

FEI-2112.

ФЭИ-2112



ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

П. С. ДОЛМАТОВ, Т. А. КАЛИНИНА, Ю. И. ЛИХАЧЕВ,  
Е. И. МАЛАХОВА, М. Я. ХМЕЛЕВСКИЙ

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ  
МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
К РАСЧЕТУ НЕЛИНЕЙНОГО  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИЙ**

Обнинск — 1990

ФЗИ-2112

**ФИЗИКО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

**П.С.Долматов, Т.А.Калинина, Д.И. Ляхачев,  
Е.И.Малахова, М.Я.Хмелевский**

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
К РАСЧЕТУ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОНСТРУКЦИИ**

**Обнинск-1996**

УДК 621.139.54

П.С. Долматов, Т.А. Калинина, Ю.И. Лихачев,  
Е.И. Малахова, М.Я.Хмелевский

Некоторые вопросы применения метода конечных элементов к расчету нелинейного деформирования конструкций.  
ФЭИ-1990. Обнинск: ФЭИ, 1990. 9 с.

Приводится алгоритм для МКЭ-расчетов обобщенной плоской деформации, позволяющий моделировать напряженно-деформированное состояние элементов активных зон ядерных реакторов при значительном радиационном формоизменении материалов.

Для упруго-пластической задачи предлагается объединение методов переменных параметров упругости с пошаговым интегрированием системы ОДУ, что повышает устойчивость численного интегрирования и сохраняет возможность учета геометрической нелинейности.

Algorithm for finite-element method calculations of generalized plane strain, allowing to modelize stress and strain state of elements reactor core at considerable radiation deformation of materials is shown.

For the elastic-plastic task is suggested joining methods of the elastic variable parameters with numerical integration of the systems of the linear differential equations, which increases stability of the numerical integration and conserve capability of the calculation of the large strains.

## 1. АЛГОРИТМ МКЭ-РАСЧЕТА ОБОБЩЕННОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В инженерных приложениях расчет прочности конструкций методом конечных элементов как правило проводится в двумерной постановке, т.е. в рассматриваемом сечении предполагается либо плоское напряженное состояние, либо плоская деформация.

Гипотеза о плоской деформации применяется для моделирования напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкции протяженной вдоль одной из осей координат ( $z$ ) и при малых величинах деформации:  $\epsilon_z \ll 1$ . Если последнее не выполнено, то можно говорить о так называемой обобщенной плоской деформации:  $\epsilon_z = \text{const}$ . Задачи такого типа характерны для моделирования НДС элементов активной зоны ядерных реакторов в связи со значительным (десятки процентов) радиационно обусловленным формоизменением материалов.

Несмотря на очевидную актуальность использования обобщенной плоской деформации в МКЭ-расчетах, на сегодняшний день авторам не известны описания эффективных алгоритмов реализации обобщенной плоской деформации в схеме МКЭ. В этой связи можно отметить численную схему, разработанную в [1], для получения которой использован стандартный вариационный подход МКЭ в перемещениях с учетом всех трех составляющих в векторах напряжений и деформаций.

Этот путь и получаемый в итоге численный алгоритм очень громоздки и, по мнению авторов, не эффективны. В настоящей работе предлагается численный итерационный алгоритм, позволяющий проводить МКЭ-расчеты для случая обобщенной плоской деформации и базирующийся на двумерной схеме МКЭ.

Учитывая нелинейный характер рассматриваемых физических процессов (распухание, ползучесть), основные уравнения записываются в дифференциальной форме.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^c + \dot{\epsilon}^v / 3, \quad (1)$$

где индексы "e", "c" и "v" означают соответственно упругие, вязкие и объемно изотропные компоненты деформации.  $\dot{\epsilon}$  - вектор скорости деформаций с компонентами  $[\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\gamma}]^T$ ;

$$\dot{\varepsilon}^e = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_x - \mu(\dot{\sigma}_y + \dot{\sigma}_z)] \\ \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_y - \mu(\dot{\sigma}_z + \dot{\sigma}_x)] \\ \frac{\dot{\tau}}{2G} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}^v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (S + 3\alpha T) \quad (3)$$

