IC/88/112

INTERNATIONAL CENTRE FOR
THEORETICAL PHYSICS

REMARQUES SUR LES VARIETES A CONNEXION NORMALE PLATE, SATISFAISANT LA $\mathfrak{R}\cdot\mathfrak{C}$-CONDITION OU LA $\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{R}$-CONDITION

Georges Karoza Zafindratafa

INTERNATIONAL
ATOMIC ENERGY
AGENCY

UNITED NATIONS
EDUCATIONAL,
SCIENTIFIC
AND CULTURAL
ORGANIZATION

International Atomic Energy Agency
and
United Nations Educational Scientific and Cultural Organization

INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS

REMARQUES SUR LES SOUS-VARIETES A CONNEXION NORMALE PLATE, SATISFAISANT LA $\mathfrak{R}.\mathfrak{C}$-CONDITION OU LA $\mathfrak{C}.\mathfrak{R}$-CONDITION *

Georges Karoza Zafindratafa **
International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy.

ABSTRACT

In 1984, D.E. Blair, P. Verheyen and L. Verstraelen studied (cf. [2]) hypersurfaces of $\mathbb{E}^{n+1}$ for the particular case when they satisfy the $\mathfrak{R}.\mathfrak{C}$-condition or the $\mathfrak{C}.\mathfrak{R}$-condition. Our objective is to generalize this situation to a higher codimension. More precisely, we consider the case of dimension 4, and replace the condition of quasiumbilicity in [2] by the conformal flatness. In this way, we construct an example of 4-submanifold of $\mathbb{E}^6$ which is conformally flat at a particular point without being quasiumbilical. That such submanifolds exist, was asserted without proof by E. Cartan in [3]. Thus, we present another counter-example, in addition to the one given in [4].

MIRAMARE - TRIESTE
June 1988

* To be submitted for publication.

** Permanent address: Centre Universitaire Régional, 301 Fianarantsoa, Madagascar.

I. INTRODUCTION

La question motivant ce travail est celle de savoir si l'on peut étendre, en codimension $N \geqslant 2$, l'étude [2] faite par D.E. Blair, P. Verheyen et L. Verstraelen sur les hypersurfaces M^n $(n \geqslant 4)$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant la $\mathfrak{R}.\mathfrak{C}$-condition ou la $\mathfrak{C}.\mathfrak{R}$-condition. Nous disons qu'une sous-variété M^n de codimension $N \geqslant 1$ de $\mathbb{R}^{n+N}$ satisfait la $\mathfrak{R}.\mathfrak{C}$-condition [resp. la $\mathfrak{C}.\mathfrak{R}$-condition] si son tenseur de courbure riemannienne $\mathfrak{R}$ et son tenseur de courbure conforme de Weyl $\mathfrak{C}$ verifient, pour tous champs $X, Y \in TM$:

$$\mathfrak{R}(X,Y)(\mathfrak{C}) = 0 \quad [\text{resp. } \mathfrak{C}(X,Y)(\mathfrak{R}) = 0] \quad ,$$

où $\mathfrak{R}(X,Y)$ et $\mathfrak{C}(X,Y)$ sont considerés comme des dérivations.

En supposant la connexion normale plate, nous généralisons d'une part le théorème 5 de [2] en dimension $n = 4$ et en codimension $N \geqslant 2$, d'autre part la proposition 2 et le théorème 3 de [2] en dimension $n = 4$ et en codimension $N = 2$. Cependant, nous remplaçons la condition de quasi-ombilicalité par celle de platitude de conforme (cf. Théorèmes 3 et 4). Cela nous amène à construire un exemple d'immersion isométrique d'une 4-variété riemannienne dans $\mathbb{R}^6$ qui, en un point particulier, est conformément plate sans y être quasiombilicale (cf. contre-exemple 5).

Voici nos résultats:

<u>Théorème 1</u>

Soit $f : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ une immersion isométrique de codimension N dans $\mathbb{R}^{n+N}$, à connexion normale plate $(n \geqslant 4, N \geqslant 1)$.

Il existe une famille $\{\lambda_i^\alpha / 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant \alpha \leqslant N\}$ de fonctions définies localement sur M, telles que les assertions suivantes soient équivalentes:

(a) M^n satisfait la $\mathfrak{R}.\mathfrak{C}$-condition,

(b) Pour tous i,j,k,h mutuellement distincts $(1 \leqslant i,j,k,h \leqslant n)$, on a:

$$0 = c_{ij} \cdot \omega_{ijkh} \quad , \quad \text{où} \quad c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_i^\alpha \cdot \lambda_j^\alpha$$

$$\text{et} \quad \omega_{ijkh} = \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha\right)\left(\lambda_k^\alpha - \lambda_h^\alpha\right) .$$

Théorème 2

Soit $f : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ une N-codimensionnelle immersion isométrique à connexion normale plate dans $\mathbb{R}^{n+N}$, $n \geqslant 4$, $N \geqslant 1$.

