CN8900343

CNIC-00160

IAPCM-0009

# 中国核科技报告

# CHINA NUCLEAR SCIENCE & TECHNOLOGY REPORT

## 包含超热电子输运的激光聚变总体方程组计算方法的研究及其应用

中国核情报中心

China Nuclear Information Centre

CNIC-00160

IAPCM-0009

# 包含超热电子输运的激光聚变总体方程组计算方法的研究及其应用

张永慧　樊福如　罗平庆　赖东显

于　仁　陈　江　苏秀敏　沈隆钧

（应用物理与计算数学研究所，北京）

中国核情报中心

北京・1988.2

## 摘　要

本文的两个主要内容是：(1) 论述超热电子输运方程的数值解法。超热电子多群扩散方程为退缩抛物型方程，其求解要点是能量空间变换及系数平均，总能空间特殊群处理，隐式差分及求自洽电场的线性分割法。(2) 概述了考虑超热电子输运功能的激光聚变总体程序(JB-2)的功能，并列举了符合实验图象的激光平面靶计算实例。JB-2程序已成为高功率激光打靶研究和靶设计的重要工具。

**关键词**　超热电子多群限流扩散　自洽电场　多维非线性退缩抛物型方程
动能空间与总能空间的变换

# STUDY OF COMPUTATIONAL METHOD ABOUT EQUATIONS FOR LASER FUSION WITH SUPERTHERMAL ELECTRON TRANSPORT AND ITS APPLICATIONS

Zhang Yonghui Fan Furu Luo pingqing
Lai Dongxian Yu Ren Chen Jiang
Su Xiumin Shen Longjun

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing)

## ABSTRACT

This is an outline of a large code for computing superthermal electron transport in laser fusion plasmas. The code involves the computations of mass, momentum, electron temperature, ion temperature, photon temperature, numbers of superthermal electrons and thermal electrons, electric field, etc.. But the numerical methods for superthermal electrons are centrally considered in this paper. Especially the mapping from kinetic energy bins into total energy bins is adopted. The figures of numerical simulation conforming with the experimental results are also presented.

## 一、引　言

强激光打靶实验表明，大量超热电子在系统中产生，对激光聚变的理论计算产生直接的影响。因此，研究包含超热电子输运的激光聚变总体方程组的数值解法和应用，有重要的实用价值。

超热电子输运过程的描述是考虑相对论效应并采用自洽电场的多群限流扩散方程[1]，热电子扩散方程和决定自洽电场的电中性方程。本文将论述考虑超热电子输运的激光聚变总体方程组的数值计算的研究及应用。

超热电子多群扩散方程为非线性退缩抛物型方程，数值方法上属一类新型问题。加上考虑了自洽电场这一重要物理因素，方程求解比一般的扩散方程求解要困难复杂得多。我们将在第二部分中给出主要方程和定解条件，在第三部分中重点叙述数值方法，最后在第四部分中综述程序功能并举出符合实验图象的数值计算实例。

## 二、主要方程和定解条件

### 1. 一维三温流体力学方程组

质量守恒方程：

$$\frac{dm}{dt}=0$$

其中

$$m=\int_{R(o,t)}^{R(m,t)}\rho(R,t)R^{\nu-1}dR$$

$m$与$R$满足变换关系式

$$\frac{\partial m}{\partial R}=\rho R^{\nu-1}$$

动量守恒方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-R^{\nu-1}\frac{\partial}{\partial m}(p_e+p_h+p_i+p_\gamma+q)+f_L$$

其中

$$u=\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_m$$

$p_e$，$p_i$，$p_h$，$p_\gamma$分别为电子压力，离子压力，超热电子压力和光子压力，$q$为人为粘性项。

$f_L$为激光动量沉积项。

电子温度方程：

$$C_{ve}\left(\frac{\partial T_e}{\partial t}\right)_m+T_e\left(\frac{\partial p_e}{\partial T_e}\right)_\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho}\right)_m$$

$$=-\frac{\partial}{\partial m}(R^{\nu-1}F_e)+\omega_e(T_i-T_e)+K_\gamma(T_\gamma-T_e)+\dot{W}_{LB}+\delta_1\dot{W}_{LA}+\delta_2\dot{W}_{h-e,b}+\dot{W}_e$$

