

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ  
ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ АТОМНОЙ ЭНЕРГИИ СССР  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

IFUE - ONF - 89 - 46

ИФВЭ 89-46  
ОНФ

Р. Н. Краснокутский, Л. Л. Курчанинов,  
В. В. Тихонов\*, Н. Н. Федякин, Р. С. Шувалов

ВРЕМЯВАРИАНТНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Часть I

Направлено в НИИ и ПТЭ

---

\*) Московский физико-технический институт

Аннотация

Краснокутский Р.Н. и др. Времявариантные фильтры. Часть I: Препринт ИФВЭ 89-46. - Серпухов, 1989. 13 с., 2 рис., библиогр.: 7

Проведен анализ шумов идеального усилителя напряжения с последующим времявариантным фильтром со структурой фильтр F1 - ключ - фильтр F2. Рассмотрены два типа фильтров. F1 - идеальный дифференциатор и отбеливатель. Импульсные характеристики F2 варьировались. Показано, что: 1) во всех рассмотренных случаях эквивалентный шумовой заряд (ENC) не лучше, чем для оптимального времяинвариантного фильтра (cusp); 2) для структуры отбеливатель-ключ-двойной интегратор ENC всего на 1,6% больше, чем для оптимального фильтра.

Abstract

Krasnokutsky R.N. et al. Time-Variant Filter. Part I: IHEP Preprint 89-46. - Serpukhov, 1989. - p.13. figs. 2, refs.: 7.

The noise analysis for an ideal voltage amplifier with time-variant filters has been performed. The filter has a F1-switch-F2 structure.

Two types of F1 are considered - ideal differentiator and noise-whiter ( $w$ ). Pulse response of F2 was varied.

It is shown that: 1) in all cases the equivalent noise charge (ENC) is not better than for the optimum time-invariant filter (cusp); 2) for the case of W-switch-double integrator ENC is always 1.6% more than for the optimum filter.

Противошумовые фильтры с зависящими от времени параметрами (иначе – времявариантные фильтры) неоднократно обсуждались в литературе [1–6], но последние годы публикаций на эту тему не было. Возможно, причина заключается в том, что проведенный ранее анализ не выявил существенных преимуществ времявариантных фильтров перед времяинвариантными ни по отношению сигнал/шум, ни по быстродействию (см. последние обзоры [3–6]).

В [7] мы показали, что для простейшего времявариантного фильтра (стробируемого интегратора) можно в несколько раз увеличить загрузочную способность по сравнению с пиковым детектором без ухудшения отношения сигнал/шум. Выигрыш в быстродействии достигается за счет правильного выбора моментов отпираания и запираания линейного ключа. Очевидно, что для других типов времявариантных фильтров также необходимо провести более тщательный анализ шумов.

Общей теории синтеза времявариантных фильтров нет, поэтому не остается ничего другого, как просчитывать различные конкретные варианты. Окончательный выбор фильтра может быть сделан на основе компромисса между следующими противоречивыми требованиями: 1) простота реализации; 2) возможно большее отношение сигнал/шум; 3) высокое быстродействие.

Будем рассматривать структурную схему, изображенную на рис. 1. В настоящей работе мы ограничимся анализом двух случаев: 1) фильтр  $F_1$  – идеальный дифференциатор; 2) фильтр  $F_1$  – отбеливатель шума. В первом случае шум на выходе  $F_1$  представляет собой сумму пуассоновских потоков дельта-функций и их производных, во втором случае – потоком дельта-функций. Структура  $F_2$  будет варьироваться. Такая идеализация оправдана тем, что задача решается аналитически.

Анализ шумов для других типов  $F_1$  мы предполагаем выполнить позднее.

## АНАЛИЗ И ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

### 1. Принятые допущения

1) Сигнал детектора есть токовая дельта-функция с зарядом, равным одному электрону.