где  $S$  - скорость радиационного распухания,  $T$  - скорость температуры. В соответствии с теорией течения

$$\dot{\varepsilon}^{cr} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{2\sigma_1} \\ \frac{2\sigma_y - \sigma_z - \sigma_x}{2\sigma_1} \\ 3\tau / \sigma_1 \end{bmatrix} \cdot \dot{\varepsilon}_1^{cr} \quad (4)$$

где  $\dot{\varepsilon}_1^{cr}$  - интенсивность скорости ползучести,  $\sigma_1$  - интенсивность напряжений:

$$\sigma_1 = [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau^2]^{1/2}$$

Вводя обозначение

$$\dot{\varepsilon}^0 = \dot{\varepsilon}^{cr} + \dot{\varepsilon}^v / 3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mu \dot{\varepsilon}_z \quad (5)$$

записываем дифференциальный аналог закона Гука в матричном виде (для компонент  $x, y, xy$ ):

$$\dot{\sigma} = (D) \cdot (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^0) \quad (6)$$

где  $\dot{\sigma}$  - вектор скоростей напряжений  $[\dot{\sigma}_x, \dot{\sigma}_y, \dot{\tau}]$ ,  $[D]$  - матрица упругих констант

$$D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \quad (7)$$

Полагая искомыми величинами скорости перемещения узловых точек сетки  $\dot{U}$ , запишем для него основную систему уравнений МКЭ [2/

$$[K]\dot{U} = \dot{F} \quad (8)$$

Здесь  $[K]$  - глобальная матрица жесткости конструкции, зависящая от ее геометрии, сетки МКЭ и упругих констант

$$[K] = \sum_e \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] [B^e] dv \quad (9)$$

$$\dot{F} = \sum_e \left( \int_{V^e} [B^e]^T [D^e] \dot{\epsilon}^0 dv + \int_{S^e} [N^e]^T \dot{p}^e ds \right),$$

где  $[N^e], [B^e]$  - матрицы функций формы и градиентов,  $p^e$  - вектор нагрузки на границе элемента.

Традиционная схема КЭ (в перемещениях) сводится к решению линейной системы алгебраических уравнений типа (8). В нашем случае это система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), численное интегрирование которой предполагает решение линейной системы алгебраических уравнений на каждом шаге. По найденным перемещениям определяются необходимые параметры НДС:  $\dot{\sigma}$  - из (6),

$$\dot{\epsilon} = [B] \dot{U} \quad (10)$$

Для случая обобщенной плоской деформации такой путь напрямую невозможен поскольку в уравнениях (3), (4) содержатся неизвестные параметры НДС  $\epsilon_z, \sigma_z$ .

Система уравнений должна быть дополнена соотношением для деформации вдоль оси Z и уравнением осевого равновесия сечения:

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_z - \mu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y)] + \dot{\epsilon}_z^{cr} + \dot{\epsilon}^v / 3 \quad (11)$$

$$\int_S \dot{\sigma}_z(x, y) dS + f(\dot{p}_z) = 0 \quad (12)$$

Здесь  $f(\dot{p}_z)$  - проекция скорости граничных нагрузок на ось Z.

Преобразуем уравнение (11):

$$\dot{\sigma}_z = E\dot{\epsilon}_z + \mu(\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) - E(\dot{\epsilon}_z^{cr} + \dot{\epsilon}^v / 3) \quad (13)$$

и подставляем в (12), заменяя  $f$  на  $\Sigma$  по элементам, -

$$\dot{\epsilon}_z = \frac{1}{\Sigma E^e S^e} \left[ \Sigma (S^e E^e (\dot{\epsilon}_z^{cr} + \dot{\epsilon}^v / 3) - \mu^e (\dot{\sigma}_x^e + \dot{\sigma}_y^e) S^e) - f(\dot{p}_z) \right] \quad (14)$$

где  $S^e$  - площадь элемента.

Полученное соотношение (14) позволяет организовать итерационное вычисление всех параметров НДС, оставаясь при этом в традиционной двумерной схеме МКЭ.

На первом шаге итераций, см. рис.1, при  $\epsilon_{z1} = 0$  решается система (8) с предварительно вычисленными по (5) и (9)  $\epsilon_0(\epsilon_z)$  и  $F(\epsilon_0)$ . Решение  $\dot{U}$  и формулы (6) и (11) позволяют определить в первом приближении  $\epsilon$ ,  $\sigma$ .

