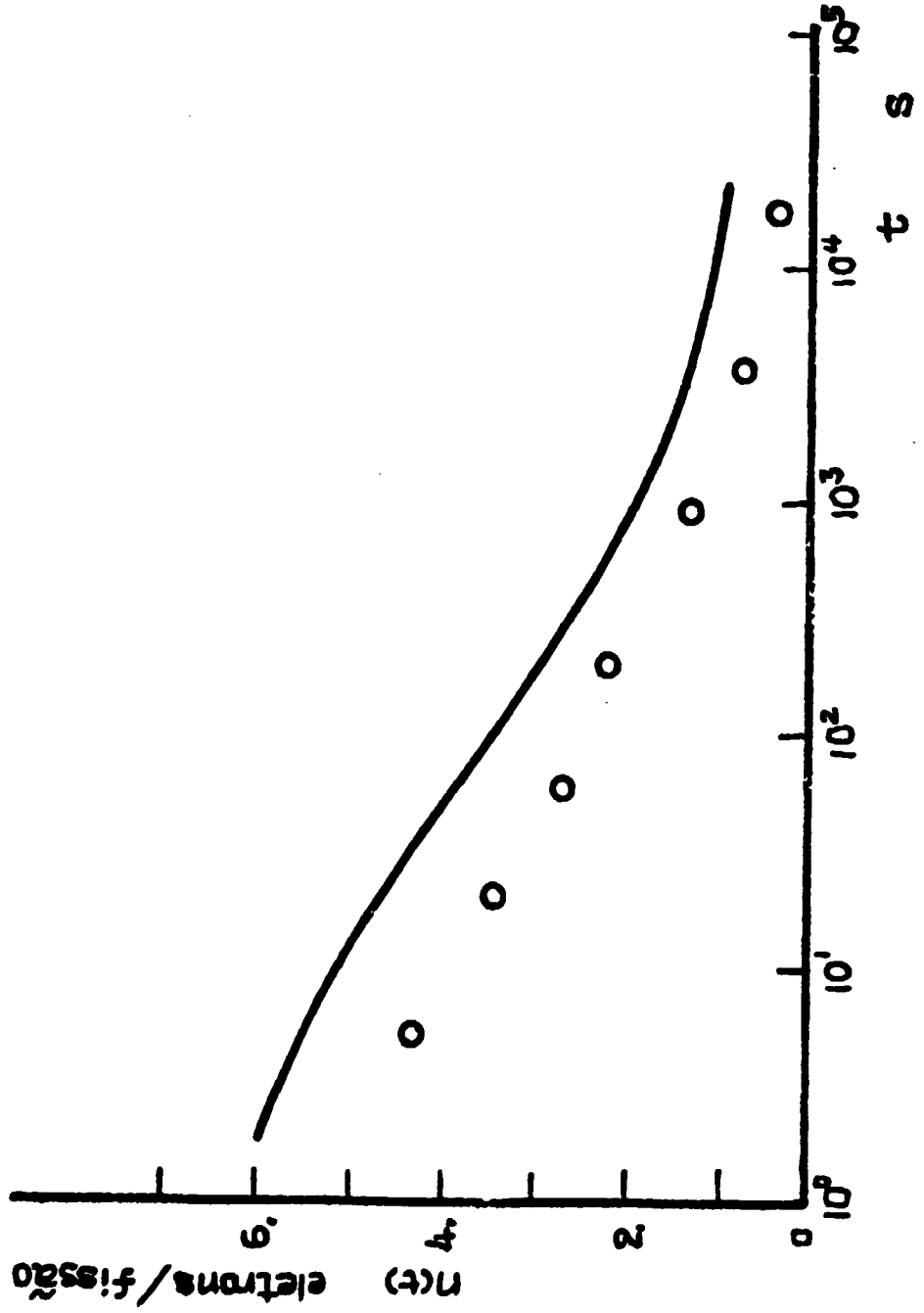


FIG. 14