2) Источники параллельного и последовательного шумов представлены в виде пуассоновских потоков дельта-функций с интенсивностями

$$n_p = 2kTR_p^{-1}, \quad n_s = 2kTg_m, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (1)$$

Здесь  $R_p$  - эквивалентное сопротивление параллельного шума,  $g_m$  - крутизна головного транзистора.

3) В точке "А" рис.1 шумы есть сумма пуассоновских потоков  $\theta$ - и  $\delta$ -функций с интенсивностями (1).

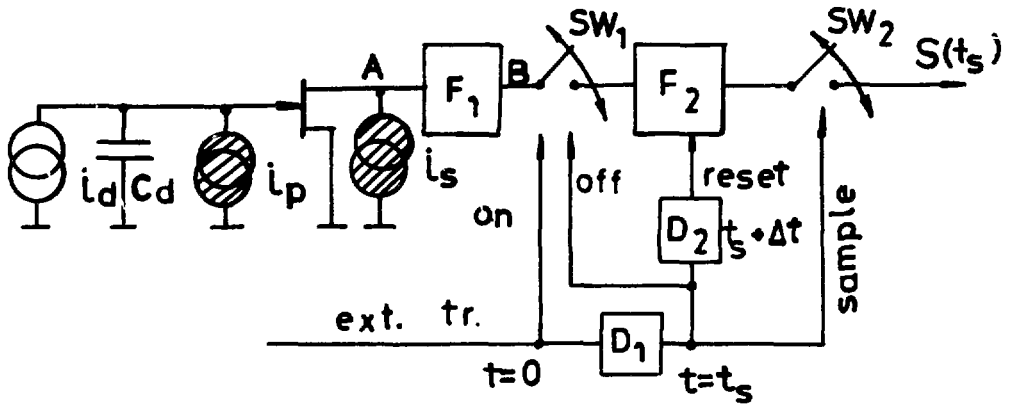


Рис. 1. Структурная схема времявариантного фильтра.

Схема рис.1 работает следующим образом. В момент времени  $t=0$  ключ SW1 замыкается, и на выходе F2 наблюдаются возрастающий с течением времени сигнал  $f(t)$  и шум с нулевым средним и возрастающей дисперсией. В момент времени  $t_s$  ключ SW1 размыкается, а ключ SW2 замыкается на бесконечно малое время, то есть на выходе измеряется мгновенное значение адди-

тивной смеси сигнала и шума. После этого по команде "reset" фильтр F2 возвращается в исходное состояние, то есть разряжаются все реактивные элементы, в которых за время  $t$  накопилась энергия. Будем искать оптимальное  $t_s$  и оптимальное расположение сигнала относительно  $t=0$  для разных типов фильтров.

## 2. Фильтр F1 - идеальный дифференциатор

В силу сделанных предположений в этом случае в точке "B" схемы рис. 1 шум будет представлен суммой пуассоновских потоков  $\delta$ -функций (синглетов) и ее производных (дублетов). Сигнал в точке "B" есть  $\delta$ -функция.

При замыкании (размыкании) ключа SW1 с вероятностью  $n_s dt$  "половина" дублета не попадет в фильтр F2, но другая "половина" даст на выходе F2 импульс бесконечно большой амплитуды, что приведет к расходимости интеграла при вычислении дисперсии шума. В литературе этот эффект известен под названием "расщепление дублетов" [1-6]. Формально расходимость следует из общей формулы для дисперсии шума на выходе произвольного фильтра с импульсной характеристикой  $h(t)$ :

$$D(t) = \int_0^t \int_0^s dt_1 dt_2 h(t_1) h(t_2) K(t_2 - t_1), \quad (2)$$

так как на входе F1 (точка "A" рис. 1) корреляционная функция последовательного шума есть

$$K_A(t) = \delta(t)$$

и на выходе F1 (точка "B" рис. 1)

$$K_B(t) = K_A'(t) = -\delta'(t). \quad (3)$$

В приложении I показано, что избежать расходимости (2) можно, если  $h(t)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$h(0) = h(t_s) = 0, \quad h'(0) < \infty, \quad h'(t_s) < \infty. \quad (4)$$

