



ИНСТИТУТ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

4120-05772

ИТЕФ -- 93-89

В.Д.МУР, В.С.ПОПОВ

КВАНТОВАНИЕ С УЧЕТОМ
ПРОНИЦАЕМОСТИ БАРЬЕРА

Москва — ЦНИИАтоминформ — 1989

УДК 530.145

М-16

КВАНТОВАНИЕ С УЧЕТОМ ПРОНИЦАЕМОСТИ БАРЬЕРА: Препринт ИГЭФ 89-93/
В.Д.Мур^{*)}, В.С.Попов - М.:ЦНИИатоминформ, 1989 - 32с.

Получена поправка к правилам квантования Бора-Зоммерфельда, связанная с конечной проницаемостью барьера (для квазистационарных состояний). Обсуждается аналитическое продолжение условий квантования в надбарьерную область. Полученные результаты проиллюстрированы на примере точно решаемой модели, а также для эффекта Штарка в сильном поле.

Рис. - 3, опусок лит. - 27 назв.

© Институт теоретической и экспериментальной физики, 1989

*) Московский инженерно-физический институт

I. При вычислении спектра энергий с помощью условия квантования Бора-Зоммерфельда [1-3] (а также при учете поправок [4-7] порядка \hbar^2, \hbar^4, \dots) интегралы типа $\int p dx$ берутся по классически разрешенной области $x_0 < x < x_1$, а поведение потенциала при $x < x_0$ и $x > x_1$ несущественно (фактически подразумевается, что $V(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm \infty$).

Между тем, во многих физических задачах потенциал обладает барьером, вследствие чего вместо дискретных уровней энергии возникают квазистационарные состояния, $E = E_2 - i\Gamma/2$. Хотя проблема вычисления резонансных уровней постоянно встречается в ядерной физике, квантовой теории рассеяния и т.д., расчет E_2 и Γ до сих пор встречает определенные трудности 2).

Мы рассмотрим эту задачу в квазиклассическом приближении, что дает удобные аналитические формулы, справедливые для произвольного потенциала. В том случае, когда проницаемость барьера экспоненциально мала, нетрудно получить:

$$\int_{x_0}^{x_1} p dx = (N + \frac{1}{2})\pi, \quad N = n - \frac{i}{4\pi} \exp\left(-2 \int_{x_1}^{x_2} |A| dx\right) \quad (1)$$

(см. [10], стр. 92), где $n = 0, 1, 2, \dots$, $x_1 < x < x_2$ - подбарьерная область и $\hbar = m = 1$. Полагая $p = [2(E_2 - \frac{i}{2}\Gamma - V(x))]^{1/2}$ при $\Gamma \ll |E_2|$ приходим к формуле Гамова для ширины уровня:

$$\Gamma = \frac{1}{\pi} \exp\left(-2 \int_{x_1}^{x_2} |p(x)| dx\right), \quad T = 2 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{p(x)} \quad (2)$$

Целью нашей заметки является обобщение (1) на случай, когда энергия уровня близка к вершине барьера (или превышает ее), и экспоненциальная малость Γ исчезает. Обсуждается вопрос об аналитическом продолжении условия квантования в надбарьерную

область. В качестве приложения полученных формул мы рассмотрим эффект Штарка в сильном поле (для атома водорода).

2. Обобщение правил квантования. В классически-разрешенной области $x_0 < x < x_1$

$$\psi(x) \propto [p(x)]^{-1/2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\theta(x) = \int_{x_0}^x dx \left[p - \frac{1}{4} \left(\frac{p'}{p^2} \right)' - \frac{1}{8} \frac{p''^2}{p^3} \right] \quad (3)$$

(здесь мы учли поправку порядка \hbar^2 к обычной квазиклассике [4]).

Вблизи вершины барьера ($x = x_m$) используем параболическое приближение: $p(x) = \left(\frac{1}{4} \rho^2 - a \right)^{1/2}$, $\rho = \frac{x - x_m}{\xi_0}$, где $\xi_0 = (\hbar/2m\omega)^{1/2}$ - амплитуда нулевых колебаний, $\omega = [-V''(x_m)]^{1/2}$,

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{x_2}^{x_1} (-p^2)^{1/2} dx = \frac{V(x_m) - E}{\omega} \quad (4)$$

← x_1 Тогда 3)

$$\psi(x) = \text{const} \cdot D_{-\frac{1}{2}-ia} \left(2^{1/2} e^{-\frac{i\pi}{4}} \rho \right) \quad (5)$$

что слева от барьера переходит в (3), причем

$$\theta = \frac{\tau^2}{4} - a \ln \tau + \frac{1}{4i} \ln \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + ia)}{\Gamma(\frac{1}{2} - ia)(1 + e^{-2\pi a})} \right] + \frac{1}{2} \left(a^2 - \frac{3}{4} \right) \tau^{-2} + O(\tau^{-4}) \quad (5')$$

($\tau = -\rho \gg |a|$). Условие квантования возникает из требования совпадения (точностью до $n\pi$) фаз (3) и (5) в области перекрытия $|a| \ll \tau \ll x_m/\xi_0$, которая всегда существует для больших n . В итоге приходим к уравнению (I), в котором:

$$N = n - \frac{1}{2\pi} \varphi(a), \quad (6)$$

$$\varphi(a) = \frac{1}{2i} \ln \left[\frac{\Gamma(\frac{1}{2} + ia)}{\Gamma(\frac{1}{2} - ia)(1 + e^{-2\pi a})} \right] - a \ln a + a - \frac{1}{24a}$$

В подбарьерной области: $a \gg 1$,

$$\varphi(a) = \frac{7}{2880 a^3} + \dots + \frac{i}{2} e^{-2\pi a} \quad (6')$$

(свойства функции $\varphi(a)$ подробно рассмотрены в [12]). С учетом экспоненциально малой мнимой части $\varphi(a)$ формула (6) переходит в (I).

Когда энергия E_2 приближается к вершине барьера, значение a уменьшается. В этом случае численное решение ур. (I), с заменой (6), определяет положение резонанса E_2 и его ширину Γ . В надбарьерной области (когда $|a| \gg 1$, но еще применимо параболическое приближение) имеем [12]:

$$\varphi(a) = -2\pi i a + O(a^{-1}),$$

$$N = n + i a \quad (7)$$

Можно показать (см. следующий раздел), что это условие следует также из аналитического продолжения правила квантования Бора-Зоммерфельда.

3. Точно решаемая модель. Рассмотрим S -состояния в потенциале

$$V(z) = -\frac{\omega^2}{2} (z-R)^2, \quad 0 < z < \infty, \quad (8)$$

для которого уравнение Шредингера с $\ell = 0$ решается аналитически. Этот потенциал характеризуется параметром

$$s = R/2^{1/2} \xi_0 = \omega^{1/2} R$$

($\xi_0 = (2\omega)^{-1/2}$ - амплитуда нулевых колебаний осциллятора).

Например, $|V(0)| \omega^{-1} = \frac{1}{2} s^2$, а полное число S -уровней

равно:

$$n_0 = \frac{1}{2\pi} S^2 - \frac{3}{4} + \dots \quad (9)$$

(в квазиклассическом пределе, т.е. при $S \gg 1$). Из-за наличия барьера (см. рис. I) все эти уровни являются квазистационарными; их спектр определяется из уравнения

$$D_{-\frac{1}{2}-ia} \left(-\lambda^{1/2} e^{-i\pi/4} S \right) = 0, \quad (10)$$

где $a = -E/\omega$. При $n \gg 1$ отсюда получаем:

$$S^2 - a \left[\ln \frac{S^2}{a} + 1 + \ln 2 \right] + \varphi(a) = 2\pi \left(n + \frac{3}{4} \right) \quad (10')$$

(за деталями вычислений мы отсылаем к Приложению А). Если $a \gg 1$, т.е. $E \ll -\omega$, то последнее уравнение имеет приближенное решение: ($\Lambda = \ln 4\pi n_0$):

$$E_n = 2\pi\omega \cdot \frac{n - n_0}{\Lambda} \left[1 + \frac{\ln(n_0 - n)}{\Lambda} + O\left(\frac{\ln \Lambda}{\Lambda}\right) \right] \quad (10'')$$

$$\Gamma_n = \frac{\omega}{2} \left(\ln \frac{4\pi n_0 \omega}{|E_n|} \right)^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{2\pi |E_n|}{\omega}\right), \quad n < n_0$$

которое может быть получено также из (I).