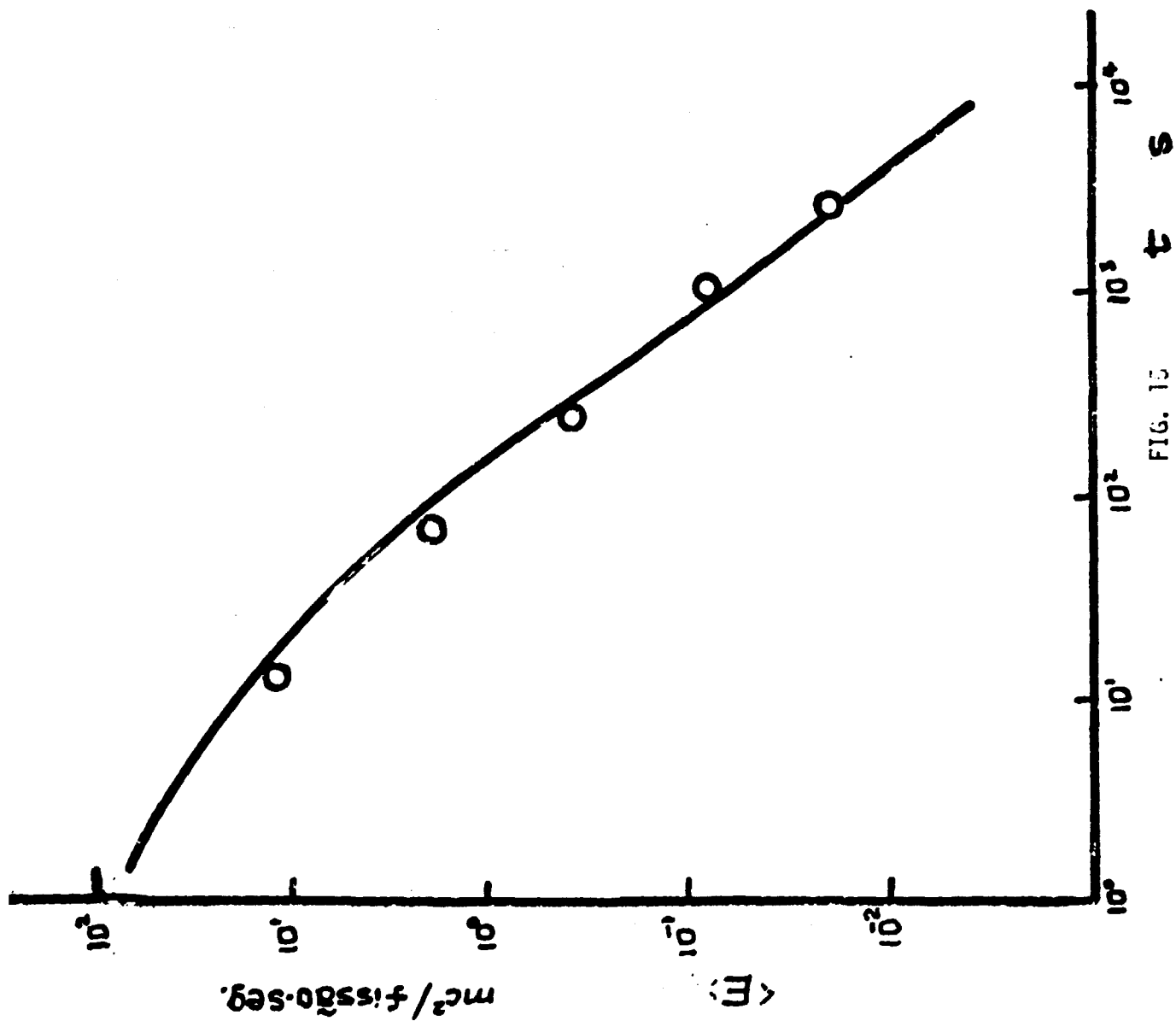


FIG. 15

