

18290 3029

EQUATION D'ETAT DE LA MATIERE DENSE  
ET TRANSITIONS DE PHASES \*

D. Vautherin

Division de Physique Théorique\*, Institut de  
Physique Nucléaire, F-91406 Orsay Cédex

\* Cours donné à l'Ecole de Physique Nucléaire  
et de Physique des Particules, Lyon 12-16 Sept. 1988

IPNO/TH 88-61

---

\* Laboratoire Associé au CNRS

50P

## I. INTRODUCTION

La connaissance de l'équation d'état  $P(\rho, T)$  de la matière à haute densité et haute température intervient dans de nombreux problèmes de physique et d'astrophysique. Ceci est le cas notamment lorsque l'on veut décrire l'effondrement des étoiles massives, les explosions de supernovae et la formation des étoiles à neutrons. En effet ces phénomènes mettent en jeu des densités voisines de la densité nucléaire  $\rho_0 = 0.17$  nucléons/fm<sup>3</sup> i.e.  $3 \times 10^{14}$  g/cm<sup>3</sup> et des températures de l'ordre de 1 à 10 MeV i.e.  $10^{10}$  à  $10^{11}$  K.

De la même façon, par collision de noyaux dans le domaine des énergies intermédiaires (quelques dizaines de MeV par nucléon au GANIL, 60 MeV par nucléon au CERN) il a été possible de produire des systèmes composites pour lesquels on possède de bonnes signatures de thermalisation, les températures correspondantes étant de l'ordre de plusieurs MeV. Par de telles expériences on espère être en mesure d'étudier l'équation d'état dans une région d'intérêt astrophysique. On espère également pouvoir explorer le diagramme de phase de la matière nucléaire. Etant donné que les forces nucléaires sont attractives à longue portée et répulsives à courte portée on s'attend à ce que ce diagramme soit du type Van der Waals avec équilibre possible entre une phase dense (ou liquide) et une phase diluée (phase vapeur), et existence d'un point critique (cf. calcul ci-dessous Sect.III).

Enfin par collision de noyaux dans le domaine des énergies ultrarelativistes (200 GeV par nucléon dans les expériences effectuées actuellement au CERN) on espère atteindre une densité d'énergie de l'ordre de quelques GeV par fm<sup>3</sup> (ou une température de l'ordre de 200 MeV) permettant de produire une nouvelle phase dans laquelle les quarks sont déconfinés : c'est le plasma de quarks et de gluons qui est le sujet de la présente école. Il est intéressant de remarquer que si l'on admet la cosmologie standard du big-bang, alors cette phase est produite dans les tout premiers instants de l'univers. En effet dans la cosmologie standard (qui suppose l'univers homogène, isotrope, décrit par la métrique de Robertson-Walker, avec une évolution adiabatique) le temps d'expansion  $t$  et la température  $T$  de l'univers sont reliés par les formules [1]

$$t = \frac{1}{2H} \quad H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_R \quad \rho_R c^2 = \frac{\pi^2}{30} g_s \frac{(kT)^4}{(hc)^3} \quad (1)$$

$$g_s = \sum_{i=B} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=F} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 \quad (2)$$

Dans ces formules  $H$  est la constante de Hubble,  $G$  la constante de gravitation,  $T$  la température des photons. Les sommes dans (2) portent sur les différentes espèces de particules présentes, de température  $T_i$  et de dégénérescence en spin  $g_i$ . La première somme concerne les bosons et la deuxième les fermions. En incluant pour l'univers primordial  $e^\pm$ ,  $\gamma$  et 3 familles de neutrinos avec  $T_i = T$  on obtient  $g_s = 2 + 7(4 + 3 \times 2) / 8 = 43/4$  ce qui donne d'après (1)

$$t = \left( \frac{45}{16\pi^3 g_s} \right)^{1/2} \frac{k M_P c^2}{(kT)^2} \simeq 1 \text{ sec} \left( \frac{1 \text{ MeV}}{kT} \right)^2 \quad (3)$$

où  $M_P$  est la masse de Planck  $M_P c^2 = 1.22 \times 10^{22}$  MeV soit  $t = 10^{-4}$  sec pour  $kT = 100$  MeV.

L'objet du présent cours sera de donner tout d'abord, dans la Section II, une introduction aux méthodes et aux outils de la mécanique statistique nécessaires pour décrire la matière à haute densité et haute température. Ces techniques seront illustrées ensuite dans le cas de deux calculs modèles simples. Le premier (Section III) concerne le calcul des propriétés thermiques de la matière nucléaire et une discussion des données expérimentales. Le deuxième (Section IV) est un calcul des propriétés de la matière de quarks à densité et température finie dans le modèle de Nambu et Jona-Lasinio. Pour des applications plus détaillées et des cas plus réalistes le lecteur est prié de se reporter aux contributions de J.P. Plaizot et A. Morel.

## II. RAPPELS DE MECANIQUE STATISTIQUE

Référence : R. Balian, Cours de Mécanique Statistique [2]

1) Opérateurs densité. i) En mécanique quantique l'état d'un système est décrit par un vecteur ket  $|\psi\rangle$  d'un espace de Hilbert, défini à une phase près. L'état du système peut également être décrit par son opérateur densité

$$D = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad (1)$$

qui satisfait  $D^\dagger = D$ , Trace  $D=1$  et  $D^2 = D$ .

La valeur moyenne d'une observable  $A$  est fournie par l'expression  $\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$  que l'on peut réécrire sous la forme

$$\langle A \rangle = \text{Trace}(DA). \quad (2)$$

ii) En mécanique statistique on s'intéresse à des cas plus généraux où l'état du système est connu incomplètement, et spécifié par un ensemble de kets possibles  $|\psi_n\rangle$ , de probabilités respectives  $p_n$  telles que l'on ait  $p_1 + p_2 + \dots = 1$ .

La donnée des  $p_n$ ,  $|\psi_n\rangle$  définit ce que l'on appelle un mélange statistique ou macroétat. La valeur moyenne d'une observable  $A$  dans un tel état est

$$\langle A \rangle = \sum_n p_n \langle\psi_n|A|\psi_n\rangle. \quad (3)$$

Cette valeur moyenne peut encore s'écrire sous la forme (2) à condition d'introduire la généralisation suivante de (1)

$$D = \sum_n |\psi_n\rangle p_n \langle\psi_n|. \quad (4)$$

Cet opérateur satisfait comme (1) les relations  $D^\dagger = D$ , Trace  $D=1$  mais pas  $D^2 = D$ . Il contient toute l'information nécessaire pour calculer les valeurs moyennes des résultats de la mesure d'une observable quelconque  $A$ .

iii) La notion de matrice densité est particulièrement commode lorsque l'on veut décrire l'état d'un sous système, comme il est montré dans le cours de R. Balian. A titre d'exemple considérons deux spins 1/2

et désignons par  $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$  l'espace des états correspondants. Supposons le système dans l'état de spin total nul  $(|+-\rangle - |-+\rangle) / \sqrt{2} = |\Psi\rangle$ . Il n'existe alors aucun ket de  $\mathcal{E}_1$  permettant de rendre compte des résultats de mesures effectuées sur le spin 1 seul. Par contre il existe une matrice densité  $D_1$  permettant d'y parvenir. Ses éléments de matrices sont définis par

$$\begin{aligned} \langle \sigma_1 | D_1 | \sigma'_1 \rangle &= \sum_{\sigma_2} \langle \sigma_1 \sigma_2 | D | \sigma'_1 \sigma_2 \rangle = \sum_{\sigma_2} \langle \sigma_1 \sigma_2 | \Psi \rangle \langle \Psi | \sigma'_1 \sigma_2 \rangle \\ &= \delta_{\sigma_1 \sigma'_1} / 2 \end{aligned} \quad (5)$$

Comme  $D_1 = D_1 / 2$  l'état correspondant n'est évidemment pas du type 1 i.e. pas un état pur.

iv) Dans ce qui suit nous aurons besoin de l'équation d'évolution de l'opérateur densité  $D$ . Cette équation d'évolution s'obtient simplement en utilisant la définition (4) et l'équation de Schrödinger qui fournit l'évolution des états  $|\Psi_n\rangle$ . Le résultat est l'équation suivante, appelée équation de Liouville-Von Neuman

$$i\hbar \frac{dD}{dt} = [H, D] \quad (6)$$

2) Entropie statistique. A chaque opérateur  $D$  on associe un nombre positif ou nul appelé information manquante ou entropie statistique définie par (voir la discussion donnée dans [2])

$$S = -k \text{Trace} (D \text{Log} D) = -k \sum_{n=1}^w p_n \text{Log} p_n . \quad (7)$$

Le choix de la constante  $k$  apparaissant dans cette formule est en principe arbitraire et le plus naturel consiste à prendre  $k=1$  comme ceci est le cas en théorie de la communication. Cependant pour faire coïncider  $k$  avec l'entropie des thermodynamiciens il est d'usage de prendre pour  $k$  la constante de Boltzmann. La fonctionnelle définie par (7) possède les propriétés intéressantes suivantes :

i) Le minimum de  $S$  est zéro, valeur qui n'est atteinte que pour un état pur

ii) La maximum de  $S$  pour des kets possibles appartenant à un sous espace de dimension  $w$  est  $k \text{Log} w$ . Ce maximum est atteint lorsque tous les kets sont équiprobables.

iii) Pour un système composé de deux sous systèmes 1 et 2 indépendants e.g.  $\langle \sigma_1, \sigma_2 | D | \sigma'_1, \sigma'_2 \rangle = \langle \sigma_1 | D_1 | \sigma'_1 \rangle \langle \sigma_2 | D_2 | \sigma'_2 \rangle$

l'entropie est additive i.e.  $S = \sum_{n,m} p_n q_m \text{Log} p_n q_m = S_1 + S_2$

iv)  $S$  est une fonctionnelle concave :  $S(\mu_1 D_1 + \mu_2 D_2) \geq$

$$\mu_1 S(D_1) + \mu_2 S(D_2) \quad , \quad \mu_1, \mu_2 \geq 0 \quad \mu_1 + \mu_2 = 1$$

v) L'entropie est conservée par l'équation d'évolution de Liouville Von Neuman. Elle augmente par contre d'après la propriété de concavité

iv) pour une évolution aléatoire e.g. une moyenne d'évolutions de type (6).

$S$  est une mesure du désordre lié à la distribution  $p_n$ . On peut imaginer d'autres mesures e.g.  $S = k \text{Trace} D (1-D) = k \times$

$\sum p_n (1-p_n)$  qui est aussi minimale pour un état pur. Par contre pour deux systèmes indépendants cette fonctionnelle conduirait à  $S(D) \neq S_1 + S_2$  ! Pour avoir la propriété d'additivité il faut que

$$S(p_i q_j) = S(p_i) + S(q_j) ,$$

et la seule fonctionnelle ayant cette propriété est (7).

### 3) Distributions d'équilibre

i) Comment choisir D ? La réponse à cette question est fournie par le postulat de désordre maximum : à l'équilibre thermique toutes les configurations accessibles sont équiprobables. En terme de matrice densité ceci signifie que parmi tous les D compatibles avec les contraintes connues sur le système (énergie, nombre de particules..) on doit choisir le macroétat conduisant au maximum de l'entropie.

ii) Ensemble microcanonique. Cet ensemble correspond au cas où l'énergie et le nombre de particules sont connus exactement. A titre d'exemple considérons N spins 1/2 dans un champ magnétique B et soit  $\Delta e$  la différence d'énergie entre niveaux de spin + et - le long de B. Cherchons la matrice densité du système à l'équilibre thermique sachant que son énergie est  $E_0 = m \times \Delta e$ . Comme il y a  $C_m^N = W$  configurations possibles, chacune d'entre elles en vertu du postulat i) a la même probabilité  $p = 1/W$ . La matrice densité D est donc

$$D = \frac{1}{W} \sum_{\sigma_1 \dots \sigma_N = \pm 1} |\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_N\rangle \langle \sigma_1 \dots \sigma_N| \delta(\sigma_1 + \dots + \sigma_N - 2m + N) \quad (8)$$

La distribution (8) s'appelle distribution d'équilibre microcanonique. Il est intéressant de remarquer que dans le cadre de l'exemple considéré le postulat de désordre maximum apparaît comme très naturel. En effet étant donné que nous avons W niveaux exactement dégénérés, notre système est sensible à des perturbations infinitésimales dont l'effet est de mélanger ces états au cours du temps.

iii) Ensemble canonique. Reprenons l'exemple ci-dessus de N spins 1/2 et supposons que nous nous intéressons à la matrice densité d'un seul spin 1/2. Cette fois le nombre de particules est connu exactement mais pas l'énergie E. On sait seulement que sa valeur moyenne est  $E_0/N$ . Cette situation - nombre de particules connu, énergie connue en moyenne - correspond à ce que l'on appelle l'ensemble canonique. Pour tenir compte de la contrainte sur  $E = \langle H \rangle$  nous introduisons un multiplicateur de Lagrange  $\beta$  et nous allons maximiser la fonctionnelle  $S(D)/k - \beta \text{Trace}(DH)$  où  $\beta$  a pour dimension l'inverse d'une énergie. En pratique il est d'usage d'introduire la fonctionnelle d'énergie libre

$$F(D) = \text{Trace}(DH) - \frac{1}{k\beta} S(D) \quad (9)$$

et de construire  $D$  en minimisant  $F$ . Le résultat est la distribution suivante

$$D = \frac{1}{Z_c(\beta)} \exp(-\beta H) \quad , \quad (10)$$

appelée distribution d'équilibre canonique. La constante de normalisation  $Z_c$ , appelée fonction de partition canonique, est introduite pour satisfaire la relation  $\text{Trace } D = 1$ . Elle vaut donc

$$Z_c(\beta) = \text{Trace} \exp(-\beta H) \quad . \quad (11)$$

Pour comprendre la signification du paramètre de Lagrange  $\beta$  considérons deux états d'équilibre voisins associés aux valeurs  $\beta$  et  $\beta + d\beta$ . Comme  $F$  est stationnaire on a  $\delta F = 0$  i.e.