Заметим, что обычное правило квантования приводит к ур. (10'), в котором, однако, отсутствует функция $\varphi(a)$. Для правильного аналитического продолжения в область энергий $E > 0$ нужно выполнить замену $\ln a \rightarrow \ln(-a) + i\pi$ (вытекающую из условия $\text{Im} E = -\frac{\Gamma}{2} < 0$), что соответствует формуле (7).

На этом примере мы видим, что аналитическое продолжение правила квантования Бора-Зоммерфельда в надбарьерную область, определяет как положение, так и ширину уровней. Это объясняет факт, ранее установленный эмпирически [13]: $1/n$ -разложение,

даже без учета проницаемости барьера, определяет ширину квазистационарных состояний после столкновения двух классических решений.

4. Эффект Штарка в сильном поле (атом водорода). С точностью до членов $\sim n^{-3}$, энергии ридберговских состояний $|n_1 n_2 m\rangle$ с $n \gg 1$ и $m \sim 1$ определяются из уравнений (4):

$$\beta_i (-\epsilon)^{-1/2} f(z_i) + (-1)^i \frac{F}{8n^2} (-\epsilon)^{-3/2} [g(z_i) - m^2 h(z_i)] = \gamma_i \quad (11)$$

где $z_i = (-1)^i 16 \beta_i F \epsilon^{-2}$, $\gamma_i = (n_i + \frac{m+1}{2})/n$,
 $i = 1$ и 2 , β_i - константы разделения ($\beta_1 + \beta_2 = 1$), а

f , g и h выражаются через гипергеометрическую функцию:

$$f(z) = F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 2; z\right)$$

$$g(z) = \frac{1}{3} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 2; z\right) + \frac{2}{3} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 1; 2\right) \quad (12)$$

$$h(z) = F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 2; z\right)$$

и использованы "приведенные" переменные: $\epsilon = 2n^2 E$,

$F = n^4 \mathcal{E}$ (\mathcal{E} - напряженность электрического поля в единицах

$\mathcal{E}_{aT} = n^2 e^5 \hbar^{-4} = 5.142 \times 10^9$ В/см).

В данном случае барьер имеется лишь в эффективном потенциале $U_2(\eta)$, а потенциал $U_1(\xi)$ является запирающим [1] при всех $F > 0$; поэтому замену (6) следует делать только во втором уравнении из (11):

$$\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 - \frac{1}{2\pi n} \varphi(a) \quad (6)$$

В соответствии с (4), имеем:

$$a = \frac{1}{\pi} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (-P_\eta^2)^{1/2} d\eta = \quad (13)$$

$$= \frac{n(-\epsilon)^{3/2} (1+\xi)}{12 \xi^{1/2} (1+2\xi) F} \left[1 - z_2 - \frac{18 m^2 (1+2\xi) F^2}{n^2 (1+\xi)^2 \epsilon^2} \right]$$

где $\xi = (1 - \frac{3}{4} z_2)^{1/2}$ и $z_2 \approx 1$ (что отвечает уровню, близкому к вершине барьера; подробнее см. в Приложении С).

Отметим, что при $m = 0$ интеграл (II) вычисляется аналитически при любом z_2 :

$$a = \frac{n (\epsilon)^{3/2}}{2^{3/2} F} (1 - z_2) f(1 - z_2) \quad (I4)$$

В области слабого поля получаем из (II) разложение энергии

$\epsilon(n_1, n_2, m)$ по степеням F , которое совпадает с известным [I, 15] рядом теории возмущений (вплоть до F^4). При этом

$$2\pi a = n \left\{ \frac{2}{3F} + (1 - \chi) \rho_1 F - \right. \quad (I5)$$

$$\left. - [1 + 2\rho_1 2 + 2\chi(1 - \rho_1 2) - \lambda_+ \rho_1 \lambda_+ - \lambda_- \rho_1 \lambda_-] + \dots \right\}$$

где $\chi = v_1 - v_2 = \frac{n_1 - n_2}{n}$, $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(1 - \chi \pm \mu)$, $\mu = m/n$ ($0 < \lambda_- \leq \lambda_+ < 1$, причем $\lambda_+ = \lambda_-$ для состояний с $m = 0$).

Отсюда, с учетом (6'), имеем 5):

$$\Gamma(n_1, n_2, m)(\xi) \approx \frac{1}{2\pi n^3} e^{-2\pi a} = \text{const.} \xi^{-\rho} e^{-2/3n^3 \xi} \quad (I5')$$

$$\rho = n - n_1 + n_2,$$

что отличается от точной асимптотики [I, 17] ширины Γ при $\xi \rightarrow 0$ лишь несущественным численным множителем в предэкспоненте. Таким образом, учет мнимой части функции $\varphi(a)$ дает правильное пороговое поведение ширины атомных уровней в пределе $\xi \rightarrow 0$.

При конечных F решение этих уравнений возможно лишь в численном виде.

5. Численные расчеты. При решении системы (II) можно либо опустить члены $\sim F/\delta n^2$, либо решить ее в полном виде.

Эти два варианта будем называть, соответственно, $1/n$ - и $1/n^2$ - приближениями.

Типичные результаты расчетов см. в табл. I, в которой приведены энергии состояния $|19,0,0\rangle$ ($n=20$), вычисленные различными методами. Из табл. I следует, что влияние проницаемости барьера на положение квазистационарного уровня невелико. При этом введение поправки ($6''$) стабилизирует вычисленные значения E_z ; это позволяет, в большинстве случаев, ограничиться решением ур. (II) в $1/n$ -приближении.

В табл. I приведены также энергии, вычисленные суммированием расходящихся рядов теории возмущений с помощью аппроксимант Паде-Эрмита (АПЭ [14]). Оба метода - АПЭ и $1/n$ -разложение - полностью согласуются между собой (хотя при $F \gtrsim 0.3$ АПЭ имеет несколько меньшую точность).

Соответствующие данные для ширины уровней представлены на рис. 2 ($\epsilon_n'' = n^2 \Gamma(n-1,0,0)$). Поправка на проницаемость барьера весьма существенна в области $F < F_*$, а с дальнейшим ростом поля ее роль уменьшается ⁶⁾. Пунктирная кривая на рис. I - результат независимых вычислений с помощью АПЭ. Из рис. I видно, что учет проницаемости барьера в квазиклассических условиях квантования дает правильную интерполяцию между областью слабого поля (где имеет место асимптотика (15')) и областью $F > F_*$, где решение выходит на результат $1/n$ -разложения, полученный без учета проницаемости (кривая 0 на рис. I).

Численные расчеты уровней энергии и ширины в атоме водорода были ранее выполнены Дамбуургом и Колосовым [18]. Мы сравнили значения ⁷⁾ $\nu = (-2 E_z)^{1/2}$ и Γ , полученные нашими методами, с соответствующими значениями из [18] для трех состояний с

$n_1 = n_2 = (n - 1)/2$ и $m = 0$ (см. таблицу I в [12]), согласие всех трех методов весьма хорошее (это, в частности, подтверждает выбранную нами процедуру суммирования расходящихся рядов ТВ).

