A TRANSFORMAÇÃO λ E CÓPIAS GRAVITACIONAIS

Manoel Ribeiro da Silva

Orientador: Prof. Francisco Antonio de Moraes
Doria

Rio de Janeiro,

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Instituto de Física

Tese submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Ciências.

A TRANSFORMAÇÃO λ E CÓPIAS GRAVITACIONAIS

TESE 5586

Manoel Ribeiro da Silva

Orientador: Prof. Francisco Antonio de Moraes Doria

Rio de Janeiro,

A TRANSFORMAÇÃO λ E CÓPIAS GRAVITACIONAIS

Manoel Ribeiro da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS À OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE.

Aprovada por:

Prof. Francisco Antonio de Moraes
Accioli Doria
(Presidente da Banca)

Prof. Antonio Francisco Furtado do
Amaral

Prof. Antonio Fernandes da Fonseca
Teixeira

FICHA CATALOGRÁFICA

Silva, Manoel [illegible]. da

Transfomação λ e cópias gravitacionais. Rio de Janeiro : UFRJ/IF, 1984.

xiii, 84 p.

Tese: Mestre em Ciências (física)

1.FÍSICA - MATEMÁTICA

2.CÓPIAS DE CAMPOS DE GAUGE E GRAVITACIONAL

3.FORMAS DIFERENCIAIS

4.TESES

I.UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

II.Título

Para

João Claudio da Silva

Maria da Conceição Silva

Denise Fernandes

AGRADECIMENTOS:

Ao Prof. F. A. Doria, pela orientação precisa e clara.

Aos Profs. A. F. F. do Amaral e A. F. da F. Teixeira, que muito contribuiram na correção e apresentação deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos, Ronaldo, Luís, Joaõ, Alcina, Márcio, Vitorvane, Antônio e Fernando, que contribuiram muito na minha formação.

Ao Departamento de Física Matemática, principalmente aos Profs. Maia, Eliane, Nico e Pitanga.

Ao Instituto de Física, principalmente aos funcionários Jurandir, Cleonice, Edna, Regina, Biana, Nancy, Elliu e Núbio.

Aos CNPq e CAPES.

Apesar da ausência de incentivo

a pesquisa.

Apesar da falta de incentivo

ao ensino...

Eis aqui um trabalho ..!?

RESUMO

Este trabalho relaciona uma simetria abeliana estudada por Einstein no contesto da teoria do campo assimétrico , a "transformação λ", ao fenômeno das cópias gravitacionais e , mais genericamente, das cópias dos campos da gauge, que, como se verifica, surgem de uma generalização da transformação λ. A ligação entre o que foi estudado por Einstein e o fenômeno das cópias se faz com a ajuda do clássico teorema de Frobenius sobre a existência de folheações numa variedade diferenciável.

A linguagem com aqual se trata este problema é aquela da Geometria Diferencial Intrínseca; a da Relatividade Geral e e das teorias unificadas, aquela do Cálculo Tensorial Clássico . Assim sendo, e para facilitar a transição entre um estilo e outro, faz-se uma longa introdução detalhando-se, primeiro, as estruturas à moda clássica, e em seguida, sua versão mais recente.

ABSTRACT

The present work relates an Abelian symmetry already considered by Einstein with respect to his asymmetrical field theories to the gravitational and gauge field copy phenomenon. It is shown that gauge field copies arise out of a straightforward generalization of the λ - map. The connection between Einstein's work on the λ-transformation and the copy phenomenon is obtained with the help of the Frobenius Theorem on the existence of foliations on a differentiable manifold.

A problem like the one above is usually treated within the language of (intrinsic) Differential Geometry;General Relativity and classical unified field theories are traditionally developed in a classical style, that gap, we have prepared a long introdution where the same structures are studied from the traditional and from the more recent point of view .

INTRODUÇÃO

Há certas áreas das ciências matematizadas onde o acesso é imediato a pessoas que se disponham a conhecê-las: um grande resultado pode ser atingido quase a partir do nada, numa dezena de páginas. Uma destas áreas é aquela dos fundamentos teóricos da computação; chegamos à teoria das funções recursivas, aos grandes teoremas de Goedel e de Gentzen, às idéias de Church e de Turing sem pré-requisitos, apenas ajudados pelo nosso interesse no assunto. Em outras áreas misturam-se idéias imediatas mas profundas, e intuições vindas de teoremas cuja prova, se rigorosa, exigiria esforço extenso. É o caso da hipótese do continuum, no contra-exemplo famoso de Paul Cohen. Novamente uma idéia brilhante se abre rapidamente a quem se dispuser a enfrentar umas poucas páginas de um raciocínio denso mas sem condicionamentos anteriores.

A Física Clássica não pertence a este domínio das matemáticas de acesso imediato. Seu instrumento, o Cálculo Infinitesimal, velho de três séculos, traz em si uma inércia resultante do acúmulo de idéias e conhecimentos por todos estes tempos. Sem o Cálculo, não se revela a Física Clássica. Mas se o tomarmos como ponto de partida, como pré-requisito, é possível construir-se a Mecânica Clássica e a moderna Teoria Clássica de Campos. O que for importado de áreas diversas pode ser manipulado a partir da intuição do leitor interessado.

Este trabalho é, em essência, um resultado na área da Teoria Clássica de Campos - a prova de que a transformação λ de Einstein, se generalizada de forma adequada, inclui as cópias de campos gravitacionais, e também as de <u>gauge</u>. Para lá chegarmos, dois foram os pré-requisitos: a linguagem tradicional da Gravitação de Einstein, o cálculo dos tensores, e um pouco da geometria dos espaços fibrados, base atual da teorias de gauge clássicas. O objetivo a que nos propusemos então foi permitir a uma pessoa de fora da área a compreensão do nosso trabalho. Para tanto, supusemos um conhecimento prévio de Cálculo e Geometria Analítica, apenas. O resto se expôs com cuidado.

O resultado a que se chegou foi a demonstração de um teorema que junta duas idéias distantes (em aparência): uma simetria nas teorias unitárias, uma degenerescência nas teorias de campo. Para que este resultado esteja ao alcance de quem o procurar, demos todo o <u>background</u> que, supomos, seja a ele necessário.

Í N D I C E

CAPÍTULO I

CÁLCULO TENSORIAL CLÁSSICO

CAPÍTULO II

CÁLCULO TENSORIAL INTRÍNSECO

ÍTULO III

CÓPIAS GRAVITACIONAIS

CAPÍTULO I

CÁLCULO TENSORIAL CLÁSSICO

1. - Introdução

A origem do conceito de tensor está na evolução da geometria diferencial de Gauss, Riemann e Christoffel. O principal objetivo do cálculo tensorial é a investigação das relações que permanecem invariantes quando se muda de um referencial de coordenadas a outro referencial, ambos definidos, sempre, por meio de vetores tangentes a linhas coordenadas numa região aberta de algum R^n*. O cálculo tensorial se apresenta como uma linguagem matemática com a qual se podem formular as leis da física. Este é um postulado básico para a física do século XX.

2. - Espaço de N Dimensões

Considere $x^1, x^2, \ldots, x^i, \ldots, x^N$, um conjunto ordenado de N variáveis reais diferenciáveis. Denominamos estas variáveis coordenadas do ponto. Dizemos então de todos os pontos correspondentes a todos valores possíveis das coordenadas, incluindo-se transformações entre elas, que formam um espaço N - dimensional representado por V_N. Todas ou algumas coordenadas podem ser limitadas a um intervalo para assegurar uma correspondência bi-unívoca entre uma região de V_N e o conjunto de coorde

* Referenciais holônomos.

nadas.

Definimos uma curva em V_N como sendo o conjunto de pontos que satisfaz às N equações

$$x^i = x^i(u) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) ,$$

sendo u um parâmetro diferenciável, em geral, e $x^i(u)$ N funções de u.

Definiremos um subespaço V_M de V_N, para $M<N$,

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \ldots, u^M) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) ,$$

onde existem M parâmetros $u^1, u^2, \ldots, u^M$. As $x^i(u^1, u^2, \ldots, u^M)$ são N funções de $u^1, u^2, \ldots, u^M$ que satisfazem a certas condi-ções de diferenciabilidade. Quando $M=N-1$, o espaço V_M se chamará hipersuperfície de V_N.

3. - Mudanças de Coordenadas

Considere um espaço V_N com coordenadas locais $x^1, x^2, \ldots, x^N$. As N equações

$$\bar{x}^i = \phi^i(x^1, x^2, \ldots, x^N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) , \qquad (3.1)$$

onde ϕ^i são funções "bem comportadas", definem um novo sistema de coordenadas $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N$. A equação (3.1) define uma transformação de coordenadas. As N funções ϕ^i devem ser independentes, ou seja, o Jacobiano formado por $|\partial \bar{x}^i / \partial x^j|$ não se anula. Com esta condição podemos fazer

$$x^i = \phi^i(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^N) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

4. - Convenções sobre os Índices

As convenções serão:

1 - Os índices latinos empregados (subíndices e supraíndices), podem assumir todos valores de 1 a N, a não ser que especifiquemos ao contrário.

2 - Se repetimos uma vez um índice latino em um termo, subentende-se uma soma sobre este de 1 a N. Isto é;

$$d\bar{x}^i = \sum_{r=1}^{N} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} dx^r$$

usando a convenção (2), podemos escrever

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} dx^r . \qquad (4.1)$$

3 - Um termo não pode conter o mesmo índice mais de duas vezes. O índice repetido (no caso da equação (4.1) o r) é chamado índice mudo, pois pode ser substituido por qualquer outro

índice latino.

Introduziremos aqui a delta de Kronecker e que definimos como

$$\delta^k_\ell \begin{cases} =1 \text{ se } k = \ell\,, \\ =0 \text{ se } k \neq \ell\,. \end{cases}$$

A propriedade elementar da delta de Kronecker é dada por

$$\delta^k_\ell A^\ell = A^k \;;$$

uma outra é dada por

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} = \delta^k_j\,.$$

5. - Vetores Contravariantes

Um conjunto de N funções A^i das N coordenadas x^i forma as componentes de um vetor contravariante se se transformam segundo a equação

$$\bar{A}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \tag{5.1}$$

numa mudança de coordenadas de x^i a $\bar{x}^i$. Ao multiplicar as equações (5.1) por $\partial x^k/\partial \bar{x}^i$ obtemos

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\bar{\Lambda}^i = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\Lambda^j = \frac{\partial x^k}{\partial x^j}\Lambda^j = \delta^k_j \Lambda^j = \Lambda^k ;$$

daqui tiramos que

$$\Lambda^k = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\bar{\Lambda}^i . \tag{5.2}$$

Investigando as equações (4.1) observamos que os dx^i formam as componentes de um vetor contravariante, cujas componentes em qualquer outro sistema de coordenadas são as diferenciais $d\bar{x}^i$ daquele sistema. Deduz-se imediatamente que dx^i/du é também um vetor contravariante, o vetor tangente à curva $x^i = x^i(u)$.

Considere agora outra mudança de coordenadas $\bar{\bar{x}}^i = g^i(\bar{x}^i)$. As novas componentes $\bar{\bar{\Lambda}}^i$ devem ser dadas por

$$\bar{\bar{\Lambda}}^i = \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^j}\bar{\Lambda}^j = \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\Lambda^k = \frac{\partial \bar{\bar{x}}^i}{\partial x^k}\Lambda^k .$$

Esta equação tem a mesma forma que a (5.1), demonstrando portanto que as transformações dos vetores contravariantes formam um grupo.

Com exceção das coordenadas x^i, um só índice superior (supraíndice) indicará sempre um vetor contravariante, a menos que digamos o contrário. As coordenadas x^i só se comportarão como as componentes de um vetor contravariante com res peito às transformações do tipo $\bar{x}^i = a^i_j x^j$, onde as a^i_j são um conjunto de N^2 constantes, que não formam necessariamente os componentes de um tensor (como veremos mais tarde). Pois neste caso temos

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = a^i_j \,.$$

e a transformação é descrita como

$$\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} x^j.$$

Com relação às transformações gerais de coordenadas, as x^i não formam as componentes de um tensor contravariante, o que significa fundamentalmente que se escolhermos $A^i = x^i$, então as novas componentes $\bar{A}^i$ com respeito ao sistema de coordenadas $\bar{x}^i$ não satisfazem as equações $\bar{A}^i = \bar{x}^i$.

6. - Vetores Covariantes

De um conjunto de N funções A_i das N coordenadas x^i dizemos que são componentes de um vetor covariante, se se transformam segundo as equações

$$\bar{A}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} A_j \qquad (6.1)$$

ao mudarmos as coordenadas x^i para $\bar{x}^i$. Pode-se portanto escolher N funções arbitrárias como componentes de um vetor covariante no sistema de coordenadas x^i e as equações (6.1) definem as N componentes no novo sistema de coordenadas $\bar{x}^i$. Multiplicando (6.1) por $\partial\bar{x}^i/\partial x^k$ obtemos

$$\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\bar{A}_i = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}A_j = \frac{\partial x^j}{\partial x^k}A_j = \delta^j_k A_j = A_k \quad , \tag{6.2}$$

donde

$$A_k = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k}\bar{A}_i \quad .$$

Se colocamos que $\partial f/\partial\bar{x}^i = (\partial f/\partial x^j)\partial x^j/\partial\bar{x}^i$, deduzimos imediatamente de (6.1) que as grandezas $\partial f/\partial x_j$ são as componentes de um vetor covariante. Tais componentes em qualquer outro sistema são as correspondentes derivadas parciais $\partial f/\partial\bar{x}^i$. É o gradiente de f.

Um subíndice único caracteriza sempre um vetor covariante, a não ser que especificamos o contrário. (Consideramos o índice i no vetor covariante $\partial f/\partial x^i$ como um subíndice.)

Veremos agora que não há distinção entre os vetores contravariantes e covariantes quando nos limitamos às transformações do tipo

$$\bar{x}^i = a^i_m x^m + b^i \quad , \tag{6.3}$$

onde b^i são N constantes que não formam necessariamente as componentes de um vetor contravariantes e a^j_m são constantes (que não formam necessariamente um tensor), de tal forma que

$$a^i_r a^i_m = \delta^r_m .$$

Agora multiplicamos a equação (6.3) por a^i_r e obtemos

$$a^i_r \bar{x}^i = a^i_r a^i_m x^m + a^i_r b^i ,$$

$$x^r = a^i_r \bar{x}^i - a^i_r b^i ;$$

assim temos que

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} = a^i_j ,$$

que prova que as equações (5.1) e (6.1) definem o mesmo tipo de entidade.

7. - Invariantes

Qualquer função I de N coordenadas x^i se chama um invariante ou um escalar com relação à transformação de coordenadas se $\bar{I} = I$, onde $\bar{I}$ é o valor de I no novo sistema de coordenadas $\bar{x}^i$. São invariantes as grandezas que não mudam quando mudamos de um sistema de coordenadas a outro.

Das componentes A^i e B_i de um vetor contravariante e das respectivas do covariante , podemos formar a soma $A^i B_i$.

Quando trocamos as novas coordenadas $\bar{x}^i$, esta soma se transforma em $\bar{A}^i\bar{B}_i$. Temos então que

$$\bar{A}^i\bar{B}_i = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j} A^j \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i} B_k = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial\bar{x}^i} A^j B_k = \delta^k_j A^j B_k \ .$$

então resulta

$$\bar{A}^i\bar{B}_i = A^j B_j = A^i B_i ;$$

$A^i B_i$ é invariante, portanto.

8. - Tensor de Segunda Ordem

Formemos $A^{ij} = B^i C^j$, onde B^i e C^i são as componentes de dois vetores contravariantes. Deduzimos de (5.1) que as A^{ij} se transformam segundo as equações

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^\ell} A^{k\ell} \ . \tag{8.1}$$

Mais geralmente, se temos N² funções A^{ij} cuja lei de transformação é a de (8.1), então denominamos a A^{ij} componentes de um tensor contravariante de segunda ordem. Que não é necessariamente o produto de dois vetores contravariantes. (8.1) define as componentes do tensor de segunda ordem em qualquer outro sistema de coordenadas $\bar{x}^i$.