Il existe, localement en tout point de M, une famille $\{\lambda_i^\alpha / 1 \leqslant \alpha \leqslant N, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ de fonctions telles que:

M satisfait la $\mathcal{C}.\mathcal{R}$- condition si et seulement si, pour tous i,j,k *mutuellement distincts* $(1 \leqslant i,j,k \leqslant n)$, on a:

$$0 = a_{ij} \cdot (c_{ik} - c_{jk}), \quad \text{où} \quad c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_i^\alpha \cdot \lambda_j^\alpha$$

$$\text{et} \quad a_{ij} = c_{ij} - \frac{1}{n-2}\left[\sum_{s\neq i} c_{si} + \sum_{t\neq j} c_{tj}\right] + \frac{2}{(n-1)(n-2)} \cdot \sum_{p<q} c_{pq}.$$

Théorème 3

Soit $f : M^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^6$ une immersion isométrique de codimension deux et à connexion normale plate dans $\mathbb{R}^6$.

Alors, M satisfait la $\mathcal{R}.\mathcal{C}$-condition en un point p_0, si et seulement si:

ou bien (3.1): M est conformément plate en p_0 (i.e. le tenseur de courbure conforme de Weyl de M s'annulle en p_0),

ou bien (3.2): M est cylindrique en p_0 suivant une direction normale ξ_1; suivant la direction ξ_2 perpendiculaire à ξ_1 et normale à M en p_0, le tenseur de Weingarten de M est de la forme:

$$A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 \end{pmatrix}, \text{ où } \mu_3\mu_4 \neq 0,$$

ou bien (3.3): il existe deux directions perpendiculaires ξ_1 et ξ_2 normales à M en p_0, suivant lesquelles les tenseurs de Weingarten respectifs A_{ξ_1} et A_{ξ_2} ont les formes suivantes:

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}, \quad A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1\lambda_4\mu_2\mu_3 \neq 0$.

Théorème 4

Soit $f : M^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^{4+N}$ une immersion isométrique de codimension N dans $\mathbb{R}^{4+N}$, à connexion normale plate, $N \geqslant 1$.

M^4 satisfait la $\mathcal{C}.\mathcal{R}$-condition, si et seulement si M^4 est conformément plate.

Contre-exemple 5 (Comparer avec le No.3-5 dans [4], et § 21 dans [3])

Soit $f = (f_1,\dots f_6) : \mathbb{R}^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^6$ l'immersion définie par:

$$f_1(x_1,\dots,x_4) = \frac{1}{2}(x_1)^2 + \left(\frac{-1+\varepsilon\sqrt{5}}{2}\right)(x_3)^2 + \left(\frac{2+\varepsilon\sqrt{5}}{2}\right)(x_4)^2$$

$$f_2(x_1,\dots,x_4) = \frac{1}{2}(x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_3)^2 + (x_4)^2$$

$$f_{k+2}(x_1,\dots,x_4) = x_k, \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant 4, \quad \text{où } \varepsilon = \pm 1,$$

$x_1,\dots,x_4$ sont les coordonnées canoniques dans $\mathbb{R}^4$, et $\mathbb{R}^6$ est rapporté à sa base canonique $\{\xi_1,\dots,\xi_6\}$.

La sous-variété $(\mathbb{R}^4, f)$ est conformément plate à l'origine 0. Cependant, elle n'y admet aucune direction quasiombilicale. De plus, il n'existe, au point 0, aucune direction normale ξ suivant laquelle le tenseur de Weingarten de $\mathbb{R}^4$ a la forme:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_1 \cdot a_2 \neq 0.$$