## 2.1. Оптимизация фильтра F2

Условием (4) удовлетворяет широкий класс функций. В [6] рассмотрена задача, когда в качестве  $h(t)$  выбрана

$$\sin \frac{\pi t}{2t_s} [\theta(t) - \theta(t-t_s)].$$

Но такая импульсная характеристика не является оптимальной. Используя вариационный метод, найдем  $h(t)$ , при которой достигается минимум ENC.

Эквивалентный шумовой заряд можно записать в виде

$$ENC^2 = \frac{D_p + D_s}{S}, \quad (5)$$

где  $D_p$  и  $D_s$  - дисперсии параллельного и последовательного шумов,  $S$  - сигнал. Если  $C_d$  - емкость детектора и сигнал на детекторе появляется в момент времени  $\gamma \cdot t_s$ ,  $0 < \gamma < 1$ , то, согласно теореме Кэмпбелла, (5) принимает вид

$$ENC^2 = \frac{C_d^2}{g^2 h^2(t_s - \gamma \cdot t_s)} \left[ n_p \int_0^{t_s} (h(t))^2 dt + n_s \int_0^{t_s} (h^\nabla(t))^2 dt \right]. \quad (6)$$

В приложении II показано, что: 1) минимум ENC по  $\gamma$  достигается при  $\gamma=1/2$ , когда  $h(t)$  симметрична относительно середины временного интервала  $0 - t_s$ , 2) оптимальной является форма

$$h_{opt}(t) = \frac{\text{sh}(t/\tau_c)}{\text{sh}(t_s/2\tau_c)}, \quad 0 < t < t_s/2, \quad (7)$$

где  $\tau_c = C_d(R_p R_s)^{1/2}$  - "угловая" постоянная времени шума. Подставляя (7) в (6), получим

$$ENC_{min}^2 = \frac{4kTC_d}{(R_p R_s)^{1/2}} \left[ \frac{\text{sh}(2t_s/\tau_c)}{2\text{sh}^2(t_s/\tau_c)} \right]. \quad (8)$$

Первый множитель в (8) есть не что иное, как минимально достижимый ENC в теории времяинвариантных фильтров. Второй

множитель (обозначим его  $\eta^2$ ,  $\eta$  – коэффициент превышения шума) асимптотически стремится к 1 при  $t_s \rightarrow \infty$ .

Таким образом, если F1 – идеальный дифференциатор, то: 1) невозможно получить значение ENC меньше, чем в классической теории; 2) оптимальный фильтр F2 реализовать нельзя, так как для обработки сигнала в этом случае требуется бесконечно большое время.

## 2.2. Фильтр F2 с импульсной характеристикой

$$h(t) = \begin{cases} \text{sh}(t-t_s) & 0 < t < t_s/2 \\ \text{sh} \frac{t_s-t}{t_s} & t_s/2 < t < t_s \end{cases}. \quad (9)$$

Основываясь на результатах предыдущего раздела, примем, что сигнал детектора возникает в момент времени  $t_s/2$ . Тогда сигнал, измеряемый на выходе F2, равен

$$S = \frac{g_m}{c_d} \text{sh}(1/2), \quad (10)$$

а дисперсия шума имеет вид

$$D = D_p + D_s = kTg_m \left[ \frac{\text{sh}(1)+1}{t_s} + \frac{t_s(\text{sh}(1)-1)}{\tau_c^2} \right]. \quad (11)$$

Подставляя (10) и (11) в (5), получим выражение для ENC, из которого выделяется коэффициент превышения шума

$$\eta^2 = \frac{\frac{\text{sh}(1)}{4} \left( \frac{\tau_c}{t_s} + \frac{t_s}{\tau_c} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{\tau_c}{t_s} - \frac{t_s}{\tau_c} \right)}{\text{sh}(1/2)}.$$