$$\text{Trace}(H \delta D) = \delta S / k\beta \quad . \quad (12)$$

Or la variation de l'énergie  $\text{Trace } DH$  se compose de deux termes. L'un  $\text{Trace}(D \delta H)$  peut s'identifier au travail (variation des paramètres macroscopiques), l'autre  $\text{Trace}(H \delta D)$  à la chaleur  $\delta Q$  (partie de l'énergie stockée dans les états excités). La relation (12) peut donc s'écrire

$$k\beta \delta Q = \delta S \quad (13)$$

En comparant (13) avec le second principe  $\delta S = \delta Q/T$  on est amené à l'identification

$$\beta = 1/kT \quad (14)$$

iv) Ensemble grand canonique. Cet ensemble correspond au cas où l'énergie et le nombre de particules sont donnés en moyenne seulement. Pour tenir compte de ces deux contraintes on introduit deux multiplicateurs de Lagrange  $\beta$  et  $\alpha$  et on maximise  $S/k - \beta \langle H \rangle + \alpha \langle \hat{N} \rangle$ , ou (ce qui est équivalent) on minimise la fonctionnelle

$$A(D) = \text{Trace}(DH) - \frac{1}{k\beta} S(D) - \frac{\alpha}{\beta} \text{Trace}(DN) \quad (15)$$



appelée grand potentiel. En définissant la quantité

$$\mu = \alpha / \beta$$

appelée potentiel chimique, et en identifiant comme en iii)  $1/k\beta$  avec la température la fonctionnelle  $A$  s'écrit

$$A = E - T S(D) - \mu N \quad (16)$$

La minimisation de (15) conduit à la distribution

$$D = \frac{1}{Z_G} \exp(\alpha \hat{N} - \beta H) \quad (17)$$

appelée distribution d'équilibre grand canonique. La constante de normalisation  $Z_G$  (grande fonction de partition) est donnée par

$$Z_G = \text{Trace} \exp(\alpha N - \beta H) = \sum_{N,n} e^{\alpha N - \beta E_n(N)} \quad (18)$$

La trace porte cette fois sur tous les états de l'espace de Fock i.e. sur tous les états propres  $n$  de  $H$  et sur toutes les valeurs possibles du nombre  $N$  de particules.

v) Méthode variationnelle. Dans de nombreux problèmes on ne sait pas calculer exactement la distribution d'équilibre canonique ou grand canonique mais on connaît par contre une famille de matrices densité, assez simples pour faire les calculs, et suffisamment réaliste pour fournir une bonne approximation. Comment choisir  $D$  dans cette famille?

La réponse à cette question s'obtient en remarquant que le minimum de l'énergie libre (ou du grand potentiel) est effectivement atteint pour la distribution d'équilibre canonique (ou grand canonique). A partir des propriétés de l'entropie on peut en effet montrer que toute autre matrice densité conduit à une valeur supérieure de  $F$  (ou  $A$ ). En pratique il suffira donc de minimiser  $F$  ou  $A$  à l'intérieur de la famille considérée. La méthode d'approximation ainsi obtenue est appelée méthode variationnelle. Nous appliquerons cette méthode ci-dessous en prenant pour  $D$  une matrice densité de particules indépendantes.

4) Fonctions de partition. Les fonctions de partition canoniques  $Z_c$  et grand canoniques  $Z_G$  sont des outils très commodes pour calculer les propriétés thermiques et les grandeurs thermodynamiques d'un système. Dans l'ensemble canonique on a en particulier les formules suivantes à l'équilibre thermique

$$E = \text{Trace}(DH) = - \frac{\partial}{\partial \beta} \text{Log } Z_c, \quad F = - kT \text{Log } Z_c,$$

$$S = k \left( 1 - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \text{Log } Z_c \quad (19)$$

Dans l'ensemble grand canonique on a

$$E = - \frac{\partial}{\partial \beta} \text{Log } Z_G, \quad N = \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{Log } Z_G, \quad A = - kT \text{Log } Z_G,$$

$$S = k \left( 1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \text{Log } Z_G \quad (20)$$

La pression  $P$  (qui est la quantité qui nous intéresse pour obtenir l'équation d'état de la matière dense) est donnée par la dérivée de  $\text{Log } Z_G$  par rapport au volume  $\Omega$  (\*)

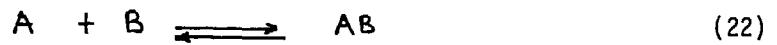
$$P = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \Omega} \text{Log } Z_G$$

Comme à la limite des grands volumes  $\text{Log } Z_G$  est une quantité extensive (i.e. proportionnelle à  $\Omega$  : c'est la condition même d'existence de la limite thermodynamique) on a la relation dite de Gibbs-Duhem

$$P = - A / \Omega \quad (21)$$

(\*) Pour obtenir cette formule il suffit de considérer une dilatation des états  $|\psi_n\rangle$  dans  $D = \sum p_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|$  soit  $\psi_n(\vec{r}) \longrightarrow \alpha^{3/2} \psi_n(\alpha \vec{r})$ . On a alors  $\delta S = 0$ ,  $\delta N = 0$ ,  $\delta A = \delta u$   
i.e.  $P = - \delta u / \delta \Omega = - \delta A / \delta \Omega$ .

Une application intéressante des fonctions de partition canoniques est le calcul des équilibres chimiques (ou réactions thermonucléaires dans le cas de la matière dense). Pour une réaction



les concentrations à l'équilibre  $n_A = N_A / \Omega$ ,  $n_B = N_B / \Omega$  ... satisfont en effet la loi d'action de masse

$$\frac{n_{AB}}{n_A n_B} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \frac{\tilde{Z}_{AB}(\beta)}{\tilde{Z}_A(\beta) \tilde{Z}_B(\beta)} e^{w_0/kT} \quad (23)$$

où  $m$  est la masse réduite  $m_A m_B / (m_A + m_B)$ ,  $w_0$  l'énergie dégagée dans la réaction  $w_0 = E_A + E_B - E_{AB}$  et  $\tilde{Z}_A$  la fonction de partition interne  $Z_A \exp(E_A/kT)$ .

5) Fermions libres. Le cas des fermions libres est une application particulièrement importante du formalisme précédent. En effet à haute densité les interactions deviennent négligeables et le principe de Pauli devient le mécanisme dominant pour le calcul de l'équation d'état. La façon la plus commode d'effectuer les calculs est d'utiliser le formalisme grand canonique pour lequel la contrainte due au principe de Pauli s'exprime le plus simplement. Considérons en effet des fermions indépendants dans un potentiel dont les niveaux, repérés par un indice  $i$ , ont pour énergie  $\epsilon_i$ . On a alors

$$\begin{aligned} Z_G(\alpha, \beta) &= \sum_{n_1, n_2, \dots = 0, 1} \exp \{ \alpha(n_1 + n_2 + \dots) - \beta(\epsilon_1 n_1 + \dots) \} \\ &= \prod_i (1 + \exp(\alpha - \beta \epsilon_i)) . \end{aligned} \quad (24)$$

Le nombre de particules, l'énergie et l'entropie sont donnés par

$$N = \sum_i f_i, \quad E = \sum_i \epsilon_i f_i, \quad S = -k \sum_i \{ f_i \log f_i + (1 - f_i) \log (1 - f_i) \}, \quad (25)$$

où  $f_i$  est le nombre d'occupation du niveau  $i$

$$f_i = \frac{1}{1 + \exp \beta(\epsilon_i - \mu)} . \quad (26)$$

Pour des fermions dans un boîte à la limite d'un grand volume la somme sur les états quantiques peut être remplacée par une intégrale i.e.

$$\sum_i \varphi(\epsilon_i) \rightarrow \int \varphi(\epsilon) \rho(\epsilon) d\epsilon . \quad (27)$$

Pour un gaz de fermions non relativiste la densité de niveaux  $\rho(\epsilon)$  est

$$\rho(\epsilon) = \frac{g \cdot 2}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} , \quad g = \text{dégénérescence en spin} . \quad (28)$$

Le grand potentiel est donné par

$$A = - \int \mathcal{W}(\epsilon) \rho(\epsilon) d\epsilon , \quad (29)$$

où  $\rho(\epsilon) = 1 / (1 + \exp(\beta(\epsilon - \mu)))$  et où  $\mathcal{W}(\epsilon)$  est le nombre de niveaux d'énergie inférieure ou égale à  $\epsilon$

$$u(E) = \int_0^E \varphi(E') dE' = \frac{g\Omega}{6\pi^2} \left( \frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{3/2} \quad (30)$$

Le potentiel chimique de température nulle, appelé énergie de Fermi  $\varepsilon_F$ , joue un rôle important. Il est défini par :

$$N = \int f(E) \varphi(E) dE = \int_0^{\varepsilon_F} \varphi(E) dE = u(\varepsilon_F) \quad (31)$$

ou encore en utilisant (28)

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} k_F^2, \quad k_F = \left( \frac{6\pi^2}{g} \frac{N}{\Omega} \right)^{1/3}. \quad (32)$$

La quantité  $k_F$  est appelée moment de Fermi. A l'aide de 21,29 et 30 on obtient l'expression suivante de la pression à température nulle

$$P = \frac{g}{5} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{6\pi^2}{g} \right)^{2/3} \left( \frac{N}{\Omega} \right)^{5/3} = \frac{g}{5} \frac{N}{\Omega} \varepsilon_F. \quad (33)$$

### 6) Equivalence entre ensembles

Les fonctions de partition dans les différents ensembles sont reliées par des transformations de Laplace. Par exemple la grande fonction de partition  $Z(\alpha, \beta)$  est reliée à la densité d'états  $\rho(E, N)$  du système de  $N$  particules d'énergie  $E$  par la relation

$$Z(\alpha, \beta) = \int dE dN \rho(E, N) \exp(\alpha N - \beta E) \quad (34)$$

La quantité  $\rho(E, N)$  est définie par

$$\rho(E, N) = \sum_{n, A} \delta(E_n(A) - E) \delta(N - A) \quad (35)$$

où  $E_n(A)$  est l'énergie du  $n$ -ième niveau du système à  $A$  particules et le logarithme de  $\rho(E, N)$  est l'entropie microcanonique pour  $E$  et  $N$  donné. Par inversion de (34) on obtient

$$\rho(E, N) = \left( \frac{1}{2\pi i} \right)^2 \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\alpha \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\beta \exp \{ \beta E - \alpha N + \text{Log } Z(\alpha, \beta) \}$$

Lorsque  $E$  et  $N$  sont grands l'intégrand oscille rapidement et la contribution dominante provient du point  $\alpha_0, \beta_0$  appelé col où l'argument de l'exponentielle est stationnaire i.e.

$$E = - \frac{\partial}{\partial \beta} \text{Log } Z(\alpha_0, \beta_0) \quad N = \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{Log } Z(\alpha_0, \beta_0)$$

En développant  $\text{Log } Z(\alpha, \beta)$  au second ordre autour de ce point il vient

$$\rho(E, N) = (1 / 2\pi \sqrt{D}) \exp S_0 \quad (38)$$

où  $S_0$  est l'entropie grand canonique

$$S_0 = \left( 1 - \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \beta \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \text{Log } Z(\alpha, \beta) \quad (39)$$

calculée au point  $\alpha_0, \beta_0$  et où  $D$  est le déterminant de la matrice 2x2 des dérivées secondes de  $\text{Log } Z(\alpha, \beta)$  en  $\alpha_0, \beta_0$ . L'équation (38) a la conséquence importante suivante. Si  $\text{Log } Z$  est une quantité extensive (voir e.g. (29) et (30) alors les valeurs de l'entropie dans

les ensembles microcanoniques et grand canoniques sont les mêmes à la limite des grands volumes  $\Omega$ . Ce résultat s'obtient immédiatement en prenant les logarithmes des deux membres de (32) et en retenant les termes dominants en  $\Omega$ . Il se généralise au cas d'autres grandeurs physiques macroscopiques et d'autres ensembles. Pour des systèmes finis comme les noyaux atomiques l'équivalence précédente n'est pas exacte. Un exemple est donné sur la figure 1 qui donne la densité de niveaux du calcium-40 calculée dans un modèle de particules indépendantes en formalisme canonique (dénombrement exact des configurations comprises dans un intervalle de 1 MeV) et un formalisme grand canonique (formules 25 et 38) [3]. On voit que, bien que l'on ait affaire à un système petit à l'échelle des nombres de l'ordre de

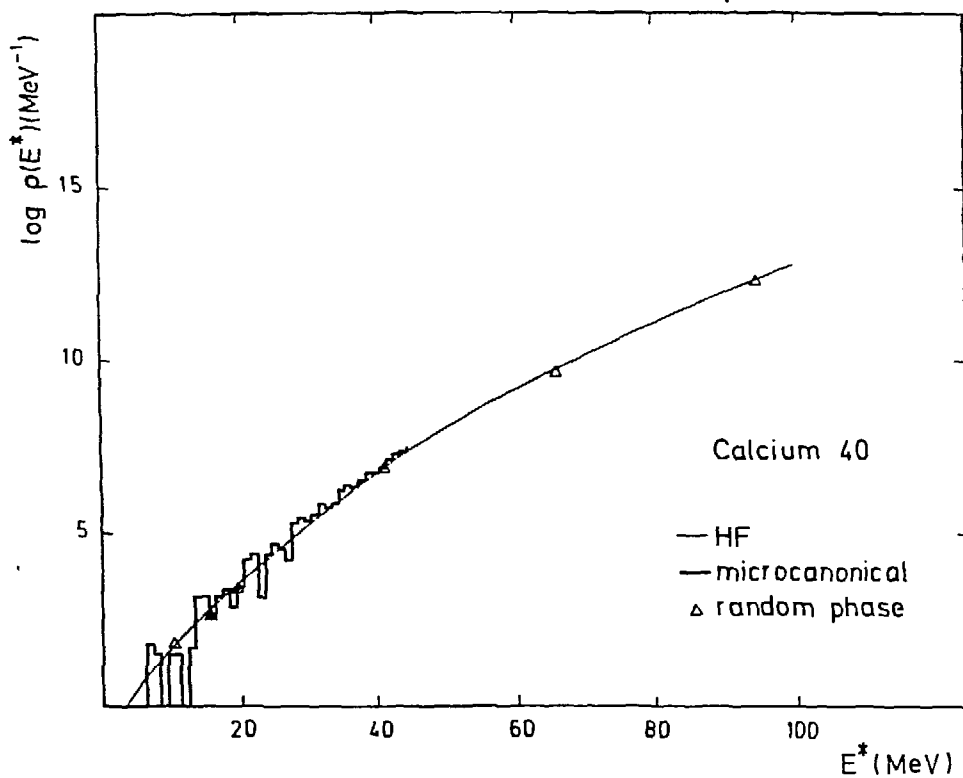


Fig. 1 - Densité de niveaux du calcium-40 calculée formalisme microcanonique (trait plein) et grand canonique (trait fin).