Analogamente, se possuimos N² funções A_{ij} cuja lei de transformação seja

$$\bar{A}_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} A_{k\ell}, \qquad (8.2)$$

denominamos as A_{jk} componentes de um tensor covariante de segunda ordem.

Também temos que N² funções A^i_j que se transformem segundo a lei

$$\bar{A}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} A^k_\ell \qquad (8.3)$$

são chamadas as componentes de um tensor misto de segunda ordem.

Observamos que os índices superiores caracterizam os aspectos contravariantes de um tensor e os índices inferiores os aspectos covariantes.

O delta de Kronecker se transforma como um tensor misto

$$\bar{\delta}^i_j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \delta^k_\ell = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} = \delta^i_j \quad .$$

Se colocássemos as componentes invariantes δ_{kl} como componentes de um tensor covariante num sistema de coordenadas x^i e mudássemos de sistema de coordenadas, teríamos

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j}\delta_{k\ell} = \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} ;$$

essas componentes transformadas não formam a delta de Kronecker. Assim, há necessidade de colocarmos um supraíndice e um subíndice na delta de Kronecker δ^i_j para formarmos um tensor misto.

9. - Tensores de Ordem Superior

Um conjunto de N^{s+p} funções $A^{t_1 t_2 \ldots t_s}_{q_1 q_2 \ldots q_p}$ das N coordenadas locais x^i são componentes de um tensor misto de ordem (s+p), contravariante de ordem s e covariante de ordem p se se transformarem segundo as equações

$$\bar{A}^{u_1 u_2 \ldots u_s}_{r_1 r_2 \quad r_p} = \frac{\partial \bar{x}^{u_1}}{\partial x^{t_1}} \cdots \frac{\bar{x}^{u_s}}{x^{t_s}} \cdot \frac{\partial x^{q_1}}{\partial \bar{x}^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{q_p}}{\partial \bar{x}^{r_p}} A^{t_1 t_2 \ldots t_s}_{q_1 q_2 \ldots q_p} \tag{9.1}$$

com a mudança das coordenadas x^i para $\bar{x}^i$. Esta fórmula é uma óbvia combinação de (5.1) e (6.1).

A ordem dos índices num tensor é muito importante. O tensor A^{ij} não é necessariamente o mesmo tensor que o A^{ji} (para matrizes, A^{ji} é a transposta de A^{ij}). Quando trocamos inter namente dois índices contravariantes ou covariantes e o tensor permanece o mesmo, dizemos esses tensores simétricos com respeito a estes índices. Se dois tensores são simétricos com relação a um índice num sistema de coordenadas, serão simétricos em qualquer outro sistema de coordenadas. Imponhamos $A^{ij} = A^{ji}$. Mudando para um outro sistema de coordenadas teremos

$$\bar{A}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\ell} A^{k\ell} = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^\ell} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} A^{\ell k} = \bar{A}^{ij} ; \qquad (9.2)$$

se $A^{k\ell} = A^{\ell k}$ então $\bar{A}^{ij} = \bar{A}^{ji}$. A simetria em relação a um índice covariante e um outro contravariante pode não se manter depois de uma mudança de coordenadas. Mas $\delta^i_j = \delta^j_i$.

Quando todos os índices, sejam de um tensor contravariante ou sejam de um tensor covariante, podem ser trocados sem alterar o tensor dizemos que este é um tensor simétrico. Um tensor simétrico de segunda ordem tem no total o máximo de (1/2) N (N+1) componentes diferentes, onde $N = \dim V_N$.

Quando mudamos internamente dois índices de um tensor, e só se muda o sinal, dizemos que este tensor é antissimétrico em relação aos índices mudados.

$$A^{ji} = -A^{ij}.$$

A antissimetria é também independente da escolha do sistema de coordenadas utilizado.

Quando todos os índices de um tensor contravariante ou covariante podem ser mudados internamente, de tal forma que o tensor muda de sinal em cada mudança interna de um par de índices, dizemos que este tensor é antissimétrico. Um tensor antissimétrico A^{ij} de segunda ordem tem no total o máximo de $\frac{1}{2}N(N-1)$ componentes independentes.

Se todas as componentes de um tensor num sistema de coordenadas são nulas, num ponto, serão nulas neste ponto em qualquer outro sistema de coordenadas. Esta propriedade dos tensores é muito importante nas aplicações físicas .

Um tensor definido em todos os pontos de uma curva ou em todo o espaço V_N é o que denominamos um campo tensorial.

10. - Soma, Diferença e Multiplicação de Tensores

As operações realizadas com tensores precisam obedecer à lei de transformação (9.1). Qualquer combinação linear, tendo os coeficientes invariantes, de tensores do mesmo tipo, será um tensor do mesmo tipo. Os tensores A^i_{jk} e B^i_{jk} formam $\lambda A^i_{jk}+\mu B^i_{jk}$ que satisfaz a (9.1) sempre que λ e μ forem invariantes. A soma de tensor será $A^i_{jk}+B^i_{jk}$ e a diferença será $A^i_{jk}-B^i_{jk}$. Podemos escrever também

$$A_{ij}=\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})+\frac{1}{2}(A_{ij}-A_{ji}) \quad ;$$

chamaremos $\frac{1}{2}(A_{ij}+A_{ji})$ à parte simétrica e $\frac{1}{2}(A_{ji}-A_{ij})$ à parte antissimétrica. Assim, qualquer tensor contra ou covariante, de segunda ordem, será a soma de um tensor simétrico e de outro antissimétrico.

Escolhemos dois tensores, um de ordem s contravariante e de ordem p covariante, o outro de ordem t contravariante e de ordem convariante q. Deduzimos de (9.1) que o produto das componentes forma um tensor misto de ordem contravariante s+t e ordem covariante p+q. A este tensor denominamos produto externo dos dois tensores. Por exemplo, $A^{ij\ell}_{kmnt}=B^{ij}_{k}C^{\ell}_{mnt}$, é o produto externo dos dois tensores B^{ij}_{k} e C^{ℓ}_{mnt} e é um tensor do tipo indicado pelos índices.

A divisão, no seu sentido usual, de um tensor por outro não está definida.

11. - Contração

De um tensor misto como $A^{ij}_{\ell mn}$, formamos a soma $A^{ij}_{\ell mj}$. Da equação (9.1) temos

$$\bar{A}^{st}_{pqr} = \frac{\partial \bar{x}^{s}}{\partial x^{i}} \frac{\partial \bar{x}^{t}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{p}} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial \bar{x}^{q}} \frac{\partial x^{m}}{\partial \bar{x}^{r}} A^{ij}_{k\ell m} .$$

Donde, após algumas manipulações, obtemos

$$\bar{A}^{sr}_{pqr} = \frac{\partial \bar{x}^{s}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{p}} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial \bar{x}^{q}} \delta^{m}_{j} A^{ij}_{k\ell m} = \frac{\partial \bar{x}^{s}}{\partial x^{i}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{p}} \frac{\partial x^{\ell}}{\partial \bar{x}^{q}} A^{im}_{k\ell m} .$$

Observamos que $A^{ij}_{\ell mj}$ é um tensor misto, contravariante de primeira ordem e covariante de segunda ordem. Este processo é a contração que nos permite obter um tensor de ordem r-2 de um tensor misto de ordem r.

Também podemos juntar multiplicação e contração para originar novos tensores. Dos tensores A^{ij}_k e B^{ℓ}_{mnt} podemos obter tensores como $A^{ij}_k B^k_{mnt}$, $A^{ij}_k B^k_{mji}$ e muitos outros. Este procedimento se chama multiplicação interna de dois tensores.

Como outro exemplo, A^j_j se forma pela contração de A^i_j, e A^j_j é invariante, tensor de ordem zero denominado traço de A^i_j.

12. - Elemento de Curva

Sejam um tensor covariante simétrico de segunda ordem A_{ij}, cujo determinante $|A_{ij}|\neq 0$, B^{ik} um tensor contravariante de segunda ordem cujo determinante $|B^{ik}|\neq 0$. Eles serão conjugados se

$$A_{ij}\ B^{ik} = \delta^k_j\ .$$

Introduziremos agora o conceito de distância em nosso espaço V_N. A distância ds entre dois pontos próximos de coordenadas x^i e x^i+dx^i, será dada pela forma diferencial quadrática, dita forma de Riemann

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \ , \qquad (12.1)$$

onde g_{ij} é um tensor de segunda ordem, submetido por agora unicamente à restrição $g = |g_{ij}| \neq 0$. V_N com ds^2 dado por (12.1) é dito um espaço de Riemann.

Notemos que apenas $g_{\underline{ij}} = \frac{1}{2}(g_{ij}+g_{ji})$ contribui para (12.1), já que em geral

$$g_{ij} = \frac{1}{2}\,(g_{ij}+g_{ji}) + \frac{1}{2}(g_{ij}-g_{ji}) = g_{\underline{ij}} + g_{\underset{\vee}{ij}} \quad .$$

A parte antissimétrica $\frac{1}{2}(g_{ij}-g_{ji})dx^i dx^j$ em ds^2 é nula; como isto acontece podemos supor aqui $g_{\underset{\vee}{ij}} = 0$. g_{ij} é chamado tensor fundamental do espaço de Riemann. A forma quadrática $g_{ij}dx^i dx^j$ tem o nome de métrica. É o quadrado do elemento de linha ds.

Exemplo:

O elemento de linha de um espaço euclidiano de três dimensões, referindo a um sistema de eixos cartesianos retangulares, é

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 .$$

Todas as componentes do tensor fundamental são zero exceto as componentes $g_{11}=g_{22}=g_{33}=1$. É claro que a métrica de um espaço euclidiano é positiva por definição, i.e., ds^2 será zero quando $dx^1=dx^2=dx^3=0$, mas só pode tomar valores positivos para todos os outros valores reais de dx^1, dx^2, dx^3.

A teoria especial da relatividade explica o espaço quadrimensional com o elemento de linha ds dado por

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + c^2(dx^4)^2 .$$

Esta métrica, chamada métrica de espaço-tempo, não é por definição positiva, mas é positiva para todas as curvas ao longo das quais x^1, x^2 e x^3 são constantes, e negativa para todas as curvas ao longo das quais x^4 é constante. Assim, ao longo desta última curva a distância entre os pontos próximos não pode ser real. Para que a distância ds entre os pontos vizinhos seja real trocamos a equação (12.1) por

$$ds^2 = eg_{ij}dx^i dx^j, \qquad (12.2)$$

onde o fator e, chamado indicador, toma o valor +1 ou -1. Assim, ds^2 é sempre positivo.

13. - Comprimento de uma Curva

Consideramos a curva $x^i = x(t)$ com o parâmetro t. Da equação (12.2) o comprimento da curva entre dois pontos correspondentes a $t=t_1$ e $t=t_2$ será dado por

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{eg_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt \quad . \qquad (13.1)$$

Se $\frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} = 0$ ao longo de uma curva, os pontos correspondentes a t_1 e t_2 estão a uma distância zero entre si, apesar dos pontos deles não coincidirem. Tal curva se chama nula.

14. - Módulo de um Vetor

O módulo A do vetor contravariante A^i é dado por

$$(A)^2 = e_{(A)}\ g_{ij}A^iA^j \quad , \tag{14.1}$$

onde $e_{(A)}$ é o indicador +1 ou -1 que dá o caráter real a A. O módulo A é invariante.

Aqui é necessário introduzirmos o tensor contravariante conjugado com g_{ij} que podemos escrever convenientemente g^{ij}. De (12.1),

$$g_{ij}g^{ik} = \delta_j^k \quad . \tag{14.2}$$

Agora podemos definir o módulo B do vetor covariante B_i pela equação

$$(B)^2 = e_{(B)}\ g^{ij}B_iB_j \quad , \tag{14.3}$$

onde $e_{(B)}$ é o indicador do vetor B_i e também B é um invariante. O módulo de um vetor é um invariante. Se o módulo de um vetor é zero, o vetor é dito nulo. O vetor tangente a uma curva nula é um vetor nulo.

15. - Tensores Associados

Com a métrica podemos associar objetos covariantes a contravariantes, e vice-versa:

$$A_i = g_{ij}A^j \, , \tag{15.1}$$

$$B^{j} = g^{ij}B_{j} . \qquad (15.2)$$

A relação é recíproca, pois, por exemplo,

$$g^{ij}A_{j} = g^{ij}g_{jk}A^{k} = \delta^{i}_{k}A^{k} = A^{i} .$$

Isto se chama "abaixar o supraíndice" ou "subir o subíndice", respectivamente. Temos

$$e_{(A)}g_{ij}A^{i}A^{j} = e_{(A)}g_{ij}g^{ik}A_{k}g^{j\ell}A_{\ell} = e_{(A)}g^{k\ell}A_{k}A_{\ell} .$$

Os módulos dos vetores associados são iguais. O procedimento de subir e abaixar índices pode ser aplicado também a tensores:

$$A_{i..\ell m}^{\cdot jk} = g_{ri}A^{rjk}_{...\ell m}$$

ou

$$A^{i.kst}_{.r} = g_{jr}g^{\ell s}g^{mt}A^{ijk}_{...\ell m} .$$

A notação do ponto é para indicar o índice que foi abaixado ou levantado, que pode ser omitido quando não houver possibilidade de confusão. Levamos em conta que embora g_{ij} e g^{ij} sejam tensores conjugados, os tensores A_{ij} e A^{ij} não são em geral conjugados.

16.- Ângulo entre Dois Vetores e Ortogonalidade

Definimos o ângulo entre dois vetores de módulo 1 por

$$\cos\theta = g_{ij}A^iB^j = A_jB^j = g^{jk}A_jB_k = A^kB_k \; ; \qquad (16.1)$$

definimos ângulo entre dois vetores genéricos da seguinte forma:

$$\cos\theta = \frac{g_{ij}\,A^iB^j}{\sqrt{e_{(A)}e_{(B)}g_{\ell m}A^{\ell}A^m g_{rs}B^rB^s}} \; . \qquad (16.2)$$

Os vetores A^i e B^j são ortogonais quando

$$g_{ij}A^iB^j = 0 \; . \qquad (16.3)$$

17. - Símbolo de Christoffel

Embora hajamos visto na seção 5 que dx^i/du é sempre um vetor contravariante, suas derivadas d^2x^i/du^2 não formam um vetor cujas componentes em qualquer outro sistema sejam as correspondentes derivadas segundas. Depois, demonstramos que as derivadas parciais de um invariante formam as componentes de um vetor covariante; mas as derivadas de um vetor não formam um tensor cujas componentes sejam em qualquer outro sistema as correspondentes derivadas do vetor transformado. Nosso propósito agora é construir expressões que obriguem as derivadas de um ten sor a serem sempre as componentes de um tensor. Para tal, precisamos de duas funções do tensor fundamental g_{ij}, os símbolos de Christoffel de primeira e segunda classe respectivamente definidos por

$$[ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \qquad (17.1)$$

e

$$\left\{ {\ell \atop ij} \right\} = g^{\ell k}[ij,k] . \qquad (17.2)$$

Veremos que os símbolos $[ij,k]$ e $\left\{ {\ell \atop ij} \right\}$ não são tensores.