离子温度方程：

$$C_{vi}\left(\frac{\partial}{\partial t}T_i\right)_m+\left[T_i\left(\frac{\partial p_i}{\partial T_i}\right)_\rho+q\right]\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho}\right)_m$$

$$=-\frac{\partial}{\partial m}(R^{\alpha-1}F_i)+\bar{\omega}_e(T_e-T_i)+\dot{\bar{W}}_i$$

光子温度方程：

$$\frac{4aT_\gamma^3}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t}T_\gamma\right)_m+\frac{4}{3}aT_\gamma^4\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\rho}\right)_m=-\frac{\partial}{\partial m}(R^{\alpha-1}F_\gamma)+\bar{K}_\gamma(T_e-T_\gamma)$$

其中$F_e$，$F_i$，$F_\gamma$分别为电子，离子和光子能流，是扩散流和极限流的并联

$$F=\frac{F_LF_D}{F_L+|F_D|}$$

$\dot{\bar{W}}_{LB}$，$\dot{\bar{W}}_{LA}$，分别为单位时间、单位质量，激光轫致吸收和反常吸收的能量；

$\dot{V}_{h\to th}$为超热电子交给热电子的能量；

$\dot{\bar{W}}_e$和$\dot{\bar{W}}_i$分别为热核反应产物交给电子和离子的能量；

$\bar{K}_\gamma$，$\bar{\omega}_e$分别为光子－电子，电子－离子耦合系数，$\bar{K}_\gamma$计及轫致辐射、光电效应和康普顿效应。

此外，还有粒子数密度方程，激光强度方程，平衡电离方程和状态方程，这里不详细列出，可参考文献[2]。

**2. 超热电子多群扩散方程，热电子扩散方程，电场方程及定解条件**

（1）超热电子多群扩散方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{N_h}{\rho}\right)=-\nabla\cdot\Phi_h+\frac{\partial}{\partial \varepsilon}[A_c(\varepsilon)N_h]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}(eE_R\Phi_h)$$

$$+\frac{\partial}{\partial\varepsilon}[A_D(\varepsilon)N_h]+\delta(R-R_C^-)\dot{N}_{h,LA}+\dot{N}_{h,B}$$

$N_h(t,R,\varepsilon)$为时刻$t$，坐标$R$，能量$\varepsilon$附近单位间隔内的超热电子数。$\dot{N}_{h,LA}$和$\dot{N}_{h,B}$分别为反常吸收和轫致辐射源项。$\Phi_h$为超热电子流密度，同样为极限流$\Phi_L$及扩散流$\Phi_{hD}$的并联：

$$\Phi_h=\frac{\Phi_L}{\Phi_L+|\Phi_{hD}|}\Phi_{hD}$$

$$\Phi_{hD}=\mathrm{D}(\varepsilon)\left[\frac{\partial N_h}{\partial R}-eE_R\varepsilon(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{1/2}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\frac{N_h}{\varepsilon(\varepsilon^2-\varepsilon_0^2)^{1/2}}\right]$$

（2）热电子扩散方程：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{N_{th}}{\rho}\right)=-\nabla\cdot\Phi_{th}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{N_e}{\rho}\right)+\dot{N}_{h\to th}-\delta(R-R_C^-)\dot{N}_{th\to h}$$

$N_{th}$为热电子数密度，$\Phi_{th}$为考虑限流的流密度，形式类同于$\Phi_h$。

（3）电场$E_R$满足的方程：

$$\Phi_{th}(E_R)+\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_m}\Phi_h(E_R,\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon=0$$