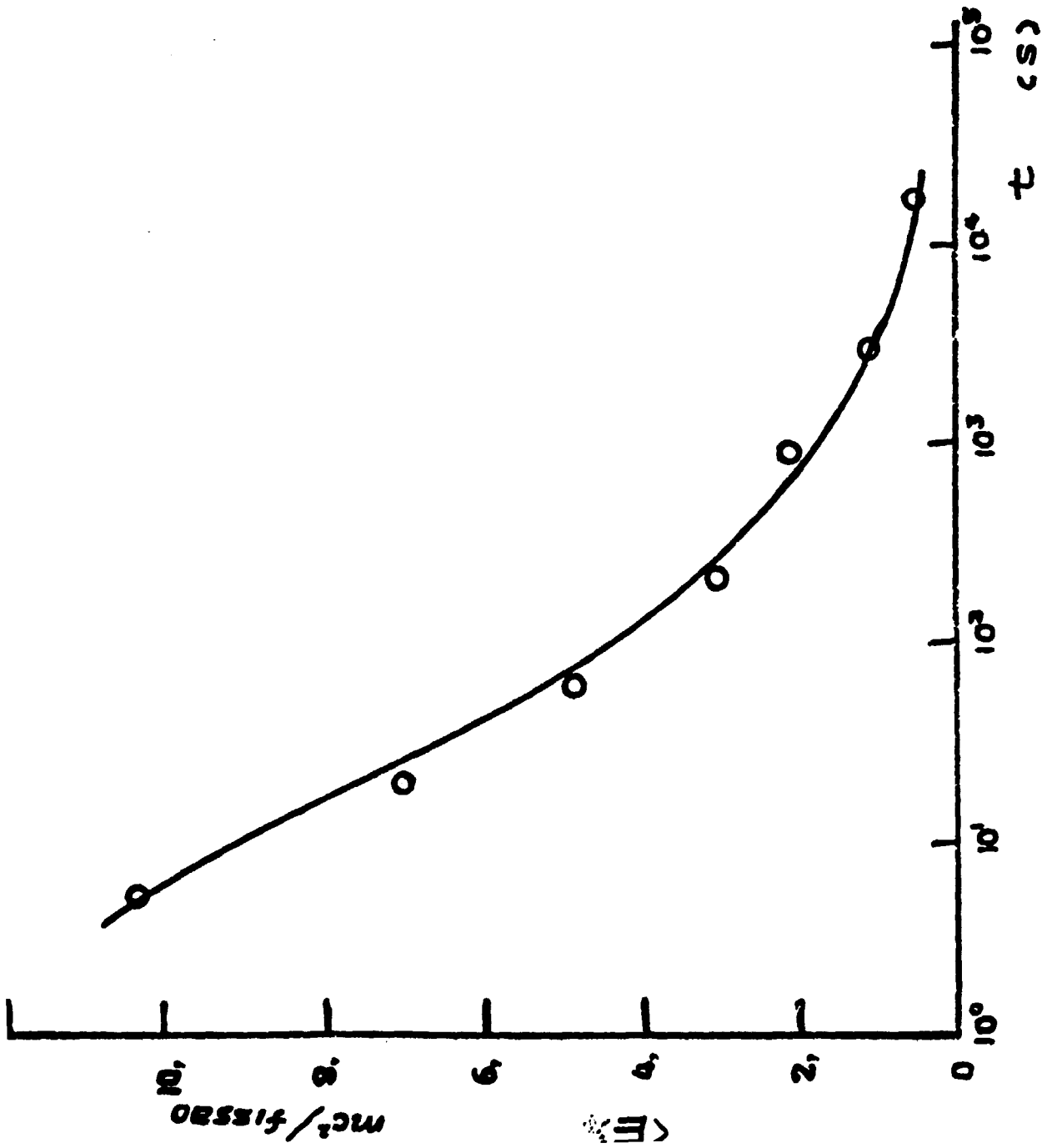


FIG. 16