II. RAPPELS - FORMULES - LEMMES

Considerons une immersion isométrique $f : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+N}$ de codimension N dans un espace euclidien $\mathbb{R}^{n+N}$ $(N \geqslant 1, n \geqslant 4)$. Notons respectivement $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ le tenseur de courbure riemannienne et le tenseur de courbure conforme de Weyl de M. Pour tous $X \in TM$, $Y \in TM$, designons par $X \wedge Y$ l'endomorphisme de TM qui associe à chaque $Z \in TM$, l'élement:

$$X \wedge Y(Z) = \langle Z,Y \rangle X - \langle Z,X \rangle Y \quad \text{de } TM,$$

où $\langle .,. \rangle$ est la métrique induite sur M. Pour chaque $\xi \in T^\perp M$, A_ξ représentera le tenseur de Weingarten de f suivant ξ. Soient Ricc et S respectivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire de $(M,\langle.,.\rangle)$. Pour tout $X \in TM$, notons $\mathcal{N}X$ le champ de vecteurs tangents défini par: $\forall Z \in TM$,

$$\langle \mathcal{N}X, Z\rangle = \frac{1}{n-2}\cdot \mathrm{Ricc}(X,Z) - \frac{S\cdot\langle X,Z\rangle}{2(n-1)(n-2)} \quad .$$

Rappelons l'expression de $\mathcal{C}$ et l'équation de Gauss de M:

<u>Lemme 6</u>

(a) $\forall X,Y \in TM$,

$$\mathcal{C}(X,Y) = \mathcal{R}(X,Y) - (\mathcal{N}X)\wedge Y - X\wedge(\mathcal{N}Y)$$

(b) l'équation de Gauss de M s'écrit pour tout système orthonormal $\{\xi_\alpha / 1\leqslant\alpha\leqslant N\} \subset T^\perp M$ et pour tous $X,Y \in TM$:

$$\mathcal{R}(X,Y) = A_{\xi_1}(X)\wedge A_{\xi_1}(Y) + \dots + A_{\xi_N}(X)\wedge A_{\xi_N}(Y) \quad .$$

<u>Lemme 7</u> [1]

Supposons que la connexion normale de M soit plate. Il existe, localement autour de chaque point de M, un système orthonormal $\{e_1,\dots,e_n\}$ de champs de vecteurs tangents diagonalisant simultanément les tenseurs de Weingarten de M. Choisissons un champ local de repères orthonormaux $\{\xi_1,\dots,\xi_N\}$ de $T^\perp M$. Alors, il existe une famille $\{\lambda_i^\alpha / 1\leqslant\alpha\leqslant N,\ 1\leqslant i\leqslant n\}$ de fonctions définies localement sur M telles que, pour chaque couple (i,α), $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant\alpha\leqslant N$, on ait: $A_{\xi_\alpha}(e_i) = \lambda_i^\alpha\cdot e_i$.

Nous déduisons alors les égalités suivantes:

<u>Lemme 8</u>

Pour tous i,j, distincts et $1\leqslant i,\ j\leqslant n$ on a:

(a) $\mathcal{R}(e_i,e_j) = c_{ij}\cdot e_i\wedge e_j$

(b) $\mathrm{Ricc}(e_i,e_i) = \sum_{s\neq i} c_{si}$,

$\mathrm{Ricc}(e_i,e_j) = 0$

(c) $S = 2\sum_{p<q} c_{pq}$

(d) $\mathcal{C}(e_i,e_j) = a_{ij}\cdot e_i\wedge e_j$, où

$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{N} \lambda_i^\alpha\cdot\lambda_j^\alpha \quad , \quad \text{et}$$

$$a_{ij} = c_{ij} - \frac{1}{n-2}\left[\mathrm{Ricc}(e_i,e_i) + \mathrm{Ricc}(e_j,e_j)\right] + \frac{S}{(n-1)(n-2)}$$

En outre, rappelons le lemme suivant:

<u>Lemme 9</u>

$\forall X,Y,Z,W,T$ dans TM:

(a)
$$\mathcal{R}(X,Y)(\mathcal{C})(Z,W)T = \mathcal{R}(X,Y)(\mathcal{C}(Z,W)T) - \mathcal{C}(Z,W)(\mathcal{R}(X,Y)T) - \mathcal{C}(\mathcal{R}(X,Y)Z,W)T - \mathcal{C}(Z,\mathcal{R}(X,Y)W)T$$

(b)
$$\mathcal{C}(X,Y)(\mathcal{R})(Z,W)T = \mathcal{C}(X,Y)(\mathcal{R}(Z,W)T) - \mathcal{R}(Z,W)(\mathcal{C}(X,Y)T) - \mathcal{R}(\mathcal{C}(X,Y)Z,W)T - \mathcal{R}(Z,\mathcal{C}(X,Y)W)T \quad .$$

III. DEMONSTRATIONS DES THEOREMES 1 ET 2

Sous les conditions générales du théorème 1, nous utilisons les lemmes 7,8, et 9 ci-dessus, pour généraliser directement le lemme 1 de [2] comme suit:

