LAL-PT 88-03
Février 1988

Laboratoire de l'Accélérateur Linéaire

Interprétation du bruit dans le domaine du temps

A. Hrisoho

U.E.R
de
l'Université Paris-Sud

Institut National
de Physique Nucléaire
et
de Physique des Particules

Bâtiment 200 - 91405 ORSAY Cedex

LAL-RT 88-03
Février 1988

INTERPRETATION DU BRUIT DANS LE DOMAINE DU TEMPS

INTRODUCTION

Toute perturbation, qui interfère ou cache le signal désiré, est considéré comme bruit. Il ne faut pas le confondre avec pick–up ou diaphonie qui peuvent être éliminés par blindage. (En règle générale pour des fréquences au–dessus de 10^3 Hz et des impédances au–dessus de $10^3\ \Omega$, on protège par du blindage conducteur : cuivre, Al, etc... Pour des fréquences et des impédances basses, on protège par du blindage magnétique qui sera plus efficace : mu–métal, permalloy, etc...).

Le bruit représente la fluctuation aléatoire résultant de la physique des matériaux et dépendant de la température. Ce bruit ne peut pas être supprimé, ni diminué par des moyens de blindage.

L'amplitude exacte à un moment donné ne peut pas être prédite. On caractérise le bruit par des valeurs moyennes, statistiques.

La distribution en amplitude dans la plupart des cas est une Gaussienne. Dans ce cas le bruit est défini par la valeur moyenne quadratique σ^2.

La figure 1 représente une vue du bruit dans l'échelle du temps. On peut en déduire la valeur du σ (root mean square value) en utilisant la relation empirique :

$$\text{crête à crête} \cong 8 \times \sigma \qquad (1)$$

où σ^2 est la valeur moyenne quadratique de la fluctuation.

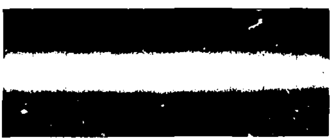


Figure 1 : Bruit dans le domaine du temps et sa distribution en amplitude

BRUIT THERMIQUE

Il est la conséquence du mouvement aléatoire des charges dans le conducteur. Donc, il dépend de la température T du conducteur. Ce bruit est connu aussi sous le nom de Johnson ou Nyquist noise.

La puissance disponible dans un conducteur (N_t) est proportionnelle à la température absolue T et à la bande passante du système de mesure :

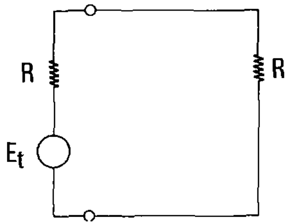
$$N_t = kT\,\Delta f \qquad (2)$$

k constante de Boltzam 1.38×10^{-23} w sec/K°

T température absolue K°

Δf bande passante du système de mesure en Hz.

L'équation (2) peut être changée en une forme beaucoup plus utile : la puissance disponible est la puissance qu'une source peut donner à une charge de résistance égale à celle de la source (figure 2).



$$N_t = \frac{E_t^2}{4R} = kT\Delta f$$

Figure 2 : Puissance disponible sur la charge R

$$E_t^2 = 4kTR\,\Delta f \qquad (3)$$

E_t^2 étant la tension au carré de la source du bruit d'une résistance R.

Les composants réactifs n'ont donc pas de bruit. Le terme "densité spectrale" est utilisé pour décrire le bruit dans une unité de bande passante :

$$\Delta f = 1\text{Hz} \qquad E_t^2 / \Delta f = 4kTR \qquad [V^2/Hz] \qquad (4)$$

Quand on a à faire au bruit, on utilise la moyenne quadratique et le symbole pour celle-ci est habituellement : $\bar{e}^2$

$$\bar{e}_n^2 = 4kTR$$

SHOT NOISE

Dans les lampes électroniques, les transistors, les diodes, on rencontre le bruit de partition (shot noise).

La *densité spectrale* est donnée par :

$$i_{sh}^2 = 2q\ I_{DC} \tag{5}$$

I_{DC} est le courant de fonctionnement de l'élément actif.

Ce bruit est associé avec le courant qui traverse une barrière de potentiel. Exemple dans les semiconducteurs.