Минимум по  $t_s$  достигается при  $t_s = 3,5\tau_c$  и составляет

$$\eta_{\min} = 1,066. \quad (12)$$

### 2.3. Фильтр F2 с треугольной импульсной характеристикой

$$h(t) = \begin{cases} \frac{2t}{t_s} & 0 < t < t_s/2 \\ 2 - \frac{2t}{t_s} & t_s/2 < t < t_s. \end{cases} \quad (13)$$

С практической точки зрения фильтр (13) намного проще в изготовлении, чем предыдущий.

Выполняя вычисления, аналогичные описанным выше, получим

$$\eta = \left( \frac{t_s}{6\tau_c} + \frac{2\tau_c}{t_s} \right)^{1/2}.$$

Минимум достигается при  $t_s = 3,6\tau_c$  и равен

$$\eta_{\min} = 1,075. \quad (14)$$

Отметим, что (14) совпадает с аналогичным значением для времяинвариантного треугольного фильтра.

Итак, из (8), (12) и (14) следует, что рассмотренные фильтры не имеют никаких преимуществ перед классическими времяинвариантными. Более того, при практической реализации возникает проблема задержки короткого сигнала на время  $\sim 1,7\tau_c$ .

### 3. Фильтр F1 - отбеливатель шума

Если параллельный шум есть поток  $\Phi$ -функций, то отбеливающий фильтр - дифференциатор с постоянной времени  $\tau_c$ . Тогда шум на выходе F1 есть поток  $\delta$ -функций, а сигнал равен

$$S(t) = e^{-t/\tau_c}. \quad (15)$$

Очевидно, что сигнал должен появляться в момент отпирания ключа SW1, так что проблема задержки сигнала упрощается. Не нужно требовать и соблюдения условий (4), так как нет дублетов.



### 3.1. Фильтр F2 имеет импульсную характеристику

$$h(t) = e^{-t/\tau_c} (t_s - t). \quad (16)$$

ENC будет таким же, как и для обрезанного "cusp" при оценивании амплитуды в стационарном шуме, то есть

$$\eta = \frac{e^{-t_s/\tau_c}}{\left( e^{-2t_s/\tau_c} - 1 \right)^{1/2}} \quad (17)$$

и при  $t_s \rightarrow \infty$ ,  $\eta \rightarrow 1$ .

### 3.2. Фильтр F2 имеет импульсную характеристику

$$h(t) = \text{sh}(t/\tau_c), \quad t > 0. \quad (18)$$

Практической ценности, как и предыдущий, этот фильтр не представляет, но мы рассмотрим его по следующим причинам: 1) как в (16), так и в (18) входит возрастающая экспонента, поэтому можно ожидать, что при  $t_s \rightarrow \infty$  ENC в обоих случаях будет одинаков; 2) при малых  $t_s$  (18) хорошо аппроксимируется линейной функцией, так что если ENC достаточно быстро уменьшается при увеличении  $t_s$ , то задача представляет практический интерес - фильтр F2 становится идеальным двойным интегратором, очень простой схемой.

Нетрудно убедиться, что

$$\eta = \frac{\left( \text{sh}(2t_s/\tau_c) - 2t_s/\tau_c \right)^{1/2}}{\text{sh}(t_s/\tau_c) - \frac{t_s}{\tau_c} e^{-t_s/\tau_c}}, \quad (19)$$

причем  $\eta \rightarrow 1$  при  $t_s \rightarrow \infty$ .

### 3.3. Фильтр F2 - идеальный двойной интегратор

Этот вариант привлекателен тем, что может быть выполнен по твердотельной технологии.