As definições mostram que os símbolos são simétricos com respeito aos índices i,j . A multiplicação interna (17.2) por $g_{\ell m}$ dá

$$[ij,m] = g_{\ell m}\left\{ {\ell \atop ij} \right\} . \qquad (17.3)$$

De (17.1) se deduz imediatamente que

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = [ij,k]+[kj,i] . \qquad (17.4)$$

Agora desejamos expressar as derivadas de g^{ik} em função dos símbolos de Christoffel e assim diferenciamos a equação (14.2) com respeito a x^ℓ e obtemos

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^\ell} g_{ij} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\ell} g^{ik} = 0 ;$$

multiplicando internamente esta equação por g^{jm} teremos

$$\frac{\partial g^{mk}}{\partial x^{\ell}} + g^{jm} g^{ik} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\ell}} = 0 \ .$$

Substituindo em (17.4) e (17.2) obteremos finalmente

$$\frac{\partial g^{mk}}{\partial x^{\ell}} = -g^{mi} \left\{ {k \atop i\ell} \right\} - g^{ki} \left\{ {m \atop i\ell} \right\} \ . \tag{17.5}$$

Agora deduziremos uma expressão útil para $\left\{ {i \atop ij} \right\}$. Diferenciamos o determinante $g = |g_{ij}|$ lembrando que $g^{\ell m}$ é o adjunto de $g_{\ell m}$ neste determinante e obtemos

$$\frac{\partial g}{\partial x^{j}} = g^{\ell m}\, g\, \frac{\partial g_{\ell m}}{\partial x^{j}} \ ;$$

de (17.1) e (17.2) e usando a propriedade de simetria de g_{ij} teremos

$$\left\{ {i \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{m}} \right) = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^{j}} \ .$$

Assim

$$\left\{ {i \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{j}} = \frac{\partial}{\partial x^{j}} \{\log \sqrt{g}\} \ . \tag{17.6}$$

Como o g não é invariante não podemos deduzir que $\left\{ {i \atop ij} \right\}$ seja um vetor covariante. Se g é negativo a (17.6) mudará para

$$\left\{ {i \atop ij} \right\} = \frac{\partial}{\partial x^{j}} \{\log \sqrt{-g}\}.$$

18. - Lei de Transformação dos Símbolos de Christoffel

O tensor fundamental g_{ij}, sendo covariante, transforma-se segundo a equação

$$\bar{g}_{\ell m} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\ell}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij} \quad . \tag{18.1}$$

Ao diferenciar esta equação em relação a $\bar{x}^n$ teremos

$$\frac{\partial \bar{g}_{\ell m}}{\partial \bar{x}^n} = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\ell}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^\ell \partial \bar{x}^n}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} g_{ij} +$$

$$+ \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^\ell\, \partial \bar{x}^m\, \partial \bar{x}^n} g_{ij} \quad .$$

Utilizando as propriedades do tensor fundamental e algumas contas chegamos à seguinte equação, que dá a transformação do símbolo de Christoffel:

$$\overline{[\ell m,n]} = [ij,k]\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\ell}\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^n} + g_{ij}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n}\frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^\ell \partial \bar{x}^m} \quad ; \tag{18.2}$$

a barra sobre o símbolo de Christoffel indica que ele está no sistema de coordenadas $\bar{x}^i$ com relação ao seu tensor fundamental $\bar{g}_{ij}$. A lei de transformação do tensor fundamental contravariante é dada por

$$\bar{g}^{np} = g^{rs} \frac{\partial \bar{x}^n}{\partial x^r} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} . \qquad (18.3)$$

Com a multiplicação interna de ambos os termos (18.2) pelo termo correspondente da (18.3), encontraremos a seguinte relação

$$\overline{\{{}^{p}_{\ell m}\}} = \{{}^{s}_{ij}\} \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^s} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\ell} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} + \frac{\partial \bar{x}^p}{\partial x^j} \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^\ell \partial \bar{x}^m} . \qquad (18.4)$$

As equações (18.2) e (18.4) são as leis de transformação dos símbolos de Christoffel e mostram que aqueles não são tensores. No entanto, no caso muito especial das transformações lineares, i.e., $\partial^2 x^j / \partial \bar{x}^\ell \partial \bar{x}^m = 0$, os símbolos de Christoffel se transformam como tensores. A multiplicação interna de (18.4) por $\partial x^r / \partial \bar{x}^p$ dá

$$\frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^\ell \partial \bar{x}^m} = \overline{\{{}^{p}_{\ell m}\}} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^p} - \{{}^{r}_{ij}\} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\ell} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^m} . \qquad (18.5)$$

Esta equação é muito importante pois expressa a segunda derivada parcial de x^r com relação $\bar{x}^s$ em função das primeiras derivadas e dos símbolos de Christoffel de segunda classe.

19. - Diferenciação Covariante de Vetores

Investigaremos o caráter tensorial, se existe, das derivadas parciais de um vetor contravariante. Começaremos da lei de transformação

$$A^{k} = \bar{A}^{i} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{i}} \quad . \qquad (19.1)$$

Derivando em relação a x^{j} obtemos

$$\frac{\partial A^{k}}{\partial x^{j}} = \frac{\partial \bar{A}^{i}}{\partial \bar{x}^{n}} \frac{\partial \bar{x}^{n}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{i}} + \bar{A}^{i} \frac{\partial^{2} x^{k}}{\partial \bar{x}^{i} \partial \bar{x}^{n}} \frac{\partial \bar{x}^{n}}{\partial x^{j}} \quad .$$

Devido ao último termo do segundo membro, esta expressão não é um tensor . Para obtermos um tensor que caracteriza as derivadas parciais, eliminamos as derivadas parciais de segunda ordem mediante a equação (18.5) e teremos

$$\frac{\partial A^{k}}{\partial x^{j}} = \frac{\partial \bar{A}^{i}}{\partial \bar{x}^{n}} \frac{\partial \bar{x}^{n}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{i}} + \bar{A}^{i} \frac{\partial \bar{x}^{n}}{\partial x^{j}} [\overline{\left\{ {p \atop in} \right\}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{p}} - \left\{ {k \atop rs} \right\} \frac{\partial x^{r}}{\partial \bar{x}^{i}} \frac{\partial x^{s}}{\partial \bar{x}^{n}}] \quad .$$

Em virtude da equação (19.1) e trocando apropriadamente os índices mudos , a equação acima se reduz a

$$\frac{\partial A^{k}}{\partial x^{j}} + \left\{ {k \atop rj} \right\} A^{r} = [\frac{\partial \bar{A}^{i}}{\partial \bar{x}^{n}} + \overline{\left\{ {i \atop rn} \right\}} \bar{A}^{r}] \frac{\partial \bar{x}^{n}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{i}} \quad .$$

Introduzimos a notação de ponto e vírgula:

$$A^{k}_{;j} = \frac{\partial A^{k}}{\partial x^{j}} + \left\{ {k \atop rj} \right\} A^{r} \quad . \qquad (19.2)$$

A equação anterior se escreve

$$A^{k}_{;j} = \bar{A}^{i}_{;m} \frac{\partial \bar{x}^{m}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{k}}{\partial \bar{x}^{i}} \quad .$$

Da equação (8.3) é, pois, óbvio que $A^{k}_{;j}$ é um tensor misto de segunda ordem, a derivada covariante de A^{k} com relação a x^{j}.

Para estabelecer a entidade correspondente para vetores covariantes, podemos começar diferenciando a lei de transformação

$$\bar{A}_i = A_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \tag{19.3}$$

com relação a $\bar{x}^\ell$. Isto dá

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^\ell} = \frac{\partial A_j}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\ell} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} + A_j \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^\ell} \; .$$

Analogamente, por (18.5) eliminamos as derivadas parciais de segunda ordem. Além do mais trocamos os índices nulos convenientemente ,e ao substituir em (19.3) temos

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^\ell} - \overline{\left\{ {m \atop i\ell} \right\}} \bar{A}_m = \left[\frac{\partial A_j}{\partial x^n} - \left\{ {r \atop jn} \right\} A_r\right] \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^\ell} \quad ;$$

com a notação de ponto e vírgula

$$A_{j;n} = \frac{\partial A_j}{\partial x^n} - \left\{ {r \atop jn} \right\} A_r \; . \tag{19.4}$$

Podemos escrever a equação anterior em forma análoga (8.3) à da transformação de tensores de segunda ordem covariantes

$$\bar{A}_{i;\ell} = A_{j;n} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^\ell} \; ,$$

demonstrando que $A_{j;n}$ é um tensor covariante de segunda ordem, chamado derivada covariante de A_j com relação a x^n.

Num espaço euclidiano de N dimensões, referido a coordenadas cartesianas retangulares, as componentes do vetor fundamental g_{ij} são zero, exceto $g_{11} = g_{22} = \ldots = g_{NN} = 1$. As sim todos os símbolos de Christoffel são zero e assim a diferenciação covariante se reduz à diferenciação parcial ordinária. É necessário observar também que os símbolos de Christoffel não desaparecem todos num espaço euclidiano referido, por exemplo, às coordenadas polares esféricas.

Podemos construir o invariante $A^j_{;j}$ por contração. Aplicando (17.6) obtemos

$$A^j_{;j} = \frac{\partial A^j}{\partial x^j} + \{{}^{\,j}_{rj}\}\, A^r = \frac{\partial A^j}{\partial x^j} + A^r \frac{\partial}{\partial x^r} (\log \sqrt{g}) \quad ,$$

i.e.,

$$A^j_{;j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^r} (\sqrt{g}\, A^r) \quad . \qquad (19.5)$$

Este invariante chama-se divergência do vetor contravariante A^i e se designa muitas vezes por div A^i. A divergência de um vetor covariante A_i se define por

$$\text{div}\, A_i = g^{jk} A_{j;k} \quad . \qquad (19.6)$$

As derivadas parciais de um invariante formam as componentes de um vetor covariante. Ampliamos esta definição de diferenciação covariante a invariantes, chamando a derivada parcial ordinária de derivada covariante, i.e., do invariante I definido por

$$I_{,i} = \frac{\partial I}{\partial x^i} = I_{;i} \ .$$

Como $I_{,i}$ é um vetor covariante, encontramos de (19.4) que sua derivada covariante com relação a x^j será dada por

$$(I_{;i})_{;j} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^i \partial x^j} - \{{r \atop ij}\} \frac{\partial I}{\partial x^r} \quad . \tag{19.7}$$

Assim $(I_{;i})_{;j} = (I_{;j})_{;i}$, i.e., a dupla diferenciação covariante de grandezas invariantes é comutativa.

Podemos formar a divergência do vetor covariante $I_{;i}$; denominamos esta "laplaciano" de I e escrevemos $\nabla^2 I$. Temos então

$$\nabla^2 I = g^{jk}(I_{;j})_{;k} = g^{jk}\left(\frac{\partial^2 I}{\partial x^j \partial x^k} - \{{r \atop jk}\} \frac{\partial I}{\partial x^r}\right) \quad .$$

20.- Diferenciação Covariante de Tensores

Partamos do tensor $A^i_{\ j}$. Este tensor tem um índice contravariante e outro índice covariante. A multiplicação interna da lei de transformação (8.3) por $\partial x^m/\partial \bar{x}^i$ dá

$$\bar{A}^i_j \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} = A^m_\ell \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} \quad . \tag{20.1}$$

Diferenciemos com relação a $\bar{x}^k$, e usemos a equação (18.5) para eliminar as derivadas parciais de segunda ordem e obtermos

$$\frac{\partial \bar{A}^i_j}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} + \bar{A}^i_j \left[\{{\bar{p} \atop ik}\} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^p} - \{{m \atop rs}\} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\right] =$$

$$= \frac{\partial A^m_\ell}{\partial x^t} \frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^j} + A^m_\ell \left[\{{\bar{p} \atop jk}\} \frac{\partial x^\ell}{\partial \bar{x}^p} - \{{\ell \atop rs}\} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^k}\right] \quad .$$

Utilizando a equação (20.1) e mudando convenientemente o índices mudos a equação acima se escreve

$$\left[\frac{\partial\bar{\Lambda}^i_j}{\partial\bar{x}^k} + \bar{\Lambda}^n_j \overline{\left\{{i \atop nk}\right\}} - \bar{\Lambda}^i_p \overline{\left\{{p \atop jk}\right\}}\right]\frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^i} =$$

$$= \left[\frac{\partial\Lambda^m_\ell}{\partial x^t} + \Lambda^r_\ell \left\{{m \atop rt}\right\} - \Lambda^m_r \left\{{r \atop \ell t}\right\}\right] \frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^\ell}{\partial\bar{x}^j} .$$

Introduzindo a notação de ponto e vírgula temos que

$$A^m_{\ell;t} = \frac{\partial\Lambda^m_\ell}{\partial x^t} + \left\{{m \atop rt}\right\} \Lambda^r_\ell - \left\{{r \atop \ell t}\right\} \Lambda^m_r \quad . \qquad (20.2)$$

Com esta nova notação a equação anterior toma a seguinte forma :

$$\bar{A}^i_{j;k} \frac{\partial x^m}{\partial\bar{x}^i} = A^m_{\ell;t} \frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^k}\frac{\partial x^\ell}{\partial\bar{x}^j} \quad ;$$

multiplicando internamente esta equação pelo termo $\partial\bar{x}^r/\partial x^m$, teremos

$$\bar{\Lambda}^r_{j;k} = A^m_{\ell;t} \frac{\partial\bar{x}^r}{\partial x^m}\frac{\partial x^\ell}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^t}{\partial\bar{x}^k} \quad .$$

$A^m_{\ell;t}$ é um tensor de terceira ordem do tipo indicado pelos índices. Chamamos este tensor de derivada covariante de A^m_ℓ com relação a x^t.

A derivada covariante de A^m_ℓ contêm três termos; 1- a derivada parcial; 2- um termo com sinal positivo análogo ao existente na derivada covariante de um vetor contravariante e 3 - um termo de sinal negativo análogo ao existente na derivada covariante de um vetor covariante.

Isto sugere que a expressão

$$A^{u_1\ldots u_s}_{r_1\ldots r_p;n} = \frac{\partial A^{u_1\ldots u_s}_{r_1\ldots r_p}}{\partial x^n} + \sum_{\alpha=1}^{s} \{{}^{u_\alpha}_{kn}\}\, A^{u_1\ldots u_{\alpha-1}k\,u_{\alpha+1}\ldots u_s}_{r_1\ldots r_p}$$

$$- \sum_{\beta=1}^{p} \{{}^{\ell}_{r_\beta n}\}\, A^{u_1\ldots u_s}_{r_1\ldots r_{\beta-1}\ell\, r_{\beta+1}\ldots r_p} \quad , \qquad (20.3)$$

é um tensor chamado derivada covariante de $A^{u_1 u_2\ldots u_s}_{r_1 r_2\ldots r_p}$ em relação a x^n. Ao referirmos às equações (17.3), (17.4), (17.5) e (20.3) deduzimos que

$$g_{ij;k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \{{}^{\ell}_{ik}\}\, g_{\ell j} - \{{}^{\ell}_{jk}\}\, g_{i\ell} = 0 \, , \qquad (20.4)$$

$$g^{ij}{}_{;k} = \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} + \{{}^{i}_{\ell k}\}\, g^{\ell j} + \{{}^{j}_{\ell k}\}\, g^{i\ell} = 0 \quad , \qquad (20.5)$$

e que

$$\delta^i_{j;k} = \frac{\partial \delta^i_j}{\partial x^k} + \{{}^{i}_{\ell k}\}\, \delta^{\ell}_j - \{{}^{\ell}_{jk}\}\delta^i_{\ell} = 0 \quad . \qquad (20.6)$$

As derivadas covariantes de tensores são novamente tensores. Indicamos estas derivadas covariantes de segunda ordem agregando outro índice sem ponto e vírgula adicionais, por exemplo, $A_{i;jk}$ é a derivada covariante de $A_{i;j}$ em relação a x^k.

21. - Lei de Diferenciação Covariante

As derivadas covariantes obedecem às seguintes leis:

1) a derivada covariante da soma (ou diferença) de dois tensores é a soma (ou diferença) de suas derivadas covariantes. Esta lei se deduz imediatamente da equação (17.3) .