Pour un transistor bipolaire, on définit le bruit dû au courant de base par :

$$i_{nb}^2 = 2q\ I_B \tag{6}$$

et celui dû au courant collecteur par :

$$i_{nc}^2 = 2q\ I_C \tag{7}$$

BRUIT 1/F

C'est le bruit basse fréquence. La densité spectrale de ce bruit est inversement proportionnelle à la fréquence

$$\bar{e}_{nf}^2 \simeq K \cdot 1/f \tag{8}$$

et par conséquent la puissance disponible sera :

$$N_t \simeq (K \cdot 1/f)\ .\ \Delta f \tag{9}$$

Dans la bande passante de fréquence définie par f_s et f_b

$$N_t \simeq K \cdot 1_n (f_s/f_b) \tag{10}$$

Donc, la puissance par décade reste constante. Le nombre de décades vers les fréquences basses d'un amplificateur DC est donné par le temps depuis la mise en route de l'amplificateur.

Exemple : un amplificateur DC à 1000 Hz est mis en marche depuis un jour, la fréquence $f_h \simeq$ 1 cycle/jour $\rightarrow 10^{-5}$ Hz, 10^{-5} au 10^3 donnera 8 décades. S'il était allumé depuis 100 jours , il faudrait rajouter seulement 2 décades. On peut donc dire que la bande de fréquences entre 0,1 Hz et 1 Hz est beaucoup plus courte que celle entre 1000 et 10.10^3 Hz.

EVALUATION DU BRUIT PAR RAPPORT A UN SIGNAL UTILE

Le bruit blanc peut être représenté soit :

- comme une somme de signaux de même amplitude de fréquences allant de $-\infty$ à ∞ : DOMAINE DE FREQUENCE,
- comme une suite aléatoire d'impulsions de Dirac, la distribution dans le temps *étant Poissoniène* : DOMAINE DE TEMPS.

Par la suite, nous utiliserons la deuxième représentation : le bruit sera représenté par une suite d'impulsions de forme :

$$i(t) = qo\ \delta\ (t) \tag{11}$$

qo la charge de l'électron $1.6.10^{-19}$ As, et distribuée dans le temps de façon aléatoire avec *une fréquence moyenne n(i). La densité spectrale d'une telle distribution* sera :

$$i_n^2 = 2qo^2 \cdot n(i) \tag{12a}$$

– Toute source de bruit en courant donne des impulsions définies par $qo\delta(t)$ distribuées dans le temps d'une façon aléatoire avec un taux moyen n(i).

– Toute source de bruit en tension donne des impulsions définies par $rqo\delta(t)$ distribuées dans le temps d'une façon aléatoire avec un taux moyen n(r) et une densité spectrale :

$$e_n^2 = 2(qo\ r)^2\ n(r) \tag{12b}$$

Où qo la charge de l'électron
i le courant de la source du bruit
r la résistance de la source du bruit

En général, chaque résistance est une source de bruit thermique, chaque élément actif, traversé par un courant, est une source de bruit de partition. Les sources de bruit qui sont en amont d'un système d'amplification, en principe sont dominantes, et pour calculer le bruit d'un amplificateur on étudie généralement les sources de bruit correspondant aux éléments d'entrée. Cependant, dans le cas d'éléments très bruyants se trouvant ailleurs qu'à l'entrée, et, afin de comparer le signal et le bruit, il faut tenir compte :

. de la réponse impulsionnelle du système à partir de l'entrée du signal utile,

. de la réponse impulsionnelle à partir de l'endroit où se trouve la source du bruit en question.

Une source de bruit, avec une distribution temporaire aléatoire donnera en sortie d'un amplificateur une fluctuation aléatoire dont la racine de la valeur quadratique moyenne "rms" sera une mesure de bruit. Cette valeur dépend de la réponse impulsionnelle du circuit, et des paramètres de la source du bruit (la résistance, le courant).

Charge équivalente ENC ou flux équivalent ENϕ

La charge équivalente ou le flux équivalent apporté par un signal de forme $q_o\delta(t)$ en charge, ou $rq_o\delta(t)$ en flux, nécessaire pour obtenir à la sortie une amplitude égale à la valeur "rms" générée par toutes les sources de bruit, est définit comme ENC et ENϕ respectivement. Par conséquent, un système faible bruit est caractérisé par une petite charge équivalente donc une grande sensibilité.