（4）定解条件：

初始条件：

$$u=0,\ \ p=0$$

$$\rho=\rho(R,0),\ T=T(R,0)$$
$$N_h=0,\ N_{th}=N_t(R,0)$$

边界条件：

空间坐标内边界$R_{J_0}$处：

$$F_e=F_i=0,$$

$$p=0,\ F_T=-\frac{ac}{2}T_T^4\quad（自由边界）$$

$$u=0,\ F_T=0\quad（固壁边界）$$

$$\Phi_h=\Phi_{th}=0$$

空间坐标外边界$R_{Jm}$处：

$$p=0,\ F_i=F_e=0,\ F=\frac{ac}{2}T_T^4$$

$$\Phi_h=\Phi_{th}=0$$

超热电子能量上边界：

$$N_h(t、R、\varepsilon_m)=0$$

超热电子能量下边界：

$$\Phi_h(t、R、\varepsilon_1)=0\qquad(E_R\neq0，当R_{J_0}<R<R_J)$$

交界面：

$p$，$q$，$u$，$T$，$F$，$\Phi_h$，$\Phi_{th}$，$N_h$，$N_{th}$连续

## 三、数值方法

这里对数值方法作简单概述。

**1. 超热电子方程的数值求解是一类新型问题**

（1）首先必须将方程进行变换。动能空间中方程的二次微商项具有形式$A\frac{\partial^2 N_h}{\partial R^2}+2B\frac{\partial^2 N_h}{\partial R\partial\varepsilon}+C\frac{\partial^2 N_h}{\partial\varepsilon^2}$，其中$A$、$B$、$C$为$\varepsilon$，$N_h$及电场$E$的函数。易知有

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=0$$

因此，方程为非线性多维退化抛物型方程。直接在动能空间求解是极其困难的。解决这一问题的办法是作变换

$$\begin{cases} \varepsilon_T=\varepsilon-e\varphi(R,t) \\ R'=R \\ t'=\tau \end{cases}$$

这里$\varphi$为电场的势函数。显而易见，变换与未知函数$\varphi$紧紧相联。于是，方程在总能空间中的形式为[3,4]

$$\rho\frac{d}{dt'}\left(\frac{N_{h,T}}{\rho}\right)=-\frac{1}{R'^{\alpha-1}}\frac{\partial}{\partial R'}(R'^{\alpha-1}\Phi_{h,T})+\frac{2}{m_0c}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_T}\left[\frac{\varepsilon_{TV}C_1\ln\Lambda_0}{(\varepsilon_{TV}^2-\varepsilon_0^2)^{1/2}}N_{h,T}\right]$$

$$+\frac{\rho}{3}\frac{d}{dt'}\left(\frac{1}{\rho}\right)\frac{\partial}{\partial\varepsilon_T}\left[\frac{\varepsilon_{TV}^2-\varepsilon_0^2}{\varepsilon_{TV}}N_{h,T}\right]+e\frac{d\varphi}{dt'}\frac{\partial}{\partial\varepsilon_T}\left(\frac{N_{h,T}}{\rho}\right)+\delta(R'-R'_c)\dot N_{h,LA}+\dot N_{h,B,T}$$

$$\Phi_{h,T}=-\mathcal{J}_TA_T\frac{\partial}{\partial R'}\left(\frac{N_{h,T}}{\mu_T}\right)$$

这里$\mu_T$，$A_T$为$\varepsilon_T$的函数，$\mathcal{J}_T$为$\varepsilon_T$和$N_{h,T}$的函数。

（2）总能空间中方程写成Lagrangian坐标的形式后，可用有限差分方法求解。实际上，在每一时间步长前，变换$\varphi$取为$\varphi(R,t^*)$，故项$e\frac{d\varphi}{dt'}\ \frac{\partial}{\partial\varepsilon_T}\left(\frac{N_{h,T}}{\rho}\right)$是消失了的。差分格式取隐式，其中$\frac{\partial N_{h,T}}{\partial\varepsilon_T}$采用前差形式，其它项取通常的差分形式。当计算第$l$群超热电子时，第$l+1$群便提供了源项。因此，依次由高能群转向低能群，而顺利求出全部的超热电子。其复杂的差分格式（略去下标T）如下：

$$\frac{1}{\Delta t^{n+\frac{1}{2}}}\left(\frac{\widetilde N^{n+1}_{i-1/2,l'+l-1}}{\rho^{n+1}_{i-1/2}}-\frac{N^{n}_{i-1/2,l'+l-1}}{\rho^{n}_{i-\frac{1}{2}}}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta m_{i-\frac{1}{2}}}\Big[(R_i^{n+1})^{\alpha-1}\mathcal{J}^{n+1}_{i,l'+l-1}K^{n+1}_{i,l'+l-1}(Z^{n+1}_{i+\frac{1}{2},l'+l-1}-Z^{n+1}_{i-\frac{1}{2},l'+l-1})$$