Недавно [19] положения и ширины штарковских резонансов были получены с высокой точностью при численном решении уравнения Шредингера (с условием излучения на бесконечности). В табл. 2 производится сравнение этих расчетов с результатами $1/n$ -разложения⁸⁾ для состояний $|n - 1, 0, 0\rangle$ при $n = 10$ и 40. Точность вычисления $E_2^{(n_1, n_2, m)}$ в $1/n$ -приближении согласуется с оценкой ($\sim F/n^2 |\epsilon|$), вытекающей из (II). С другой стороны, ширины $\Gamma^{(n_1, n_2, m)}$ определяются в этом приближении с погрешностью $\sim 10\%$. По-видимому, это связано с нарушением квазиклассичности (по переменной $\eta = z - z^*$, для которой имеется барьер в $\sigma_2(\eta)$) для состояний с $n_2 = 0$. Так, для состояний с $n_1 = n_2$ точность вычисления Γ в $1/n$ -приближении существенно выше [12]. Наконец, в табл. 3 сопоставлены результаты $1/n$ -приближения и работы [21] (квазиклассический метод вблизи вершины барьера) для подпороговых резонансов.

В целом, вычисление комплексных энергий резонансов $E = E_2 - i\Gamma/2$ с помощью условия квантования, с учетом проницаемости барьера (ур. (II) и (6'')), согласуется с расчетами, выполненными другими методами.

6. Выражение (6) для $\psi(a)$ относится к $1/n^2$ -приближению. При расчете по $1/n$ -приближению нужно использовать

$$\psi = \frac{1}{2i} \operatorname{erfc} \left[\frac{\Gamma(1/2 + ia)}{\Gamma(1/2 - ia)(1 + e^{-2\pi a})} \right] + a(1 - \ln a) \equiv \psi_1(a) \quad (16)$$

По-видимому, учет в правилах квантования высших поправок к квазиклассике [4-7] (до \hbar^{2k} включительно) приведет к функции

$$\varphi_K(a) = \varphi_1(a) - \sum_{k=1}^{K-1} c_k a^{-(2k-1)} \quad (17)$$

где c_k - коэффициенты асимптотического разложения для $\varphi(a)$ при $a \rightarrow \infty$: $c_1 = 1/24$, $c_2 = 7/2880$, $c_3 = 31/40320$, ...

Из (II) видно, что \hbar^2 - формальный параметр квазиклассического разложения - превращается в $1/n^2$ (малый параметр для ридберговских состояний). Поэтому замена в правилах квантования

$$n_2 \rightarrow n_2 - \frac{1}{2\pi} \varphi_K(a) \quad (18)$$

должна обеспечить относительную точность порядка n^{-2K} (для положения уровня E_2). При $K = 1$ и 2 это выполняется.

Отметим, что функция $\varphi(a)$ имеет особенности в точках

$$a = a_n = (n + 1/2) i, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

соответствующих полюсам амплитуды рассеяния на параболическом барьере. Действительно, амплитуды отраженной (A) и проходящей (B) волны здесь равны [I, 22]:

$$B = i e^{-\pi a} A = (2\pi)^{-1/2} e^{-\frac{\pi a}{2}} 2^{-ia} \Gamma\left(\frac{1}{2} + ia\right) \quad (20)$$

и значения (19) отвечают полюсам гамма-функции (за дальнейшими подробностями отсылаем к Приложению D).

7. Уравнения (II) можно обобщить на ридберговские состояния произвольного атома, если ввести в них поправку на квантовый дефект $\delta(n_1, n_2, m)$ в параболическом базисе [23]. Рассчитанные таким образом энергии $E_2^{(n_1, n_2, m)}$ для водорода, рубидия и натрия, а также ширины $\Gamma^{(n_1, n_2, m)}$ для атома водорода, хорошо согласуются с экспериментальными данными по спектрам фотоионизации этих атомов в присутствии постоянного электрического поля (см. соответствующие таблицы в [12, 24]). При этом учет поправки на конечную проницаемость барьера является весьма существенным.

В заключение отметим, что при сравнении теории с экспериментом (и, в частности, при составлении таблиц 2 и 3) используются формулы пересчета

$$F = 1.945 \times 10^{-7} n^4 \mathcal{E},$$

$$\epsilon = 9.113 \times 10^{-6} n^2 E = 911.3 n^2 (\lambda^{-1} - \lambda_0^{-1}), \quad (21)$$

где $n = n_1 + n_2 + |m| + 1$ - главное квантовое число, F и ϵ (величины, входящие в ур. (II)) измеряются в атомных единицах, \mathcal{E} - в кВ/см, E - в см⁻¹, λ - в Å; λ_0 - длина волны, отвечающая ионизационному пределу $E = 0$ (так, $\lambda_0 = 2967.5$ Å в случае рубидия), Заметим также, что

$$100 \text{ см}^{-1} = 0.0124 \text{ эВ}. \quad (21')$$

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Л.П. Пятаевского за обсуждение результатов, а также А.В. Сергеева и А.В. Щерблякина за помощь в проведении численных расчетов.

Исследование модели (8)

Уравнение Шредингера с потенциалом (8) после замены $\rho = (2\omega)^{1/2} \cdot (z - R)$ принимает стандартный вид [II]:

$$\frac{d^2 \chi}{d\rho^2} + \left(\frac{\rho^2}{4} - a \right) \chi = 0 \quad (\text{A.1})$$

($a = -E/\omega$) с граничным условием

$$\chi(\rho_0) = 0, \quad \rho_0 = - (2\omega)^{1/2} R \equiv -2^{1/2} S. \quad (\text{A.2})$$

Отсюда следует ур. (10) для спектра квазистационарных состояний.

С другой стороны, положение подбарьерных ($E < 0$) резонансов определяется правилом квантования Бора-Зоммерфельда :

$$S^2 f(\alpha) = 2\pi (n + 3/4), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.3})$$

$$f(\alpha) = (1 - \alpha)^{1/2} + \frac{1}{2} \alpha \ln \alpha - \alpha \ln (1 + \sqrt{1 + \alpha}), \quad \alpha = \frac{2a}{S^2}.$$

Ограничиваясь для простоты случаем $S \gg 1$, $\alpha^{1/2}$ (когда $\alpha \ll 1$ и заведомо выполняется условие $n \gg 1$), имеем:

$$S^2 - a (1 + \ln \frac{2S^2}{a}) = 2\pi (n + 3/4). \quad (\text{A.4})$$

При тех же условиях из точного уравнения (10), используя асимптотику функций параболического цилиндра [II], приходим к уравнению (10'), которое в отличие от (A.4) определяет не только положение, но и ширину резонансов, см. (10''). Период классического движения частицы в яме ($0 < z < z_1$) есть ⁽¹⁰⁾

$$T = \frac{2}{\omega} \ln (2\omega^2 R^2 / |E_2|). \quad (\text{A.5})$$

а проницаемость барьера $\mathcal{D} = \exp(-2\pi |E_2| / \omega)$; поэтому (10'') полностью соответствует формуле Гамова (2). Заметим, что

период $T \rightarrow \infty$ (логарифмически), когда $E_n \rightarrow 0$.

Таким образом, в подбарьерной области уравнения (10') и (А.4) совпадают с экспоненциальной точностью. С другой стороны, в квазиклассических уравнениях (А.3), (А.4), в отличие от точных уравнений (10), при $\alpha \rightarrow 0$ возникает логарифмическая особенность (отвечающая тому, что правила квантования Бора-Зоммерфельда становятся неприменимыми, когда положение уровня близко к вершине потенциального барьера и точки поворота сближаются).