Evaluation théorique de la charge équivalente ENC ou le flux équivalent ENϕ

Chaque système d'amplification est défini par sa réponse impulsionnelle. La réponse impulsionnelle d'un système est non seulement fonction du signal d'entrée mais aussi des paramètres du circuit. Pour obtenir la réponse impulsionnelle il faut exciter le système avec un signal d'entrée dont la forme est $\delta(t)$ et l'intégrale égale à 1.

Si le système est excité par un signal en courant, l'intégrale sera donnée en As.

Si le système est excité par un signal en tension, l'intégrale sera donnée en Vs.

La sortie sera, par conséquent, définie comme V/As et V/Vs respectivement à l'excitation.

Prenons un système d'amplification (figure 1) dont la réponse impulsionnelle est définie pour la source i_s en courant (figure 3).

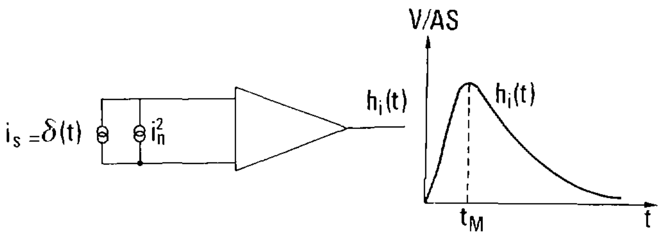


Figure 3 : Réponse impulsionnelle d'un circuit avec une source de bruit en courant

La réponse au courant i_s dont la charge est de 1 As est h_i (t) V/As.

Le générateur de bruit, avec une densité donnée par i_n^2 (égale à : 4 KT/R_p dans le cas d'une résistance en parallèle avec la source du bruit, ou $2q_0 I_{DC}$ dans le cas où un courant DC circule à l'entrée du premier élément actif) donne une fluctuation à la sortie dont la valeur "rms" doit être calculée.

On peut démontrer, en utilisant le théorème de Campbell que la variance (la variation moyenne quadratique) est donnée par :

$$\sigma_A^2 = 1/2 \; i_n^2 \int h_i^2 (t) \, dt \, |V^2| \tag{13}$$

pour une source de bruit en courant, dont la densité spectrale est i_n^2 et un circuit dont la réponse impulsionnelle est $h_i(t)$ V/As obtenue avec une excitation en impulsion courant en parallèle avec la source de bruit, et par :

$$\sigma_A^2 = 1/2 \; e_n^2 \int h_e (t)^2 \, dt \, [V^2] \tag{14}$$

pour une source de bruit en tension dont la densité spectrale est e_n^2 et un circuit dont la réponse impulsionnelle est $h_e(t)$ V/Vs obtenue avec une excitation en impulsion tension en parallèle avec la source de bruit. Pour obtenir la charge équivalente ENC ou le flux équivalent ENϕ, il faut trouver la constante de calibration du circuit. Dans le cas le plus simple, le générateur du signal est en parallèle avec le générateur de bruit. Dans ce cas, l'amplitude maximale en sortie due au signal est $h_i(t_M)$ V/As et c'est également la constante de normalisation.

Par conséquent :

$$\overline{ENC}^2 = 1/2 \, i_n^2 \int \left[\frac{h_i (t)}{h_i (t_M)} \right]^2 dt$$

$$= 1/2 \, i_n^2 \int h_{iN} (t)^2 \, dt \tag{15}$$

où $h_{iN}(t)$ est une réponse impulsionnelle normalisée.

De même, pour une source de signal en tension en parallèle avec la source de bruit en tension, on a :

$$\overline{EN\phi}^2 = 1/2 \, e_n^2 \int \left[\frac{h_e (t)}{h_e (t_M)} \right]^2 dt$$

$$= 1/2 \, e_n^2 \int h_{eN} (t)^2 \, dt \tag{16}$$

Dans la majorité des cas, le générateur de signal n'est pas situé au même endroit du circuit que le générateur de bruit : la constante de calibration sera obtenue d'après la figure 4.