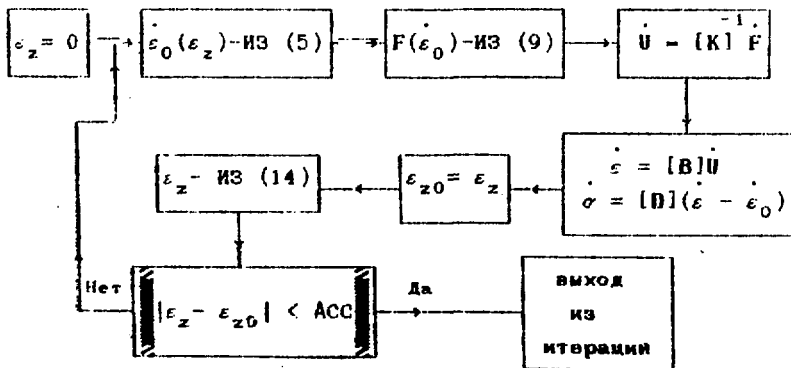


Рис.1

По найденным параметрам НДС из формулы (14) определяется следующее приближение скорости осевой деформации  $\dot{\epsilon}_{z2}$  и производится сравнение с предыдущим значением  $\dot{\epsilon}_{z1}$ . Если отличие превышает заданную величину погрешности, то повторяется описанный выше цикл вычислений; в противном случае - выход из итерации.

## 2. К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ МКЭ ПРИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Традиционная схема численного расчета пластического деформирования строится на основе соотношений (1-9). Скорости мгновенных пластических деформаций в рамках теории течения вводятся в (1) аналогично скоростям ползучести (4). Принципиальное (с точки зрения численного расчета) отличие в описании этих двух процессов состоит в следующем: интенсивность скорости ползучести  $\dot{\epsilon}_1^{cr}$ , входящая в формулу (4), - это эмпирическая функция температуры, напряжений и времени. Как правило ее представляют в виде

$$\dot{\epsilon}_1^{cr} = A \exp(-Q/RT) \sigma_1^\nu, \quad (15)$$

где  $A, Q, R, \nu$  - константы.

В случае мгновенных пластических деформаций "координатная" часть формулы (4) остается прежней, а интенсивность скорости пластического деформирования определяется в соответствии с эмпирической зависимостью  $\dot{\epsilon}_1^{pl} = f(\sigma_1)$  (диаграмма деформирования) и имеет вид

$$\dot{\epsilon}_1^{pl} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} \frac{\partial f(\sigma_1)}{\partial \sigma_1} \quad (16)$$

Здесь наряду с эмпирической функцией  $\partial f(\sigma_1) / \partial \sigma_1$  присутствует скорость интенсивности напряжений, т.е.  $\dot{\epsilon}_1^{pl}$ , в отличие от  $\dot{\epsilon}_1^{cr}$ , зависит от скоростей изменения величин, по которым ведется интегрирование (интегрируется система обыкновенных дифференциальных уравнений (6), (8), (10)). Наблюдаемое при численных расчетах падение устойчивости интегрирования (по сравнению с процессом ползучести) обусловлено именно этим фактом.

Действительно, в стержневом уравнении (8) системы ОДУ (6), (8), (10) все изменяемые во времени параметры входят в



глобальный вектор  $F$  правой части, а левая часть - матрица жесткости  $K$ , остается неизменной. В случае упруго-вязкой задачи  $F$  зависит только от напряжений и имеет место стабилизирующая (отрицательная) обратная связь: возрастание по какой-либо причине скорости напряжений влечет за собой рост самих напряжений. Соответственно увеличиваются скорости деформации ползучести, а это работает на уменьшение скоростей напряжений.

В случае интегрирования упруго-пластики картина качественно иная:  $F$  зависит как от напряжений, так и от их скоростей, и обратная связь  $\sigma-\dot{\epsilon}$  оказывается положительной, что дестабилизирует процесс численного интегрирования. Учитывая это, для повышения устойчивости интегрирования заслуживает внимания идея "разгрузки" вектора правой части или, другими словами, имеет смысл так организовать процесс интегрирования, чтобы перенести некоторые изменяемые во времени параметры из правой части уравнения (8) в левую.