Уравнение (А.3), аналитически продолженное в область положительных энергий ($\text{Re } \alpha < 0, \text{Im } \alpha = \frac{\Gamma}{2\omega} > 0$), снова определяет спектр квазистационарных состояний. Условие $\text{Im } E < 0$ определяет выбор ветви логарифма при аналитическом продолжении:

$$\ln \alpha \rightarrow \ln(-\alpha) + i\pi \quad (\text{А.6})$$

($\pi/2 < \arg \alpha < \pi$). При такой замене уравнение (А.4) совпадает с (10') в надбарьерной ($|\alpha| \gg 1$) области, если учесть, что $\varphi(\alpha) = -2\pi i \alpha + O(\alpha^{-1})$.

Заметим, что в околопороговой области ($|n - n_0| \sim 1$)

$$E_n \approx 2\pi\omega \frac{(n - n_0)}{\ln n_0}, \quad \Gamma \approx \omega \frac{\ln 2}{\ln n_0}, \quad (\text{А.7})$$

а с дальнейшим ростом n , при условии $n_0 \gg n - n_0 \gg 1$,

$$E_n \approx 2\pi\omega \frac{(n - n_0)}{\ln n_0}, \quad \Gamma \approx \frac{\pi E_n}{\ln(n_0\omega/E_n)} \quad (\text{А.8})$$

Отсюда для отношения $\delta_n = \Gamma_n / (E_{n+1} - E_n)$, характеризующего перекрыwanie резонансов, получаем:

$$\delta_n \approx \begin{cases} \frac{\ln 2}{2\pi} = 0.11, & \text{для (A.7)} \\ 4\pi \frac{(n-n_0)}{\ln n_0}, & \text{для (A.8)} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Таким образом, в области $(n-n_0) \ll \ln n_0$ соседние резонансы еще не перекрываются. В предыдущих формулах

$$n_0 = \frac{s^2}{2\pi} - \frac{3}{4}, \quad (\text{A.10})$$

так что $s \gg 1$.

Приложение В

Вывод уравнений (II)

Для эффекта Штарка в водороде условия квантования, с учетом поправок порядка \hbar^2 и \hbar^4 , получены в работе [5].

Переходя к переменным

$$\varepsilon = 2n^2 E = 2n^2 (\varepsilon_2 - i\Gamma/2), \quad F = n^2 \mathcal{E}$$

и ограничиваясь поправками $\propto \hbar^2$, имеем ($\xi = z - z = n^2 y$):

$$\oint dy \left\{ \rho - \frac{1}{8} \frac{(\rho')^2}{\rho^2} + \frac{1}{8y^2 \rho} \right\} = 2\pi \left(n_2 + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.1})$$

$$\rho = n \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\beta_2}{y} - \frac{\mu^2}{4y^2} + \frac{F}{4y} \right)^{1/2}, \quad \mu = m/n, \quad (\text{B.2})$$

а контур интегрирования охватывает точки поворота y_0 и y_1 (условие квантования по переменной $\xi = z + z = n^2 x$ получается из (B.1) заменой $n_2 \rightarrow n_1, \beta_2 \rightarrow \beta_1$ и $F \rightarrow -F$).

При $m=0$ интегралы, входящие в (B.1), выражаются через гипергеометрическую функцию. Переходя к переменной интегрирования t ,

$$y = \frac{-\varepsilon z}{2F} t, \quad \rho(y) = \frac{(-\varepsilon z)^{1/2}}{2^{3/2}} k(t),$$

$$k(t) = \left[\frac{(1-t)(1-\xi t)}{t} \right]^{1/2}, \quad \xi = \frac{1 - (1-z)^{1/2}}{1 + (1-z)^{1/2}}, \quad (\text{B.3})$$

$$z_{\pm} = 1 \pm (1-z)^{1/2}, \quad z = z_2 = 16\beta_2 F / \epsilon^2 = 4\xi / (1+\xi)^2,$$

получаем:

$$\beta_2 (-\epsilon)^{-1/2} f(z_2) + \frac{F}{8n^2} (-\epsilon)^{-3/2} g(z_2) = (n_2 + 1/2) / n, \quad (\text{B.4})$$

где

$$f(z) = \pi^{-2} (1+\xi)^{1/2} \oint dt k(t), \quad (\text{B.5})$$

$$g(z) = \pi^{-2} (1+\xi)^{3/2} \oint dt \left[\frac{1}{t^2 k(t)} - \frac{(k')^2}{k^3} \right], \quad (\text{B.6})$$

$k' \equiv dk/dt$, а контур интегрирования охватывает особые точки подынтегральных выражений, $t = 0$ и 1 .

Используя интегральное представление [25]

$$F(a, b; c; z) = - \frac{\Gamma(c) \exp(-i\pi c)}{2\Gamma(b)\Gamma(c-b) \sin \pi b \sin \pi(c-b)} \times \oint dt \cdot t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} \quad (\text{B.7})$$

непосредственно получаем:

$$f(z) = (1+\xi)^{1/2} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; 2; \xi\right),$$

что с учетом квадратичного преобразования Куммера ([25]), ϕ -ла (2.1.5(26))

$$F(2\alpha, 2\alpha+1-\beta; \beta; \frac{1-\sqrt{1-z}}{1+\sqrt{1-z}}) = \left(\frac{1+\sqrt{1-z}}{2}\right)^{2\alpha} F\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}; \beta; z\right) \quad (\text{B.8})$$

дает:

$$f(z) = F\left(1/4, 3/4; 2; \xi\right). \quad (\text{B.9})$$

При вычислении $g(z)$ полезно проинтегрировать по частям второе слагаемое в (B.6):

$$\oint dt \frac{k'^2}{k^3} = \frac{1}{2} \oint (k^2)' \frac{dk}{k^2} = -\frac{1}{6} \oint (k^2)' d(k^{-3}) = \\ = \frac{1}{6} \oint (k^2)'' k^{-3} dt = \frac{1}{3} \oint \frac{dt}{t^2 k^3}$$

($(k^2)'' = 2/t^2$), после чего получаем:

$$g(z) = h(z) + \tilde{g}(z), \quad (\text{B.IO})$$

где
$$h(z) = \frac{(1+\zeta)^{3/2}}{\pi \zeta} \oint \frac{dt}{t^2 k(t)}, \quad (\text{B.II})$$

$$\tilde{g}(z) = -\frac{(1+\zeta)^{3/2}}{3\pi \zeta} \oint \frac{dt}{t^3 k^3(t)}.$$

Согласно (B.7)

$$z^{-1} \oint \frac{dt}{t^2 k} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{-4}{\Gamma(c)} F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; c; \zeta\right) = \zeta F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}; 2; \zeta\right), \quad (\text{B.I2})$$

$$z^{-1} \oint \frac{dt}{t^3 k^3} = \lim_{c \rightarrow -1} \frac{2}{\Gamma(c)} F\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}; c; \zeta\right) = -\frac{15}{4} \zeta^2 F\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}; 3; \zeta\right).$$

Существование этих интегралов гарантируется соотношением [25]

$$\lim_{c \rightarrow -n} \frac{F(a, b; c; \zeta)}{\Gamma(c)} = \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{(n+1)!} \zeta^{n+1} F(a+n+1, b+n+1; n+2; \zeta).$$

Для $h(z)$ преобразование Куммера дает

$$h(z) = F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 2; \zeta\right). \quad (\text{B.I3})$$

Прежде чем применять его к $\tilde{g}(z)$, воспользуемся тождеством

$$\frac{15}{8} \zeta F\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}; 3; \zeta\right) = F\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1; \zeta\right) - F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; \zeta\right),$$

которое легко проверяется сравнением рядов по степеням ζ .