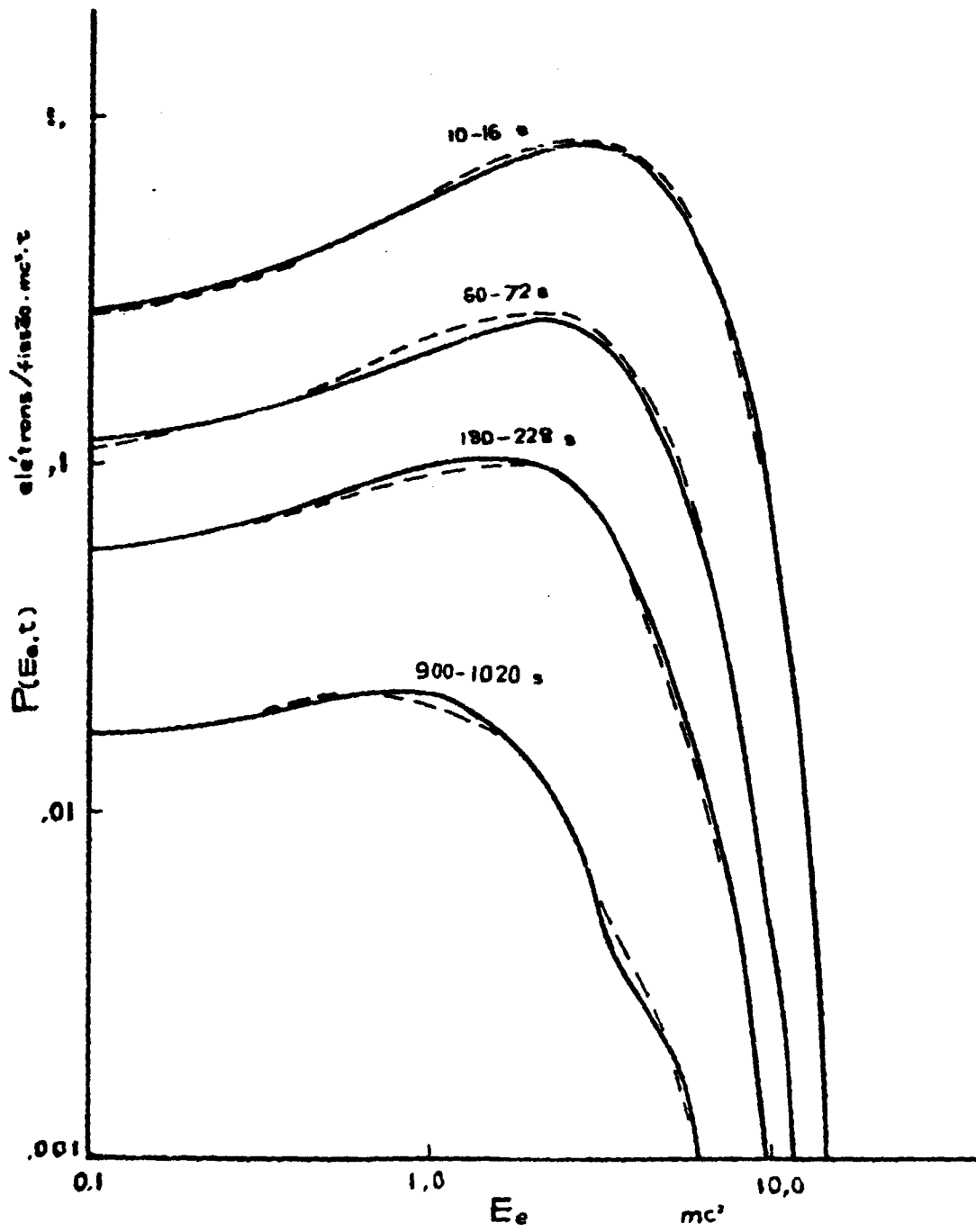


FIG. 17