$10^{23}$  rencontrés habituellement en thermodynamique, l'accord entre les deux calculs est excellent dès que l'énergie d'excitation dépasse 20 MeV. Cette énergie correspond à une température  $T = (\partial S / \partial E)^{-1}$  de l'ordre du MeV.



### III. PROPRIETES THERMIQUES DE LA MATIERE NUCLEAIRE

L'objet de ce chapitre est d'étudier à l'approximation de champ moyen les propriétés de la matière nucléaire. Parmi les questions que nous examinerons figurent les suivantes. Jusqu'à quelle température peut-on chauffer un noyau sans qu'il se vaporise? Quelle est la chaleur spécifique des noyaux? Ces questions interviennent notamment lorsque l'on veut décrire l'effondrement des étoiles massives, processus au cours duquel il est nécessaire de savoir quelle quantité d'énergie peut être stockée dans les états excités des noyaux. Par ailleurs comme pour tout système avec forces attractives à longue portée et répulsives à courte portée on s'attend à ce que les interactions conduisent à un phénomène qualitativement nouveau à basse densité à savoir un équilibre de phases. Nous étudierons les conditions d'équilibre de ces phases et chercherons à déterminer le point critique du diagramme correspondant. Nous discuterons enfin le lien entre les prédictions ainsi obtenues et les résultats d'expériences récentes de production de noyaux chauds par collision d'ions lourds.

i) Le modèle. La densité à l'intérieur des noyaux atomiques est pratiquement constante et la valeur correspondante  $\rho_0 = 0.17$  nucléons/fm<sup>3</sup> est presque la même pour tous les noyaux : c'est la propriété dite de saturation des forces nucléaires. Ce que nous appellerons matière nucléaire correspond au cas d'un noyau ayant un nombre égal de neutrons et protons dont la masse  $A$  tend vers l'infini avec une densité  $\rho_0$  constante. Bien que cette limite n'existe pas dans la nature (à cause des forces coulombiennes qui croissent comme le carré du nombre  $Z$  de protons), elle est cependant d'un intérêt qui n'est pas du tout uniquement académique. En effet pour de nombreuses propriétés nucléaires il est possible d'extraire un terme de volume, un terme de surface, et d'isoler la contribution coulombienne et donc d'obtenir des valeurs "expérimentales" pour la matière nucléaire. C'est ce système dont nous allons maintenant calculer les propriétés :  $A/2$  neutrons et  $A/2$  protons en interaction par l'intermédiaire des seules forces nucléaires dans un volume  $\Omega$  à la limite d'une densité  $\rho = A/\Omega$  fixée et  $\Omega$  tendant vers l'infini.

ii) Interaction effective nucléon-nucléon.

Afin d'obtenir des calculs aussi simples que possible nous allons utiliser une interaction effective de la forme considérée par Jaqaman et al [4]

$$U(r_{12}) = \left\{ t_0 + \frac{t_3}{6} \rho^\sigma \left( \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \right) \right\} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1)$$

où  $\rho(\vec{r})$  est la densité du noyau au point  $\vec{r}$ . Le premier terme simule la partie attractive à longue portée et le second terme, important seulement à haute densité, la partie répulsive à courte portée des forces nucléaires. Cette interaction contient trois paramètres  $t_0$ ,  $t_3$ ,  $\sigma$  que l'on peut ajuster sur les caractéristiques suivantes de la matière nucléaire 1) sa densité d'équilibre  $\rho_0 = 0.17$  nucléons/ $\text{fm}^3$  2) son énergie de liaison par nucléon  $B/A = 16$  MeV 3) son module d'incompressibilité  $K = -9 \rho^2 \partial^2(B/A) / \partial \rho^2 = 220$  MeV (Blaizot [5]). On obtient ainsi

$$t_0 = -2133.4 \text{ MeV} \times \text{fm}^3, \quad t_3 = 14070.4 \text{ MeV} \times \text{fm}^{15/4}, \quad \sigma = 1/4. \quad (2)$$

On peut remarquer que pour ces valeurs des paramètres le deuxième terme est comparable au premier dès  $\rho = \rho_0$  ( $\rho_0^{1/4} \approx 0.64 \text{ fm}^{-3/4}$ )

iii) L'approximation de champ moyen.

L'approximation que nous allons utiliser pour effectuer les calculs est l'approximation de champ moyen dont le principe est que les nucléons évoluent indépendamment les uns des autres dans un champ central créé par la somme des interactions d'un nucléon avec les autres nucléons du noyau. Si tel est le cas le noyau peut être décrit par une matrice densité  $\exp(-\beta H)$  de particules indépendantes i.e. par l'exponentielle d'un opérateur à un corps. Ceci nous conduit à appliquer la méthode variationnelle avec une famille de matrices densité d'essai de la forme

$$D = \frac{1}{Z} \exp \left( - \sum_{ij} M_{ij} a_i^\dagger a_j \right) \quad (3)$$

où  $a_i^\dagger$  et  $a_i$  sont les opérateurs de création et de destruction d'un nucléon dans un état  $i$ . Nous désignerons dans ce qui suit par  $\varphi_i(\vec{r})$  la fonction d'onde de cet état.

On peut toujours supposer la matrice  $M$  diagonale

$$M_{ij} = m_i \delta_{ij} \quad (4)$$

Ceci ne conduit pas en effet à une réduction de l'espace variationnel (3). Pour la matrice densité (3) la constante de normalisation est

$$Z = \text{Trace} \exp \left( - \sum_{ij} M_{ij} a_i^\dagger a_j \right) = \det (1 + e^{-M}) \quad (5)$$

Les nombres d'occupation  $f_i$  sont donnés par

$$f_{ij} = \text{Trace} (D a_i^\dagger a_j) = \left( \frac{1}{1 + \exp M} \right)_{ij} = f_i \delta_{ij} \quad (6)$$

et l'entropie correspondante est

$$\begin{aligned} S &= -k \text{Trace} (D \text{Log} D) = -k \left( \sum_i m_i f_i + \text{Log} Z \right) \\ &= -k \sum_i \{ f_i \text{Log} f_i + (1 - f_i) \text{Log} (1 - f_i) \} \end{aligned} \quad (7)$$

Nous allons maintenant, conformément à la procédure décrite dans le Chapitre II, construire le grand potentiel  $A(D)$  et minimiser la fonctionnelle correspondante par rapport aux paramètres variationnels à savoir

- 1) les coefficients  $m_i$  apparaissant dans (4)
- 2) les fonctions d'onde individuelles  $\varphi_i(\vec{r})$

iv) Calcul et minimisation du grand potentiel

En seconde quantification l'hamiltonien du système s'écrit

$$H = \int d\vec{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla} \psi^\dagger(\vec{r}) \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}) + (\psi^\dagger(\vec{r}) \psi(\vec{r})) \left( t_0 + \frac{t_3}{6} \rho^\sigma(\vec{r}) \right) \right\} \quad (8)$$

où  $\psi^\dagger(\vec{r})$  est l'opérateur de création d'un nucléon au point  $\vec{r}$

En écrivant explicitement les variables de spin  $\sigma$  et d'isospin  $\tau$

$$\psi^+(\vec{r}, \sigma, \tau) = \sum_i \varphi_i^*(\vec{r}, \sigma, \tau) a_i^+ \quad (9)$$

Dans (8)  $\rho(\vec{r})$  est la densité de nucléons

$$\rho(\vec{r}) = \text{Trace}(\mathcal{D} \psi^+(\vec{r}) \psi(\vec{r})) = \sum_{i, \sigma, \tau} f_i |\varphi_i(\vec{r}, \sigma, \tau)|^2 \quad (10)$$

Pour calculer la valeur moyenne de  $H$  on utilise le théorème de Wick généralisé [6] selon lequel

$$\text{Trace}(\mathcal{D} a_i^+ a_j a_e a_k) = f_{ik} f_{je} - f_{ie} f_{jk} \quad (11)$$

ce qui conduit à

$$\text{Trace} \{ \mathcal{D} (\psi^+(\vec{r}) \psi(\vec{r}))^2 \} = 3 \rho^2(\vec{r}) / 4 \quad (12)$$

et à l'expression suivante de l'énergie

$$\begin{aligned} \text{Trace}(\mathcal{D} H) &= \int \mathcal{H}(\vec{r}) d\vec{r} \quad , \\ \mathcal{H} &= \frac{\hbar^2}{2m} \tau(\vec{r}) + \frac{3}{8} t_0 \rho^2(\vec{r}) + \frac{1}{16} t_3 \rho^{2+\sigma}(\vec{r}) \quad (13) \end{aligned}$$

Dans cette équation  $\tau(\vec{r})$  est la densité d'énergie cinétique

$$\tau(\vec{r}) = \text{Trace}(\mathcal{D} \vec{\nabla} \psi^+(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi(\vec{r})) = \sum_{i, \sigma, \tau} f_i |\vec{\nabla} \varphi_i(\vec{r}, \sigma, \tau)|^2 \quad (14)$$

On peut remarquer que les facteurs  $3/4$  apparaissant dans (13) via (12) sont une manifestation du Principe de Pauli. En effet les interactions d'un nucléon au point  $\vec{r}$ ,  $\sigma$ ,  $\tau$  avec un autre nucléon en  $\vec{r}'$ ,  $\sigma'$ ,  $\tau'$  n'existent que pour trois des quatre combinaisons possibles des variables  $\sigma'$ ,  $\tau'$  : la combinaison  $\sigma' = \sigma$  et  $\tau' = \tau$  est exclue par le principe de Pauli.

Ecrivons maintenant que le grand potentiel  $A$  est stationnaire, i.e. que

$$\delta A / \delta m_i = 0 \quad \delta A / \delta \varphi_i = 0$$

Ces équations conduisent à

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) \right) \varphi_i(r) = \varepsilon_i \varphi_i(r) , \quad (15)$$

$$f_i = \frac{1}{1 + \exp(\beta \varepsilon_i - \alpha)} \quad \text{i.e.} \quad m_i = \beta(\varepsilon_i - \mu) , \quad (16)$$

$$U(r) = \frac{3}{4} t_0 \rho(r) + \frac{2+\sigma}{16} t_3 \rho^{1+\sigma}(r) , \quad (17)$$

où, dans l'équation (16), nous avons introduit le potentiel chimique  $\mu = \alpha/\beta$ . La valeur de  $\mu$  s'obtient en écrivant que le nombre total de particules est A

$$\sum_i f_i = A . \quad (18)$$

v) Cas de la matière nucléaire

Dans ce cas la solution de l'équation (15) pour les fonctions individuelles est une onde plane

$$\varphi_i(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}) . \quad (19)$$

Les énergies à une particule  $\varepsilon_i$  sont alors données par la condition de quantification

$$k_x = \ell \, 2\pi/L , \quad k_y = m \, 2\pi/L , \quad k_z = n \, 2\pi/L , \quad (20)$$

où  $\ell, m, n$  sont des entiers quelconques et où le volume de quantification est un cube d'arête  $L = \Omega^{1/3}$ . En insérant (19) dans (15) on a

$$\varepsilon_{\ell mn} = \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + U \quad (21)$$

Le potentiel chimique  $\mu$  est déterminé par l'équation (18). A la limite des grands volumes pour laquelle on peut effectuer la substitution

$$\sum_i \rightarrow g \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \int d\vec{k}$$

(avec cette fois  $g=4$  : il y a deux états de spin et deux états d'isospin possibles). Cette équation s'écrit

$$\rho = (1/\Omega) \sum_i f_i$$

$$= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{1}{1 + \exp\{-\alpha + \beta(u + \frac{\hbar^2}{2m} k^2)\}} \quad (22)$$