Отсюда с помощью (B.8) следует

$$\tilde{g}(z) = \frac{2}{3} \left[F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 1; \zeta\right) - F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 2; \zeta\right) \right] \quad (\text{B.I4})$$

и окончательно

$$g(z) = \frac{1}{3} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 2; z\right) + \frac{2}{3} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 1; z\right) \quad (\text{B.15})$$

Перейдем теперь к состояниям с $0 < m \ll n$. В этом случае уравнение (B.I) можно упростить, разлагая интегралы по малому параметру $\mu = m/n$. Ограничиваясь $1/n^2$ -приближением, достаточно рассмотреть лишь первый интеграл в (B.I). Вводя точку сшивания

\bar{y} такую, что $\mu \ll \bar{y} \ll 1$, разлагая $\rho(y)$ при $\bar{y} < y < y_2$ по μ^2 , интегрируя по области $y_0 < y < \bar{y}$ (при этом произвольная точка \bar{y} выпадает из ответа), получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \oint \rho(y) dy = n \rho_2(-\varepsilon)^{-1/2} f(\frac{\varepsilon}{2}) - m\pi - \frac{m^2 F}{8n(-\varepsilon)^{3/2}} h_2(z) + \dots,$$

откуда следует уравнения (II).

Приложение С

Здесь мы изложим вывод замены (6") для задачи об эффекте Штарка в атоме водорода.

В этом случае переменные в уравнении Шредингера разделяются в параболических координатах [1]:

$$\psi(\xi^2) = (\xi \eta)^{-1/2} X_1(\xi) X_2(\eta) \exp(im\varphi),$$

причем ($y = n^{-2} \eta$, $0 < y < \infty$)

$$\frac{d^2 X_2}{dy^2} + \left(\rho^2 + \frac{1}{4y^2}\right) X_2 = 0, \quad \rho^2 = n^2 \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{A_2}{y} - \frac{\mu^2}{4y^2} + \frac{F}{4y}\right). \quad (\text{C.1})$$

В соответствии с методом Лангера [3], после замены

$$u = \alpha y, \quad X_2(y) = e^{u/2} u(u)$$

($-\infty < u < \infty$) получаем:

$$\frac{d^2 u}{du^2} + q^2(u) u = 0, \quad q^2 = e^{2u} \rho^2(e^u) \equiv 2(M - U),$$

$$M = -\frac{\mu^2}{4} n^2, \quad U = n^2 \left[-\frac{E_0}{2} e^{\mu u} - \frac{1}{8} (\epsilon e^{2\mu u} + F e^{-2\mu u}) \right]. \quad (C.2)$$

В классически-разрешенной области, $u_0 < u < u_1$, $\psi(u)$ имеет вид (3) с фазой II)

$$\theta(u) = \int_{\bar{u}_0}^u d\mu \left\{ q - \frac{1}{4} \left(\frac{q'}{q^2} \right)' - \frac{1}{8} \frac{q'^2}{q^3} \right\}, \quad (C.3)$$

где $q' = dq/d\mu$, \bar{u}_0 - произвольная фиксированная точка ($\bar{u}_0 < u_0$). Это решение становится неприменимым, когда точки поворота u_1, u_2 близки к вершине потенциального барьера $u = u_m$,

$$u_m = \ln \left[\frac{-E}{3F} (1+\xi) \right], \quad \xi = \left(1 - \frac{3}{4} \epsilon_0 \right)^{1/2}. \quad (C.4)$$

Переходя к переменной $\rho = (u - u_m)/\beta u_m$,

$$\beta = n^{1/2} u_m (-\epsilon)^{1/4} \xi^{1/4} \left[(1+\xi)/3F \right]^{1/2}, \quad (C.5)$$

в области $|\rho| \ll \beta$ приводим (C.2) к стандартной форме (A.1) с $a = \frac{1}{2} \int_{\bar{u}_0}^{u_1} d\mu [-q^2(\mu)]^{1/2}$. Решение, отвечающее условию излучения, в области $\tau = -\rho \gg |a|$ имеет вид (3), что следует из соотношений [II, 25]

$$\mathcal{D}_\nu(-z) = e^{i\pi\nu} \mathcal{D}_\nu(z) + \frac{(2\pi)^{1/2}}{\Gamma(1-\nu)} \mathcal{D}_{-\nu-\epsilon}(iz),$$

$$\mathcal{D}_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{\pi\nu}{2}} \left[1 + \frac{\nu(1-\nu)}{2z^2} + O(z^{-4}) \right], \quad |\arg z| < \frac{3\pi}{4}.$$

Для сравнения фаз точной и квазиклассической волновых функций в области перекрытия представим $\theta(u)$ в форме:

$$\theta(u) = \frac{1}{2} \mathcal{I} - s_0 - s_1 - s_2, \quad (C.6)$$

где

$$\mathcal{I} = \oint d\mu \left(q - \frac{1}{8} \frac{q'^2}{q^3} \right), \quad (C.7)$$

$$S_0 = \int_{2a^{1/2}}^z d\tau \varrho(\tau) = \frac{1}{4} \tau (\tau^2 - 4a)^{1/2} - a \ln \frac{\tau + (\tau^2 - 4a)^{1/2}}{2a^{1/2}},$$

$$S_1 = \frac{1}{8} \int_{2a^{1/2}}^z d\tau \frac{\varrho'^2}{\varrho^3} - \frac{1}{16} \int_{c_5}^z d\tau \frac{\varrho'^2}{\varrho^3} = \frac{\tau^3}{48a(\tau^2 - 4a)^{1/2}}, \quad (C.8)$$

$$S_2 = \frac{1}{4} \int_{2a^{1/2}}^z d\tau \left(\frac{\varrho'}{\varrho^2}\right)' - \frac{1}{8} \int_{c_5}^z d\tau \left(\frac{\varrho'}{\varrho^2}\right)' = -\frac{\tau}{2(\tau^2 - 4a)^{1/2}}$$

($\varrho(\tau) = (\frac{\tau^2}{4} - a)^{1/2}$, обозначения ясны из рис.3). Сумма $s(\tau) = s_0 + s_1 + s_2$ соответствует разложению Дарвина [II] для функции $W(a, \tau)$. Учитывая, что при $\tau \gg |a|$

$$s(\tau) = \frac{\tau^2}{4} - a \ln \tau + \frac{1}{2} a (\ln a - 1) + \frac{1}{48a} + \frac{a^2 - 9a}{2\tau^2} + \dots \quad (C.9)$$

Из сравнения $\theta(u)$ с (S') приходим к правилу квантования с учетом проницаемости барьера (с точностью до членов $1/n^2$ включительно):

$$\oint du \left(\varrho - \frac{1}{8} \frac{\varrho'^2}{\varrho^3} \right) = 2\pi \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) - \varphi(a). \quad (C.10)$$

Возвращаясь от u к первоначальной переменной $z = e^u$, получаем уравнения (II), (6").