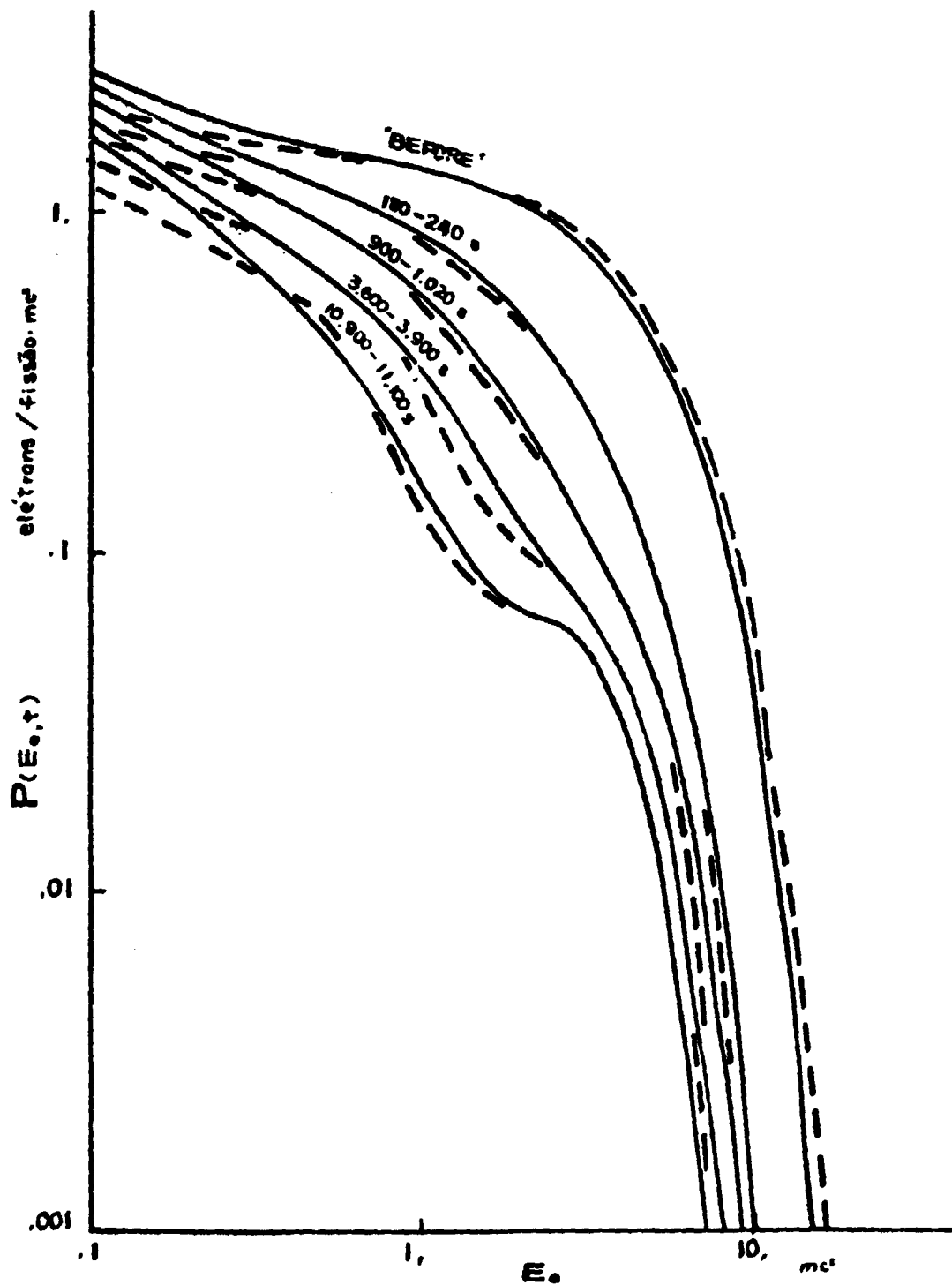


FIG. 18