2) a derivada covariante de um produto externo (ou interno) de dois tensores é igual à soma dos dois termos obtidos por multiplicação externa (ou interna) de cada tensor com a derivada covariante do outro tensor. Considere como exemplo desta lei o seguinte: sendo $C_{ij}{}^{k} = A_{ij}B^{k}$. Derivando $C_{ij}{}^{k}$ temos

$$(C_{ij}{}^{k})_{;m} = \frac{\partial}{\partial x^{m}} C_{ij}{}^{k} + \{{}^{k}_{mr}\}C_{ij}{}^{r} - \{{}^{r}_{im}\}C_{rj}{}^{k} - \{{}^{r}_{jm}\}C_{ir}{}^{k} \;;$$

igualmente ,

$$(A_{ij}B^{k})_{;m} = \frac{\partial}{\partial x^{m}}(A_{ij}B^{k}) + \{{}^{k}_{mr}\}A_{ij}B^{r} - \{{}^{r}_{im}\}A_{rj}B^{k} - \{{}^{r}_{jm}\}A_{ir}B^{k} \;,$$

$$(A_{ij}B^{k})_{;m} = \left(\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^{m}} - \{{}^{r}_{im}\}A_{rj} - \{{}^{r}_{jm}\}A_{ir}\right)B^{k} + A_{ij}\left(\frac{\partial B^{k}}{\partial x^{m}} + \{{}^{k}_{mr}\}B^{r}\right) \;;$$

portanto

$$(A_{ij}B^{k})_{;m} = A_{ij;m}B^{k} + A_{ij}B^{k}{}_{;m} \;.$$

No caso da contração dos índices j e k teremos

$$(A_{ij}B^{j})_{;m} = \frac{\partial}{\partial x^{m}}(A_{ij}B^{j}) + \{{}^{j}_{mr}\}A_{ij}B^{r} - \{{}^{r}_{im}\}A_{rj}B^{j} - \{{}^{r}_{jm}\}A_{ir}B^{j} \;;$$

trocando convenientemente os índices mudos e usando a simetria nos símbolos de Christoffel obtemos

$$(A_{ij}B^{j})_{;m} = \frac{\partial}{\partial x^{m}}(A_{ij}B^{j}) - \{{}^{r}_{im}\}A_{rj}B^{j} \;,$$

que é a lei de derivação covariante de um vetor covariante.A derivada covariante de $(A_{ij}B^{j})_{;m}$ se comporta como $C_{i;m}$.

22. - Derivada Intrínseca

Consideremos o tensor $A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p}$ cujas componentes são funções de t ao longo de uma curva $x^i = x^i(t)$. A derivada intrínseca se define por

$$\frac{D A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p}}{dt} = A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p ; k} \frac{dx^k}{dt} . \qquad (22.1)$$

A derivada intrínseca é um tensor de mesma ordem e tipo que o tensor original.

A derivada intrínseca correspondente ao invariante I é dado por

$$\frac{DI}{dt} = I_{;k} \frac{dx^k}{dt} = \frac{\partial I}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt} = \frac{dI}{dt} .$$

Podemos dizer então daí que a derivada intrínseca de um invariante coincide com a sua derivada total.

As derivadas intrínsecas de ordem superior se definem facilmente, por

$$\frac{D^2 A^i_j}{dt^2} = \frac{D}{dt} \left(\frac{DA^i_j}{dt}\right) = \left(A^i_{j;k} \frac{dx^k}{dt}\right)_{;\ell} \frac{dx^\ell}{dt} .$$

De (19.2), (19.4), (20.4), (20.5) e (20.6) calculamos que

$$\frac{DA^k}{dt} = \frac{dA^k}{dt} + \{{}^{k}_{rj}\}\, A^r \frac{dx^j}{dt} \quad , \tag{22.2}$$

$$\frac{DA_k}{dt} = \frac{dA_k}{dt} - \{{}^{r}_{kj}\}\, A_r \frac{dx^j}{dt} \quad , \tag{22.3}$$

e que

$$\frac{Dg_{ij}}{dt} = \frac{Dg^{ij}}{dt} = \frac{D\delta^i_j}{dt} = 0 \quad . \tag{22.4}$$

As leis das derivadas covariantes, por definição, são válidas também para as derivadas intrínsecas.

23. - Geodésicas

No espaço euclidiano tridimensional, o caminho mais curto entre dois pontos é a reta que une estes dois pontos. Nosso propósito é generalizar este conceito fundamental para os espaços de Riemann. Seja a curva c, cujas coordenadas são $x^i=x^i(t)$, que liga os dois pontos P_0 e P_1 cujas coordenadas são $x^i(t_0)$ e $x^i(t_1)$, respectivamente. A distância s entre os dois pontos P_0 e P_1 sobre a curva c é

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{e g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt \quad . \tag{23.1}$$

Consideraremos também todas as curvas que passam pelos pontos fixos P_0 e P_1. Qualquer destas curvas, para as quais a distância P_0P_1, medida sobre a curva é estacionária, se denomina uma geodésica. Podemos obter as equações diferenciais das geodésicas aplicando as equações de Euler, resultados conhecidos no cálculo de variações.

Definimos a geodésica em função da curva que passa por dois pontos, mas esta geodésica pode não ser única, a não ser que os dois pontos estejam suficientemente próximos um do outro. A unicidade depende da topografia de V_N. Por exemplo, existe uma geodésica mínima que passa por dois pontos numa esfera, exceto quando os dois pontos estão nos extremos de um diâmetros : neste caso, todos os círculos máximos que passem pelos dois pontos são geodésicas.

Para um espaço euclidiano de coordenadas cartesianas retangulares, os símbolos de Christoffel são zero. Daqui tiramos que as geodéricas são dadas por $d^2x^\ell/ds^2=0$, cuja solução é $x^\ell=A^\ell s+B^\ell$ onde A^ℓ e B^ℓ são vetores constantes, i.e., as geodésicas são linhas retas.

24. - Geodésicas Nulas

As equações (13.1) expressam que, quando s é fixo,

$$g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} = e \qquad (24.1)$$

sobre qualquer segmento de uma curva que não seja nulo. Ao diferenciarmos obtemos

$$\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right) = \frac{D}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right) = 2g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{D}{ds}\left(\frac{dx^j}{ds}\right) = 0 .$$

Daqui obtemos

$$g_{ij}\frac{d^2x^i}{ds^2} + [ik,j]\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

e

$$\frac{D}{ds}\left(\frac{dx^\ell}{ds}\right) \equiv \frac{d^2x^\ell}{ds^2} + \left\{{\ell \atop ik}\right\}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0 \quad ;$$

deduzimos desta última que o invariante $\frac{d}{ds}\left(g_{ij}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds}\right)$ é zero em todos os pontos da geodésica. Assim o indicador e não pode trocar ao longo de uma geodésica e assim ,se o vetor tangente não é nulo em um ponto não poderá ser nulo em qualquer outro ponto da geodésica.Por outro lado,se a direção inicial é nula,a geodésica será nula e é naturalmente impossível introduzir como parâmetro a distância-arco. Em lugar dele, dizemos agora que uma geodésica nula $x^i = x^i(t)$ é uma solução das equações

$$\frac{d^2x^\ell}{dt^2} + \left\{{\ell \atop ik}\right\}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0 \quad . \tag{24.2}$$

25. - Coordenadas Geodésicas

É sempre possível escolher o sistema de coordenadas de forma que todos os símbolos de Christoffel sejam nulos num ponto determinado. Consideremos um sistema geral de coordenadas x^i cujos valores num ponto determinado P_0 são $x^i_{(0)}$; introduziremos um novo sistema de coordenadas $\bar{x}^i$ dadas pelas equações

$$\bar{x}^i = x^i - x^i_0 + \frac{1}{2}\{^{\ i}_{mn}\}_{(0)}(x^m - x^m_{(0)})(x^n - x^n_{(0)}) \quad . \tag{25.1}$$

O índice (0) aplicado a qualquer entidade caracteriza seu valor no ponto P_0. Os parênteses são utilizados para destacar que este subíndice carece de significado tensorial e que a ele não se aplica a convenção de soma. A diferenciação com relação a x^j dá

$$\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} = \delta^i_j + \{^{\ i}_{jn}\}_{(0)}(x^n - x^n_{(0)}) \quad . \tag{25.2}$$

Daqui, $\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{(0)} = \delta^i_j$. Como o jacobiano $\left|\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{(0)}\right| \neq 0$, isto é, diferente de zero, a transformação (25.1) é possível na proximidade de P_0. Multiplicando internamente a (25.2) por $\partial x^j / \partial \bar{x}^k$ obtemos

$$\delta^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k} + \{^{\ i}_{jn}\}_{(0)}(x^n - x^n_{(0)}) \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \quad .$$

Diferenciando esta equação com relação a $\bar{x}^h$ obtemos

$$0 = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^h \partial \bar{x}^k} + \{^{\ i}_{jn}\}_{(0)} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^h} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} + \{^{\ i}_{jn}\}_{(o)}(x^n - x^n_{(o)}) \frac{\partial^2 x^j}{\partial \bar{x}^h \partial \bar{x}^k} \quad .$$

Assim, em P_0

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\right)_{(0)} = \delta^i_k \ ,$$

$$\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^h \partial \bar{x}^k}\right)_{(o)} = -\left\{{i \atop jn}\right\}_{(o)} \delta^n_h \delta^j_k = -\left\{{i \atop kh}\right\}_{(o)} \quad .$$

Agora substituindo este valor em (18.4) e derivando, temos

$$\left\{{\bar{p} \atop \ell m}\right\}_{(0)} = \left\{{s \atop ij}\right\}_{(0)} \delta^p_s \delta^i_\ell \delta^j_m - \delta^p_j \left\{{j \atop \ell m}\right\}_{(0)} \quad ,$$

que nos dá

$$\left\{{\bar{p} \atop \ell m}\right\}_{(0)} = 0 \quad .$$

Assim, podemos sempre escolher um sistema de coordenadas, chamadas coordenadas geodésicas, de modo que os símbolos de Christoffel sejam zero num dado ponto, chamado polo. Notemos que a transformação (25.1) não é o único método para obtemos coordenadas geodésicas.

Neste sistema, as derivadas covariantes se reduzem às correspondentes derivadas parciais no polo, porque neste ponto todos os símbolos de Christoffel são zero. Mencionamos antes, na seção 9, o fato que se um tensor é zero em um sistema de coordenadas, será zero em todo sistema de coordenadas porque a lei de transformação de tensores é linear. Estabelecer uma equação tensorial implica muitas vezes em pesadas operações algébricas. No qual se elimina trabalho provando primeiro a equação com relação a um sistema de coordenadas geodésicas em seu polo. Deduz-se que a equação é válida para todos os sistemas de coordenadas neste ponto. Então, se este ponto é geral, a equação é válida em todos os pontos de V_N.

26. - Paralelismo

Uma propriedade importante aqui é que: um campo de vetores paralelos A_i se obtém para todo o espaço euclidiano (coordenado cartesianamente) quando as componentes A_i são constantes. Expressamos isto analiticamente na forma $dA_i/dt = 0$ ou $\partial A_i/\partial x^j = 0$; tendo que os símbolos de Christoffel são nulos, podemos escrever esta equação de um modo equivalente na forma tensorial $DA_i/dt = 0$ ou $A_{i;j} = 0$. Podemos também definir um campo de vetores $A_i(x)$ paralelos ao longo de uma curva $x^i=x^i(t)$, ainda no espaço euclidiano coordenando cartesianamente; neste caso o campo satisfaz a equação $DA_i/dt = 0$. Isto sugere duas maneiras de generalizar para o espaço de Riemann os conceitos de paralelismo que acabamos de ver. Posteriormente veremos que os espaços de Riemann em geral não admitem, no espaço inteiro, campos vetoriais paralelos; em outras palavras, não admitem campos vetoriais $A_i(x)$ para os quais $A_{i;j}$ seja nulo em todos os pontos. Entretanto, ainda podemos definir no espaço curvo a derivada intrínseca DA_i/dt ao longo de uma curva, o que nos permitirá definir o paralelismo ao longo dessa curva, i.e., $DA_i/dt = 0$.

Formalmente, os vetores A_i constituem um campo de vetores paralelos ao longo da curva $x^i = x^i(t)$ se A_i é uma solu ção das equações diferenciais

$$\frac{DA_i}{dt} = \frac{dA_i}{dt} - \left\{ {\ell \atop ik} \right\} A_\ell \frac{dx^k}{dt} = 0 . \qquad (26.1)$$

Estas equações formam um conjunto de N equações diferenciais de primeira ordem, e consequentemente, se o vetor A_i é dado em qualquer ponto da curva, se determina de um modo unívoco em todos os demais pontos da curva. Podemos obter também um campo de vetores paralelos a um vetor contravariante, por propagação paralela ao longo da curva. Posto que

$$\frac{DA^i}{dt} = \frac{D}{dt} (g^{ij} A_j) = g^{ij} \frac{DA_j}{dt} ,$$

podemos escrever as condições de paralelismo ao longo de uma curva na forma contravariante

$$\frac{DA^i}{dt} = \frac{dA^i}{dt} + \left\{ {i \atop jk} \right\} A^j \frac{dx^k}{dt} = 0 . \qquad (26.2)$$

Observamos também que os vetores tangentes unitários formam um campo de vetores paralelos ao longo de uma geodésica.

27. - Covariância e Paralelismo

Mediante o conceito de paralelismo podemos comprovar que o segundo membro da equação (20.3) constitui um tensor.

Consideremos uma curva C determinada pelas equações $x^i = x^i(t)$. Escolhemos p campos vetoriais contravariantes arbitrários $X^i_{(1)}, X^i_{(2)}, \ldots, X^i_{(p)}$, cada um paralelo ao longo da curva C e s campos vetoriais covariantes arbitrários $Y_{(1)i}, Y_{(2)i}, \ldots, Y_{(s)i}$, que são também paralelos ao longo da curva C. Então temos que

$$\frac{dX^i_{(\beta)}}{dt} + \left\{ {i \atop jk} \right\} X^j_{(\beta)} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (\beta = 1,2,\ldots,p) \qquad (27.1)$$

e

$$\frac{dY_{(\alpha)i}}{dt} + \left\{ {j \atop ik} \right\} Y_{(\alpha)j} \frac{dx^k}{dt} = 0 \quad (\alpha = 1,2,\ldots,s). \quad (27.2)$$

Estabelecemos agora o invariante I da seguinte forma:

$$I \equiv A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p} X^{r_1}_{(1)} X^{r_2}_{(2)} \ldots X^{r_p}_{(p)} Y_{(1)u_1} Y_{(2)u_2} \ldots Y_{(s)u_s} \;;$$

temos que a derivada deste invariante com respeito a t é também um invariante

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A^{u_1 \ldots u_s}_{r_1 \ldots r_p} X^{r_1}_{(1)} X^{r_2}_{(2)} \ldots X^{r_p}_{(p)} Y_{(1)u_1} Y_{(2)u_2} \ldots Y_{(s)u_s}\right) \;;$$

efetuando a derivada nos termos dentro dos parênteses e trocando os índices mudos convenientemente, temos

$$\frac{DI}{dt} = X^{r_1}_{(1)} \cdots X^{r_p}_{(p)} Y_{(1)u_1} \cdots Y_{(s)u_s} \left[\frac{dA^{u_1 \cdots u_s}_{r_1 \cdots r_p}}{dt} + \right.$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{s} A^{u_1 \cdots u_{\alpha-1} k u_{\alpha+1} \cdots u_s}_{r_1 \cdots r_p} \left\{ {u_\alpha \atop kn} \right\} \frac{dx^n}{dt} +$$

$$\left. - \sum_{\beta=1}^{p} A^{u_1 \cdots u_s}_{r_1 \cdots r_{\beta-1} \ell\, r_{\beta+1} \cdots r_p} \left\{ {\ell \atop r_\beta n} \right\} \frac{dx^n}{dt} \right] .$$

Deduzimos da lei do quociente que a expressão entre parênteses do segundo membro desta equação é um tensor que chamamos derivada intrínseca e designamos por $DA^{u_1 \cdots u_s}_{r_1 \cdots r_p}/dt$. Deduzimos imediatamente que

$$\frac{DA^{u_1 \cdots u_s}_{r_1 \cdots r_p}}{dt} = \frac{dx^n}{dt} \left[\frac{\partial A^{u_1 \cdots u_s}_{r_1 \cdots r_p}}{\partial x^n} + \sum_{\alpha=1}^{s} A^{u_1 \cdots u_{\alpha-1} K\, n_{\alpha+1} \cdots u_s}_{r_1 \cdots r_p} \left\{ {u_\alpha \atop Kn} \right\} + \right.$$

$$\left. - \sum_{\beta=1}^{p} A^{u_1 \cdots u_s}_{r_1 \cdots r_{\beta-1} \ell r_{\beta+1} \cdots r_p} \left\{ {\ell \atop r_\beta n} \right\} \right] .$$

A expressão entre colchetes é um tensor, que designamos por $A^{u_1 \cdots u_s}_{r_1 \cdots r_p ; n}$ e que chamamos derivada covariante.