Несложные вычисления дают

$$\eta = \frac{\left( t_s / 6\tau_c \right)^{1/2}}{1 - \frac{\tau_c}{t_s} \left( 1 - e^{-t_s / \tau_c} \right)} . \quad (20)$$

Минимум достигается при  $t_s = 2,1\tau_c$  и составляет

$$\eta_{\min} = 1,016.$$

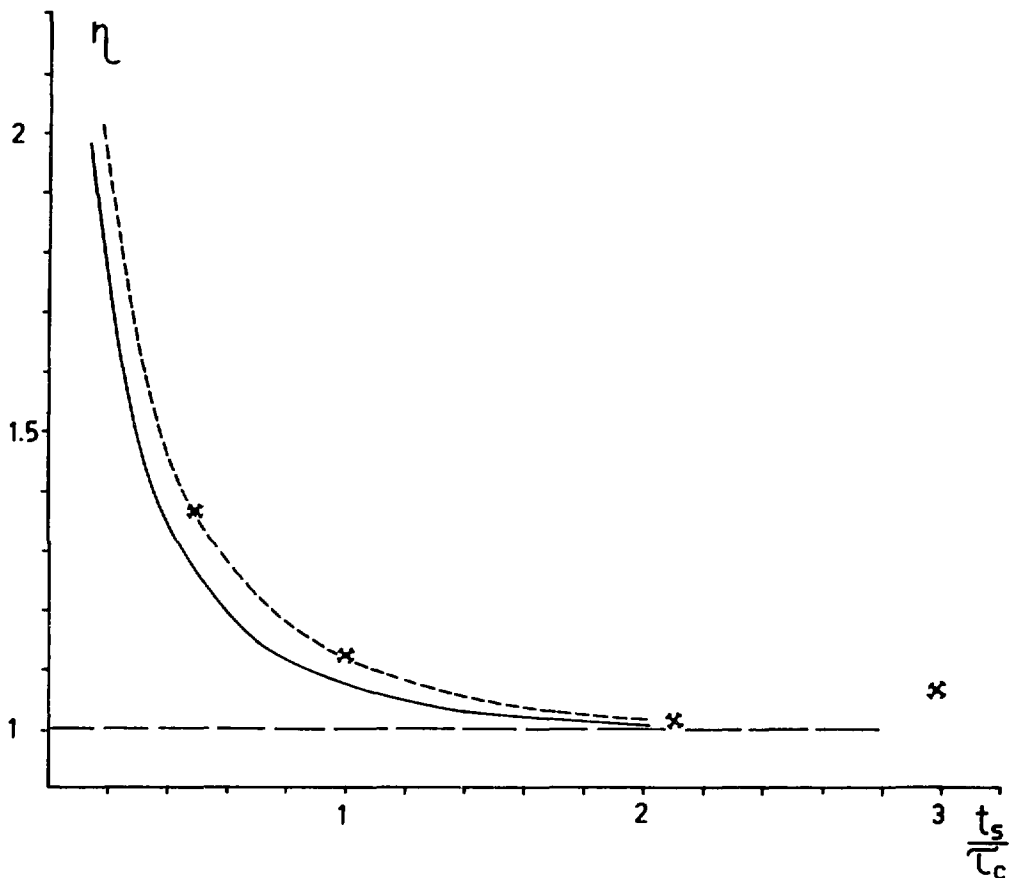


Рис. 2. Зависимости коэффициента превышения шума от времени стробирования  $t_s/\tau_c$ , вычисленные по формулам (17) - сплошная кривая, (19) - пунктир и (20) - крестики.

На рис. 2 показаны зависимости  $\eta(t_s/\tau_c)$  для фильтров с импульсными характеристиками (15), (18) и (20). Видно, что в диапазоне  $1,5\tau_c < t_s < 2,2\tau_c$  различие между ними не превышает 3%.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы можно сформулировать следующим образом.

1. Для идеального усилителя напряжения с двумя независимыми источниками шумов и последующим времявариантным фильтром со структурой идеальный дифференциатор-квч-фильтр показано, что коэффициент превышения шума не может быть меньше единицы.