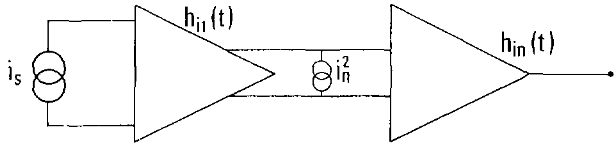


Figure 4 : Source de bruit en courant située à l'intérieur du circuit

La réponse impulsionnelle pour le signal est donnée par :

$$h_{is}(t) = h_{i1}(t) * h_{in}(t) \tag{17}$$

La fluctuation due au bruit i_n^2 sera :

$$\sigma_A^2 = 1/2 \;\; i_n^2 \int h_{in}(t)^2 \, dt \tag{18}$$

La constante de normalisation sera $h_{is}(t_M)$ V/As

et :

$$\overline{ENC}^2 = 1/2 \;\; i_n^2 \left[\frac{h_{in}(t_{Mn})}{h_{is}(t_{Ms})} \right]^2 \int h_{inN}(t)^2 \, dt \left[As^2 \right] \tag{19}$$

Où
- t_{Mn} Le temps du maximum de la réponse impulsionnelle à partir du générateur de bruit ;
- t_{Ms} Le temps du maximum de la réponse impulsionnelle à partir du générateur du signal ;
- $h_{i1}(t)$ La réponse impulsionnelle à partir du générateur du signal jusqu'au générateur de bruit ;
- $h_{in}(t)$ La réponse impulsionnelle à partir du générateur de bruit ;
- h_{inN} La réponse impulsionnelle normalisée à partir du générateur de bruit.

En utilisant le même procédé toute combinaison de générateur, en tension ou en courant pour le signal ou pour le bruit sont possibles pour obtenir la charge ou le flux équivalent au bruit en tension ou en courant.

Pour un signal dont la forme est donnée par une expression $i(t) \neq \delta(t)$, la charge équivalente sera donnée par :

$$\overline{ENC}^2 = 1/2 \; i_n^2 \left\{ \frac{h_{in}(t_{Mn})}{|i(t) * h_{in}(t)|\, \max} \right\}^2 \int h_{in_N}(t)^2 \; dt \tag{20}$$

où $\int i(t)\, dt = 1$

$|\, i(t) * h_{in}(t)\, |\, \max$ est la valeur maximale de la convolution du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du circuit.

Le facteur $\dfrac{h_{in}(t_{Mn})}{|\, i(t) * h_{in}(t)\, |\, \max}$ correspond au déficit balistique du fait que le courant n'est pas instantané. Par conséquent toute la charge apportée par le signal ne contribue pas au maximum de l'amplitude du signal en sortie.

Exemple du bruit série

D'après la figure 5, on cherche à calculer la charge équivalente au bruit créée par le générateur de bruit e_n^2.

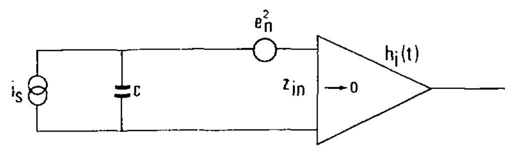


Figure 5 : Circuit avec bruit série

La réponse impulsionnelle du circuit à une source de courant est $h_i(t)$.

La réponse impulsionnelle à une source de tension en parallèle avec la source de bruit (figure 5b) est :

$$\begin{aligned} h_e(t) &= i(t) * h_i(t) = C\,\frac{de(t)}{dt} * h_i(t) \\ &= C\, e'(t) * h_i(t) \\ &= C h_i'(t) \end{aligned}$$

où $i(t)$, due à la source de tension est le courant d'entrée du circuit dont l'impédance d'entrée $\rightarrow 0$. Donc, la charge équivalente pour le bruit série sera :

$$\overline{ENC}^2 = 1/2\ e_n^2 \int |\, C\, h_i'(t)\, |^2\, dt\ .\ \frac{1}{h_i^2(t_M)}$$

$$= 1/2\ (e_n C)^2 \int h_{iN}(t)^2\ dt \qquad (22)$$

où $h_i(t)$ est la réponse impulsionnelle à partir du signal d'entrée. Dans le cas où $Zn \neq 0$, on propose de chercher le générateur équivalent en courant pour le générateur de bruit e(t), (figure 6).

Figure 6 : Equivalence entre source de bruit en tension et source de bruit en courant

Auquel cas :

$$i(t) = C\frac{de(t)}{dt} \qquad (23)$$

qu'on peut appliquer à l'entrée de n'importe quel circuit.

Mais dans ce cas, $h_i(t)$ est la réponse impulsionnelle du circuit avec la capacité d'entrée C inclus.

Note : La réponse impulsionnelle d'un circuit avec $Z \to 0$ ne dépend pas de C.

Ce procédé permet de calculer la charge équivalente ou le flux équivalent dans n'importe quelle combinaison de configuration entre le signal et la source de bruit, se situant à l'intérieur du circuit en question.