28. - Tensor de Riemann - Christoffel

Iremos agora analisar o problema da comutatividade em relação à diferenciação covariante. Iniciaremos através da derivada covariante dum vetor covariante arbitrário A_j. Dele,

$$A_{j;n} = \frac{\partial A_j}{\partial x^n} - \{{}^{\ell}_{jn}\}A_\ell \ .$$

Fazendo outra derivação covariante sobre esta expressão obtemos

$$A_{j;np} = \frac{\partial}{\partial x^p}(A_{j;n}) - \{{}^{\ell}_{jp}\}A_{\ell;n} - \{{}^{\ell}_{np}\}A_{j;\ell}$$

$$= \frac{\partial^2 A_j}{\partial x^n \partial x^p} - \{{}^{\ell}_{jn}\}\frac{\partial A_\ell}{\partial x^p} - A_\ell \frac{\partial}{\partial x^p}\{{}^{\ell}_{jn}\} - \{{}^{\ell}_{jp}\}\frac{\partial A_\ell}{\partial x^n}$$

$$+ \{{}^{\ell}_{jp}\}\{{}^{k}_{\ell n}\}A_k - \{{}^{\ell}_{np}\}\frac{\partial A_j}{\partial x^\ell} + \{{}^{\ell}_{np}\}\{{}^{k}_{j\ell}\}A_k \ .$$

Calculamos $A_{j;np}$. Se calcularmos $A_{j;pn}$, que é só trocar os índices e mudando convenientemente os índices mudos e fizermos a diferença entre $A_{j;np}$ e $A_{j;pn}$ obtemos

$$A_{j;np} - A_{j;pn} = [\frac{\partial}{\partial x^n}\{{}^{\ell}_{jp}\} - \frac{\partial}{\partial x^p}\{{}^{\ell}_{jn}\} + \{{}^{\ell}_{ns}\}\{{}^{s}_{jp}\} - \{{}^{\ell}_{ps}\}\{{}^{s}_{jn}\}]A_\ell \ .$$

Como o vetor A_ℓ é arbitrário, concluimos utilizando a lei do quociente que a expressão entre colchetes é um tensor misto de quarta ordem, de primeira ordem contravariante e terceira ordem covariante. Usamos a notação

$$R^{\ell}_{jnp} = \frac{\partial}{\partial x^n}\left\{{\ell \atop jp}\right\} - \frac{\partial}{\partial x^p}\left\{{\ell \atop jn}\right\} + \left\{{\ell \atop ns}\right\}\left\{{s \atop jp}\right\} - \left\{{\ell \atop ps}\right\}\left\{{s \atop jn}\right\} . \qquad (28.1)$$

R^{ℓ}_{jnp} é um tensor de quarta ordem, chamado tensor de Riemann - Christoffel, sendo constituido exclusivamente pelo tensor fundamental g_{ij} e suas derivadas até a segunda ordem inclusive. Este tensor independe da escolha do vetor A_{ℓ}. Com a notação vista acima podemos utilizar o tensor de Riemann -Christoffel para escrever o duplo rotacional covariante do vetor,

$$A_{j;np} - A_{j;pn} = R^{\ell}_{jnp}\, A_{\ell} . \qquad (28.2)$$

Quando o tensor de Riemann-Christofell é identicamente nulo, temos a condição necessária e suficiente para podermos dizer que a derivação covariante de todos os vetores seja comutativa.

Observamos também que

$$R^{\ell}_{jnp} = -R^{\ell}_{jpn} . \qquad (28.3)$$

Isto significa que o tensor R^{ℓ}_{jnp} é antisimétrico em relação aos sub-índices p e n.

29. - Tensor Covariante de Curvatura

Introduziremos agora uma grandeza que iremos definir em função do tensor fundamental e do tensor de Riemann-Christoffel, que é dada por

$$R_{rjnp} = g_{r\ell} R^{\ell}_{jnp} . \tag{29.1}$$

Esta grandeza, nós a chamamos tensor covariante de curvatura. Expressaremos esta grandeza em função dos símbolos de Christoffel da seguinte forma:

$$R_{rjnp} = \frac{\partial}{\partial x^n} \left[g_{r\ell} \left\{ {\ell \atop jp} \right\} \right] - \frac{\partial g_{r\ell}}{\partial x^n} \left\{ {\ell \atop jp} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^p} \left[g_{r\ell} \left\{ {\ell \atop jn} \right\} \right] +$$

$$+ \frac{\partial g_{r\ell}}{\partial x^p} \left\{ {\ell \atop jn} \right\} + g_{r\ell} \left\{ {\ell \atop ns} \right\} \left\{ {s \atop jp} \right\} - g_{r\ell} \left\{ {\ell \atop ps} \right\} \left\{ {s \atop jn} \right\} .$$

Esta equação se reduz a

$$R_{rjnp} = \frac{\partial}{\partial x^n} [jp,r] - \frac{\partial}{\partial x^p} [jn,r] + \left\{ {\ell \atop jn} \right\} [rp,\ell] +$$

$$- \left\{ {\ell \atop jp} \right\} [rn,\ell] .$$

Com a ajuda das equações (17.3) e (17.4) e com a utilização das e quações (17.1) e (17.2) podemos obter a seguinte expressão:

$$R_{rjnp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{rp}}{\partial x^j \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^r \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{rn}}{\partial x^j \partial x^p} - \frac{\partial^2 g_{jp}}{\partial x^r \partial x^n} \right) + g^{ts} \left([jn,s][rp,t] + \right.$$

$$\left. - [jp,s] [rn,t] \right) . \tag{29.2}$$

O tensor curvatura dado desta forma é muito importante. Desta podemos deduzir imediatamente as simetrias

$$\left. \begin{aligned} R_{rjnp} &= -R_{jrnp}, \\ R_{rjnp} &= -R_{rjpn}, \\ R_{rjnp} &= R_{nprj}, \end{aligned} \right\} \tag{29.3}$$

e também a identidade circular de Bianchi

$$R_{rjnp} + R_{rnpj} + R_{rpjn} = 0 \qquad (29.4)$$

Levando em conta o comportamento do tensor curvatura em relação às equações (29.3) e (29.4) podemos afirmar que o tensor curvatura tem no máximo (1/12) $N^2(N^2-1)$ componentes distintos e diferentes de zero.

30. - Tensor de Ricci. Invariante de Curvatura

À primeira vista pensamos haver três modos diferentes de contrair o tensor de Riemann -Christoffel. Entretanto um desses modos seria $R^{\ell}{}_{\ell np} = g^{\ell s} R_{s\ell np} = 0$,porque $R_{s\ell np}$ é antissimétrico em s e ℓ. Vemos por (28.3) que $R^{\ell}{}_{jn\ell} = -R^{\ell}{}_{j\ell n}$.Daqui só devemos levar em conta a contração dada por

$$R_{jn} = R^{\ell}_{jn\ell} = g^{\ell s} R_{sjn\ell} \quad . \qquad (30.1)$$

O tensor resultante desta contração é o tensor de Ricci. Ao contrair ℓ e p na equação (28.1) e ao substituir por (17.6) encontramos que

$$R_{jn} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^n} \{\log\sqrt{g}\} - \frac{\partial}{\partial x^{\ell}} \{{}^{\ell}_{jn}\} + \{{}^{\ell}_{ns}\} \{{}^{s}_{j\ell}\} - \{{}^{s}_{jn}\} \frac{\partial}{\partial x^s} \{\log\sqrt{g}\} .$$

$$(30.2)$$

Com esta equação podemos ver que $R_{jn} = R_{nj}$, i.e., o tensor de Ricci é simétrico.

Faremos agora uma contração no tensor de Ricci da seguinte forma

$$R = g^{jn} R_{jn} \quad . \tag{30.3}$$

Obtemos o R que é o invariante de curvatura.

Um espaço no qual $R_{ij} = I g_{ij}$ em todos os pontos, onde I é um invariante, é um espaço de Einstein. A multiplicação interna por g_{ij} mostra que R=NI. Assim, para um espaço de Einstein temos que

$$R_{ij} = \frac{1}{N} R g_{ij} \; . \tag{30.4}$$

31. - Identidade Diferencial de Bianchi

Seja um sistema de coordenadas geodésicas que escolhermos. Ao referirmos a (28.1) teremos, por diferenciação covariante, que

$$R^{\ell}_{jnp;r} \equiv \frac{\partial}{\partial x^r} (R^{\ell}_{jnp}) = \frac{\partial^2}{\partial x^r \partial x^n} \left\{ {\ell \atop jp} \right\} - \frac{\partial^2}{\partial x^p \partial x^r} \left\{ {\ell \atop jn} \right\}$$

no polo. O intercâmbio cíclico de n, p e r nos dá outras duas equações. Obtemos pela adição que

$$R^{\ell}_{jnp;r} + R^{\ell}_{jpr;n} + R^{\ell}_{jrn;p} = 0 \quad . \tag{31.1}$$

Esta é uma equação tensorial válida no polo de um sistema de coordenadas geodésicas. Assim também vale para todo sistema de coordenadas naquele polo. Podemos também escolher qualquer ponto como polo dum sistema de coordenadas geodésicas. Portanto, a equação (31.1) é válida em todos os pontos do espaço. A multipli cação interna por $g_{\ell m}$ da identidade de Bianchi dá

$$R_{mjnp;r} + R_{mjpr;n} + R_{mjrn;p} = 0 \,. \tag{31.2}$$

O tensor de Einstein se define por

$$G^i_j = g^{i\ell}R_{j\ell} - \frac{1}{2} R\delta^i_j \,. \tag{31.3}$$

A multiplicação interna de (31.2) por $g^{mp}g^{jn}$ e a aplicação de (30.1), (30.3) e (29.3) nos dá a equação

$$R_{;r} - g^{jn}R_{jr;n} - g^{mp}R_{mr;p} = 0 \,, \tag{31.4}$$

que podemos escrever

$$R_{;r} = 2g^{jn}R_{jr;n} \,.$$

Por derivação covariante da (31.3) obtemos

$$G^i{}_{j;i} = g^{i\ell}R_{j\ell;i} - \frac{1}{2} R_{;i}\delta^i_j = g^{i\ell}R_{j\ell;i} - \frac{1}{2} R_{;i} \,.$$

Daí,

$$G^i_{j;i} = 0 \,. \tag{31.5}$$

Esta equação é muito importante na teoria da relatividade, onde originará uma lei de conservação covariante.

32. - Curvatura de Riemann

De dois vetores quaisquer A^i e B^i num ponto dum V_N podemos construir o invariante $R_{rjnp}A^rA^nB^jB^p$. Consideremos o que acontece se substituirmos os vetores A^i e B^i pelas duas combinações lineares

$$X^i = \lambda A^i + \mu B^i \quad , \quad Y^i = \rho A^i + \tau B^i$$

onde λ, μ, ρ e τ são invariantes. Utilizando as equações (29.3) e mais alguns cálculos diretos demonstramos que

$$R_{rjnp}X^rX^nY^jY^p = (\lambda\tau-\rho\mu)^2 \; R_{rjnp}A^rA^nB^jB^p \, .$$

Assim, a expressão $R_{rjnp}A^rA^nB^jB^p$, que é um invariante com respeito a transformações de coordenadas, e é quase um invariante em transformações lineares de vetores. Para obtermos uma expressão que seja também invariante em transformações lineares de vetores, calculemos

$$(g_{rn}g_{jp} - g_{rp}g_{jn}) \; X^rX^nY^jY^p =$$

$$= (\lambda A_n+\mu B_n) \; (\lambda A^n+\mu B^n) \; (\rho A_p+\tau B_p) \; (\rho A^p+\tau B^p) \; +$$

$$- (\lambda A_p+\mu B_p) \; (\rho A^p + \tau B^p) \; (\lambda A_j+\mu B_j) \; (\rho A^j+ \tau B^j) =$$

$$= (e_A\lambda^2A^2 + e_B\mu^2 B^2 + 2\lambda\mu \cos\theta \, AB) \; (e_A\rho^2 A^2 + e_B \tau^2B^2 +$$

$$+ 2\rho\tau \cos\theta \, AB) \; +$$

$$- (e_A\lambda\rho A^2+ e_B\mu\tau B^2 + [\lambda\tau+\rho\mu]\cos\theta \, AB)^2 =$$

$$= (\lambda\tau - \mu\rho)^2 \quad (e_A\, e_B - \cos^2\theta) A^2 B^2 =$$

$$= (\lambda\tau - \mu\rho)^2 \quad (g_{rn} g_{jp} - g_{rp} g_{jn})\, A^r A^n B^j B^p \ .$$

θ é o ângulo entre os vetores A^i e B^i.

Deduzimos que

$$K = \frac{R_{rjnp} A^r A^n B^j B^p}{(g_{rn} g_{jp} - g_{rp} g_{jn}) A^r A^n B^j B^p} \tag{32.1}$$

é um invariante que não será alterado num ponto quando os dois vetores que o determinam são substituidos por qualquer combinação linear. Este invariante se denomina curvatura de Riemann do espaço V_N associado aos vetores A^i e B^i. Notemos que o denominador de K é a unidade se os vetores A^i e B^i são vetores unitários e ortogonais.

33. - Espaço Plano

Dizemos que um espaço é plano quando $K = 0$ em todos os pontos. De (32.1) temos que a combinação necessária e suficiente é

$$R_{rjnp} A^r A^n B^j B^p = 0$$

para todos os vetores A^i e B^i. Levando-se em conta as simetrias em A^i e B^i concluimos que

$$R_{rjnp} + R_{njrp} + R_{nprj} + R_{rpnj} = 0 \ ,$$

significando que

$$R_{rjnp} + R_{rpnj} = 0 ;$$

trocando j e n encontramos

$$R_{rnjp} + R_{rpjn} = 0 ;$$

multiplicando esta equação por dois e somando a anterior obtemos

$$2R_{rnjp} + 2R_{rpjn} + R_{rjnp} + R_{rpnj} = 0 ,$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$3R_{rnjp} + R_{rnpj} + R_{rpjn} + R_{rjnp} = 0 .$$

Esta equação pode ser reduzida, utilizando a (29.4), a seguinte igualdade:

$$R_{rnjp} = 0 .$$

Reciprocamente, se $R_{rnjp} = 0$, podemos dizer que $K = 0$. Temos, então que a condição necessária e suficiente para que um espaço V_N seja plano é que o tensor de Riemann -Christoffel seja identicamente nulo.

34. - Espaço de Curvatura Constante

Analisaremos agora espaços nos quais a curvatura de Riemann em qualquer ponto não depende da escolha dos vetores contravariantes A^i e B^i. Da equação (32.1) a condição necessária e sufi ciente é que

$$(K\,(g_{rn}g_{jp} - g_{rp}g_{jn}) - R_{rjnp})\,A^r A^n B^j B^p = 0$$

para todos os vetores A^i e B^i. Um cálculo similar ao da seção anterior demonstrará que esta condição se reduz a

$$R_{rjnp} = K\,(g_{rn}g_{jp} - g_{rp}g_{jn})$$

onde K é uma função das coordenadas x^i.

A diferenciação covariante da expressão acima nos dá

$$R_{rjnp;t} = K_{;t}(g_{rn}g_{jp}-g_{rp}g_{jn}) \quad .$$

Substituindo este resultado na identidade de Bianchi (31.2) teremos

$$K_{;r}(g_{mn}g_{jp}-g_{mp}g_{jn}) + K_{;n}(g_{mp}g_{jr}-g_{mr}g_{jp}) +$$

$$+ K_{;p}\,(g_{mr}g_{jn} - g_{mn}g_{jr}) = 0 \quad .$$

A multiplicação por $g^{mn}g^{jp}$ dá

$$(N-1)(N-2)K_{;r} = 0 \quad .$$

Daqui, se $N>2$ concluimos que K é uma constante. Tal V_N $(N>2)$ se chamará um espaço de curvatura constante.