2. Для структуры отбеливатель-квч-двойной интегратор может быть достигнут лучший на сегодня результат:  $\eta = 1,016$ . Такая структура может быть реализована по твердотельной технологии.

### Приложение I

Покажем необходимость условий (4) для последовательного шума. Делая замену переменных:

$$t_2 - t_1 = \tau, \quad t_2 + t_1 = 2t_0 \quad (\text{П1.1})$$

и учитывая (3), преобразуем (2) к виду

$$\begin{aligned} D_s &= - \int_0^t d\tau \delta''(\tau) I(\tau) - \int_{-t_s}^0 d\tau \delta''(\tau) I(-\tau) = \\ &= - \int_{-t_s}^t d\tau \delta''(\tau) I(\tau), \end{aligned} \quad (\text{П1.2})$$

где

$$I(\tau) \Big|_{\tau > 0} = \int_{\tau/2}^{t_s - \tau/2} h(t_0 - \tau/2)h(t_0 + \tau/2)dt_0, \quad (\text{П1.3})$$

$$I(\tau) \Big|_{\tau < 0} = \int_{-\tau/2}^{t_s + \tau/2} h(t_0 - \tau/2)h(t_0 + \tau/2)dt_0. \quad (\text{П1.4})$$

Можно видеть, что: 1)  $I(\tau)$  симметрична относительно  $\tau=0$ ;  
2)  $I(\pm t)=0$ .

Для вычисления (П1.2) необходимо найти производную  $I''(\tau)$ . Дифференцируя (П1.3), получим

$$I'(\tau) \Big|_{\tau > 0} = -\frac{1}{2} h(t_s)h(t_s - \tau) - \frac{1}{2} h(0)h(\tau) + \\ + \frac{1}{2} \int_{\tau/2}^{t_s - \tau/2} [h(t_0 - \tau/2)h'(t_0 + \tau/2) - h'(t_0 - \tau/2)h(t_0 + \tau/2)] dt_0. \quad (\text{П1.5})$$

Поступая аналогичным образом с (П1.4) и повторяя операции дифференцирования еще раз, напомним окончательный результат:

$$I''(0) = \frac{1}{2} h(t_s)h'(t_s) - \frac{1}{2} h(0)h'(0) + [h(t_s)h'(t_s) + \\ + h(0)h'(0)]\delta(0) + \frac{1}{2} \int_0^{t_s} [- (h'(t_0))^2 + h(t_0)h''(t_0)] dt_0. \quad (\text{П1.6})$$

Отсюда видно, что  $I''(0)$  конечна, когда справедливы условия (5).

## Приложение II

Покажем, что (8) верно. Потребуем, чтобы максимальное значение импульса на выходе F2 было равно единице, если на входе сигнал имеет форму  $\delta(t)$  с площадью, равной заряду

электрона, т. е.

$$h(\gamma \cdot t_s) = 1. \quad (\text{П2.1})$$

Тогда выражение в квадратных скобках (6) запишется в виде

$$L = \int_0^{\gamma t_s} \left[ \left( h(t) \right)^2 + \tau_c^2 \left( h'(t) \right)^2 \right] dt + \\ + \int_{\gamma t_s}^t \left[ \left( h(t) \right)^2 + \tau_c^2 \left( h'(t) \right)^2 \right] dt. \quad (\text{П2.2})$$

Минимизируем порознь каждый из интегралов (П2.2):

$$\delta \int_0^{\gamma t_s} \left[ \left( h(t) \right)^2 + \tau_c^2 \left( h'(t) \right)^2 \right] dt = 2\tau_c^2 h(t) \delta h \Big|_0^{\gamma t_s} + \\ + 2 \int_0^{\gamma t_s} \left[ h(t) - \tau_c^2 h''(t) \right] \delta h dt. \quad (\text{П2.3})$$