$$-(R^{n+1}_{i-1})^{\alpha-1}\mathcal{J}^{n+1}_{i-1,l'+l-1}K^{n+1}_{i-1,l'+l-1}(Z^{n+1}_{i-\frac{1}{2},l'+l-1}-Z^{n+1}_{i-3/2,l'+l-1})\Big]$$

$$+\frac{2}{m_0c\rho^{n+1}_{i-\frac{1}{2}}}\ \frac{1}{\Delta\varepsilon_T}\Big[M^{n+1}_{i-\frac{1}{2},l'+l}\mu^{n}_{i-\frac{1}{2},l'+l}Z^{n+1}_{i-\frac{1}{2},l'+l}$$

$$-M^{n+1}_{i-\frac{1}{2},l'+l-1}\mu^{n}_{i-\frac{1}{2},l'+l-1}Z^{n+1}_{i-\frac{1}{2},l'+l-1}\Big]$$

$$+\frac{1}{3\Delta t^{n+1/2}}\left(\frac{1}{\rho^{n+1}_{i-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\rho^{n}_{i-\frac{1}{2}}}\right)\frac{1}{\Delta\varepsilon_T}\Big[D^{n}_{i-\frac{1}{2},l'+l}\mu^{n}_{i-\frac{1}{2},l'+l}Z^{n+1}_{i-\frac{1}{2},l'+l}$$

$$-D^{n}_{i-\frac{1}{2},l'+l-1}\mu^{n}_{i-\frac{1}{2},l'+l-1}Z^{n+1}_{i-\frac{1}{2},l'+l-1}\Big]+\frac{1}{\rho^{n+1}_{i-\frac{1}{2}}}\delta(R-R_c)\dot N_{LA\,i-\frac{1}{2},l'+l-1}$$

式中

$$K^{n+1}_{i,l'+l-1}=\frac{2(A^{+}_{i,l'+l-1})^{n+1}(A^{-}_{i,l'+l-1})^{n+1}}{(A^{+}_{i,l'+l-1})^{n+1}\Delta R_{i-\frac{1}{2}}+(A^{-}_{i,l'+l-1})^{n+1}\Delta R_{i+\frac{1}{2}}}$$

且$A^{\pm}$，$M$，$D$等系数分别为对应于$A_T$，$\frac{\varepsilon_{TV}C_1\ln\Lambda_0}{(\varepsilon_{TV}^2-\varepsilon_0^2)^{1/2}}$及$\frac{\varepsilon_{TV}^2-\varepsilon_0^2}{\varepsilon_{TV}}$的量，系由动能空间相应表达式以$N_h$为权重的平均值。

（3）动边界需进行特殊处理。变换中含有未知电场$E$的势函数，它简化了方程，但将区域$D$变换成$D'$，后者的部分边界是动边界，这给求解增加了不少麻烦。所以，在边界附近必须小心加以特殊处理。

（4）在总能空间中求出的解还需要变换到动能空间中去。这时要使用上述变换以及一些插值公式。在动能空间里求解韧致辐射源对超热电子数$N_h$的影响。

(5) 对于总能空间形式的方程，其差分格式的收敛性和稳定性，我们已从基础理论上进行了严格的论证。

这样，当$t^n$时刻的电场求出后，就可通过（1）～(4）的过程，求出超热电子$N_h$。

2. 热电子方程的差分格式为

$$\frac{1}{\Delta t^{n+\frac12}}\left(\frac{N^{n+1}_{th,j-\frac12}}{\rho^{n+1}_{j-\frac12}}-\frac{N^{n}_{th,j-\frac12}}{\rho^{n}_{j-\frac12}}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta m_{j-\frac12}}\Big\{R_j^{n-1}\bar{f}_{th,j}K_{th,j}(1+L_j^-)T^{n+1}_{e,j+\frac12}N^{n+1}_{th,j+\frac12}-[R_j^{n-1}\bar{f}_{th,j}K_{th,j}(1-L_j^+)$$

$$+R_{j-1}^{n-1}\bar{f}_{th,j}K_{th,j-1}(1-L^-_{j-1})]T^{n+1}_{e,j-\frac12}N^{n+1}_{th,j-\frac12}$$

$$+R_{j-1}^{n-1}\bar{f}_{th,j-1}K_{th,j-1}(1-L^+_{j-1})]T^{n+1}_{e,j-\frac32}N^{n+1}_{th,j-\frac32}\Big\}+\dot{G}_{j-\frac12}$$