35.-Conexão Afim Assimétrica

Também denominada conexão linear assimétrica. Há diversas maneiras pelas quais nós a podemos introduzir. Talvez a mais elegante seja aquela que conecta diretamente a questão às teorias de "Gauge", a saber

$$\partial_i \rightarrow D_i = \; ? \tag{35.1}$$

O operador ∂_i é um vetor apenas quando age sobre um escalar, na teoria métrica. De que maneira o podemos generalizar ? A forma mais espontânea é

$$\partial_i \phi^k \rightarrow D_i \phi^k = \partial_i \phi^k + \Gamma^k_{im} \phi^m , \tag{35.2}$$

onde agora Γ^k_{im} são funções arbitrárias cuja lei de transformação será induzida pela condição de tensorialidade que impomos a $D_i \phi^k$ - que deve se comportar como um tensor de segunda ordem, misto. A regra de transformação é a mesma lei inomogênea já conhecida para os símbolos de Christoffel,

$$\bar{\Gamma}^{k}_{im} = \frac{\partial \bar{x}^{k}}{\partial x^{\ell}} \frac{\partial x^{n}}{\partial \bar{x}^{i}} \frac{\partial x^{j}}{\partial \bar{x}^{m}} \Gamma^{\ell}_{nj} - \frac{\partial^{2} \bar{x}^{k}}{\partial x^{s} \partial x^{t}} \frac{\partial x^{s}}{\partial \bar{x}^{i}} \frac{\partial x^{t}}{\partial \bar{x}^{m}} \quad . \tag{35.3}$$

Apenas aqui devemos ter cuidado com a assimetria dos índices inferiores nas Γ's. Aqui, também, as Γ's são definidas localmente, e por meio da superposição de sistemas coordenados estendidas por sobre toda a variedade diferencial.

O tensor curvatura tem a mesma (e elegante!) definição aqui,

$$R^{k}_{mij}\ \phi^{m} = \left[D_{i},\ D_{j}\right]\phi^{k} \tag{35.4}$$

Esta é uma teoria puramente afim, isto é, ela prescinde de uma métrica, que se introduzida precisará ser de alguma maneira relacionada à conexão afim Γ. De modo geral, isto se faz assim: a conexão Γ é obtida da forma abaixo:

$$\Gamma^{i}_{jk} = \left\{ {i \atop jk} \right\} + A^{i}_{jk} + B^{i}_{jk} \quad , \tag{35.5}$$

onde

$$A^{i}_{jk} = A^{i}_{kj} \quad ,$$

e que

$$B^{i}_{jk} = -B^{i}_{kj} \quad .$$

Esta é a forma mais geral possível, combinando-se uma teoria métrica (associada aos $\left\{ {i \atop jh} \right\}$) com uma teoria afim (as Γ's). Tradicionalmente os físicos gostam de interpretar de alguma maneira ("praxe de Pauli") os campos extra acima, como A e B .

O tensor de Riemann é agora definido, sendo $\frac{\partial}{\partial x^m}\Gamma^i_{jk} = \partial_m \Gamma^i_{jk}$, como

$$R^i_{jkm} = \partial_m \Gamma^i_{jk} - \partial_k \Gamma^i_{jm} - \Gamma^i_{sk}\Gamma^s_{jm} + \Gamma^i_{sm}\Gamma^s_{jk} \; .$$

Dois casos particulares devem ser destacados neste ponto. No primeiro, teremos a teoria de Einstein - Cartan, onde

$$\begin{cases} \Gamma^i_{jk} = \{^{\,i}_{jk}\} \; - K_{jk}{}^i \\ D_m g_{in} = 0 \;, \; K_{jk}{}^i = - K^i{}_{kj} \; . \end{cases} \tag{35.6}$$

No segundo caso, temos a "transformação Λ":

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \delta^i_j \, \Lambda_k . \tag{35.7}$$

A propriedade que a distingue é

$$\bar{R}^i_{jkm} = R^i_{jkm} + \delta^i_j \, (\partial_k \Lambda_m - \partial_m \Lambda_k) \; ; \tag{35.8}$$

no caso em que $\Lambda_m = \partial_m \Lambda$, para alguma função Λ (ou no caso mais geral em que Λ_m é 1-cociclo), teremos que

$$\bar{R}^i_{jkm} = R^i_{jkm} \; , \tag{35.9}$$

ou seja, a curvatura é copiada. Isto ocorre, portanto, com qualquer afinidade de Christoffel, por exemplo. Neste caso, no entanto, o campo Λ(ou Λ_m) é interpretado como a representação de de um grupo de transformações agindo sobre a afinidade. O que é uma possibilidade diversa da prevista pelo critério de Pauli.

36. - Relação às Teorias de Gauge

Localmente definimos transformações de coordenadas não-holônomas, que mapeiam vetores sobre vetores "não-holônomos",

$$\phi^k \to \phi^K = h^K_m \phi^m \quad . \tag{36.1}$$

Aqui impomos às transformações h uma condição de ortogonalidade (ou de pseudo-ortogonalidade),

$$g^{mk}\ h^M_m h^K_k = \dot{g}^{MK} \tag{36.2}$$

onde $\dot{g}^{MK}$ é uma matriz diagonal com ±1 na diagonal principal(de modo geral, a assinatura de $\dot{g}^{MK}$ é escolhida de forma a coincidir com a de g^{mk}).

Há relações análogas referentes a h^m_M, e similares:

$$h^m_M h_{mK} = \dot{g}_{MK} \quad ,$$

$$h^m_M h^M_k = \delta^m_k \tag{36.3}$$

Podemos então definir um objeto não-holônomo

$$\phi^A = h^A_k \phi^k \quad . \tag{36.4}$$

E, se definirmos

$$\Gamma^A_{Bi} = h^n_B\ \Gamma^m_{ni} h^A_m + h^n_B\, \partial_i h^A_n \quad , \tag{36.5}$$

podemos definír o vetor coluna $\phi = (\phi^A)$ e a matriz $\Gamma_i = (\Gamma^A_B)_i$, em tudo formalmente análogo os objetos de uma teoria de Gauge, onde a derivada covariante é

$$D_i\phi = \partial_i\phi + \Gamma_i\phi \ ,$$

e a curvatura

$$R_{ij}\phi = [D_i \ , \ D_i]\phi$$

Aqui um importante resultado é:

$$K^i{}_{jk} = h^i_\Lambda K^\Lambda{}_{jk} = h^i_\Lambda \left(D_j h^\Lambda_k - D_k h^\Lambda_j \right)$$

ou seja, a contorção depende diretamente deste objeto h - que na linguagem clássica, tradicional, se denomina "tetrada", e que na linguagem de geometria diferencial tem o nome de "forma de soldagem".

CAPÍTULO II

CÁLCULO TENSORIAL INTRÍNSECO

57. - Conceitos Fundamentais

Com esta seção desejamos passar da notação e dos conceitos clássicos das seções anteriores para uma notação e conceituação mais moderna. A diferença entre um e outro tratamento se dá em dois aspectos: em primeiro lugar, os conceitos deixam de ser definidos com respeito a um dado sistema de coordenadas, e o são de modo intrínseco. Em segundo lugar, podemos aqui discutir questões globais, isto é, questões que se referem a estrutura toda do espaço-tempo, em lugar de nos limitarmos a uma discussão de problemas locais, ou seja, fenômenos que ocorrem no domínio de um sistema de coordenadas e valem apenas localmente, de modo geral podem ser melhor compreendidos nesta visão alternativa.

O conceito básico é o de variedade diferencial. Este conceito torna preciso o significado algo vago de nossos objetos V_N, M_N e análogos, nas seções precedentes. E o que é uma variedade diferencial? Ela é uma estrutura em três níveis:

- É, em primeiro lugar, um conjunto de pontos, que designamos por M.

- Em segundo lugar, é um conjunto com uma topologi a τ de Hausdorff, ou seja, dados dois pontos x, $x' \in M$, existem dois abertos A e A' sem pontos em comum ($A \cap A' = 0$) tais que $x \in A$ e $x' \in A'$.

- Em terceiro lugar, este espaço topológico de Hausdorff (M,τ) possui uma estrutura diferenciável:

1) Existe sempre uma família de abertos $V_i \subseteq M$, $i = 1,2,3,\ldots$ (isto é, uma família contável) à qual associamos fun - ções diferenciáveis h_i, dadas por:

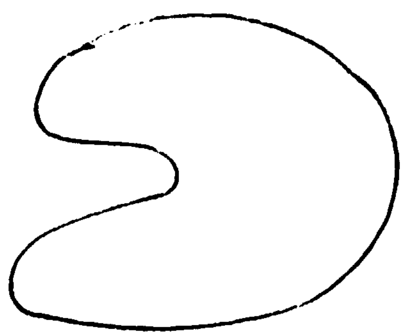
$$h_i : V_i \to \mathbb{R}^n \quad , n \text{ fixo},$$

e sendo os h_i difeomorfismos, isto é, funções com inverso e com inverso diferenciável. O número n será a dimensão topológica da variedade, e h_i^{-1} transporá para sobre a variedade um sistema de coordenadas de $\mathbb{R}^n$.

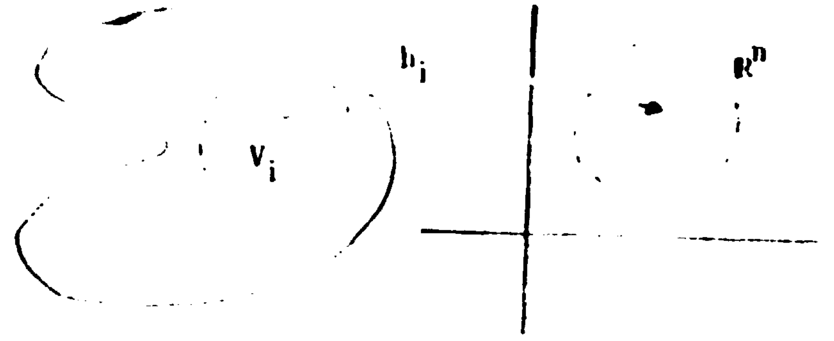
2) As mudanças de coordenadas $h_i^{-1} \circ h_j$, $V_i \cap V_j \neq 0$, são também difeomorfismos.

As figuras ilustram o conceito:

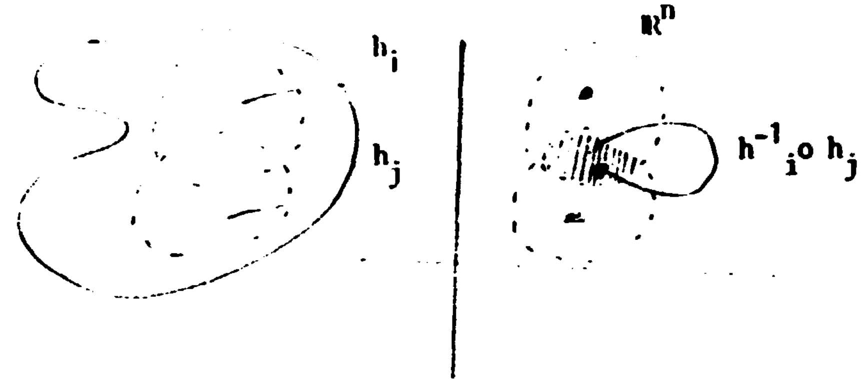
1 - um conjunto de pontos



2 - um sistema de coordenadas



3 - mudanças de coordenadas



Com isto tornamos preciso o conceito de variedade diferenciável. É um conjunto de pontos com uma topologia, isto é, uma regra com a qual podemos definir limites, e coberto este conjunto por sistemas coordenados, que lhes dão o que se chama uma <u>estrutura diferenciável</u>. Deve-se notar que os três níveis são independentes, isto é, podemos dotar uma mesma variedade topológica com estruturas diferenciáveis não equivalentes.

O próximo conceito é o de <u>subvariedade</u>. Uma subvariedade (essencialmente, um "subespaço") pode ser definida de duas formas: a definição direta é:

- A subvariedade $N \subseteq M$ é um subconjunto de M.

- A subvariedade N é uma variedade diferenciável.

- A estrutura de variedade diferenciável de N é aquela herdada de M, ou seja, é a estrutura de M restrita a N.

Outra forma de definirmos o que seja uma subvariedade é através de uma técnica indireta, ou seja, como a contra-imagem de uma função diferenciável. Vamos dizer o que vem a ser isto: seja $f:M \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em M. Então teremos o seguinte:

- para $r \in \mathbb{R}, f^{-1}(r) \subset M$ é uma subvariedade diferenciável mergulhada em M.

"Mergulhada" significa: sua estrutura diferenciável foi herdada da estrutura diferenciável de M, como na definição precedente. Esta nova definição exige uma prova, que é dada (em resumo), $f^{-1}(\mathbb{R}-r)$ é um conjunto aberto e denso em M(donde $f^{-1}(r) \subset M$ ser fechado e nunca denso). Em seguida aplicamos um teorema clássico de análise, o teorema da função implícita, para mostrarmos que $f^{-1}(r) \subset M$ possui sistemas coordenados cuja estrutura é herdada da estrutura de M.

Em resumo: função diferenciável definida em variedade significa sempre subvariedade.

Agora veremos o caso inverso: vamos considerar aplicações de um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ na variedade M. Estas são as curvas:

- Uma curva é uma aplicação diferenciável $g:I \to M$.

Para que usaremos o conceito de curva? Para que possamos definir, de maneira intrínseca, o conceito de vetor tangente à curva. Como se faz isso? Da seguinte maneira: se $t \in I$ designar a variável que percorre o intervalo I, definimos a derivada de g no ponto $x_0=g(t_0)$ da seguinte maneira:

$$g'(t_0) = \left(\frac{dg}{dt}\right)_{x_0} .$$

Ora, que é um vetor tangente a uma curva? É a derivada desta curva. Mas, num dado ponto, muitas curvas poderão ter o mesmo vetor tangente. Basta que tenham ali a mesma derivada. Definimos então o vetor tangente:

- Vetor tangente -num ponto $x_0 \varepsilon M$ é o conjunto de todas as curvas que passam por x_0 cujas derivadas coincidem neste ponto.

O vetor tangente é, assim, uma classe de equivalência. É o conjunto de todas as curvas por um mesmo ponto, módulo a igualdade de suas derivadas naquele ponto. Ainda estamos, aqui, bem distante da definição clássica. Mas chegamos a ela com rapidez. Se escolhermos um sistema de coordenadas num dado ponto, a derivada de uma curva é expressa por

$$\left.\frac{dg}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{dx^i}{dt} \left.\frac{\partial g}{\partial x^i}\right|_{x_0} = X_{x_0} . \qquad (37.1)$$

No caso de um vetor tangente a uma coordenada x^i, teremos

$$\underline{e}_i = \delta_i^j \frac{\partial g}{\partial x^j} = \frac{\partial g}{\partial x^i}$$

Ora, para representarmos as classes de equivalência de funções, identificaremos o vetor X_{x_0} de (37.1) a um operador diferencial

$$X_{x_0} = \frac{dx^i}{dt}\Big|_{x_0} \frac{\partial}{\partial x^i} = \Lambda^i \Big|_{x_0} \frac{\partial}{\partial x^i} .$$

É fácil constatar que vetores tangentes ou operadores diferenciais formam espaços vetoriais isomorfos. E desta identificação tiramos um importante resultado:

<u>Proposição</u>: Seja M uma variedade diferenciável n-dimensional. Os n vetores linearmente independente X_i são tangentes, cada um, a linhas coordenadas x^i se e, somente se $[X_i, X_j] = 0$ na região coordenada.

<u>Prova (em resumo)</u>: A necessidade é imediata, pois

$$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0 .$$

A suficiência também, pois o que se deseja de um sistema coordenado é que as coordenadas sejam independentes umas das outras, isto é, que umas variem sem depender das outras. Ora,

$$[X_i, X_j] = L_{X_i} X_j = -L_{X_j} X_i = 0 .$$

Onde L_X designa a "derivada de Lie", e mostra que o "arrasto" de X_i por X_j (e vice-versa) não altera um e outro.

A generalização deste resultado é dada pelo Teorema de Frobenius, uma de cujas versões se utiliza mais adiante neste trabalho. O Teorema de Frobenius, em sua essência, dá as condições necessárias e suficientes para que um campo de K vetores linearmente independentes, numa variedade de dimensão K, seja tangente a uma subvariedade K-dimensional daquela variedade.