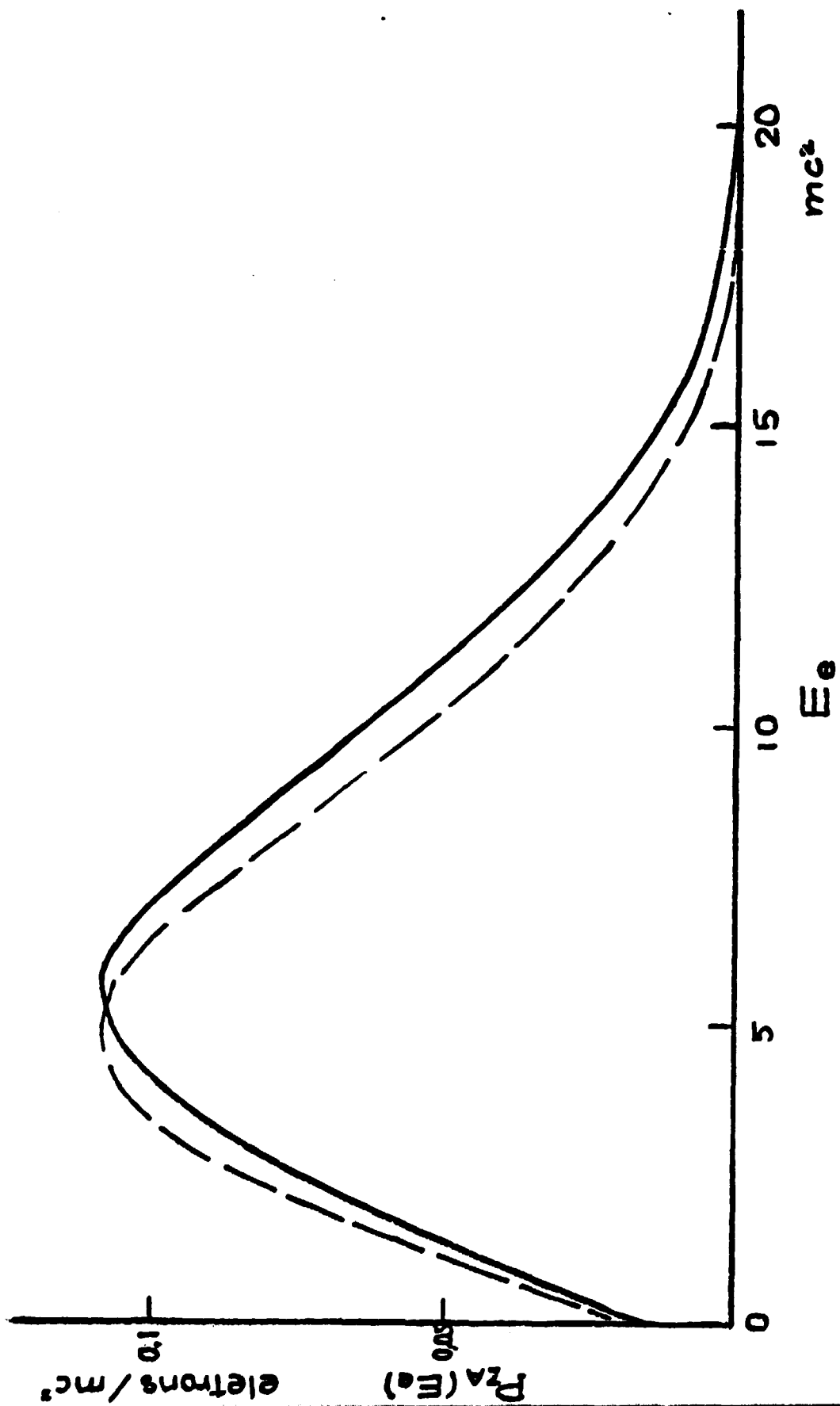


FIG. 19