其中

$$K_{th,j}=\frac{2k\beta^+_{th,j}\beta^-_{th,j}}{\beta^+_{th,j}\Delta R_{j-1/2}+\beta^-_{th,j}\Delta R_{j+\frac12}+\bar{\Delta}_j}$$

$$\bar{\Delta}_j=\Delta R_{j+\frac12}\,\beta^-_{th,j}L^-_j-\Delta R_{j-\frac12}\,\beta^+_{th,j}L^+_j$$

$$L^+_j=\frac{\Delta R_{j+\frac12}}{T_{ej}}\left[\frac{e}{2k}E_{Rj}+\beta^+_{ej}\frac{T_{ej+\frac12}-T_{ej}}{\Delta R_{j+\frac12}}\right]$$

$$L^-_j=\frac{\Delta R_{j-\frac12}}{T_{ej}}\left[\frac{e}{2k}E_{Rj}+\beta^-_{ej}\frac{T_{ej}-T_{ej-\frac12}}{\Delta R_{j-\frac12}}\right]$$

与通常的扩散现象不同的是，热电子的流比较复杂，它包含有热电子数项及热电子数的微商项。上述$K_{th,j}$的表达式，就是新的流系数的数值计算公式。它是通常情况下对应公式的推广。

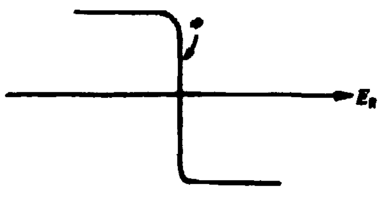
对于这样特定的热电子流，我们曾引进一个指数函数，将热电子中的两项合并成一项。由于电场变化的敏感，指数函数在计算中有时会溢出，故没有被采用。

3. 电场的计算

电场的计算主要是解方程

$$\Phi=\Phi_{th}+\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_m}\Phi_h d\varepsilon=0$$

这里一个困难的问题是在解$E_R$附近，$\Phi$的变化异常剧烈。$E_R$大约在宽度为0.0001的范围内，$\Phi$的变化达$10^{10}$（如图），而在此范围外，变化平缓。易知，牛顿切线法失效。我们采用寻求正负函数值的办法，求出解$E_R$所在的范围，然后连续用线性分割法求出解。寻求$E_R$所在范围并非易事，这是由于电场对超热电子的依赖关系异常敏感的缘故。这里的一切需要处理得经济、有效，否则会带来大量的计算量。



### 4. 三温耦合能量方程组

对于离子温度、电子温度和光子温度的三温耦合能量方程组，采用隐式差分格式，用矩阵追赶法进行迭代求解。其中电子和离子的能量交换项表现了一定的刚性度，必须小心处理为隐式。

## 四、程序功能及数值计算例子

JB-2程序包括15种介质，可分20个区，200点和100个能群，可计算一维平面、柱面和球面对称条件下的激光吸收，超热电子输运，电子传热，冲击波产生和传播，压缩和热核反应过程。

下面给出激光辐照平面靶的数值计算例子。靶材料为Al介质。靶厚40μm，入射激光峰值功率密度为$2.72\times10^{14}W/cm^2$，脉冲宽度（FWHM）为300ps，波长$\lambda=1.06\mu m$，反常吸收因子$\eta=0.30$，超热电子分20群，每群的宽度的2keV，最高的超热电子温度$T_h^{max}=4.17keV$。计算结果是激光吸收总效率～50%，其中逆韧致吸收和反常吸收大约各占一半。图1是激光峰值时刻电场的空间分布图。图2是超热电子和热电子流的空间分布。由图可见两种流正负抵消，建立起来的自洽电场基本上满足电中性的要求。图3是距靶前表面12.5μm处电子温度随时间的变化，从它可以明显地看到超热电子预热和冲击波加热的图象。图4为硬X射线谱。由该谱处理出超热电子温度～6.3keV。国外在类似条件的实验中，12.5μm处的预热温度～1eV，超热电子温度6～7keV。我们的计算结果与实验结果基本一致。