En introduisant la fonction de Fermi

$$F_k(x) = \frac{e}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty du u^{k-1} / (\exp(u+x) + 1), \quad (23)$$

et la longueur d'onde thermique

$$\lambda = \left( \frac{m}{2\pi \hbar^2 \beta} \right)^{-1/2}, \quad (24)$$

l'équation (22) devient

$$\rho = g \lambda^{-3} F_{3/2}(\beta u - \alpha) \quad (25)$$

De la même façon on obtient pour la densité d'énergie cinétique l'expression suivante

$$\tau = (1/\Omega) \sum_i f_i k_i^2 = 4\pi g \lambda^{-5} F_{5/2}(\beta u - \alpha). \quad (26)$$

Le mode d'emploi de ces équations est le suivant : connaissant  $\rho$  et  $T$  on déduit la valeur de la densité d'énergie cinétique  $\tau$  en éliminant la quantité  $\beta u - \alpha$  entre les équations 25 et 26. Ceci permet ensuite de calculer toutes les grandeurs caractéristiques du système: énergie (eq.13), entropie... De 5,6 et 16 on déduit en effet après intégration par parties la valeur suivante de  $\text{Log } Z$

$$\text{Log } Z = \frac{e}{3} \frac{\hbar^2}{2m} \tau \Omega / kT, \quad (27)$$

qui entraîne d'après (7a)

$$\frac{TS}{\Omega} = \frac{5}{3} \frac{\hbar^2}{2m} \tau + \rho(u - \mu) \quad (28)$$

vi) Equation d'état à la limite de haute température

Cette limite est intéressante dans la région du point critique où elle permet d'obtenir des expressions analytiques simples. Elle correspond au cas où la longueur d'onde thermique  $\lambda$  (eq.24) est beaucoup

plus petite que  $\rho^{-1/3}$  i.e. au cas où l'argument  $x$  de la fonction de Fermi est grand. Il est alors approprié d'utiliser le développement suivant de la fonction de Fermi

$$F_{\frac{3}{2}}(x) = \frac{e}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{3}{2}) \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \exp(-nx) / n^{\frac{3}{2}}. \quad (29)$$

En ne gardant que les deux premiers termes on a

$$F_{3/2} \approx e^{-x} - e^{-2x} / 2\sqrt{2},$$

$$e^{-x} \approx \lambda^3 \rho / g + (\lambda^3 \rho / g)^2 / 2\sqrt{2},$$

$$F_{5/2} \approx 3(e^{-x} - e^{-2x} / 4\sqrt{2}) / 2,$$

$$\tau \approx 6\pi \rho / \lambda^2 + 3\pi \lambda \rho^2 / 2g\sqrt{2}.$$

Ceci conduit pour la pression  $P = -(E - TS - \mu N) / \Omega$  à l'expression suivante

$$P = \rho kT + \left(\frac{2\pi k^2}{m}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{kT}} \frac{\rho^2}{4g\sqrt{2}} + \frac{3}{8} t_0 \rho^2 + \frac{1+\sigma}{16} t_3 \rho^{2+\sigma}. \quad (30)$$

Le premier terme de (30) correspond au cas d'un gaz parfait. Le second représente un accroissement de la pression dû au principe de Pauli et dont l'importance par rapport au premier  $\rho \lambda^3 / 4g\sqrt{2}$  est faible si  $\lambda$  est petit. Pour  $\rho \leq \rho_0$  et  $T \gg 4$  MeV il a été trouvé par Jaqaman et al. [4] que la formule (30) est une bonne approximation: elle s'écarte de moins de 3 pour cent des valeurs exactes calculées à l'aide de fonctions de Fermi.

Le réseau d'isothermes fourni par l'équation (30) est dessiné sur la figure 2. Ce réseau a l'aspect général suivant. A basse densité la contribution du gaz parfait  $\rho kT$  domine, puis la pression est réduite par le terme attractif  $t_0$ . Enfin à grande densité le terme répulsif en  $t_3$  domine. Pour une température  $T$  suffisamment petite le terme d'attraction  $t_0$  produit ainsi une poche dans la ligne isotherme correspondante. Lorsque la température croît le terme  $\rho kT$  devient de plus en plus important ce qui a pour effet de combler la poche précédente, laquelle disparaît pour une température critique  $T = T_c$ .

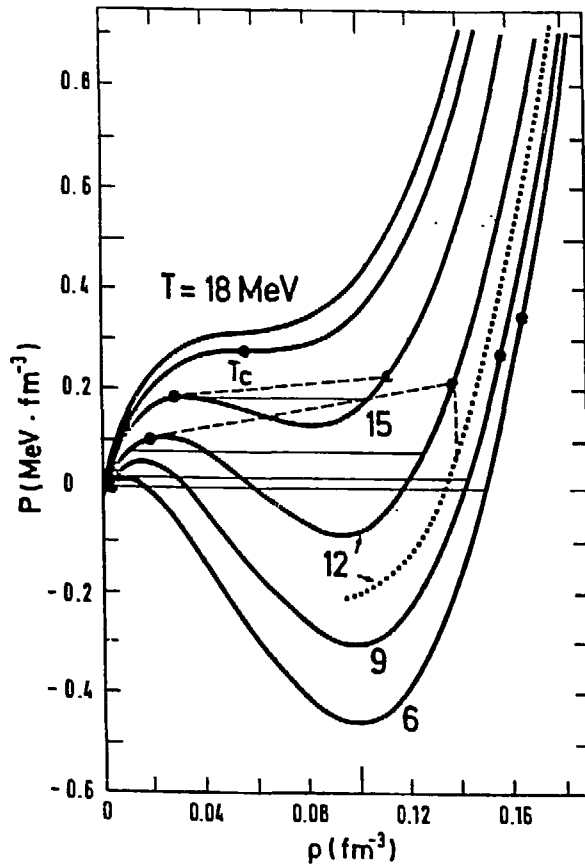


Figure 2. Réseau d'isothermes obtenu à partir de l'équation (30) pour les valeurs (2) des paramètres (d'après Bonche [7]).

Pour les valeurs des paramètres  $t_0$ ,  $t_3$  et  $\sigma$  donnés plus haut on trouve  $T_c = 17 \text{ MeV}$ . La valeur de la densité au point d'inflexion qui apparaît à cette température est  $\rho_c = 0.057 \text{ nucléons}/\text{fm}^3$  [7]

#### vii) Equilibre des phases

Il existe dans le diagramme de la Figure 2 des régions où  $dP/d\rho < 0$  ce qui implique que la pression décroît lorsque la densité augmente. Ceci est le signe d'une instabilité du système : la configuration de densité constante ne correspond en fait pas au minimum de l'énergie libre. Pour le voir considérons une autre configuration de  $A$  nucléons



dans un volume  $\Omega$  dans laquelle une fraction  $\Omega_1 = x\Omega$  du volume  $\Omega$  est occupée par  $A_1$  nucléons avec une densité uniforme  $\rho_1 = A_1/\Omega_1$ , le volume restant ayant pour densité  $\rho_2 = (A - A_1)/(\Omega - \Omega_1)$ .  
L'énergie libre totale est

$$F = F_0(T, A_1, \Omega_1) + F_0(T, A_2, \Omega_2), \quad (31)$$

où  $F_0$  est l'énergie libre calculée pour un système uniforme. Cherchons le minimum de  $F$  par rapport à  $A_1$  et  $\Omega_1$ . On obtient ainsi

$$\frac{\partial F_0}{\partial A_1} - \frac{\partial F_0}{\partial A_2} = 0 \quad \text{i. e.} \quad \mu_1 = \mu_2 \quad (32)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \Omega_1} - \frac{\partial F_0}{\partial \Omega_2} = 0 \quad \text{i. e.} \quad P_1 = P_2$$

On voit que si  $P(\rho)$  est une fonction monotone de  $\rho$  alors l'équation (32) n'a qu'une solution  $x(1-x)=0$ . Par contre pour  $T < T_c$  il est possible de trouver une solution de (32) correspondant à un équilibre de deux phases, dont les densités sont données par la règle de Maxwell. Selon cette règle l'équation  $\mu_1 = \mu_2$  est équivalente à l'égalité des surfaces délimitées dans le plan  $P, \sigma$  (où  $\sigma = 1/\rho$  est le volume spécifique) par l'isotherme  $P(\sigma, T)$  et la droite  $P = P_0$  i.e.

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} P(\sigma, T) d\sigma - (\sigma_2 - \sigma_1) P_0 = 0. \quad (33)$$

Cette relation s'établit en écrivant la relation  $\mu_1 = \mu_2$  comme

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\partial \mu(\rho, T)}{\partial \rho} d\rho = 0,$$

puis en utilisant la relation de Gibbs-Duhem pour  $\mu$ .

#### viii) Effets coulombiens et de taille finie [7].

Le calcul qui vient d'être fait néglige les effets de Coulomb et de taille finie qui ne peuvent pas être omis pour décrire de véritables noyaux. Que se passe-t-il lorsque l'on inclut ces effets? Peut-on encore espérer pouvoir chauffer un noyau jusqu'à  $T=17$  MeV

comme le suggère le diagramme de la figure 2? Pour répondre à cette question nous allons reprendre l'étude précédente d'une configuration de  $A$  nucléons dans une sphère de volume  $\Omega = 4\pi R^3/3$ . Nous supposons que la fraction de  $\Omega$  contenue dans la sphère  $r \leq R\alpha^{1/3}$  est dans une phase dense (noyau) de densité  $\rho_n = A_1/\alpha\Omega$ , les nucléons restants étant dans une phase diluée (vapeur) contenue dans la couronne  $\alpha^{1/3}R \leq r \leq R$  de densité  $\rho_\sigma = (A - A_1)/(1-\alpha)\Omega$ . Pour décrire l'énergie libre  $F_n$  de la phase noyau nous allons maintenant envisager une somme de trois termes correspondant aux effets de volume, surface et Coulomb [7]

$$F_n(T, A_1, \Omega_1) = F_0(T, A_1, \Omega_1) + \alpha(T) 4\pi R^2 \alpha^{2/3} + \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{R \alpha^{1/3}},$$

où  $Z = A/2$  est le nombre de protons et  $\alpha(T)$  la tension superficielle du noyau, dont une bonne paramétrisation est donnée par la formule [8]

$$\alpha(T) = \alpha_0 \left(1 + \frac{3T}{2T_c}\right) \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{3/2}, \quad \alpha_0 = 1.14 \text{ MeV} \times \text{fm}^{-2}. \quad (34)$$

Pour la phase vapeur nous retiendrons uniquement le terme de volume  $F_0(T, A - A_1, (1-\alpha)\Omega)$  (en principe les termes coulombiens y seraient petits dans un modèle plus réaliste où la vapeur serait constituée surtout de neutrons qui n'ont pas à franchir la barrière coulombienne). En écrivant que l'énergie libre est stationnaire par rapport à  $A_1$  et  $\Omega_1$  il vient

$$\begin{aligned} \rho_n + \left(\frac{4\pi}{3} \frac{\rho_n}{A}\right)^{1/3} \left(\frac{Z^2 e^2}{5A} \rho_n - 2\alpha(T)\right) &= \rho_\sigma, \\ \mu_n + \left(\frac{4\pi}{3} \frac{\rho_n}{A}\right)^{1/3} \frac{6}{5} \frac{Z^2}{A} e^2 &= \mu_\sigma. \end{aligned} \quad (35)$$

On voit que l'interaction Coulombienne produit un accroissement de la pression de la phase noyau alors que la tension superficielle la réduit. Le déplacement correspondant de l'équilibre des phases a été étudié par Bonche et Levit [7] en fonction de la masse  $A$  du noyau. La température limite  $T_c$  qu'ils obtiennent pour l'équilibre entre phases est dessinée en fonction de  $A$  sur la figure 3.

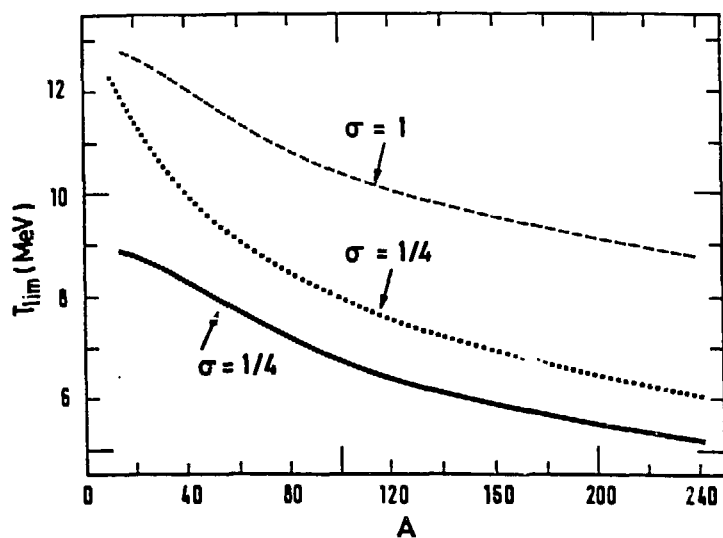


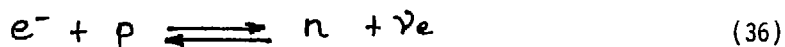
Figure 3. Température limite  $T_e$  pour l'équilibre entre phases décrit par les formules (35), en fonction de la masse A du noyau (d'après [7]).

On peut voir sur cette figure que  $T_e$  est appréciablement plus petite que pour la matière nucléaire ce qui montre l'importance des effets de Coulomb. On peut voir également que  $T_e$  décroît avec A ce qui est aussi un effet lié aux forces coulombiennes. Les résultats de ce calcul modèle sont en bon accord avec des calculs plus élaborés effectués à l'aide de la méthode de champ moyen [9].

ix) Noyaux chauds produits lors des effondrements d'étoiles.