Приложение D

Уравнение Шредингера с потенциалом

$$V(x) = -\frac{1}{2} \omega^2 x^2 \quad (D.1)$$

допускает точное решение в функциях параболического цилиндра

[II, 22]. Асимптотически

$$\psi = \begin{cases} c_1 (-\xi)^{-1/2 + ia} e^{-i\xi^2/2} + c_2 (-\xi)^{-1/2 - ia} e^{i\xi^2/2}, & \xi \rightarrow -\infty \\ c_3 \xi^{-1/2 - ia} e^{i\xi^2/2} + c_4 \xi^{-1/2 + ia} e^{-i\xi^2/2}, & \xi \rightarrow \infty \end{cases} \quad (D.2)$$

где $x = (\hbar/m\omega)^{1/2} \xi$, $a = -E/\omega$; далее $\hbar = m = 1$. При этом первое слагаемое отвечает волне, распространяющейся слева направо:

$$\psi \sim \rho^{-1/2} \exp(i \int \rho(x) dx) \underset{\xi \rightarrow \pm\infty}{\sim} |\xi|^{-1/2} \exp\left\{\pm i \left(\frac{\xi^2}{2} - a \ln|\xi|\right)\right\}$$

($\rho > 0$), поскольку

$$\rho(x) = (2E + \omega^2 x^2)^{1/2} = \omega|x| \left(1 - \frac{a}{\omega x^2} + \dots\right).$$

Матрица перехода S дает связь между асимптотическими коэффициентами в (D.2):

$$\begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (D.3)$$

($\det S = 1$). Для обычной постановки задачи рассеяния $c_1 = 1$,

$c_2 = A$, $c_3 = B$ и $c_4 = 0$, где A и B - амплитуды отраженной и проходящей волны:

$$A = -\gamma/\delta, \quad B = \delta^{-1}. \quad (D.4)$$

В данном случае [22]

$$\begin{aligned} \alpha &= (2\pi)^{1/2} e^{2a/2} 2^{-ia} / \Gamma(\frac{1}{2} - ia), \\ \delta &= (2\pi)^{1/2} e^{2a/2} 2^{ia} / \Gamma(\frac{1}{2} + ia), \\ \gamma &= -\beta = i e^{2a} \quad (a = -E/\omega) \end{aligned} \quad (D.5)$$

Амплитуды A и B имеют вид (20), а коэффициенты отражения и прохождения равны

$$R = |A|^2 = (1 + e^{-25a})^{-1}, \quad T = (1 + e^{25a})^{-1} \quad (D.6)$$

($-\infty < E < \infty$). Из (D.5) при $a = a_0$ получаем:

$$\alpha = \pi^{1/2} 2^{n+1} (n!)^{-1} \exp\left\{\frac{i\pi}{4}(2n+1)\right\}, \quad (D.7)$$

$$\beta = -\delta = (-1)^n, \quad \delta = 0.$$

причем

$$\delta = c_n (a - a_n) + \dots, \quad a \rightarrow a_n, \quad (D.8)$$

где $c_n = -2^{-n} \pi^{1/2} n! \exp\left\{-\frac{i\pi}{4}(2n+1)\right\}$. Поэтому A и B имеют полюса первого порядка в точках (19).

Заметим, что решению, убывающему на бесконечности, отвечает

$$c_2 = c_3 = 0 \quad \left(ia - \frac{1}{2} = -(n+1), \quad -ia - \frac{1}{2} = n\right).$$

Но тогда, согласно (D.3) и (D.7), c_1 и c_2 также обращаются в нуль. Таким образом, при $a = a_n$ не существует волновой функции такой, что $\psi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Однако можно (полагая

$c_1 = 0$) получить решение с $c_2 = 0$, $c_3 = (-1)^n c_2$, для которого (12)

$$\psi_n(\xi) = \text{const} \cdot H_n(\xi e^{-i\pi/4}) e^{i\xi^2/4} \sim \xi^n e^{i\xi^2/4}, \quad \xi \rightarrow \pm\infty \quad (D.9)$$

(H_n - полиномы Эрмита).

Влияние прозрачности барьера на квазиклассические правила квантования рассматривали Райс и Гуд [26], Друкеров [27] и Кондратевич и Островский [21]. Их результат:

$$\tilde{F}(a) = a \operatorname{tg} \Gamma\left(\frac{1}{2} + ia\right) + a(1 - \epsilon_n a), \quad (D.10)$$

что практически не отличается (для вещественной части) от (6) при $a \gg 1$, однако не дает ширины уровней в слабом поле. При приближении уровня к вершине барьера это выражение заведомо неточно (например, решение $\epsilon(F)$ системы (II) с указанной выше $\mathcal{P}(a)$ остается вещественным при всех $F < F_n$). Кроме того, функция (D.10) имеет особенности не только при $a = a_n$.

но и в точках $a = a_n - i(n + \frac{1}{2})$, не отвечающих полюсам амплитуды рассеяния.

В заключение отметим, что при вещественных E и a

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \rho \\ \rho^* & \alpha^* \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 - |\rho|^2 = 1,$$

поэтому преобразование $S \in SU(1,1)$.

Примечания

- 1) Здесь x_i - точки поворота, $\rho(x_i) = 0$.
- 2) Серьезным препятствием для непосредственного использования уравнения Шредингера является экспоненциальный рост гамовской волновой функции при $\tau \rightarrow \infty$. Развитие эффективных методов расчета величин E_n и Γ является предметом исследований вплоть до настоящего времени (см., например, работы [8,9] и указанные в них дальнейшие ссылки).
- 3) Здесь $\mathcal{D}_\nu(x)$ - функция параболического цилиндра [11]. Отметим, что волновая функция (5) удовлетворяет условию излучения (расходящаяся волна при $\rho \rightarrow \infty$).
- 4) Мы используем атомные единицы $\hbar = m_e = e = 1$; n_1, n_2, m - параболические квантовые числа [1] ($m \geq 0$), n - главное квантовое число. Эти уравнения (для состояний с $m = 0$) уже использовались ранее [14]; их вывод изложен в Приложении В.
- 5) В (2) T есть период колебаний частицы в пределах классически-разрешенной области. Для финитного движения в кулоновском поле период T зависит лишь от главного квантового числа n :
- $$T = 2\pi (-2E)^{-3/2} = 2\pi n^3, \text{ согласно третьему закону Кеплера [16].}$$
- 6) Здесь F_n - классический порог ионизации [14] ($F_n = 0.315, 0.328, 0.336, 0.341$ и 0.383 для состояний $|n-1, 0, 0\rangle$ при $n = 20, 30, 40, 50$ и $n \rightarrow \infty$). Заметим, что решение ур. (II) без поправки на проницаемость барьера дает: $\epsilon_n^* \approx 0$ при $F < F_n$, т.е. не объясняет ширину уровней.
- 7) Для несмещенных кулоновских уровней $E_{n\ell}^{(\omega)} = -\frac{1}{2}n^2$, $\nu = n$. Если уровень находится посередине между $E_n^{(\omega)}$ и $E_{n-1}^{(\omega)}$, то

$$v = (n^2 - n)(n^2 - n + \frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}} = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + \dots, \quad n \gg 1$$

8) $1/n^2$ -приближение, по сравнению с $1/n$, дает некоторое повышение точности расчета энергии резонансов. См. следующую таблицу, в которой приведены значения $-E_z \cdot 10^3$ для $n=10$ (состояние $|9,0,0\rangle$).

$F =$	0.20	0.25	0.30
$1/n$	2.5840	2.0612	1.5647
$1/n^2$	2.5854	2.0643	1.5687
точное решение [19]	2.58557	2.06494	1.57106

Однако, при существующей точности эксперимента [20] эта разница не существенна (см. также [12]) и не оправдывает усложнения вычислений при переходе от $1/n$ - к $1/n^2$ -приближению.

9) Как видно из табл.3, положения резонансов $E_z^{(n_1, n_2, m)}$ согласуются с точностью $\sim 0.1 + 1\%$ (за исключением состояния $(26,0,0)$, где различие достигает 3%). Для ширины $\Gamma^{(n_1, n_2, m)}$ согласие обоих расчетов значительно хуже, особенно в том случае, когда энергия уровня приближается к границе ионизационного предела $E=0$ (см., например, состояния $(26,0,0)$ и $(24,0,1)$).

10) Для потенциала (8) характерные точки, входящие в формулы (1)-(4), равны:

$$z_0 = 0, \quad z_{1,2} = R \mp (-2E)^{1/2} \omega^{-1}$$

(при $\varepsilon > 0$ точки поворота z_1, z_2 выходят в комплексную плоскость).