Naturellement il faut savoir calculer ou mesurer les réponses impulsionnelles à partir de l'endroit du générateur de signal et du générateur de bruit, respectivement afin d'obtenir les constantes de calibration des circuits.

Ces méthodes ouvrent des possibilités intéressantes pour l'évaluation du bruit utilisant la simulation analogique par des programmes comme SPICE et autres.

Générateurs de bruit d'un transistor

Le bruit généré par un transistor peut-être représenté par deux sources :

- une parallèle, représentant le bruit qu'on mesure avec l'entrée en l'air,
- une série, représentant le bruit qu'on mesure avec l'entrée court-circuitée, (figure 7).

La signification physique de ces deux sources :

- le bruit parallèle est dû au courant de base I_B.
- le bruit de série est dû au courant du collecteur.

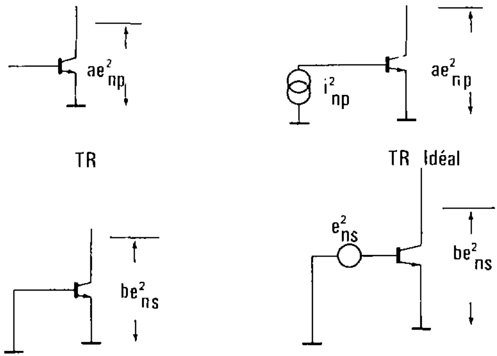


Figure 7 : Equivalence entre élément actif bruyant et élément actif (non bruyant) idéal avec une source de bruit

Pour le bruit parallèle

$$\overline{i}^{\,2}_{np} = 2q_o I_B \tag{24}$$

où

$$i_n(t) = q_o\,\delta(t)\ ;\ n(I_B) \tag{25}$$

$$n(I_B) = I_B/q_o \tag{26}$$

Pour le bruit série

On doit chercher le générateur équivalent à l'entrée, figure 8, pour le bruit du au courant collecteur I_c.

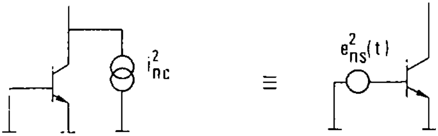


Figure 8 : Equivalence entre la source de bruit en courant et en tension due au courant collecteur

$$i_{nc}(t) = q_0\,\delta(t)\ ;\ n(I_c) \qquad e_{ns}(t) = \frac{q_0}{g_m}\,\delta(t)\ ;\ n(I_c) \tag{27}$$

$$\bar{i}^2_{nc} = 2\,q_0 I_c \qquad \bar{e}^2_{ns} = 2\left(\frac{q_0}{g_m}\right)^2 .\ n(I_c)$$

La densité spectrale, pour une source équivalente en tension, à l'entrée sera :

$$\bar{e}^2_n = 2q_0^2 \cdot \frac{1}{g_m^2} \cdot \frac{I_c}{q_0} \tag{28}$$

$$I_c = I_E \quad \text{et} \quad I_E = \frac{kT}{q_0} g_m \tag{29}$$

$$\bar{e}^2_n = 2\,kT\,\frac{1}{g_m} = 4\,kTr_n \tag{30}$$

où $\quad r_n = \dfrac{1}{2g_m}$ la résistance équivalente du bruit série.

La résistance r_n n'existe pas réellement. Elle ne contribue pas, par exemple, à l'intégration du signal d'entrée. Elle ne peut pas faire de protection de claquage H.T.

Une résistance de valeur r_n aurait donné le même bruit que celui produit par I_c. Finalement, le schéma équivalent concernant les sources de bruit d'un transistor sera :

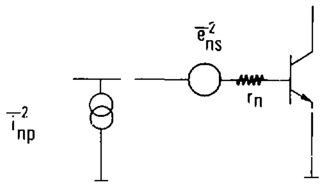


Figure 9 : Sources représentant le bruit d'un élément actif

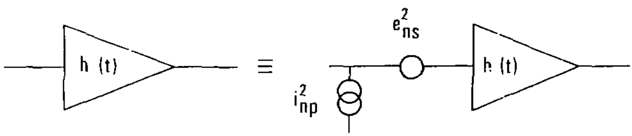
où
$$i_{np} = q_0\, \delta(t)\ ;\ n\,(I_B) \tag{31}$$
$$\bar{i}^{\,2}_{np} = 2q_0\, i_B$$

$$e_{ns} = q_0\ r_n\, \delta\,(t)\ ;\ n\,(r_n) \tag{32}$$
$$\bar{e}^{\,2}_{ns} = 4\ kTr_n$$