E os vetores cotangentes (ou "covetores", em oposição aos "contravetores", que são os vetores tangentes), como defini-los de maneira intrínseca? A técnica é similar. Seja uma função $f: U \subseteq M \to R$, onde U é um aberto. Um covetor, ou vetor cotangente, num ponto de M, é a classe de equivalência de todas as funções f, g...., tais que sua diferencial $(df)_{x_0}$ no ponto $x_0 \in U$ coincide. Temos, assim, que da mesma forma que os contravetores são classes de equivalências de curva cuja derivada coincide num dado ponto, os covetores são classes de equivalência de funções cujas diferenciais coincidem no mesmo ponto.

Em coordenadas locais, o covetor é dado por

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i \quad ,$$

ou seja, é uma 1-forma, uma <u>forma diferencial do primeiro grau.</u> Isto sugere parearmos as bases (locais) de contra e covetores, pelo "produto escalar"

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, dx^j \right\rangle = \delta^j_i \quad ,$$

de modo que a derivada de uma função, segundo uma curva g, é dada por

$$\frac{df}{dt}\Big|_g = \text{"}\langle g, f\rangle\text{"} = \langle X_g, df\rangle \quad ,$$

ou seja, o produto escalar da curva pela função.

A vantagem destas definições, até o momento, é sua elegância. São definições intrínsecas, e ao se construirem os objetos como classes de equivalência, segue-se uma tradição da matemática, inaugurada no século passado, em que (com Dedekind) números reais são definidos como sendo certas classes de números racionais.

Um ponto final, nesta seção, deve ser a discussão de um primeiro resultado global, o Teorema é o seguinte: no espaço a três dimensões, podemos construir uma esfera (uma variedade bidimensional) como uma subvariedade "dentro" do espaço. Será que toda variedade pode ser mergulhada (num sentido coloquial) dentro de um espaço euclidiano? Qual a relação entre as dimensões de um e outro? A resposta está dada no seguinte teorema de Hassler Whitney, publicado em 1936:

<u>Proposição</u>: Dada uma variedade M^n de dimensão n, existe um mergulho ótimo $f:M^n \to \mathbb{R}^{2n+1}$.

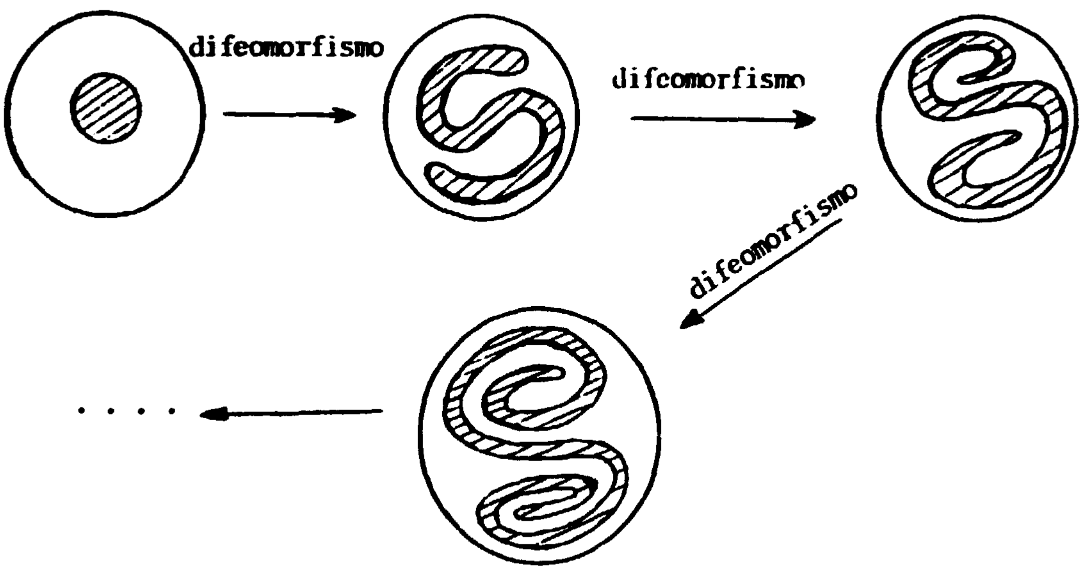
Isto quer dizer: M^n é difeomorfo a uma subvariedade de $\mathbb{R}^{2n+1}$. O limite dimensional $(2n+1)$ é um valor ótimo para o caso geral. Em situações específicas (como no caso da esfera no espaço tridimensional) pode ser melhorado. Também, se impusermos outras estruturas (ou outras condições) sobre M^n, esta dimensão do espaço euclidiano pode aumentar. Por exemplo, se exigirmos que o mergulho seja isométrico (preservando ângulos e distân cias) ou sem nós (sem que a variedade mergulhada passe por dentro de si mesma, ainda que evitando auto-interseções). A demonstração completa do teorema está no livro de Auslander e McKensie, na Bibliografia.

<u>Resumo da Prova</u>: Há várias provas para o Teorema do Mergulho de Whitney. A idéia básica é a seguinte: triangulamos a variedade M^n (ou seja, nós a decompomos em seu "esqueleto", hipertetraedros elementares chamados símplices). Com esta triangulação, obtem-se um objeto denominado "complexo homológico" - essencialmente os símplices, como tijolos, juntos formando o arcabouço da variedade. Ora, os símplices podem ser representados por objetos num dado espaço linear. A dimensão deste espaço é a menor dimensão na qual todas as coisas envolvidas são linearmente independentes. Mostra-se que, no caso geral, esta dimensão é 2n+1. Sabido isto, montamos dentro de R^{2n+1} nosso complexo - o esqueleto de M^n. E feita esta montagem, "arredondamos" os cantos do complexo, obtendo a variedade diferenciável. O arredondamento (a introdução da diferenciabilidade) pode ser feita usando-se as chamadas "partições de unidade".

Em resumo: demonstramos a variedade "fora" do espaço euclidiano e remontamos neste espaço.

38. Os Fibrados Tangente e Cotangente

O objetivo deste tratamento para a geometria das variedades é obter resultados globais. Pois, localmente, toda variedade é um espaço euclideano; as diferenças surgem apenas no caso global (no entanto, o conceito de "local" pode ser altamente complexo: veja-se o desenho, onde de um ânulo obtemos outro ânulo, mas com uma geometria tão complicada que cada um de seus pontos fica tão perto quanto se deseje de um ponto do buraco central).



O significado destas patologias, para a física, é ainda desconhecido, embora estruturas fractais deste tipo venham tendo amplo emprego em diversas áreas das ciências naturais e sociais. Aqui observemos que localmente (i.e., sobre um domínio cuja topologia é trivial - o que é uma condição suficiente, mas não necessária), podemos sempre coordenar o espaço tangente da seguinte maneira:
$u = (x^{\mu}, A^{\mu})$, onde $u \in T.M.$, é um ponto do espaço tangente -fi

brado tangente - sobre a variedade M, e é coordenado pelo valor das coordenadas de $x \in M$ e pelas componentes do vetor A que nele definirmos. Mudando-se o sistema de coordenadas, fazemos uma transformação (em geral) não linear sobre x, e uma transformação linear, induzida, dado pelo Jacobiano da transformação sobre x, que age em A. Em cada ponto x, o espaço de todos os A é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, onde n=dim M. Podemos definir uma aplicação obviamente contínua

$$\pi: T.M \to M, \quad \pi(u) = x$$

cujo inverso $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$. A este inverso denominamos <u>fibra</u> sobre x. Em cada fibra age uma representação de $GL(n, \mathbb{R})$ induzida pelos jacobianos das transformações de coordenadas (uma transformação para cada jacobiano). Assim sendo, temos o objeto que se denomina <u>fibrado tangente</u>:

- Uma variedade M, chamada base;
- Uma aplicação contínua $\pi: T.M \to M$, denominada projeção;
- A fibra, $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n$;
- O grupo de transformações, $GL(n, \mathbb{R})$ ou um seu subgrupo.

Esta última observação deve-se ao seguinte: sobre $\mathbb{R}^n$, por exemplo, temos um único sistema de coordenadas possível; o fibrado $T.\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, e o grupo reduz-se à identidade, 1. Também, se G é um <u>grupo de Lie</u>, um grupo onde definimos uma estrutura diferen ciável, $T.G \cong G \times \mathbb{R}^n$, onde n = dim G.

O fibrado cotangente define-se da mesma maneira, e como a transformação que age sobre os covetores é inversa da que age sobre os vetores, há um óbvio isomorfismo entre T^*M, o fibrado cotangente, e $T.M$, o fibrado tangente. Notemos, no entanto, que este isomorfismo, dados apenas um e outro objetos, não é único. Quando fixamos um ismorfismo possível,

$$g : T.M \to T^*M,$$

pareamos um vetor $A \in T.M$ a um covetor $B \in T^*M$. Este pareamento pode ser dado por meio de uma transformação linear $g: T.M \to T^*M$, inversível, que denominamos tensor métrico ou métrica. Em geral se impõe, também, a condição $g^T = g$, que amarra a simetria de g.

g pode ser, também, considerado como uma forma quadrática. Dois vetores, A e A', tais que g(A, A') = 0, são chamados g-ortogonais. Ora, é sabido que $\mathbb{R}^n$ pode ser gerada apenas pelos vetores g-ortogonais (aplique o método de Graham-Schmidt!). Assim sendo, podemos restringir as transformações de $GL(n, \mathbb{R})$ para aquelas O(f) - as g-ortogonais, i.e., que preservam $g: OgO^{-1} = g$, $O \in O(g)$. São estas as transformações de Lorentz generalizadas, com "assinatura" qualquer. Os conceitos usuais (vetores tipo tempo, tipo espaço e tipo luz) se estendem com naturalidade.

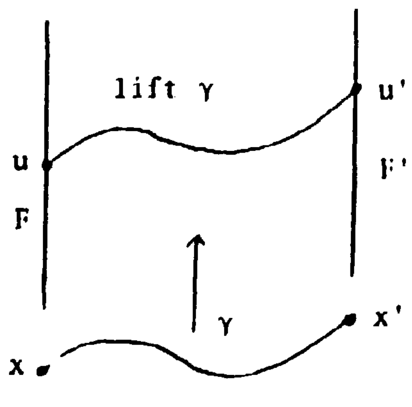
Esta operação, que reduz o grupo de GL para O(g) é chamada redução do grupo fibrado módulo g. Há um isomorfismo en -

tre as reduções possíveis e os diferentes valores de g.

39. O Conceito de Conexão

Até o momento, num certo sentido, as fibras num espaço fibrado são disjuntas, i.e., não temos uma regra pela qual podemos passar de uma fibra para a outra, ponto a ponto, ou seja, uma regra que, dado um ponto $u \in F$, uma fibra, nos fixe um só ponto $u' \in F'$ (possivelmente com algumas outras condições).

Uma possibilidade seria a seguinte: dado o ponto x na base com fibra sobre ele $F(x)$, liguemos (por um caminho arbitrário) este ponto x a um ponto x', com fibra $F(x')$. Fixemos uma regra pela qual, ao caminho que junta x a x', corresponda um único caminho para cada ponto $u \in F(x)$ até um dado $u' \in F(x')$. A possibilidade que se escolhe é a seguinte: construimos uma forma linear $\omega(x)$ que age no segundo fibrado tangente T.T.M, i.e., no espaço tangente ao fibrado tangente T.M (tomado aqui como base). Esta forma linear aplica o espaço tangente à fibra sobre si mesmo, e se anula num outro espaço, de dimensão igual à base. Mais ainda, ela é equivariante, i.e., comuta com as transformações induzidas pelo grupo de transformação.



O alçamento da curva γ se faz da seguinte maneira: esta curva define, univocamente, seu vetor tangente $X(\gamma)$ em cada ponto. Impo-nhamos a condição que a curva alçada lift (γ) tenha um vetor tangente X^h em cada ponto tal que $\omega(X^h) = 0$. Aos vetores que satisfazem a esta condição denominamos vetores horizontais.

Em componentes, temos o seguinte: o vetor tangente à curva é dado por

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu \partial_\mu + \dot{z}^i \partial_i \qquad . \ i \ \text{índice na fibra.}$$

Se colocarmos uma proporcionalidade entre o vetor tangente (parte vertical) e o vetor tangente à base,

$$\dot{z}^i = \Gamma^i_{\mu j} \dot{x}^\mu z^j ,$$

ficamos com

$$\frac{d}{dt} = \dot{x}^\mu(\partial_\mu - \Gamma^i_{\mu j} z^j \partial_i) = \dot{x}^\mu D_\mu ,$$

onde

$$D_\mu = \partial_\mu - \Gamma^i_{\mu j} z^j \partial_i \quad .$$

Uma base horizontal-vertical para o segundo fibrado tangente é, assim, dada por:

$$(x^\mu , D_\mu , \partial_i) \quad .$$

A partir daí, o cálculo das componentes da forma ω é imediato.

40. O Conceito de Curvatura

Que ocorre se a curva γ é um loop fechado? A fibra F se transformará em si mesma, e o espaço dos loops possíveis induzirá um grupo de transformações da fibra sobre si mesma. Este grupo chama-se grupo de holonomia. A respeito dele, prova-se o seguinte:

- O grupo de holonomia é, no máximo, $GL(n,\mathbb{R})$, para o caso que estamos considerando;

- Na ausência de cópias, o grupo de holonomia é gerado pelos valores do seguinte objeto,

$$\Omega = d\omega(X^h, Y^h) =_{Def} D\omega(X,Y)\,, \quad X,Y \in T.T.M.$$

denominado curvatura associado à conexão ω. Esta curvatura é, no caso geral, o campo de gauge, conhecido das Teorias Clássicas de Campo.

A relação de estrutura de Cartan nos dá o seguinte:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}\,[\omega \wedge \omega]\ .$$

O que, em componentes, é o mesmo resultado clássico,

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + \frac{1}{2} [\omega_\mu , \omega_\nu] \ .$$

$$\Omega_{\mu\nu j}^{\ \ \ i} = \partial_\mu \omega_{\nu j}^{\ \ i} - \partial_\nu \omega_{\mu j}^{\ \ i} + \omega_{\mu k}^{\ \ i} \omega_{\nu j}^{\ \ k} - \omega_{\nu k}^{\ \ i} \omega_{\mu j}^{\ \ k} \ .$$

Um importante teorema é devido a Levi-Civitá: toda métrica g determina unicamente uma conexão linear ω. A prova é a mesma que a tradicional.

CAPÍTULO III

CÓPIAS GRAVITACIONAIS

41 - Introdução

Passaremos agora ao estudo de cópias (1), onde utilizaremos toda a parte da Teoria Clássica de Tensores e a parte da Geometria Moderna introduzidas nos capítulos anteriores. Além disso com a abrangência da Álgebra de Lie e o estudo de Fibrados possibilitamos a passagem ao estudo que faremos.

Nós mostraremos que a transformação λ abeliana de Einstein pode ser generalizada naturalmente para incluir uma grande classe de cópias de campos de gauge e gravitacional.

42 - Uma Generalização da Transformação λ de Einstein e Cópias Gravitacionais

Einstein (2) aplicou a transformação λ no contexto de sua teoria de campo unificado: se $\Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}$ é uma conexão linear (genérica), então sua lei de transformação é dada por

$$\Gamma^{*\alpha}_{\beta\rho} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho} + \delta^{\alpha}_{\beta}\, \partial_{\rho}\lambda \ , \qquad (42.1)$$

onde λ é uma função definida no espaço-tempo. A equação (42.1) é claramente uma transformação de gauge abeliana que pode ser formulada como segue em uma notação mais compacta: sendo M um espaço-tem po e sendo $L(M)$ seu fibrado referencial linear. Se dotarmos $L(M)$ com uma conexão afim linear Γ, a equação (42.1) torna

$$\Gamma^{*} = \Gamma + d\lambda . 1 \quad , \tag{42.2}$$

onde 1 é a identidade na álgebra Lie linear de grupo $GL(4, \mathbb{R})$. Então notamos (3) que os tensores de Riemann e Ricci $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ e $R_{\alpha\beta}$ são mantidos invariantes sob a transformação λ, isto é ,

$$R^{\alpha}_{\beta\nu\mu} (\Gamma^{*}) = R^{\alpha}_{\beta\nu\mu} (\Gamma) \quad , \tag{42.3}$$

$$R_{\alpha\beta} (\Gamma^{*}) = R_{\alpha\beta} (\Gamma) \quad . \tag{42.4}$$

A transformação λ é uma transformação de gauge, i.e., ela pode ser implementada via a ação de gauge induzida por

$$U(x) = \exp[\lambda(x) . 1] \quad .$$

Contudo ela não é induzida geralmente por transformação de coordenadas. Deste modo dá origem a uma classe particular de cópias coordenadas dentro das teorias gravitacional de campos (4).