II) Для состояний с $m \neq 0$ выбор фазы в (3) обычен ($y = y_0$ - "линейная" точка поворота [I]), но при $m = 0$ он требует пояснений. В этом случае $y_0 = 0$,

$$p(y) = \frac{n}{2} \left(\varepsilon + \frac{4\beta_2}{y} + Fy \right)^{1/2} = n \left(\frac{\beta_2}{y} \right)^{1/2} + O(y^{1/2})$$

(с учетом поправки Лангера [I,3], т.е. $(m^2 - 1)/8\eta^2 \rightarrow m^2/8\eta^2$).

При $y \rightarrow 0$ квазиклассическое приближение неприменимо, но уравнение Шредингера допускает точное решение

$$X_2 = \text{const} \cdot \eta^{1/2} \int_0^\eta (2\sqrt{\beta_2 \eta}) \rightsquigarrow \eta^{1/4} \sin\left(2\sqrt{\beta_2 \eta} + \frac{\pi}{4}\right),$$

что совпадает с $p^{-1/2} \sin\left(\int_0^\eta p_\eta d\eta + \frac{\pi}{4}\right)$ и объясняет появление слагаемого $\pi/4$ в фазе $\psi(x)$. $\eta \gg 1$,

I2) Точки $a = a_n$ соответствуют $E = E_n = -i(n + 1/2)\omega$

При замене $\omega \rightarrow i\omega$ параболический барьер переходит в потенциал гармонического осциллятора; тогда $E = E_n$ - его спектр энергий, а (D.9) - волновые функции.

Наличие полюсов амплитуд А и В в точках $a = a_n^*$ противоречит эрмитовости гамильтониана, ибо тогда ($\delta = 0$) существовали бы квадратично-интегральные волновые функции: $c_1 = c_4 = 0$,

$$\psi_n \rightsquigarrow \xi^{-ia - \frac{1}{2}} e^{i\xi^2/2} = \xi^{-(n+1)} e^{i\xi^2/2}, \quad \xi \rightarrow \pm \infty$$

($n = 0, 1, \dots$), соответствующие комплексным собственным значениям энергии $E = i(n + 1/2)\omega$.

Таблица I

F'	I/n	I/n^2	АПЭ
0.20	0.48280	0.48309	0.4831
	0.48301	0.48309	
0.25	0.36628	0.36692	0.367
	0.36677	0.36695	
0.30	0.2549	0.2570	0.256
	0.2562	0.2566	
0.35	0.1508	0.1547	0.149
	0.1490	0.1488	
0.38	0.0870	0.0962	0.086
	0.0849	0.0843	
0.40	0.0437	0.0537	0.042
	0.0421	0.0413	

Примечание. Приведены значения $-Re \epsilon_n = -2n^2 E_2^{(n-1, 0, 0)}$ для $n = 20$, вычисленные в I/n и I/n^2 - приближениях, а также с помощью аппроксимант Паде-Эрмита [14]. При данном F' , первая строка - без учета проницаемости барьера, вторая - с учетом проницаемости.

Таблица 2

E_z и Γ (в атомных единицах) для состояний $|l = 1, 0, 0\rangle$.

F	$l = 10$		$E, \text{кВ/см}$	F	$l = 40$	
	$-E_z \cdot 10^3$	Γ			$-E_z \cdot 10^5$	Γ
0.20	2.584	1.7(-7)	0.58	0.289	7.918	3.7(-9)
	2.586	1.902(-7)			7.925	3.818(-9)
0.25	2.061	1.2(-5)	0.62	0.309	6.486	6.5(-8)
	2.065	1.285(-5)			6.494	6.859(-8)
0.30	1.565	7.3(-5)	0.66	0.329	5.079	3.8(-7)
	1.571	7.919(-5)			5.090	4.233(-7)
0.35	1.072	1.8(-4)	0.70	0.349	3.687	1.1(-6)
	1.080	1.947(-4)			3.699	1.230(-6)
0.40	0.578	3.1(-4)	0.74	0.368	2.297	2.2(-6)
	0.585	3.341(-4)			2.310	2.383(-6)
					0.909	3.4(-6)
			0.78	0.388	0.9178	3.715(-6)

Примечание: первая строка (при данном F) соответствует $1/l$ -приближению в ур. (10), вторая строка - работе [19]; $(k) \equiv 10^k$, например, $1.7(-7) = 1.7 \times 10^{-7}$, и т.д.

Таблица 3

$(n_1, n_2, m) n$	p	I/n	$[2I]$	
(23,0,0)	24	I	76.62 + i 1.1(-5)	76.64 + i 1.2(-5)
(24,0,0)	25	I	53.67 + i 5.7(-3)	53.69 + i 6.5(-3)
(25,0,0)	26	I	32.60 + i 0.22	32.57 + i 0.26
(26,0,0)	27	I	12.85 + i 0.96	13.17 + i 2.14
(22,0,I)	24	2	82.86 + i 1.6(-4)	82.88 + i 1.78(-4)
(23,0,I)	25	2	60.54 + i 4.6(-2)	60.56 + i 5.3(-2)
(24,0,I)	26	2	40.26 + i 0.70	39.89 + i 1.04
(23,I,0)	25	3	67.53 + i 0.19	67.52 + i 0.20
(24,I,0)	26	3	47.87 + i 1.44	-
(22,I,D)	25	4	74.58 + i 0.47	74.43 + i 0.57
(23,I,I)	26	4	55.34 + i 2.39	-
(24,I,I)	27	4	36.35 + i 5.02	-
(22,2,0)	25	5	81.64 + i 0.92	81.15 + i 1.30
(23,2,0)	26	5	62.63 + i 3.46	-

Примечание: здесь приведены значения $E_z - i \Gamma/2$ (см^{-1}), взятые с обратным знаком, рассчитанные для атома водорода при $\mathcal{E} = 3.59$ кВ/см. При фиксированном n , ширина Γ возрастает вместе с $p = 2n_2 + |m| + 1$.