A partir de (32), on peut obtenir une expression pour $n(r_n)$:
$$\bar{e}^{\,2}_{ns} = 2(q_0 r_n)^2\ .\ n(r_n) = 4\ kTr_n \tag{33}$$

d'où
$$n(r_n) = \frac{2}{q_0^2}\ .\ \frac{k\,T}{r_n} \tag{34}$$

En supposant que l'essentiel du bruit d'un amplificateur, dont la réponse *impulsionnelle est h(t), soit généré par l'élément d'entrée*, on peut caractériser un amplificateur par les deux sources de bruit qu'on vient de calculer (figure 10).



<u>Figure 10</u> : Sources équivalentes de bruit d'un amplificateur

Avec les densités spectrales et la réponse impulsionnelle du système on pourra déterminer la charge équivalente au bruit <u>ENC</u>.

Ainsi, on obtient : pour le bruit parallèle, la densité spectrale étant :
$$i^2_{np} = 2q_e\, I_B$$

La charge équivalente sera :
$$\begin{aligned}\overline{ENC}^2_s &= 1/2\ \ i^2_{np} \int\ h_{iN}\ (t)^2\ dt \\ &= q_0\ .\ I_B \int h_{iN}\,(t)^2\ dt \qquad (35)\\ &= q_0\ .\ I_B\ a_{F2}\ t_m\end{aligned}$$

Pour le bruit série, la densité spectrale étant donnée par :
$$\bar{e}^2_{ns} = 4kTr_n \tag{36}$$

La charge équivalente sera alors :

$$\overline{ENC_s^2} = 1/2\ \bar{e}_{ns}^2\ C^2 \int h'_{iN}\ (t)^2\ dt \qquad (37)$$

$$= 1/2\ \bar{e}_{ns}^2\ C^2\ a_{F1}\ 1/t_m$$

$$\overline{ENC_{tot}^2} = 1/2\ \left[\ 2q_0\ I_B\ a_{F2}\ t_m\ +\ 4kTr_n\ C^2\ a_{F1}/t_m\ \right] \qquad (38)$$

Mesure de bruit

Le bruit généré à l'entrée d'un amplificateur donne à sa sortie un signal v(t) avec une distribution en amplitude $f_t(v)$. Cette distribution est, en général, une gaussienne. Elle peut être obtenue avec un analyseur multicanal, en prenant des échantillons de v(t) dans le temps (figure 12).

Pour un signal à l'entrée défini par :

$$i_s\ (t) = Q\ \delta\ (t) \qquad (39)$$

la valeur moyenne de la distribution f_t (v) sera proportionnelle à la charge Q.

$$E\left[\ f_t\ (v)\ \right] = \alpha\ .\ Q \qquad (40)$$

et la variance de f_t (v) sera une mesure représentative du bruit (figure 11).

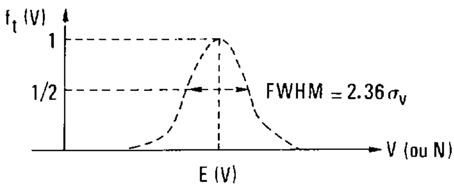


Figure 11 : Spectre Gaussien du bruit

D'après la définition de la charge équivalente, on peut écrire :

$$FWHM\ =\ 2.36\ \sigma_V = 2.36\ \alpha\ (ENC) \qquad (41)$$

et par conséquent :

$$ENC\ =\ FWHM/\ 2.36\ \alpha \qquad (42)$$

Pour avoir une valeur correspondante à la charge ENC, il faut connaître la constante α, donc il faut calibrer la chaîne de mesure.

Calibration de la chaîne

On injecte à l'entrée de la chaîne une charge bien connue (figure 12) :

$$Q_1 = C_{inj} . U_1 = N1/\alpha \tag{43}$$

où C_{inj} est une capacité calibrée à travers laquelle on injecte la charge en appliquant un échelon de tension U_1.