Первое слагаемое в (П2.3) равно нулю в силу условий (5) и (П2.1), поэтому минимизация сводится к решению уравнения Эйлера:

$$h(t) - \tau_c^2 h''(t) = 0. \quad (\text{П2.4})$$

В силу принятых граничных условий

$$h(0) = 0, \quad h(\gamma t_s) = 1 \quad (\text{П2.5})$$

решение есть

$$h(t) = \frac{\text{sh}(t/\tau_c)}{\text{sh}(\gamma \cdot t_s / \tau_c)}, \quad 0 < t < \gamma t_s. \quad (\text{П2.6})$$

Минимизируя аналогичным образом второй интеграл в (П2.2), получим

$$h(t) = \frac{\text{sh}((t - t_s)/\tau_c)}{\text{sh}((1-\gamma)t_s/\tau_c)}, \quad \gamma t_s < t < t_s. \quad (\text{П2.7})$$

Теперь покажем, что (П2.2) имеет минимум при  $\gamma = 1/2$ . Подставив (П2.6) и (П2.7) в (П2.2), получим

$$L = \tau_c^2 \left[ \frac{\text{sh} 2 \frac{\gamma t_s}{\tau_c}}{2 \left( \text{sh} \frac{\gamma t_s}{\tau_c} \right)^2} + \frac{\text{sh} 2 \frac{(1-\gamma) t_s}{\tau_c}}{2 \left( \text{sh} \frac{(1-\gamma) t_s}{\tau_c} \right)^2} \right] =$$

$$= \tau_c^2 \left[ \frac{\text{ch} \frac{\gamma t_s}{\tau_c}}{\text{sh} \frac{\gamma t_s}{\tau_c}} + \frac{\text{ch} \frac{(1-\gamma) t_s}{\tau_c}}{\text{sh} \frac{(1-\gamma) t_s}{\tau_c}} \right]. \quad (\text{П2.8})$$

Необходимым условием минимума (П2.8) является

$$\frac{dL}{d\gamma} = 0,$$

откуда

$$-\frac{1}{\left( \text{sh} \frac{(1-\gamma) t_s}{\tau_c} \right)^2} + \frac{1}{\left( \text{sh} \frac{\gamma t_s}{\tau_c} \right)^2} = 0.$$

Следовательно,  $\gamma = 1/2$ . Таким образом, оптимальная  $h(t)$  симметрична относительно середины интервала  $0 \div t_s$ .

### Список литературы

1. Conrad M. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1968. NS-15. P. 268.
2. Radeka V. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1968. NS-15. P.455.
3. Goulding F.S. // NIM. 1972. V. 100. P. 493.
4. Goulding F.S. and Landis D.A. // IEEE Trans. Nucl. Sci. 1982. NS-29. P. 1125.
5. Gatti E. and Manfredi P.F. // NIM. 1984. V. 226. P. 142.
6. Gatti E. and Manfredi P.F. // La Rivista del Nuovo Cimento. 1986. V. 9. Ser. 3. P. 3.
7. Краснокутский Р.Н., Курчанинов Л.Л., Тихонов В.В. и др. Препринт ИФВЭ 87-158. - Серпухов, 1987.

Рукопись поступила 31 января 1989 г.

Р.Н.Краснокутский и др.

Времявариантные фильтры. Часть I.

Редактор В.В.Герштейн. Технический редактор Л.П.Тимкина.

Корректор Л.Ф.Васильева.

---

Подписано к печати 10.03.89. Т-09196. Формат 60x90/16.  
Офсетная печать. Печ.л.0,75. Уч.-изд.л. 0,91. Тираж 250.  
Заказ 299 . Индекс 3649. Цена 12 коп.

---

Институт физики высоких энергий, 142284, Серпухов  
Московской обл.

12 коп.

Индекс 3649

ПРЕПРИНТ 89-46, ИФВЭ, 1989