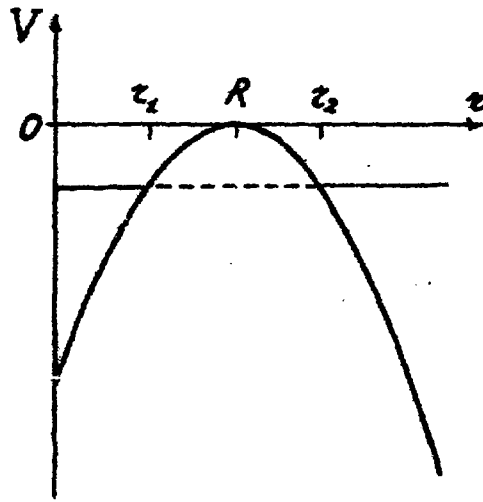


Рис. I

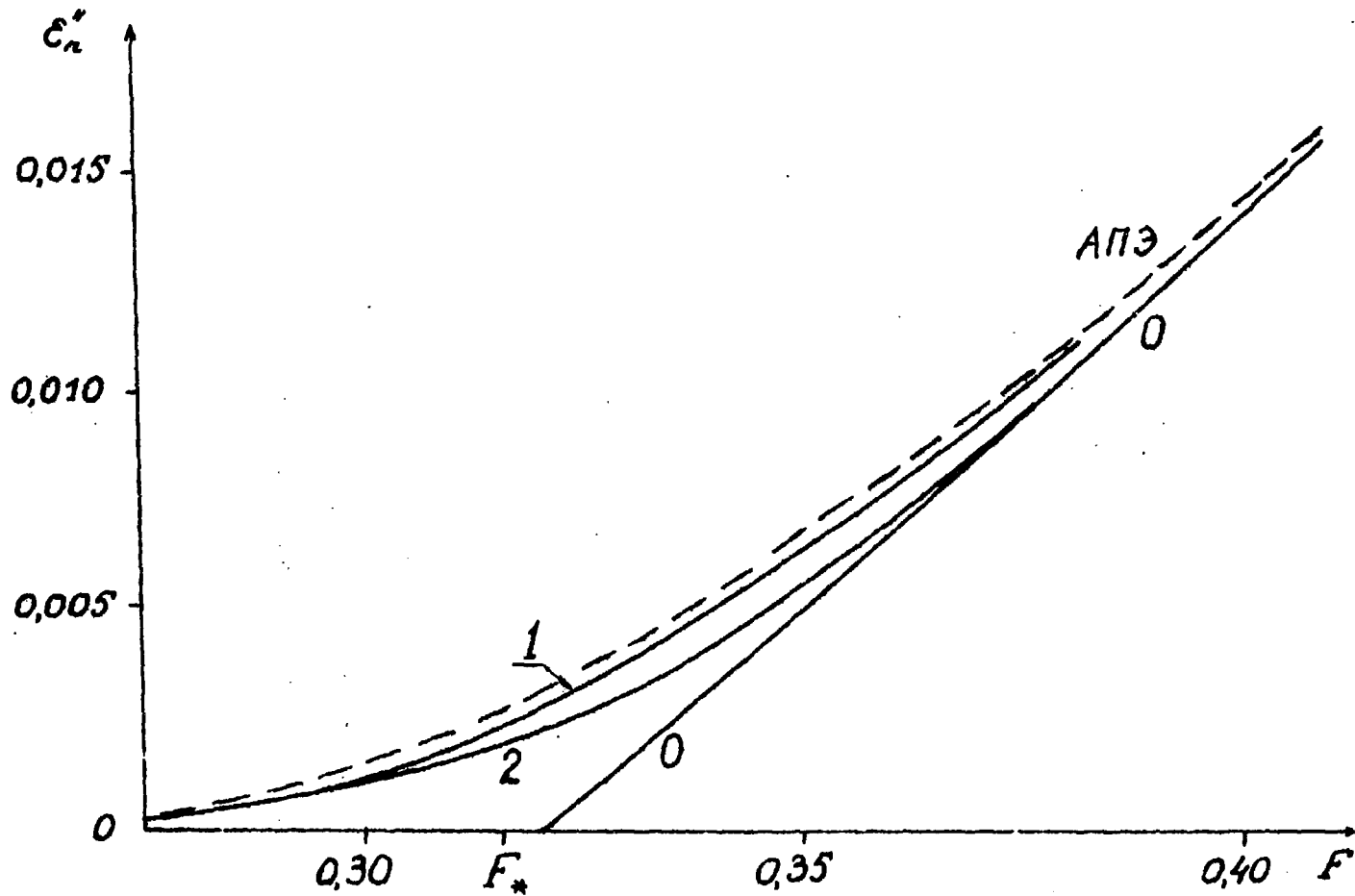


Рис.2. Влияние проницаемости барьера на вычисление ширины уровня (состояние $|19,0,0\rangle$).
 Кривая 0 - решение ур.(II) для $\nu_2 = 1 - \nu_1 = 1/2n$ (т.е. при $\varphi(a) = 0$); кривые
 -1 и 2- с учетом проницаемости в $1/n$ и $1/a^2$ -приближениях.

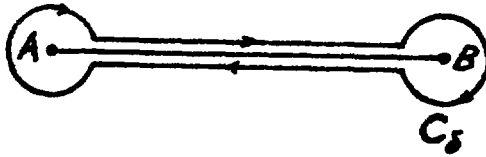


Рис. 3. Контур интегрирования в (С.7) на плоскости переменной $\rho = -\tau$. Точка А отвечает $y = y_0$ ($z = z_0$), точка В - $y = y_1$, или $\tau = 2\alpha^{1/2}$.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
2. Хединг Дж. Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). М.: Мир, 1965.
3. Langer R. E. // Phys. Rev., 1937, v. 51, p. 669.
4. Dunham J. L. // Phys. Rev., 1932, v. 41, p. 713.
5. Bekenstein J. D., Krieger J. B. // Phys. Rev., 1969, v. 188, p. 130.
6. Bender C. M., Olaussen K., Wang P. S. // Phys. Rev., 1977, v. D16, p. 1740.
7. Kesarwani R. N., Varshni Y. P. // J. Math. Phys., 1980, v. 21, p. 90; 1981, v. 22, p. 1983.
8. Орлов Ю. В., Туровцев В. В. // ЖЭТФ, 1984, т. 86, с. 1600.
9. Orlov Yu. V., Popov V. S., Turovtsev V. V., Weinberg V. M. М., Preprint ИТЕР 1986, № 140; // Укр. физ. журн., 1987, т. 32, с. 1125.
10. Гольдман И. И., Кривченков В. Д. Сборник задач по квантовой механике. М.: Гостехиздат, 1957.
11. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
12. Popov V. S., Mur V. D., Sergeev A. V., Shceblykin A. V. M., Preprint ИТЕР, 1989, № 61.
13. Попов В. С., Вайнберг В. М., Мур В. Д. // Письма в ЖЭТФ, 1985, т. 41, с. 439; Phys. Lett., 1987, v. A124, p. 77.
14. Вайнберг В. М., Мур В. Д., Попов В. С., Сергеев А. В. // Письма в ЖЭТФ, 1987, т. 46, с. 178; ЖЭТФ, 1987, т. 93, с. 450.
15. Silverstone H. J. // Phys. Rev., 1987, v. A18, p. 1853.
16. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Физматгиз, 1958.
17. Yamabe T., Tachibana A., Silverstone H. J. // Phys. Rev. 1977, v. A16, p. 677.

13. Damburg R.J., Kolosov V.V. // J. Phys., 1976, v. B9, p. 3149;
1978, v. B11, p. 1921
19. Kolosov V.V. // J. Phys., 1987, v. B20, p. 2359
20. Ng Y., Yao D., Nayfeh M.N. // Phys. Rev., 1987, v. A35, p. 2508
21. Kondratovich V.D., Ostrovsky V.N. // J. Phys., 1984, v. B17,
p. 1981, 2011
22. Kemble E.C. // Phys. Rev., 1935, v. 48, p. 549.
23. Мур В.Д., Попов В.С. // Письма в ЖЭТФ, 1988, т. 48, с. 67;
ЖЭТФ, 1988, т. 94, с. 125
- 23а. Мур В.Д., Попов В.С. "Эффект Штарка в сильном поле: теория и
эксперимент". Лекция на XX Всесоюзной школе по ядерной физике,
изд. МКИ, М. 1969
24. Мур В.Д., Попов В.С., Сергеев А.В. М., Препринт ИТЭФ, 1988, № 18.
25. Bateman H. Higher Transcendental Functions, v. 1, N.Y.:
Mc Graw-Hill, 1953
26. Rice K.N., Good R.N. // J. Opt. Soc. Amer. 1964, № 52, p. 239.
27. Друкарев Г.Ф. // ЖЭТФ, 1978, т. 75, с. 473.

В.Д. Мур, В.С. Попов

Квантование с учетом прозрачности барьера.

Редактор Н.Д. Леснова

Корректор О.П. Ольховникова

Работа поступила в ОПТИ 18.05.89

Подписано к печати 20.05.89

Т11741

Формат 60x90 1/16

Офсетн. печ. Усл.-печ. л. 2,0.

Уч.-изд. л. 1,4,

Тираж 170 экз.

Заказ 93

Индекс 3649

Цена 21 коп.