Des calculs d'équilibre entre phases ont également été effectués pour obtenir l'équation d'état de la matière dense qui est produite lors de l'effondrement des étoiles massives [10,11]. Dans ce cas la matière est composée d'électrons et de noyaux en équilibre avec une vapeur de nucléons. Bien que ce système ressemble beaucoup à celui que nous venons d'étudier, il existe en fait une différence importante liée à la présence des électrons. La raison est que les électrons ayant une masse 2000 fois plus faible que les nucléons,

leur potentiel chimique croit très vite avec la densité. Ceci a pour effet de déplacer l'équilibre



dans le sens d'une neutronisation de la matière. Cette réaction a lieu aussi longtemps que les neutrinos produits par la réaction (36) peuvent s'échapper i.e. aussi longtemps que leur libre parcours moyen est grand par rapport à la taille du système. Cette condition est remplie jusqu'à des densités de l'ordre de  $10^{12}$  g/cm<sup>3</sup> : au delà de cette valeur les diffusions cohérentes neutrinos-noyaux sont suffisamment efficaces pour piéger les neutrinos à l'intérieur de l'étoile. Il en résulte alors une importante simplification pour la description du processus d'effondrement. En effet, tous les processus de production de désordre (i.e. de transition vers des états nucléaires excités) étant bloqués, l'entropie par nucléon  $S/A$  devient une constante du mouvement. Il en est de même pour le rapport du nombre  $Z$  de protons au nombre total  $A$  de nucléons. Les valeurs  $Z/A$  et  $S/A$  au moment du piégeage des neutrinos ont été estimées par Bethe et al [12] avec le résultat  $Z/A \simeq 1/4$  à  $1/3$  et  $S/A \simeq 1$ . L'effondrement produit donc des noyaux très fortement asymétriques, pour lesquels il est exclu d'obtenir une information expérimentale quelconque concernant leurs propriétés thermiques et plus précisément leurs fonctions de partition. Il est donc nécessaire de recourir à une description microscopique de l'équilibre noyau-vapeur utilisant explicitement l'interaction effective de deux nucléons. Des calculs de ce type ont été effectués dans le cadre des approximations de champ moyen [11] et de Thomas-Fermi [13,14]. Ces calculs suggèrent que dans la région des densités comprises entre la densité nucléaire  $\rho_0$  et  $\rho_0/10$  la matière est un cristal constitué de noyaux très lourds pouvant contenir de l'ordre de mille nucléons. De tels noyaux n'existent pas sur terre mais peuvent exister dans la matière dense grâce aux électrons qui écrantent la répulsion coulombienne entre protons. A quoi ressemblent ces noyaux? Leurs densités de neutrons et de protons, calculées par la méthode de champ moyen pour différentes valeurs de la densité  $\rho$  sont dessinées sur la figure 4. Cette figure correspond à une entropie  $S/A=1$  et une fraction de protons  $Z/A=1/4$ . Elle donne également la position du noyau adjacent à l'intérieur du cristal

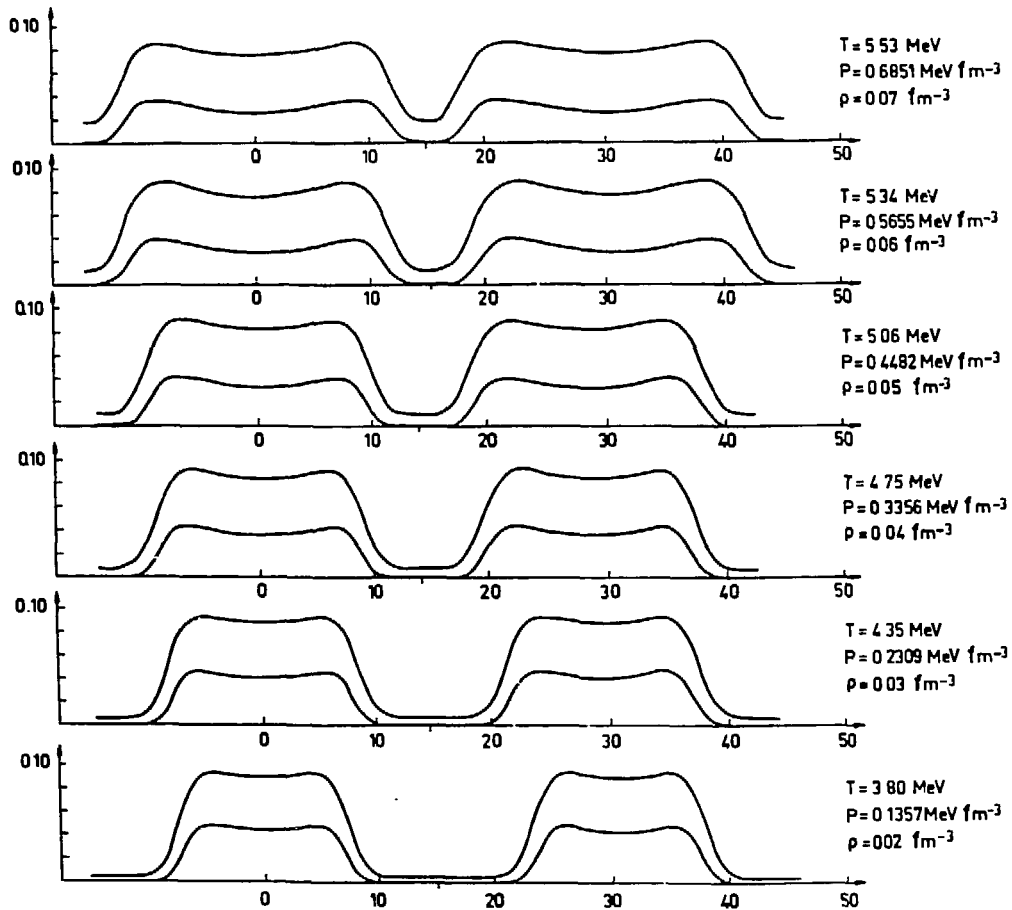


Figure 4. Pour des valeurs élevées de la densité (de  $10^{13}$  à  $10^{14}$  g/cm<sup>3</sup>) la configuration la plus stable de la matière est un cristal formé de noyaux lourds. La figure ci-dessus donne pour plusieurs valeurs de la densité, les distributions de neutrons et de protons de ces noyaux et de leur voisin immédiat. Le calcul est effectué à l'approximation de champ moyen pour une entropie  $S/A = 1$  et une fraction du nombre de protons au nombre de masse  $Z/A = 1/4$ .

et la température du milieu, déduite de la valeur  $S/A=1$ . On peut voir sur cette figure que la vapeur -presque exclusivement constituée de neutrons- reste peu dense jusqu'à  $\rho \approx 0.07$  fm<sup>-3</sup>. Une conséquence importante est que la pression est pratiquement celle qui est produite par les électrons seuls soit  $P = k \rho^{4/3}$  (gaz de Fermi relativiste). Au contraire dès que l'on atteint la densité nucléaire (qui vaut seulement  $0.11$  fm<sup>-3</sup> pour  $Z/A = 1/4$ ) la pression augmente beaucoup

plus vite et varie au moins comme  $P = K \rho^{5/3}$  (gaz de nucléons non relativistes + forces répulsives) ce qui est suffisant pour arrêter l'effondrement gravitationnel. Il a été suggéré par Bethe et ses collaborateurs [12] qu'une brusque rebond peut avoir lieu au voisinage de  $\rho_0$ , conduisant à la formation d'une onde de choc qui éjecte les couches externes de l'étoile. Ce scénario souffre de quelques incertitudes concernant notamment le transport des neutrinos, l'énergie transmise aux couches externes, ou la densité maximale atteinte. Il semble néanmoins constituer une bonne base de départ pour modéliser les explosions de supernovae dites de type II.

#### x) Etude des noyaux chauds produits par collisions d'ions lourds

Dès 1983 des expériences effectuées au CERN [15], utilisant un faisceau de carbone de 720 MeV et des cibles d'uranium-238, thorium-232 et or-197 ont permis de produire des systèmes thermalisés ayant des températures d'environ 5 MeV. Dans ces expériences le noyau chaud formé par fusion du projectile et de la cible donne lieu tout d'abord à une évaporation de particules légères, puis fissionne. On mesure alors en coïncidence les fragments de fission et les particules émises. La mesure de l'angle  $\theta$  entre fragments permet de contrôler l'impulsion transférée à la cible (une collision périphérique induit une fission de la cible où les fragments partent dos à dos, alors qu'une fusion complète produit une valeur minimale de l'angle). La mesure du spectre des particules émises dans différentes directions, en coïncidence avec un des fragments de fission, permet de vérifier que ces particules proviennent bien du noyau de fusion et qu'elles ont une distribution isotrope (comme ceci doit être le cas pour un système thermalisé). La pente du spectre précédent fournit une première estimation  $T_1$  de la température du système. Une seconde estimation  $T_2$ , indépendante de la première, peut être obtenue à partir de l'énergie d'excitation  $E^*$  du système (qui est elle-même reliée à l'angle  $\theta$  entre les fragments) par la relation  $E^* / T^2 = A/8$  (MeV<sup>-1</sup>) (voir paragraphe xici-dessous). Un très bon accord a été obtenu entre ces deux valeurs (dans le cas du thorium on a par exemple  $T_1 = 4.7 \pm 0.5$  MeV,  $T_2 = 4.7$  MeV) [15], ce qui rend crédible la production d'un état thermalisé. Par la suite, de nombreuses expériences utilisant les faisceaux d'ions lourds des accélérateurs SARA et GANIL (Argon de 44 MeV par nucléon, Nickel-58 de 30 MeV par nucléon...) ont été effectuées pour étudier la

formation et la desexcitation des noyaux chauds (voir à ce sujet la revue récente de Joël Galin [16]).

Une propriété remarquable que l'on a pu mettre en évidence pour la matière nucléaire chaude est la persistance d'effets collectifs jusqu'à des températures de plusieurs MeV [17]. En effet il a été possible non seulement de produire des noyaux chauds par collisions d'ions lourds mais également d'observer leurs vibrations collectives ou résonances géantes, dont les propriétés à température nulle sont bien connues. Ceci a été effectué en étudiant les rayonnements gammas provenant de la résonance dipolaire géante des noyaux fortement excités. Ici encore des tests non triviaux de thermalisation ont été effectués. A titre d'exemple le spectre des gammas émis par un noyau de krypton-76 excité a été construit dans la référence [18] en formant ce noyau par deux réactions différentes : d'une part la fusion du système oxygène-18 et nickel-58, d'autre part la fusion carbone-12 et zirconium-64. L'accord excellent obtenu dans la référence [18] entre ces deux spectres indique que le noyau excité de krypton-76 a perdu la mémoire de la voie d'entrée, comme ceci doit être le cas si le système est effectivement thermalisé.

Les expériences précédentes ont permis d'accumuler un ensemble important de données concernant la variation de la position et de la largeur des résonances géantes avec la température. Ces données ont fait l'objet de nombreux travaux en vue de tester la description usuelle du noyau, utilisant la théorie des systèmes de Fermions en interaction. Un outil particulièrement utile est le formalisme de réponse linéaire à température finie qui a été utilisé avec succès pour rendre compte des données [19].

#### xi) Recherches de la transition liquide-gaz

Récemment certaines expériences ont mis en évidence un affaiblissement de la résonance géante dipolaire à haute température [20]. L'intérêt de ce résultat est que -tout comme la suppression de la résonance  $J/\psi$  [21] pourrait être une signature de la production d'un plasma de quarks et de gluons- un affaiblissement de la résonance géante pourrait indiquer une transition vers une phase vapeur pour laquelle il n'y a pas d'effets collectifs. Actuellement on ne possède toutefois aucune réponse claire à la question de savoir s'il est possible de mettre en évidence la température critique du diagramme de phase de la figure 2 (ou la température limite de la figure 3)

et la transition de phase liquide gaz associée. Dès 1984 une analyse de la distribution en masse des fragments dans la réaction proton (80 GeV) sur krypton a été interprétée comme une manifestation de cette transition [22]. Cependant la production d'un état thermalisé dans une réaction par protons reste à établir. De même il existe plusieurs indications en faveur d'une limite de l'énergie que l'on peut transférer à un noyau [16,23,24] mais les indications sont toutefois relativement indirectes. Récemment une analyse en moments des distributions en masse des réactions de fragmentation, effectuée dans la référence [25], a montré que les noyaux se fragmentent comme s'il y avait transition de phase. Par contre les données ne sont pas encore suffisamment précises pour déterminer la nature de cette transition (liquide-gaz, percolation...) [25].