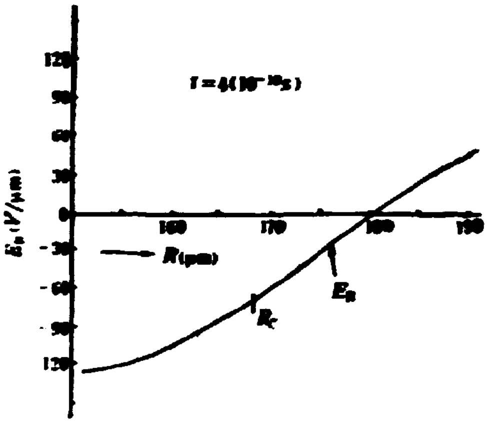



图1 激光峰值时刻电场的空间分布

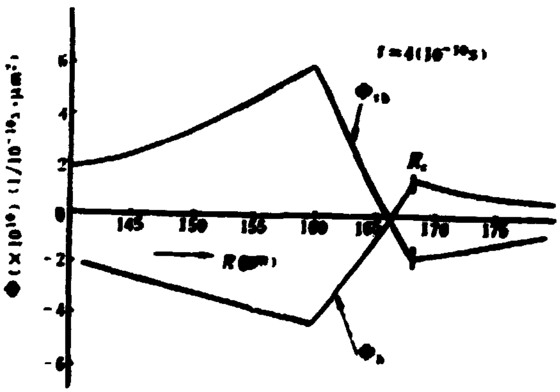



图2 超热电子流和热电子流的空间分布

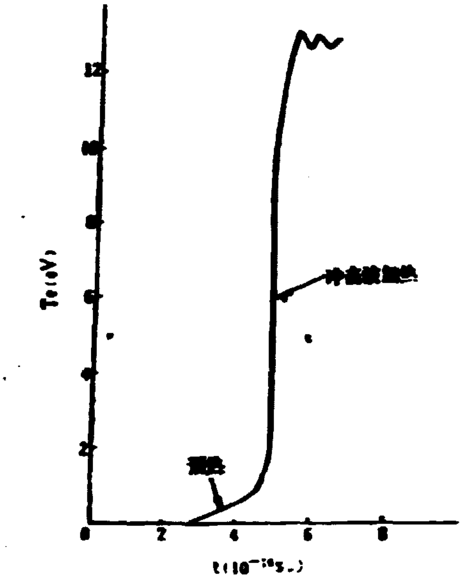



图3 距靶前表面12.5μm处，电子温度随时间的变化

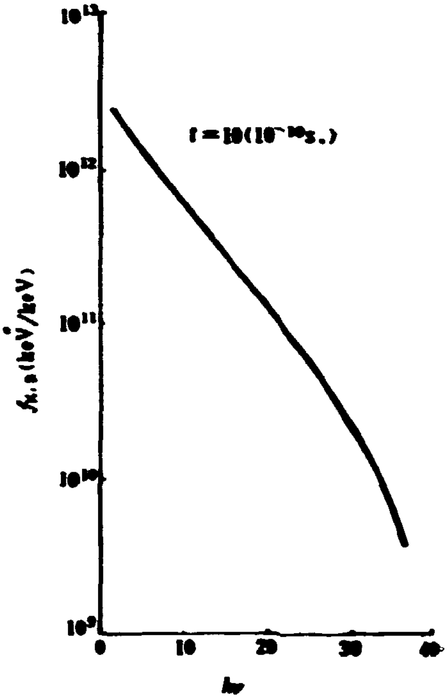



图4 硬X射线谱

## 参 考 文 献


[1] David. Mosher, Phys.Fluids, 18, 846 (1975).

[2] JB-1方案组，全国第一届核聚变与等离子体物理学术交流会论文集，成都 (1980).

[3] David S. Kershaw, UCRL-77047, (1975).

[4] David S. Kershaw, UCRL-83493, (1979).

CHINA NUCLEAR SCIENCE & TECHNOLOGY REPORT

P.O. Box 2103
Beijing, China

China Nuclear Information Centre