N_1 le canal sur lequel on compte,

$N_1 = \alpha Q_1$

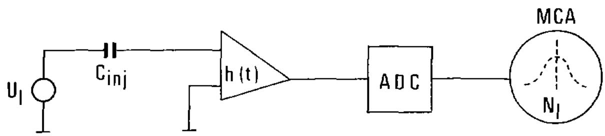


Figure 12 : chaîne de mesure du bruit

On fait une deuxième mesure avec une tension U_2 :

$$Q_2 = C_{inj} . U_2 = N_2/\alpha \tag{44}$$

D'après (43) et (44)

$$(N_2 - N_1) = [\ C_{inj} (U_2 - U_1)\ ]\ .\ \alpha$$

$$\alpha = \frac{N_2 - N_1}{C_{inj}\,(U_2 - U_1)} \quad \text{As/Canal} \tag{45}$$

Une fois la chaîne calibrée, on peut, à partir de la largeur à mi-hauteur du spectre obtenu, évaluer la variance du bruit correspondant à la chaîne de mesure (définie essentiellement avec l'élément d'entrée et la réponse impulsionnelle). Quand on utilise un QVT, pour mesurer le bruit, avec l'intégrateur de charge (mode Q), il faut noter que la fonction de pondération de la chaîne de mesure sera modifiée.

Elle dépend de la largeur de la porte (le temps d'intégration) et est égale à la convolution de la réponse impulsionnelle du système h(t) avec la largeur de la porte d'intégration.

ANNEXE

Calcul de la variance du bruit

Définition : la fonction de pondération du circuit, tenant compte de la capacité et de la résistance de la source du signal utile, est définie comme suit :

La fonction de pondération, par rapport au temps t_M (temps de lecture) est définie pour $t < t_M$, et à l'instant t a une valeur P(t) qui correspond à l'amplitude à l'instant t_M pour un signal δ (t) arrivant à l'instant t.

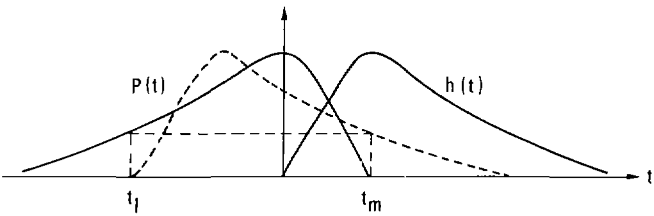


Figure 13 : Réponse impulsionnelle et fonction de pondération

D'après la figure 13, la fonction de pondération est l'image de la réponse impulsionnelle h(t), déplacée de t_M.

$$P(t) = h\,(t_M - t) \tag{46}$$

Ceci est valable pour les systèmes linéaires invariants dans le temps.

En supposant une distribution Poissonième dans le temps, le nombre d'impulsions, x, dans un intervalle de temps dt sera une variable aléatoire avec une moyenne :

$$x = ndt \tag{47}$$

et avec une variance : $\sigma^2 = ndt$ (48)

où n = le taux moyen de la variable x.

Pour une variable aléatoire x avec une distribution Poissonième la valeur moyenne $\bar{x}$

et la variance σ^2 sont égales.

$$\bar{x} = ndt$$

$$\sigma^2 = ndt$$

En se référant à la fonction de pondération P(t), on peut dire :

x impulsions, chacune de charge q_0, arrivant à l'instant t dans l'intervalle dt, donneront en sortie une amplitude :

$$\Delta A = q_0 \,.\, x \,.\, P(t) \tag{49}$$

ΔA = variable aléatoire = $[\, q_0 \,.\, P(t) \,] \,.\, x$
$= a \,.\, x$

La variance de ΔA sera $a^2\,\sigma^2 = [\, Q_0\, P(t) \,] \,.\, n\, dt$ (50)

La variance de A, correspond aux impulsions de bruit dans l'intervalle 0 à ∞ sera :

$$\sigma_A^2 = \int [\, q_0 \,.\, P(t) \,]^2\, dt$$

$$= nq_0^2 \int P(t)^2\, dt \tag{51}$$

avec

$$nq_0 = I \quad \text{et} \quad i_n^2 = 2q_0 \,.\, I \tag{52}$$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{2}\, i_n^2 \int P(t)^2\, dt \tag{53}$$

On peut facilement démontrer que

$$\int P(t)^2\, dt = \int h(t)^2\, dt \tag{54}$$

Si l'intégrale est prise sur l'intervalle de t ou $h(t) \neq 0$ et $P(t) \neq 0$. D'où le théorème de Campbell s'en suit.