#### xii) Chaleur spécifique des noyaux

Dans le modèle de matière nucléaire décrit ci-dessus cette quantité se calcule simplement en utilisant un développement de basse température valable lorsque la température  $T$  est plus petite que l'énergie de Fermi des nucléons qui, pour  $\rho_0 = 0.17$  nucléons par  $\text{fm}^3$ , vaut  $\epsilon_F = k^2 k_F^2 / 2m = 40$  MeV. Dans ce cas l'argument de la fonction de Fermi intervenant dans les formules (25) et (26) est

$$\alpha \approx - \epsilon_F / kT ,$$

quantité qui tend vers  $-\infty$  à basse température. En retournant à l'expression (23) des fonctions de Fermi on obtient successivement

$$\begin{aligned} F_R(x) &= \frac{e}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} du \frac{u^k}{k} \frac{1}{\exp(u+x)+1} \frac{1}{\exp(-u-x)+1} , \\ &\approx \frac{e}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\sigma \left\{ \frac{(-x)^k}{k} + \frac{(k-1)\sigma^2 (-x)^{k-2}}{2} \right\} \frac{1}{e^{\sigma}+1} \frac{1}{e^{-\sigma}+1} , \\ &\approx \frac{e}{\sqrt{\pi}} \frac{(-x)^k}{k} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{6} \frac{k(k-1)}{x^2} \right\} . \end{aligned}$$



En reportant ce développement dans les équations (25) et (26) fournissant  $\tau$  et  $\rho$  il vient

$$\frac{\tau}{\rho} \approx \frac{4\pi}{\lambda^2} \left\{ 1 + \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{kT}{E_F} \right)^2 \right\}$$

On obtient ainsi pour l'énergie d'excitation  $E^*$  et pour l'entropie du système les expressions

$$E^* = E(T) - E(T=0) = a (kT)^2$$

$$S = 2 a T \tag{37}$$

$$a = (\pi^2/4) A / E_F$$

La quantité  $a$  est appelée paramètre de la densité des niveaux  $\rho(E, A)$  car, en éliminant la température entre les équations précédentes, on obtient  $S = 2 \sqrt{a E^*}$  c'est à dire une densité de niveaux variant comme  $\exp(2 \sqrt{a E^*})$ . De façon plus précise on trouve, après calcul du facteur preexponentiel de la formule I.38 la relation

$$\rho(E^*, A) = \frac{1}{\sqrt{48} E^*} \exp(2 \sqrt{a E^*}) \tag{38}$$

appelée formule de Bethe [26]. La valeur du paramètre  $a$  tirée de l'équation (37) est  $a \approx A/16 \text{ MeV}^{-1}$  pour un noyau de masse  $A$ . Cette valeur doit être corrigée des effets de taille finie, que l'on peut évaluer par des calculs de Hartree-Fock à température finie [9,27] et de la contribution des états collectifs. En pratique, les valeurs tirées des comptages de niveaux par la formule (32) sont proches de [28]

$$a = A/8 \text{ (MeV}^{-1}\text{)}$$

Récemment des déviations par rapport aux formules (37) ont été rapportées par Nebbia et al [29] qui ont observé une décroissance de la valeur du paramètre  $a$  de  $A/8 \text{ MeV}^{-1}$  à  $A/15 \text{ MeV}^{-1}$  au voisinage de  $T = 4 \text{ MeV}$ . Cet effet s'explique bien par une réduction des effets collectifs et de courte portée [30,31]. Il pourrait aussi avoir pour origine une évaporation rapide du noyau à cette température, qui a bien pour effet de réduire la masse  $A$  du noyau et donc le paramètre  $a$  [16].

#### IV. LA MATIERE DE QUARKS DANS LE MODELE DE NAMBU ET JONA-LASINIO

La deuxième application des méthodes du Chapitre II que nous allons maintenant considérer utilise à nouveau l'approximation de champ moyen : il s'agit du calcul de la matière de quarks (déconfinés) dans le cadre du modèle de Nambu et Jona-Lasinio (NJL) [32]. Nous examinerons plus particulièrement la transition qui existe dans ce modèle entre une phase à symétrie chirale (dont nous donnons ci-dessous les principales caractéristiques) et une phase où cette symétrie est spontanément brisée.

##### i) Origine du modèle de Nambu et Jona-Lasinio

Dans leur article de 1961 Nambu et Jona-Lasinio ont exploité l'analogie qui existe entre l'équation de Dirac et les équations de BCS de la supraconductivité pour construire une description du pion fondée sur une brisure spontanée de symétrie. Ils ont fait remarquer tout d'abord que l'analogie entre les énergies propres d'une particule de Dirac

$$E_{\mathbf{k}} = \pm (\mathbf{k}^2 + M^2)^{1/2}$$

et les énergies d'une quasiparticule de BCS

$$E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu)^2 + \Delta^2}$$

où  $\Delta$  est le gap et  $\mu$  le potentiel chimique n'est pas aussi fortuite qu'on pourrait le penser. Dans le premier cas  $E_{\mathbf{k}}$  est valeur propre de l'équation

$$E \psi_1 = \sigma \cdot \mathbf{k} \psi_1 + M \psi_2$$

$$E \psi_2 = -\sigma \cdot \mathbf{k} \psi_2 + M \psi_1$$

où  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont les composantes de chiralité gauche et droite de la fonction d'onde :  $\gamma_5 \psi_1 = -\psi_1$  ,  $\gamma_5 \psi_2 = +\psi_2$  .

Dans le second cas  $E_{\mathbf{k}}$  est valeur propre de l'équation

$$E u(\mathbf{k}, +) = (\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) u(\mathbf{k}, +) + \Delta v(-\mathbf{k}, -) ,$$

$$E v(-\mathbf{k}, -) = -(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu) v(-\mathbf{k}, -) + \Delta u(\mathbf{k}, +) .$$

Les quantités  $u$  et  $v$  sont les amplitudes des excitations élémentaires ou quasiparticules du système, dont les opérateurs de création sont donnés par

$$c^+(k, +) = u(k, +) a^+(k, +) + v(-k, -) a(-k, -) \quad (1)$$

où  $a^+$  et  $a$  sont les opérateurs de création et d'annihilation des particules nues. On peut remarquer que la transformation (1) conserve l'impulsion mais qu'elle mélange des états de charges différentes. Les excitations élémentaires brisent donc la conservation du nombre de charges

$$N = \int \psi^+(r) \psi(r) d\vec{r} \quad (2)$$

De même, pour une masse  $M$  différente de zéro, l'équation de Dirac mélange des états de chiralités différentes : il y a brisure de la chiralité

$$X = \int \bar{\psi}(r) \gamma_0 \gamma_5 \psi(r) d\vec{r} \quad .$$

Nambu et Jona-Lasinio ont souligné que la brisure de (2) donne lieu à des excitations collectives de basse énergie de type phonon (bosons de Goldstone). Ceci les a conduits à étudier les questions suivantes

1) Peut-on engendrer une masse finie en partant de fermions de masse nulle à l'aide d'un mécanisme analogue à BCS (interaction attractive conduisant à une brisure spontanée de symétrie)? 2) La brisure spontanée de symétrie peut-elle produire un état collectif de basse énergie identifiable au pion? Pour répondre à ces questions il est intéressant de considérer les transformations chirales qui font passer d'un spineur de Dirac  $\psi$  à

$$\psi' = \exp(i\alpha \gamma_5) \psi \quad . \quad (3)$$

Les lois de transformation par (3) des scalaires, pseudoscalaires et vecteurs sont données par :

$$\bar{\psi} \psi \longrightarrow \bar{\psi} \psi \cos 2\alpha + \bar{\psi} i\gamma_5 \psi \sin 2\alpha$$

$$\bar{\psi} i\gamma_5 \psi \longrightarrow \bar{\psi} i\gamma_5 \psi \cos 2\alpha - \bar{\psi} \psi \sin 2\alpha$$

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi \longrightarrow \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$$

A partir de ces lois de transformation on voit qu'il est possible de construire un Lagrangien de champ de Fermions invariant par (2). Nambu et Jona-Lasinio ont choisi

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \partial^{\mu} \psi + G \{ (\bar{\psi} \psi)^2 + (\bar{\psi} i \gamma_5 \psi)^2 \} .$$

L'intérêt du travail de Nambu et Jona-Lasinio a été de fournir le premier modèle avec brisure spontanée de symétrie, notion qui a été élaborée grâce à l'expérience acquise dans l'étude des systèmes à plusieurs corps. Un autre intérêt du modèle NJL est qu'il présente de nombreuses analogies avec QCD. Toutefois ce modèle présente aussi des défauts importants (non renormalisabilité et absence d'un mécanisme de confinement) qui rendent l'intérêt du modèle essentiellement pédagogique -et donc approprié au cadre de la présente école.

#### ii) Description et propriétés du modèle.

Dans sa version originale de 1961 le modèle de Nambu et Jona Lasinio considérait des nucléons et non pas des quarks, qui n'existaient pas encore à cette époque. Toutefois l'intérêt du modèle pour décrire le pion comme un état collectif quark-antiquark a été perçu rapidement, et conduit à de nombreuses applications [33-35]. Dans ce cas les quarks sont décrits (dans les notations d'Itzykson et Zuber [36]) par la densité Lagrangienne

$$\mathcal{L}(x) = \bar{q}(x) (\not{\partial} + m_c) q(x) + G \{ (\bar{q} q)^2 + (\bar{q} i \gamma_5 \vec{\tau} q)^2 \}, \quad (4)$$

où  $q(x)$  est l'opérateur de champ des quarks contenant 2 saveurs, dénotées  $u$  et  $d$ , et  $N_c = 3$  couleurs, et où  $\vec{\tau}$  est l'opérateur d'isospin associé aux saveurs  $u$  et  $d$ . La constante  $m_c$  est appelée masse courante des quarks. Lorsque  $m_c = 0$ , le Lagrangien  $\mathcal{L}$  est invariant par les transformations chirales, définies dans le cas de  $N_f = 2$  saveurs par

$$q \longrightarrow q' = \exp(i \vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5 / 2) q(x). \quad (5)$$

En effet pour une transformation infinitésimale du type (5) on trouve :

$$\begin{aligned} \delta q &= i \vec{\theta} \cdot \vec{\tau} \gamma_5 q \quad , \\ \delta(q \bar{q}) &= 2 \vec{\theta} \cdot (\bar{q} i \gamma_5 \vec{\tau} q) \quad , \\ \delta(\bar{q} i \gamma_5 \vec{\tau} q) &= - 2 \vec{\theta} \cdot (\bar{q}(x) q(x)) \quad , \\ \delta(\bar{q} \gamma_\mu \partial^\mu q) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Ces relations entraînent bien  $\delta \mathcal{L} = 0$  si  $m_c = 0$ .

Comme le Lagrangien (4) est invariant par rotations dans l'espace d'isospin

$$q \rightarrow q' = \exp(i \theta \cdot \tau) q(x) \quad ,$$

on s'attend à l'apparition de multiplets d'isospin dans les excitations collectives quarks-antiquarks. Nous verrons ci-dessous que la présence du terme  $\gamma_5 \vec{\tau}$  produit, comme on peut s'y attendre, un état pseudoscalaire d'isospin 1 que nous identifierons au pion.

L'opérateur Hamiltonien associé au Lagrangien (4) s'écrit

$$H = \int d\vec{r} \left\{ \bar{q}(\vec{r}) (-i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m_c) q(\vec{r}) - G : (\bar{q}(\vec{r}) q(\vec{r}))^2 : - G : (\bar{q}(\vec{r}) i \gamma_5 \vec{\tau} q(\vec{r}))^2 : \right\} \quad , \quad (6)$$

où les opérateurs placés dans des doubles points doivent être rangés dans l'ordre normal. Dans cette équation  $q(\vec{r})$  est l'opérateur de champ

$$q(\vec{r}) = \sum_i \left\{ b_i \psi_i(\vec{r}) + d_i^\dagger \varphi_i^\dagger(\vec{r}) \right\} \quad ,$$

où  $b_i$  détruit un quark dans l'état (d'énergie positive) dont la fonction d'onde est  $\psi_i(\vec{r})$  alors que  $d_i^\dagger$  crée un antiquark dans l'état (d'énergie négative) dont la fonction d'onde est  $\varphi_i(\vec{r})$ .

L'indice  $i$  représente l'ensemble des nombres quantiques associés aux degrés de liberté d'espace, de spin, d'isospin, et de couleur. Dans un système d'unités où  $\hbar = c = 1$  la constante  $G$  de l'interaction des quarks entre eux a la dimension du carré d'une longueur. On voit sur l'expression (6) que le cas  $G > 0$ , qui est celui auquel nous nous

intéresserons par la suite, correspond à une attraction entre quarks on peut voir également que l'Hamiltonien (6) correspond à un problème à N-corps analogue à celui que nous avons rencontré au chapitre III, équation 8. Une différence importante toutefois est que l'Hamiltonien (6) ne contient pas le terme répulsif à haute densité qui était essentiel dans la matière nucléaire pour assurer sa stabilité. Une autre difficulté du Lagrangien (4) est qu'il n'est pas renormalisable. Pour contourner ces deux difficultés nous aurons recours à une coupure dans l'espace des états, limitant leurs impulsions à une valeur donnée  $\Lambda$ . Cette coupure est un paramètre supplémentaire du modèle qui en comporte donc trois au total à savoir les constantes  $m_c$ ,  $G$  et  $\Lambda$ .

iii) Brisure spontanée de la symétrie chirale à température et densité nulle

Pour déterminer la structure du vide à température et densité nulle nous allons utiliser l'approximation de champ moyen. Nous allons appliquer la méthode variationnelle en prenant pour état d'essai un état de particules indépendantes

$$|\phi_0\rangle = \prod_i d_i^\dagger |0\rangle, \quad (7)$$

pour lequel les états d'énergie positives sont tous vides et les états d'énergie négative tous occupés. En écrivant que la valeur moyenne de l'énergie dans l'état  $\phi_0$  est stationnaire par rapport à toute variation des fonctions d'onde  $\varphi_i(\vec{r})$  des antiquarks, on obtient par un calcul analogue à celui du chapitre III.4 les équations suivantes

$$(-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m_c + U) \varphi_i(\vec{r}) = -E_i \varphi_i(\vec{r}),$$

$$U = -2G \langle \bar{q}q \rangle - 2G \langle \bar{q} i\gamma_5 \vec{\tau} q \rangle \cdot i\gamma_5 \vec{\tau},$$

$$\langle \bar{q}q \rangle = \langle \phi_0 | \bar{q}q | \phi_0 \rangle = \sum_i \bar{\varphi}_i(\vec{r}) \varphi_i(\vec{r}). \quad (8)$$

Ces équations correspondent en fait à l'approximation de Hartree, dans laquelle les termes d'échange sont ignorés, ce qui est valable pour  $2N_f N_c \gg 1$ .