<u>Lemme 10</u>

Il existe localement une famille $\{\lambda_i^\alpha / 1\leqslant\alpha\leqslant N, 1\leqslant i\leqslant n\}$ de fonctions telle que les quatre énoncés suivants sont équivalents:

(10.1) M^n satisfait la $\mathcal{R}.\mathcal{C}$-condition,

(10.2) $0 = c_{ij}\cdot(a_{ik} - a_{jk})$, pour tous i,j,k, mutuellement distincts,

(10.3) $0 = c_{ij}\cdot\sum_{\alpha=1}^{N}\left(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha\right)\left((n-3)\lambda_k^\alpha - \sum_{t\notin\{i,j,k\}}\lambda_t^\alpha\right)$

pour tous i,j,k mutuellement distincts,

(10.4) $0 = c_{ij}\cdot\omega_{ijkh}$, pour tous i,j,k,h deux à deux distincts, où c_{ij} et a_{ij} ont été donnés au lemma 8, et $\omega_{ijkh} = \sum_{\alpha=1}^{N}\left(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha\right)\left(\lambda_k^\alpha - \lambda_h^\alpha\right)$.

<u>Remarque 11</u>

Par la même procédure, nous montrons le théorème 2.

IV. PREUVE DU THEOREME 3

IV.1 On montre facilement que les conditions (3.1), (3.2) et (3.3) impliquent chacune la $\mathcal{R}.\mathcal{C}$-condition.

Réciproquement, supposons la $\mathcal{R}.\mathcal{C}$-condition satisfaite en p_0. Pour connaître le tenseur de courbure conforme de Weyl de M ou la seconde forme fondamentale de f, nous résolvons, d'après le théorème 1, le système de 6 équations à 8 inconnues $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ suivant:

$$(12)\quad \begin{cases} c_{12}\cdot\omega_{1234} = 0 \\ c_{34}\cdot\omega_{1234} = 0 \\ c_{13}\cdot\omega_{1324} = 0 \\ c_{24}\cdot\omega_{1324} = 0 \\ c_{14}\cdot\omega_{1423} = 0 \\ c_{23}\cdot\omega_{1423} = 0 \end{cases}$$

où pour $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, $1 \leqslant k < h \leqslant 4$, on a posé: $\lambda_i^1 = \lambda_i$, $\mu_i = \lambda_i^2$, $c_{ij} = \lambda_i\lambda_j + \mu_i\mu_j$, $\omega_{ijkh} = (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_k - \lambda_h) + (\mu_i - \mu_j)(\mu_k - \mu_h)$.
Notons $\mathcal{A} = \{(i,j)/1 \leqslant i < j \leqslant 4 \text{ et } c_{ij} = \lambda_i\lambda_j + \mu_i\mu_j \neq 0\}$.

Pour résoudre le système (12), nous discutons sur le nombre d'éléments de $\mathcal{A}$; nous obtenons, par un très long calcul, les situations (3.1), (3.2) et (3.3). Notons card $(\mathcal{A})$ la cardinalité de $\mathcal{A}$; $0 \leqslant \text{card}\,\mathcal{A} \leqslant 6$.

Si card $\mathcal{A} = 2$, nous obtenons la situation (3.3). La situation (3.2) est réalisée, si card $\mathcal{A} = 1$. Si card $\mathcal{A} \notin \{1;2\}$, nous sommes dans la situation (3.1). (Dans cette discussion, on supposera, sans restreindre la généralité, que $\mu_1 = 0$, et que de plus, $(1,2) \in \mathcal{A}$ si card$(\mathcal{A}) \geqslant 1$.)

V. DEMONSTRATION DU THEOREME 4

V.1 Il est clair que toute sous-variété conformément plate vérifie à la fois la $\mathcal{R}.\mathcal{C}$-condition et la $\mathcal{C}.\mathcal{R}$-condition.

V.2 Réciproquement, supposons la $\mathcal{C}.\mathcal{R}$-condition satisfaite par M. Pour calculer le tenseur $\mathcal{C}$ de Weyl de M, nous devons résoudre, conformément au théorème 2, le système de 12 équations à 8 inconnues $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \lambda_3^1, \lambda_4^1, \lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2$ suivant: $a_{ij}\cdot[c_{ik} - c_{jk}] = 0$, pour tous i,j,k deux à deux distincts et $1 \leqslant i,j,k \leqslant 4$. En discutant suivant le nombre de couples (i,j) tels que $i < j$ et $a_{ij} \neq 0$, nous trouvons que $\mathcal{C} = 0$.