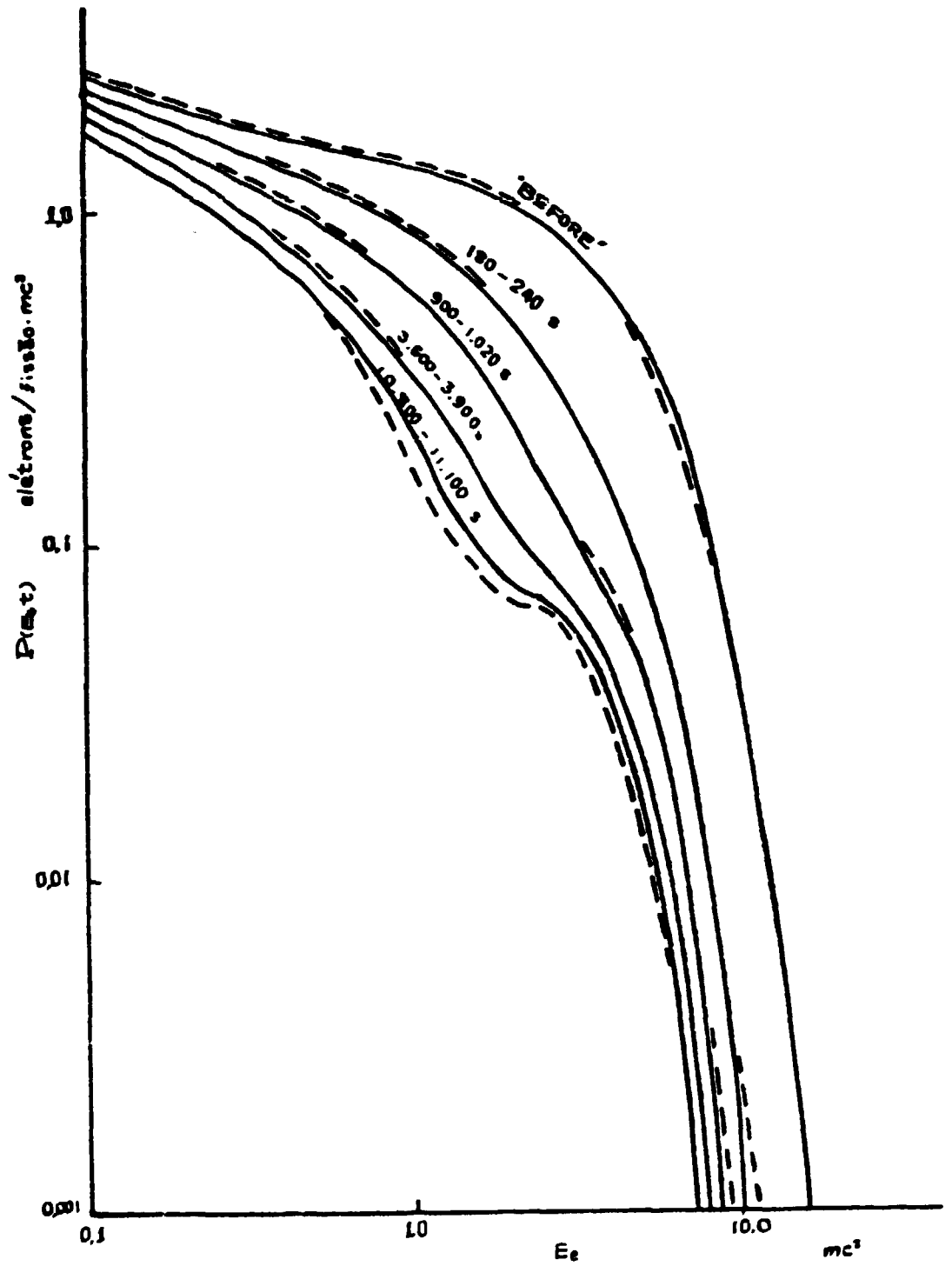


FIG. 20