Comme au chapitre III, les solutions des équations (8) pour les fonctions individuelles  $\varphi_i$  sont des ondes planes

$$\varphi_i(\vec{r}) = u(k, \alpha) \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad , \quad (9)$$

où  $u$  est un spineur de Dirac d'énergie négative et où l'indice  $\alpha$  représente l'ensemble des nombres quantiques associés au spin, à l'isospin et à la couleur. En insérant (9) dans (8) on obtient les équations suivantes

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta M) u(k, \alpha) = -E_k u(k, \alpha) \quad , \quad (10)$$

$$E_k = + \sqrt{k^2 + M^2} \quad , \quad (11)$$

$$M = m_c - \frac{eG}{\Omega} \sum_{k, \alpha} \bar{u}(k, \alpha) u(k, \alpha) \quad . \quad (12)$$

En utilisant l'équation conjuguée de (10) on trouve  $\bar{u} u = -M/E_k$ . La dernière équation peut donc s'écrire

$$M \left\{ 1 - \frac{4gG}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right\} = m_c \quad , \quad (13)$$

où conformément à la prescription III.21 nous avons remplacé la somme sur  $k$  par une intégrale, et où  $g$  est le degré de dégénérescence  $2N_f N_c$ . L'équation (13) est appelée équation du gap (par analogie avec le cas de la supraconductivité) et la masse  $M$  solution de l'équation (13) est appelée masse constituante des quarks. Sa valeur fournit une mesure de la brisure de la symétrie chirale dans le vide  $\Phi_0$ . Elle est reliée à la valeur moyenne de l'opérateur  $\bar{q}(\vec{r}) q(\vec{r})$  par

$$\langle \bar{q}(\vec{r}) q(\vec{r}) \rangle = -\frac{g}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{M}{\sqrt{k^2 + M^2}} \quad (14)$$

Pour simplifier nous allons étudier l'équation (13) dans le cas où la masse courante  $m_c$  est nulle. Dans ce cas (13) se réduit à

$$M (1 - F(M)) = 0 \quad , \quad (15)$$

$$\text{ou } F(M) = \frac{4gG}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{\sqrt{k^2 + \pi^2}} \quad (16)$$

La fonction  $F$  est une fonction décroissante de  $M$  sur l'intervalle  $[0, \infty[$ . Son maximum a lieu en  $M=0$  et vaut

$$F(0) = Gg\Lambda^2 / \pi^2 \quad (17)$$

On voit donc que si  $F(0) \leq 1$  i.e. si  $G \leq G_c = \pi^2 / g\Lambda^2$ , alors  $M=0$  est la seule solution de l'équation (15). Par contre pour  $G > G_c$  il existe une solution non nulle de (15). On peut vérifier que cette solution fournit une énergie plus basse que  $M=0$ . Il y a donc dans ce cas brisure spontanée de la symétrie chirale.

#### iv) Equation de Bethe-Salpeter pour le pion

Dans le formalisme de Bethe et Salpeter (voir Itzykson et Zuber, chapitre 10 [36] ainsi que l'appendice B de l'article de Le Yaouanc et al [34]) un état lié quark-antiquark  $|\pi\rangle$  est décrit par son amplitude  $\chi$

$$\chi_{\alpha\beta}(p, k) = \int \frac{d^4(x_1 - x_2)}{(2\pi)^4} \exp \left\{ i(p + \frac{k}{2})x_1 - i(p - \frac{k}{2})x_2 \right\} \langle 0 | T \{ q_\alpha(x_1) \bar{q}_\beta(x_2) \} | \pi \rangle \quad (18)$$

où  $p$  est le quadrimoment relatif de la paire  $q\bar{q}$ ,  $k = \{E, \vec{k}\}$  son quadrimoment total et où l'opérateur  $T$  ordonne les temps dans le sens décroissant. Les équations déterminant  $\chi$  se découpent pour différentes valeurs du spin total, de l'isospin et de la parité. Dans le sous espace de spin zéro, parité négative et isospin 1 l'équation réduite est dans le cas du modèle de Nambu [32] :

$$\left( \not{p} + \frac{\not{k}}{2} - M + i\varepsilon \right) \chi \left( \not{p} - \frac{\not{k}}{2} - M + i\varepsilon \right) = -igG\gamma_5 \tau_z \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \text{Trace} \left[ \chi(p+q, k) \gamma_5 \tau_z \right] \quad (19)$$



où nous avons écrit l'amplitude  $\chi$  comme une matrice de dimension  $(4N_f N_c)^2$ . L'équation (19) est une équation aux valeurs propres qui pour  $\vec{k}$  donné fournit la valeur propre  $E$  associée à l'énergie de l'état lié. Il convient de noter toutefois que  $E$  apparaît quadratiquement dans (19). La structure de l'équation (19) suggère de choisir pour  $\chi$  une expression de la forme :

$$\chi(p, k) = C S\left(p + \frac{k}{2}\right) \gamma_5 \tau_z S\left(p - \frac{k}{2}\right), \quad (20)$$

où  $S(p)$  est le propagateur de Feynman usuel dans l'espace des impulsions

$$S(p) = (\not{p} - M + i\varepsilon)^{-1}. \quad (21)$$

Par substitution on peut vérifier que (20) est vecteur propre de (19). La valeur propre correspondante est fournie par l'équation

$$J(k^2) = 1, \quad (22)$$

où  $k^2 = E^2 - \vec{k}^2$  et où la fonction  $J$  est donnée par

$$J(k^2) = -igG \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Trace} \left\{ S\left(p + \frac{k}{2}\right) \gamma_5 S\left(p - \frac{k}{2}\right) \gamma_5 \right\}. \quad (23)$$

Il est intéressant de remarquer que pour  $m_c = 0$  les valeurs  $E = 0$   $\vec{k} = 0$  sont solutions de l'équation (22) ce qui signifie qu'il existe alors un état lié de masse nulle (boson de Goldstone associé à la brisure spontanée de la symétrie chirale). En effet pour l'équation (22) se réduit à

$$1 = -igG \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2}, \quad (24)$$

qui n'est pas autre chose que l'équation du gap (13) dans le cas où  $m_c = 0$ .

#### v) Le pion comme état collectif quark-antiquark

Dans la section 3 nous avons déterminé la structure du vide en minimisant l'énergie de l'état dans lequel les orbites des antiquarks sont toutes remplies. Une fois construit ce vide on peut rechercher

le spectre de ses excitations dans le cadre de l'approximation de champ moyen. Celui-ci est donné par les fréquences des petites oscillations autour de l'état d'équilibre construit dans la section 3. Nous allons maintenant montrer que l'une de ces oscillations est précisément donnée par l'équation (22) : le pion peut donc être identifié à une oscillation collective des champs de quarks et d'antiquarks autour de leurs valeurs dans l'état  $\phi_0$ .

A l'approximation de champ moyen l'évolution temporelle des fonctions d'onde individuelles des antiquarks est fournie par l'équation usuelle  $i\hbar \partial_t \varphi_i = \delta \langle H \rangle / \delta \varphi_i^*$  i.e.

$$i\hbar \partial_t \varphi_i = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \gamma_0 u) \varphi_i, \quad (25)$$

$$u = mc - 2G \rho(\vec{r}, t) - 2iG \gamma_5 \vec{z} \cdot \vec{p}(\vec{r}, t), \quad (26)$$

où  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  sont les matrices de Dirac usuelles et où les densités  $\rho$  et  $\vec{p}$  sont définies par

$$\rho(\vec{r}, t) = \langle \bar{q} q \rangle = \sum_i \bar{\varphi}_i(\vec{r}, t) \varphi_i(\vec{r}, t),$$

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \langle \bar{q} i\gamma_5 \vec{z} q \rangle = \sum_i \bar{\varphi}_i(\vec{r}, t) i\gamma_5 \vec{z} \varphi_i(\vec{r}, t). \quad (27)$$

Nous allons maintenant réécrire ces équations à la limite des oscillations de faible amplitude. Dans ce cas

$$u(\vec{r}, t) = M + \delta u(\vec{r}, t), \quad (28)$$

où  $M$  est la masse constituante des quarks et  $\delta u$  une petite perturbation. Or, pour une faible variation  $\delta u$  de  $u$  il est facile de calculer l'évolution en temps des variations  $\delta \varphi_i$ ,  $\delta \rho$  et  $\delta \vec{p}$  des fonctions d'onde et des densités. La réponse est en effet donnée par la théorie des perturbations qui, connaissant  $\delta u$ , fournit la variation du propagateur

$$S_{\alpha\beta}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -i \theta(t' - t) \sum_i \bar{\varphi}_i(\vec{r}, t, \alpha) \varphi_i(\vec{r}', t', \beta) \\ + i \theta(t - t') \sum_i \bar{\varphi}_i(\vec{r}, t, \alpha) \varphi_i(\vec{r}', t', \beta), \quad (29)$$

où les  $\psi_i$  sont les fonctions d'onde des états d'énergie positive et où l'indice  $\alpha$  représente l'ensemble des coordonnées de spin, isospin et couleur. En écrivant  $S$  et  $\delta u$  comme des matrices de dimension  $4N_f N_c \times 4N_f N_c$  on a au premier ordre la formule usuelle

$$\delta S(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2) = \int d\vec{r}' dt S_0(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}', t) \delta u(\vec{r}', t) S_0(\vec{r}', t; \vec{r}_2, t_2), \quad (30)$$

où  $S_0$  est le propagateur correspondant au vide  $\Phi_0$ . L'équation précédente fournit les variations des densités

$$\delta \rho(\vec{r}', t) = \text{Trace} \delta S(\vec{r}', t; \vec{r}', t' = t + 0),$$

$$\delta \vec{\rho}(\vec{r}', t) = \text{Trace} \{ \delta S(\vec{r}', t; \vec{r}', t' = t + 0) i \gamma_5 \vec{\tau} \}, \quad (31)$$

où les traces portent sur l'indice  $\alpha$ . Par ailleurs  $\delta u$  doit être relié à  $\delta \rho$  et  $\delta \vec{\rho}$  par les équations (26) i.e.

$$\delta u = -2G \delta \rho(\vec{r}') - 2iG \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \delta \vec{\rho}. \quad (32)$$

Nous obtenons ainsi un système d'équations linéaires (30, 31, 32) qui détermine les oscillations de faible amplitude du système.

Cherchons une solution de ces équations de la forme

$$\delta u(\vec{r}', t) = i \varepsilon \gamma_5 \tau_z \exp i(\vec{q} \cdot \vec{r}' - \omega t). \quad (33)$$

En insérant (33) dans (30) puis (31) il vient d'une part  $\delta \rho = 0$  et d'autre part

$$\delta \vec{\rho}(\vec{r}', t) = i \varepsilon \exp i(\vec{q} \cdot \vec{r}' - \omega t) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Trace} \{ S_0(p) i \gamma_5 \tau_z S_0(p+q) i \gamma_5 \tau_z \}, \quad (34)$$

où  $S_0(p)$  est la transformée de Fourier du propagateur  $S_0$  (eq. 21). On voit que l'équation (32) est satisfaite pourvu que l'on ait

$J(q^2) = 1$  où  $J$  est la fonction

$$J(q^2) = -igG \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Trace}(S_0(p) \gamma_5 S_0(p+q) \gamma_5). \quad (35)$$

Cette fonction est identique à celle qui est définie par l'équation (23) ce qui établit le résultat annoncé.