В теории пластичности хорошо известен метод решения упруго-пластической задачи, основанный на приведении ее к ряду линейных (упругих) задач, - так называемый метод переменных параметров упругости [3], - нелинейная зависимость  $\sigma-\epsilon$  записывается в виде, аналогичном закону Гука (2):

$$\epsilon_x = \frac{1}{E(\sigma, \dot{\epsilon})} [\sigma_x - \mu(\sigma, \dot{\epsilon})(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (17)$$

При этом  $\mu(\sigma, \dot{\epsilon})$ ,  $E(\sigma, \dot{\epsilon})$  - нелинейные функции, принимающие конкретные значения  $E(t)$ ,  $\mu(t)$  для каждой итерации, см. рис.2. Процесс итераций, см. рис.2, быстро сходится к искомому решению: число итераций  $\sim 10$  при точности  $\sim 10^{-3}$ . Объединяя метод переменных параметров упругости с пошаговым интегрированием системы ОДУ в рассматриваемой задаче, получаем двойной выигрыш: повышается устойчивость интегрирующего алгоритма, благодаря внесению зависящих от времени факторов в левую часть системы ОДУ (-в матрицу жесткости), и, кроме того,

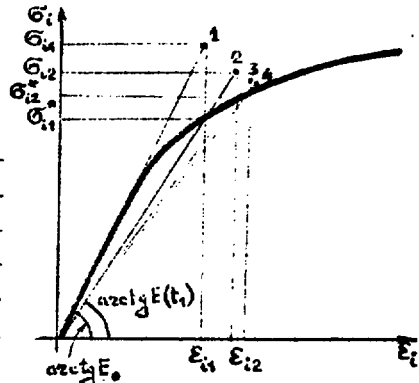


Рис. 2.

сохраняется возможность учета геометрической нелинейности

(большие деформации конструкции), что невозможно в рамках классической теории малых упруго-пластических деформаций.

Таким образом, повышение устойчивости интегрирования в задачах упруго-пластики может быть обеспечено, если на каждом шаге по времени осуществлять пересчет параметров упругости:

$$E(t) = \frac{\partial \varphi(\varepsilon_1)}{\partial \varepsilon_1} \quad (18)$$

$$\mu(t) = 0.5 - (0.5 - \mu_0) \frac{E(t)}{E_0} \quad (19)$$

Здесь  $\sigma_1 = \varphi(\varepsilon_1)$  - эмпирическая функция (диаграмма деформирования). При объединении пошагового интегрирования с методом секущих, рис.2, функция  $E(t)$  приобретает новый физический смысл, являясь не секущим, а скользящим модулем, благодаря чему пошаговое интегрирование обеспечивает движение по диаграмме деформирования. Сказанное выше относится к процессу активного нагружения, однако разгрузку в рассмотренном алгоритме легко учесть, организовав на каждом шаге и для каждого элемента конструкции проверку  $\sigma_1 \geq \varphi(\varepsilon_1)$  и в соответствии с ее результатом делается шаг с исходным  $E_0$  или со скользящим  $E(t)$  модулем.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные выше алгоритмы были проверены на модельных задачах и используются в настоящее время в расчетной практике лаборатории прочности ФЭИ в рамках конечноэлементного программного комплекса FEMINA /4/.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Манукян К.М. Расчет напряженно-деформированного состояния и параметров нелинейной механики разрушения конструктивных элементов активной зоны ЯЭУ. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, М., 1984.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
3. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986.
4. Долматов П.С. и др. Применение МСЭ для расчета деформирования тепловыделяющих сборок при импульсном аварийном нагружении: Препринт ФЭИ-1983, Обнинск, 1989.

Технический редактор **Н. П. Герасимова**

---

Подписано к печати 5.07.1990 г.	ТБ-03385	Бумага писчая № 1	
Формат 60×90 <sup>1/16</sup>	Усл. п. л. 0,7	Уч.-изд. л. 0,4	Тираж 95 экз.
Цена 8 коп.	Индекс 3624	ФЭИ-2112	

---

Отпечатано на ротапринтере.  
249020 г. Обнинск Калужской обл., ФЭИ

8 коп.

Индекс 3624

**Некоторые вопросы применения метода конечных элементов  
к расчету нелинейного деформирования конструкций.  
ФЭИ-2112. 1990. 1-9.**