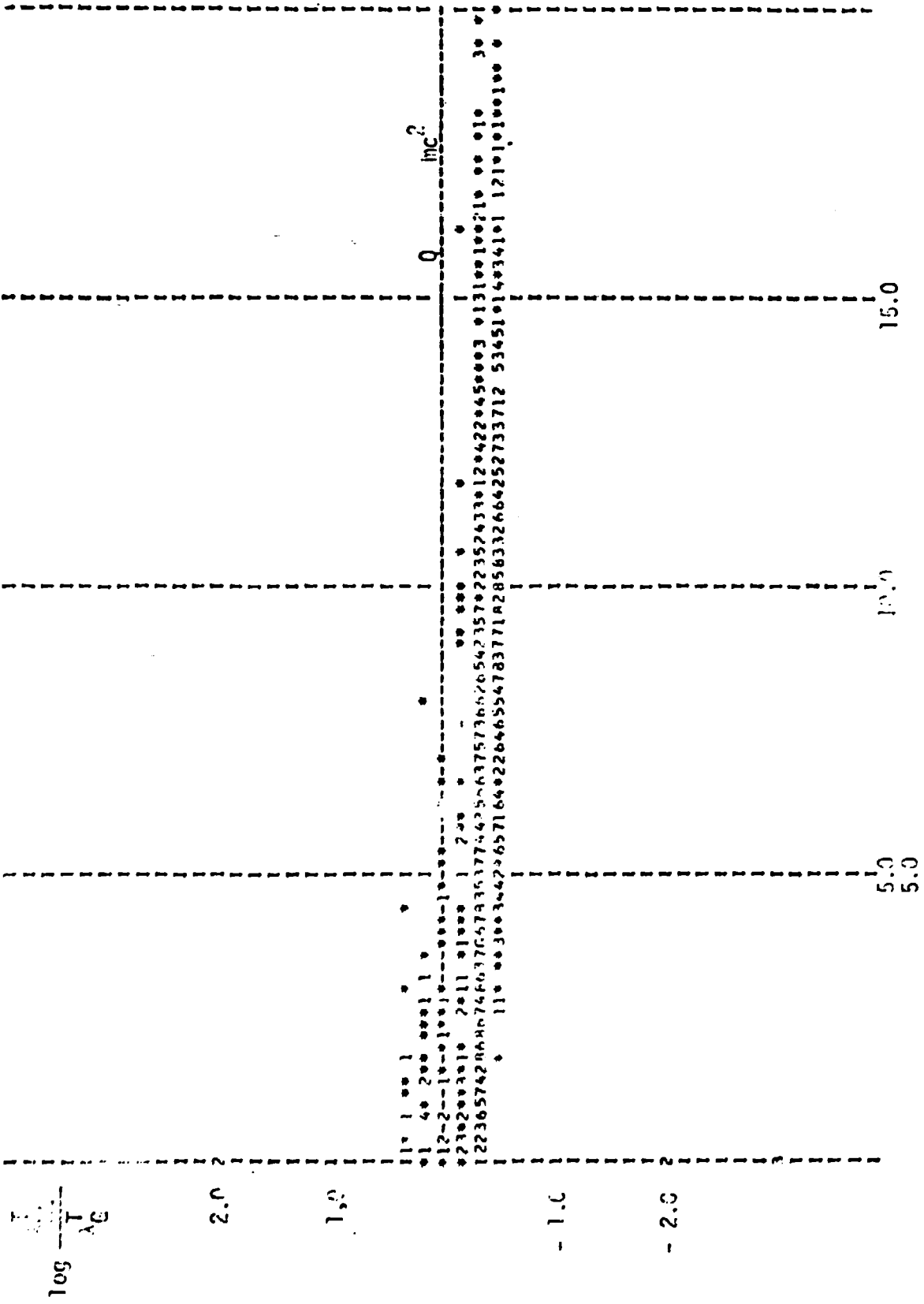


FIG. 21

1..

k