Mostramos aqui que uma simples generalização da transformação λ nos permite definir uma classe maior de cópias de gauge e gravitacional, as nominadas cópias infinitesimais. Podemos restringir nossa análise a sistemas fibrados, já que a extensão de nossos resultados para o mais geral fibrado principal é imediata.

Sendo dadas duas conexões Γ e Γ^{*} para $L(M)$; sendo

$$R = d\Gamma + \frac{1}{2}[\Gamma\text{-}\Gamma] \tag{42.5}$$

a forma curvatura de Γ. Dizemos que Γ e Γ^* são conexões copiadas de R dado que

$$R(\Gamma) = R(\Gamma^*) \tag{42.6}$$

que analogamente implica que Γ e Γ^* deve satisfazer

$$d\Theta + \frac{1}{2}[\Theta\text{-}\Theta] + [\Gamma\text{-}\Theta] = 0 \quad , \tag{42.7}$$

onde

$$\Theta = \Gamma^* - \Gamma \quad . \tag{42.8}$$

Se escrevermos $\bar{\Gamma} = \Gamma + \frac{1}{2}\Theta$, a equação (42.7) pode ser colocada de uma forma mais elegante,

$$d\Theta + [\bar{\Gamma}\text{-}\Theta] = 0 \tag{42.9}$$

como uma condição necessária e suficiente que Γ e Γ^* como acima dá origem à mesma forma curvatura. Se $[\Theta\text{-}\Theta] = 0$, a equação (42.9) ou (42.7) torna

$$d\Theta + [\Gamma\text{-}\Theta] = 0 \quad . \tag{42.10}$$

Ambas (42.9) e (42.10) são as bem conhecidas condições de integrabilidade. Uma condição aproximada <u>suficiente</u> que faz a equação (42.7) dentro da equação (42.10) pode ser dada da seguinte forma: supomos que $\Gamma^* - \Gamma = \varepsilon\Theta$, onde $\varepsilon > 0$ $\varepsilon^2 \simeq 0$ é uma constante positiva muito pequena. Então $\frac{\varepsilon^2}{2}[\Theta\text{-}\Theta] \simeq 0$, e a equação (42.10) é válida somente para valores acima de $O(\varepsilon^2)$.

O Teorema de Frobenius (5) permite-nos classificar soluções para a equação (42.10): supomos que θ^a, $1 \leq a \leq p$, onde $p = \dim GL(4, \mathbb{R})$, é uma conexão de 1-formas que resolve (42.10). Quais condições impomos sobre Γ? Podemos pensar da seguinte maneira: sendo $k \leq p$ tal que todo $\theta^m = 0$, $m > k$. Assim podemos separar (42.10) em:

$$\begin{cases} d\theta^a + (Ad\Gamma)^a_b \wedge \theta^b = 0 \,, \\ 1 \leq a \leq k, \end{cases} \tag{42.11}$$

$$\begin{cases} (Ad\Gamma)^m_b \wedge \theta^b = 0 \,, \\ m > k \,. \end{cases} \tag{42.12}$$

A equação (42.11) satisfaz as condições de integrabilidade do Teorema de Frobenius, i.e., existe uma transformação (possível local) $U^a_b(x)$, $x \in M$ (onde a dependência é restrita à base de variedade devido a equivalência de todos objetos involvidos) tal que

$$\theta^a = U^a_b \, d\beta^b \,. \tag{42.13}$$

Se levarmos em conta esta condição para as equações (42.11) e (42.12) obtemos

$$\begin{aligned} &[\bar{\Gamma} \wedge d\beta] = 0 \,, \\ &Ad\bar{\Gamma} = U^{-1}(Ad\Gamma)U + U^{-1}dU \end{aligned} \tag{42.14}$$

em notação matricial ($Ad\Gamma$ lembra-nos que os valores de Γ são toma-dos através da representação adjunta da álgebra de Lie).

A transformação U define uma nova possibilidade local, gauge, e nesta gauge a relação entre $\bar{\Gamma}$ e $\bar{\Gamma}^*$, com a condição de "cópia infinitesimal" $\bar{\Gamma}^* - \bar{\Gamma} \approx \varepsilon 0$, pode ser escrita como

$$\bar{\Gamma}^* = \bar{\Gamma} + \varepsilon d\beta \ , \tag{42.15}$$

provando que

$$[\bar{\Gamma} \ -d\beta] = 0 \ . \tag{42.16}$$

onde β é uma função , localmente definida e avaliada na álgebra de Lie. É imediato que a equação (42.15) generaliza a transformação λ dada pela equação (42.2); é uma transformação de gauge abeliana que mostra ser ela mesma compatível com a estrutura de campos não abeliano na gauge particular dada por U ; as equações (42.11 e 12) apresentam as condições compatíveis. Sobre estas condições as equações (42.15 e 16) manteem os tensores de curvatura e Ricci invariantes na teoria de campos simétricos de Einstein.

Se estamos agora tratando com uma teoria de campo de gauge geral, com uma dimensão finita, o grupo de Lie semi simples como grupo de estrutura, podemos considerar duas situações. A transformação não coordenada pode induzir a equação (42.15), e geralmente, como ela é uma transformação abeliana, não pode ser implementada como uma conseqüência do grupo de estrutura não abeliano de fibrados, a menos que o grupo simétrico da teoria seja um sub-grupo de Lie $H \subset G$, com o centralizador não trivial de G, que denominamos K. Neste caso particular podemos escolher β assumindo valores dentro de K, de modo que a equação (42.13) seja imediata - mente satisfeita.

Como uma segunda alternativa podemos embutir um semi-simples G em um conveniente grupo linear geral GL(G). Neste caso a semi simplicidade não é levada em conta dentro do grupo linear embutido e as transformações abeliana (42.2) ou (42.15) podem ser imediatamente implementada no fibrado ampliado.

REFERÊNCIAS:

1 - Doria, F. A.; A Bifurcation Set Associated to the Copy Phenomenonn in the Space of Gauge Field, Holomorphy and Functional Analysis II, North Holland 1984.

2 - Einstein, A.; Relativistic Theory of the Non-Symmetric Field, in The Meaning of Relativity, Methuen, 1967

3 - Srivastava, P. P.; Gauge and Non-Gauge Curvature Tensor Copies, preprint CBPF - 009/82, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Rio de Janeiro - 22290 - RJ, 1982.

4 - Sternberg, S.; Frobenius Theorem, Lectures on Differential Geometry, Prentce-Hall, 1964.

5 - Doria, F. A.; A Bifurcation Set Associated to the Copy Phenomenonn, in C. Zapatam Ed., Proceedings of the Rio de Janeiro 1981 Symposium on Holomorphy and Functional Analysis, North Holland 1983.

BIBLIOGRAFIA:

Anderson, James L.; Principles of Relativity Phisics, Academic Press, 1967.

Auslander, L., Mackenzie, R. E.; Introduction to Differetiable Manifolds; McGraw Hill, N. York, 1963.

Eguchy, T., Gilkey, Peter B., Hanson, A. J.; Physic Reports 66, 1980, 213 - 393.

Lichnerowicz, A.; Éléments de Calcul Tensoriel, Libraire Armand Colin, 1950.

Stenberg, S.; Lectures on Differntial Geometry, Pretice Hall, 1964.

LETTERE AL NUOVO CIMENTO VOL. 40, N. 16 18 Agosto 1984

A Generalization of Einstein's λ Transformation and Gravitational Copies (*).

F. A. DORIA

Interdisciplinary Research Program, Escola de Comunicação, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Av. Pasteur, 250, 22290 Rio de Janeiro RJ, Brasil

M. RIBEIRO DA SILVA and A. F. FURTADO DO AMARAL

Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro
CP 68528, 21944 Rio de Janeiro RJ, Brasil

(ricevuto il 5 Dicembre 1983; manoscritto revisionato ricevuto il 28 Maggio 1984)

PACS. 04.50. - Unified field theories and other theories of gravitation.

Summary. - We show that Einstein's Abelian λ transformation can be generalized in order to include a large class of gravitational and gauge field copies.

EINSTEIN (1) applied the λ-transformation in the context of his unified field theory: if $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ is a (general) linear connection, then its λ-transform is given by

$$\Gamma^{*\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} + \delta^\alpha_\beta \partial_\gamma \lambda \,, \tag{1}$$

where λ is a spacetime-defined function. Equation (1) is clearly an Abelian gauge transformation that can be formulated as follows in a more compact notation: let M be a space-time and let $L(M)$ be its bundle of linear frames. If we endow $L(M)$ with a linear affine connection Γ, eq. (1) becomes

$$\Gamma^* = \Gamma + \delta\lambda \cdot 1 \,, \tag{2}$$

where 1 is the identity in the linear group's Lie algebra $gl_{4,R}$. One then notices (2) that the Riemann and Ricci tensors $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ and $R_{\alpha\beta}$ are kept invariant under λ-trans-

(*) Partially supported by CNPq and FINEP.

(1) A. EINSTEIN and B. KAUFMAN: *Ann. Math. (Princeton)*, **62**, 128 (1955); A. EINSTEIN: *Relativistic theory of the nonsymmetric field*, in *The Meaning of Relativity*, Methuen, 1967. A version of the λ-transformation was used by H. EYRAUD in 1926 and by P. STRANEO in 1931. See on this M. A. TONNELAT: *Les théories unitaires de l'électromagnétisme et de la gravitation* (Gauthier-Villars, Paris, 1965), p. 287.

formations, that is

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}(\Gamma^*) = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}(\Gamma), \tag{3a}$$

$$R_{\alpha\beta}(\Gamma^*) = R_{\alpha\beta}(\Gamma). \tag{3b}$$

The λ-transformation is a gauge transformation, that is it can be implemented via the gauge action induced by

$$u(x) = \exp[\lambda(x)\cdot 1].$$

However, it is not in general induced by co-ordinate transformations. It thus gives rise to a particular class of co-ordinate copies within gravitational field theories (¹).

We show here that a slight generalization of the λ-transformation allows us to define a larger class of gauge and gravitational copies, the so-called *infinitesimal copies*. We can restrict our analysis to frame bundles, since the extension of our results to more general principal fibrations is immediate.

If we are given the two connections Γ and Γ^* for $L(M)$, let

$$R = d\Gamma + \tfrac{1}{2}[\Gamma\wedge\Gamma] \tag{4}$$

be Γ's curvature form. We say that Γ and Γ^* are copied connections for R, provided that

$$R(\Gamma) = R(\Gamma^*). \tag{5}$$

That equality implies that Γ and Γ^* must saitsfy

$$d\theta + \tfrac{1}{2}[\theta\wedge\theta] + [\Gamma\wedge\theta] = 0, \tag{6a}$$

where

$$\theta = \Gamma^* - \Gamma. \tag{6b}$$

If we write $\bar\Gamma = \Gamma + \frac{1}{2}\theta$, (6a) can be put into a nicer form,

$$d\theta + [\bar\Gamma\wedge\theta] = 0 \tag{7}$$

as a necessary and sufficient condition that Γ and Γ^* as above give rise to the same curvature form. If $[\theta\wedge\theta] = 0$, (7) (or (6a)) becomes

$$d\theta + [\Gamma\wedge\theta] = 0. \tag{8}$$

Both (7) and (8) are well-known integrability conditions. An approximate *sufficient* condition that makes eq. (6a) into (8) can be given as follows: suppose that $\Gamma^* - \Gamma = \varepsilon\theta$, where $\varepsilon > 0$, $\varepsilon^2 \simeq 0$ is a small positive constant. Then $(\varepsilon^2/2)[\theta\wedge\theta] \simeq 0$, and eq. (8) is valid up to $o(\varepsilon^2)$.

The Frobenius theorem (²) allows us to classify solutions for (8): suppose that θ^*

(¹) On this see P. P. SRIVASTAVA: *Gauge and nongauge curvature tensor copies*, preprint CBPF-NF-009/82, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (Rio de Janeiro 22290, RJ, Brasil, 1982).

(²) For the Frobenius theorem see, for example, S. STERNBERG: *Lectures on Differential Geometry* (Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1964).

$1 \leq a \leq p$, where $p = \dim gl_{4,R}$, is a collection of 1-forms that solve (8). Which conditions does that impose on Γ? We can reason as follows: let $k \leq p$ be such that all $\theta^m = 0$, $m > k$. We can split (8) into

(9a) $$d\theta^a + (\mathrm{Ad}\,\Gamma)^a_b \wedge \theta^b = 0\,, \qquad 1 \leq a \leq k\,,$$

(9b) $$(\mathrm{Ad}\,\Gamma)^m_b \wedge \theta^b = 0\,, \qquad m > k\,,$$

(9a) satisfies the integrability conditions in the Frobenius theorem, that is there exists a (possibly local) transformation $\Psi^a_b(x)$, $x \in M$ (where dependence is restricted to the base manifold due to equivariance of all objects involved) such that

(10) $$\theta^a = \psi^a_b\, d\beta^b\,.$$

If we take that condition into (9), we get

(11a) $$[\Gamma' \wedge d\beta] = 0\,,$$

(11b) $$\mathrm{Ad}\,\Gamma' = \Psi^{-1}(\mathrm{Ad}\,\Gamma)\Psi + \Psi^{-1}d\Psi$$

in matrix notation ($\mathrm{Ad}\,\Gamma$ reminds us that the values of Γ are to be taken in the Lie algebra's adjoint representation).

The transformation Ψ defines a new, possibly local, gauge, and in that gauge the relation between Γ and Γ^*, with the «infinitesimal copy» condition $\Gamma^* - \Gamma \simeq \varepsilon\theta$, can be written as

(12a) $$\Gamma^* = \Gamma + \varepsilon\, d\beta\,,$$

provided that

(12b) $$[\Gamma \wedge d\beta] = 0\,,$$

where β is a Lie-algebra–valued, locally defined, function. It is immediate that eq. (12a) generalizes the gravitational λ-transformation given by eq. (2); it is an Abelian gauge transformation that shows itself to be compatible with the fields non-Abelian structure in the particular gauge given by Ψ; eqs. (9) give the compatibility conditions. Under those conditions eqs. (12) keep the curvature and Ricci tensors invariant in Einstein's asymmetric field theory.

If we are now dealing with a general gauge field theory, with a finite-dimensional, semi-simple Lie group G as structure group, we can consider two situations. No co-ordinate transformation can induce (12a), and in general, as is an *Abelian* transformation, it cannot be implemented as a consequence of the bundle's non-Abelian structure group, unless the theory's symmetry group is a Lie subgroup $H \subset G$, with nontrivial centraliser in G, which we denote by K. In that particular case we can choose β to take values inside K, so that eq. (10b) is immediately satisfied ([6]).

([6]) F. A. Doria: *A bifurcation set associated to the copy phenomenon*, in G. Zapata (editor): *Proceedings of the Rio de Janeiro 1981 Symposium on Holomorphy and Functional Analysis* (North-Holland Co., Amsterdam, 1983).

As a second alternative we can embed a semi-simple G into a convenient general linear group GL_N. In that case semi-simplicity is lost within the embedding linear group and Abelian transformations like (2) or (12a) can be immediately implemented within the amplified bundle.

* * *

We wish to thank the referee for comments on the present paper. One of us (FAD) also wishes to thank Drs. M. Tavares d'Amaral, M. Sodré de Araujo Cabral and H. Piedade Jr. for the facilities provided for the completion of this work.

Direttore responsabile: RENATO ANGELO RICCI

Stampato in Bologna dalla Tipografia Compositori coi tipi della Tipografia Monograf

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 3-VIII-1984

Questo periodico è iscritto all'Unione Stampa Periodica Italiana