Exercice : Comment faut-il modifier l'équation (33) pour décrire un méson sigma de spin zéro, isospin zéro, parité plus.

vi) Paramètres du modèle

Dans la référence [37] les trois paramètres du modèle ont été ajustés de façon à reproduire la masse du pion  $M_\pi = 140$  MeV, sa constante de désintégration  $f_\pi = 95$  MeV et la valeur moyenne  $\langle \bar{q}q \rangle = -(250 \text{ MeV})^3$  tirée des règles de somme établies par Shifman, Vainstein et Zakharov pour la chromodynamique quantique [38]. Nous avons vu dans les sections précédentes comment calculer  $M_\pi$  et  $\langle \bar{q}q \rangle$ . Quant à la constante de désintégration du pion elle est définie par l'élément de matrice

$$\langle 0 | J_\mu(0) | \pi^+ \rangle = f_\pi k_\mu, \quad (36)$$

où  $J_\mu$  est le courant axial

$$J_\mu(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 q(x) \quad (37)$$

de (36), (37) et (18) on déduit

$$f_\pi k_\mu = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Trace} \{ \gamma_\mu \gamma_5 \chi(p, k) \}, \quad (38)$$

ce qui conduit (en remplaçant  $z_-$  par  $z_+$  dans 20) à

$$f_\pi = 4\pi C \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - M^2)^2} \quad (39)$$

Pour obtenir explicitement  $f_\pi$  il reste à calculer la constante de normalisation  $C$ . Celle-ci s'obtient en plaçant le système dans un champ électromagnétique  $A_\mu$  (ce qui modifie  $p_\mu$  en  $p_\mu - eA_\mu$  dans l'équation 21) et en vérifiant que la charge totale est + 1. On

trouve ainsi

$$i c^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} = 1, \quad (40)$$

et par suite

$$f_{\pi}^2 = -16 i m^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2}. \quad (41)$$

La procédure qui vient d'être décrite conduit aux valeurs suivantes des paramètres

$$\Lambda = 700 \text{ MeV}, \quad G \Lambda^2 = 2, \quad m_c = 20 \text{ MeV}. \quad (42)$$

Avec ces valeurs des paramètres la masse constituante des quarks est

$$M = 350 \text{ MeV}. \quad (43)$$

#### vii) Densité critique de la transition chirale [35]

Considérons à présent le cas de la matière de quarks à densité baryonique non nulle. Pour décrire ce système nous allons à nouveau appliquer la méthode variationnelle en prenant un état d'essai de la forme

$$|\psi_0\rangle = \prod_{\alpha, \mathbf{k} \leq k_F} \beta^+(\mathbf{k}, \alpha) \left( \prod_i d_i^+ \right) |0\rangle, \quad (44)$$

où les niveaux d'énergies positives sont remplis lorsque leur moment est inférieur au moment de Fermi  $k_F$  et où les états d'énergies négatives sont tous remplis. Par un calcul analogue à celui de la section 3 on trouve que les fonctions d'onde  $\psi_i$  et  $\varphi_i$  des quarks et des antiquarks sont des ondes planes

$$\psi_i(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} u(\mathbf{k}, \alpha) \exp i \vec{k} \cdot \vec{r},$$

$$\varphi_i(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} v(\mathbf{k}, \alpha) \exp i \vec{k} \cdot \vec{r}, \quad (45)$$

où les spineurs  $u$  et  $v$  satisfont les équations de Dirac

$$\begin{aligned} (\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m) u(\mathbf{k}, \alpha) &= + E_{\mathbf{k}} u(\mathbf{k}, \alpha), \\ (\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta m) v(\mathbf{k}, \alpha) &= - E_{\mathbf{k}} v(\mathbf{k}, \alpha), \end{aligned} \quad (46)$$

avec  $E_k = + (k^2 + M^2)^{1/2}$ . La masse  $M$  apparaissant dans ces équations satisfait comme dans la section 3 l'équation du gap

$$M = m_c - 2 G \rho \quad (47)$$

Toutefois la densité scalaire  $\rho = \langle \bar{q} q \rangle$  contient à présent une contribution des états de quarks

$$\rho = \sum_{\alpha, k \leq k_F} \frac{1}{\Omega} \bar{u}(k, \alpha) u(k, \alpha) + \sum_{k, \alpha} \frac{1}{\Omega} \bar{v}(k, \alpha) v(k, \alpha). \quad (48)$$

Or à partir des équations (46) on trouve  $\bar{u} u = -\bar{v} v = M/E_k$ . L'équation du gap se réduit donc à

$$M \left\{ 1 - \frac{4gG}{(2\pi)^3} \int_{k_F}^{\Lambda} \frac{d^3k}{\sqrt{k^2 + M^2}} \right\} = m_c. \quad (49)$$

La discussion des propriétés de cette équation s'effectue comme dans la section 3. On voit que pour  $G$  donné  $> G_c$  la masse constituante décroît lorsque  $k_F$  croît. Supposons  $m_c = 0$ . Dans ce cas on a  $M = 0$  i.e. restauration de la symétrie chirale lorsque  $k_F$  atteint la valeur critique définie par

$$1 = \frac{4gG}{(2\pi)^3} \int_{k_c}^{\Lambda} k^2 dk \quad (50)$$

$$\text{soit } k_c = \Lambda \left( 1 - \frac{\pi^2}{gG\Lambda^2} \right)^{1/2} \simeq 2.5 \text{ fm}^{-1} \quad (51)$$

La valeur correspondante de la densité baryonique est  $\rho \simeq 5\rho_0$  où  $\rho_0$  est la densité de la matière nucléaire  $\rho_0 = 0.17$  nucléons/fm<sup>3</sup>.

#### viii) Température critique de la transition chirale [35]

Le calcul des propriétés de la matière de quarks à température finie dans le cadre de la méthode variationnelle s'effectue comme au chapitre III en prenant une matrice densité d'essai qui est exponentielle d'une forme quadratique des opérateurs de champ. Les équations de champ moyen sont identiques à celles de la section

bien pour effet de réduire la masse A du noyau et donc le paramètre  $\alpha$  |16|.

précédente (45, 46 et 47). Par contre, l'expression de la densité scalaire est modifiée en

$$\rho = \frac{1}{\Omega} \sum_{\alpha, \mathbf{k}} \left\{ f(+E_{\mathbf{k}}) \bar{u}(\mathbf{k}, \alpha) u(\mathbf{k}, \alpha) + f(-E_{\mathbf{k}}) \bar{v}(\mathbf{k}, \alpha) v(\mathbf{k}, \alpha) \right\}, \quad (52)$$

où  $f(E) = 1/(1 + \exp(\beta E - \alpha))$  est le nombre d'occupation du niveau d'énergie E. En utilisant les valeurs de  $\bar{u}u$  et  $\bar{v}v$  données plus haut il vient

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \frac{M}{2E_{\mathbf{k}}} \left\{ \tanh\left(\frac{E_{\mathbf{k}} - \mu}{2E_{\mathbf{k}}T}\right) + \tanh\left(\frac{E_{\mathbf{k}} + \mu}{2E_{\mathbf{k}}T}\right) \right\}, \quad (53)$$

où  $\mu$  est le potentiel chimique  $\alpha/\beta$ . La valeur de  $\mu$  s'obtient en ajustant la densité baryonique

$$\rho_B = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d\vec{k} \left\{ f(E_{\mathbf{k}}) + f(-E_{\mathbf{k}}) - 1 \right\} \quad (54)$$

à la valeur désirée. Un cas particulièrement simple est celui où la densité baryonique est nulle. En effet dans ce cas  $\mu = 0$  est solution de (54) et l'équation du gap à température T devient :

$$M \left\{ 1 - \frac{4gG}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda \frac{d\vec{k}}{\sqrt{k^2 + \pi^2}} \tanh\left(\frac{\sqrt{k^2 + \pi^2}}{2T}\right) \right\} = m_c. \quad (55)$$

Considérons ici encore le cas  $m_c = 0$  pour simplifier et supposons  $G > G_c$ . On voit que lorsque la température croît la masse constituante M des quarks décroît. On aboutit à une restauration de la symétrie chirale lorsque la température atteint la valeur critique  $T_c$  telle que l'on ait

$$\frac{4gG}{(2\pi)^3} \int_0^\Lambda \frac{d\vec{k}}{k} \tanh\left(\frac{k}{2T_c}\right) = 1 \quad (56)$$

ou encore

$$(2T_c)^2 \int_0^{\Lambda/T_c} \frac{u}{1 + \exp u} du = \Lambda^2 \left( 1 - \frac{\pi^2}{gG\Lambda^2} \right). \quad (57)$$

Une valeur approchée par défaut de  $T_c$  peut être obtenue en supposant  $\Lambda \gg T_c$  auquel cas l'intégrale apparaissant dans le premier membre vaut  $\pi^2/12$ . On obtient ainsi

$$T_c \simeq \frac{\Lambda}{2} \left[ \frac{\pi^2}{12} \left( 1 - \frac{\pi^2}{gG\Lambda^2} \right) \right]^{1/2} \simeq 250 \text{ MeV}. \quad (58)$$

La valeur précédente est en bon accord avec celle qui a été obtenue par une solution itérative de l'équation (57) dans la référence [35] (qui donne également la ligne de transition chirale dans le plan densité-température).

#### ix) Discussion

Malgré sa simplicité le modèle de Nambu permet de décrire un grand nombre de propriétés des systèmes de quarks notamment les propriétés du pion [35] et la restauration de la symétrie chirale pour une température de l'ordre de 250 MeV, valeur qui est en bon accord avec les résultats de calculs sur réseau [39]. Qu'un modèle aussi schématique puisse décrire une telle variété de phénomènes n'est toutefois pas complètement surprenant. En effet ce succès traduit tout simplement le fait que le modèle incorpore correctement un ingrédient essentiel, à savoir la symétrie chirale et sa brisure spontanée. Cette symétrie est en effet déterminante aussi bien à température nulle qu'à température finie comme l'ont établi les travaux de Gasser et Leutwyler sur la thermodynamique de la symétrie chirale [40]. Toutefois il ne faut pas oublier que ce modèle ne peut pas se substituer à la chromodynamique quantique et que comme nous l'avons vu plus haut il contient deux défauts importants : non renormalisabilité et absence de confinement.



μ      →      μ

### Références

- 1) E.W. Kolb, Particle Physics and Cosmology, Proceedings of the 1986 Theoretical Advanced Studies Institute, Santa Cruz, Calif., 1986
- 2) R. Balian, Du microscopique au macroscopique, Ellipses, Paris, 1985
- 3) N. Vinh Mau et D. Vautherin, Nucl. Phys. A445 (1985) 245
- 4) H. Jaqaman, A.Z. Mekjian et L. Zamick, Phys. Rev. C27 (1983) 2782
- 5) D. Gogny, J.P. Blaizot et B. Grammaticos, Nucl. Phys. A265 (1976) 315
- 6) M. Gaudin, Nucl. Phys. 15 (1960) 89 ; voir également R. Balian et M. Vénéroni, Ann. Phys. (N.Y.) 164 (1985) 334
- 7) P. Bonche, Cours donné à la 8ème session d'études biennale de physique nucléaire, Aussois 4-8 Fev. 1985 ; P. Bonche et S. Levit, Nucl. Phys. A437 (1985) 426
- 8) D.G. Ravenhall, C.J. Pethick et J.M. Lattimer, Nucl. Phys. A411 (1983) 449
- 9) P. Bonche, S. Levit et D. Vautherin, Nucl. Phys. A427 (1984) 278; A436 (1985) 265
- 10) D.Q. Lamb, J.M. Lattimer, C.J. Pethick et D.G. Ravenhall, Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 1623 ; Nucl. Phys. A411 (1983) 449
- 11) P. Bonche et D. Vautherin, Nucl. Phys. A372 (1981) 496
- 12) H.A. Bethe, G.E. Brown, J. Applegate et J.M. Lattimer, Nucl. Phys. A324 (1979) 487
- 13) M. Barranco et J.R. Buchler, Phys. Rev. C24 (1981) 1191 ; Astrophys. J. Lett. 245 (1981) 109
- 14) E. Suraud, Thèse, Université de Paris Sud 1984  
E. Suraud et D. Vautherin, Phys. Lett. 138B (1984) 325
- 15) S. Song et al, Phys. Lett. 130B (1984) 14
- 16) J. Galin, Nucl. Phys. A488 (1988) 297c
- 17) K. Snover, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 36 (1986) 345
- 18) E.F. Garman et al Phys. Rev. C28 (1983) 2554
- 19) D. Vautherin et N. Vinh Mau, Nucl. Phys. A422 (1984) 140  
J. Bar Touv, Phys. Rev. C32 (1985) 1369  
H. Sagawa and G.F. Bertsch, Phys. Lett. 146B (1984) 138

- 20) J.J. Gaard hoje *et al*, Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 1409
- 21) H. Satz, Nucl. Phys. A488 (1988) 511c
- 22) A.D. Panagiotou, M.W. Curtin, H. Toki, D.K. Scott *et P.J. Siemens*, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 496
- 23) X. Campi, J. Desbois *et E. Lipparini*, Nucl. Phys. A428 (1984) 327c
- 24) M. Conjeaud *et al*, Phys. Lett. 159B (1985) 244
- 25) X. Campi, Phys. Lett. 208B (1988) 351
- 26) H.A. Bethe, Rev. Mod. Phys. 9 (1937) 53 ; Phys. Rev. 50 (1936) 332.
- 27) M. Brack and P. Quentin, Physica Scripta 10A (1974) 163  
U. Mosel, P.G. Zint, *et K.H. Passler*, Nucl. Phys. A236 (1974) 236
- 28) A. Gilbert and A.G.W. Cameron, Can. J. of Phys. 43 (1965) 1446
- 29) G. Nebbia *et al*, Phys. Lett. 176B (1986) 20
- 30) D. Vautherin and N. VinhMau, in Windsurfing the Fermi sea, Vol. 2, T.T.S. Kuo and J. Speth Eds. Elsevier, 1987
- 31) R.W. Hasse and P. Schuck, Phys. Lett. 179B (1986) 313
- 32) Y. Nambu *et G. Jona-Lasinio*, Phys. Rev. 122 (1961)345 ; 124 (1961) 246
- 33) J. Firger, J.E. Mandula and J. Weyers, Phys. Lett. 968 (1980) 367
- 34) A. Le Yaouanc, L. Oliver, S. Ono, O. Pène *et J.C. Raynal*, Phys. Rev. D31 (1985) 137
- 35) V. Bernard, U.G. Meissner *et I. Zahed*, Phys. Rev. D36 (1987) 819
- 36) C. Itzykson *et J.B. Zuber*, Quantum Field Theory, Mc Graw Hill, New York 1980
- 37) V. Bernard, Phys. Rev. D34 (1986) 1601
- 38) M.A. Schifman, A.I. Vainstein *et V.I. Zakharov*, Nucl. Phys. B147 (1979) 385 ; B163 (1980) 43
- 39) Voir le cours d'André Morel contenu dans le présent volume
- 40) J. Gasser *et H. Leutwyler*, Phys. Lett. 188B (1987) 477