VI. EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES

VI.1 Vérification du contre-exemple 5

On trouve très simplement que:

1.
$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\varepsilon\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+\varepsilon\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $c_{12} = 0$; $c_{13} = -1 + \varepsilon\sqrt{5}$; $c_{14} = 2 + \varepsilon\sqrt{5}$;
$c_{23} = -1$; $c_{24} = 2$; $c_{34} = 1 + \varepsilon\sqrt{5}$.

3. $\omega_{1234} = \omega_{1324} = \omega_{1423} = 0$.

4. Cela implique que: $a_{ij} = 0$, pour tous i,j distincts et $1 \leqslant i,j \leqslant 4$.

VI.2 Exemple 13

Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la variété $M^{n+2} = S^2 \times S^n$ (produit de de la 2-sphère S^2 par la n-sphère S^n) canoniquement immergée dans $\mathbb{R}^{n+4}$ satisfait la $\mathcal{R}.\mathcal{C}$-condition. Cependant, elle n'est pas conformément plate; elle ne vérifie pas la $\mathcal{C}.\mathcal{R}$-condition.

VI.3 Contre-exemple 14

Soit $f = (f_1,\dots,f_6) : \mathbb{R}^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^6$ l'application définie par:

$$f_1(x_1,\dots,x_4) = \frac{(x_1)^2}{2} + (x_2)^2 - (x_3)^2 - (x_4)^2$$

$$f_2(x_1,\dots,x_4) = \frac{3}{2}(x_1)^2 + 2(x_2)^2$$

$$f_{k+2}(x_1,\dots,x_4) = x_k, \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant 4$$

où $x_1,\dots,x_4$ sont les coordonnées canoniques dans $\mathbb{R}^4$, et $\mathbb{R}^6$ est rapporté à sa base canonique $(\xi_1,\dots,\xi_6)$.

Alors:

(1) $(\mathbb{R}^4, f)$ est une sous-variété qui ne vérifie ni la $\mathcal{R}.\mathcal{C}$-condition, ni la $\mathcal{C}.\mathcal{R}$-condition en 0.

(2) Cependant, ξ_1 et ξ_2 sont deux vecteurs normaux à $\mathbb{R}^4$ en 0, dont les les tenseurs de Weingarten respectifs sont:

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

VI.4 <u>Contre-exemple 15</u>

Soit $f = (f_1,\dots,f_6) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ l'application donnée par:

$$f_1(x_1,\dots,x_4) = \frac{\lambda_1}{2}(x_1)^2 + \frac{\lambda_2}{2}(x_2)^2$$

$$f_2(x_1,\dots,x_4) = \frac{1}{2}\mu_1(x_1)^2 + \frac{1}{2}\mu_3(x_3)^2$$

$$f_{k+2}(x_1,\dots,x_4) = x_k, \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant k \leqslant 4 \quad ,$$

où $x_1,\dots,x_4$ désignent les coordonnées canoniques dans $\mathbb{R}^4$, et $\mathbb{R}^6$ est muni de sa base canonique $\{\xi_1,\dots,\xi_6\}$; λ_1, λ_2, μ_1 et μ_3 *sont des réels* non nuls.

f est une immersion qui ne satisfait pas la $\mathcal{R}.\mathcal{C}$-condition au point 0 de $\mathbb{R}^4$. Cependant, en ce point particulier, ξ_1 et ξ_2 sont deux directions normales suivant lesquelles les tenseurs de Weingarten de f admettent respectivement les représentations matricielles:

$$A_{\xi_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad A_{\xi_2} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

REMERCIEMENTS

L'auteur veut remercier le Professeur Abdus Salam, l'Agence Internationale pour l'Energie Atomique et l'UNESCO pour leur hospitalité au Centre International de Physique Théorique, Trieste. Il remercie aussi l'Université malgache et le gouvernement de la République Démocratique de Madagascar de lui avoir autorisé à se rendre en stage de recherche à Trieste. Misaotra!

REFERENCES

[1] B.Y. Chen, Geometry of Submanifolds, Ed. Marcel Dekker (New York, 1973).

[2] D.E. Blair, P. Verheyen, L. Verstraelen, "Hypersurfaces satisfaisant à $\mathcal{R}.\mathcal{C} = 0$ ou $\mathcal{C}.\mathcal{R} = 0$", Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences, Tome 37, No.11 (1984).

[3] E. Cartan, "Sur les variétés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien", Bull. Soc. Math. France 47 (1919) 125-160.

[4] J.M. Morvan and G.K. Zafindratafa, "Conformally flat submanifolds", à paraître aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse.