

2112

FR 92 1704

CEA-N-2679

- Note CEA-N-2679 -

Centre d'Etudes de Saclay
Direction des Réacteurs Nucléaires
Département de Mécanique et de Technologie
Service d'Etudes des Réacteurs et de Mathématiques Appliquées

**THÉORIE DE L'ABSORPTION RÉSONNANTE
DES NEUTRONS**

par

Paul REUSS

- Novembre 1991 -

CLASSIFICATION DES RAPPORTS, NOTES ET BIBLIOGRAPHIES CEA

(Classification du système international de documentation nucléaire INIS
de l'Agence Internationale de l'Energie Atomique)

A 11	Physique théorique générale et physique mathématique	C 50	Santé, radioprotection et environnement
A 12	Physique atomique et physique moléculaire	C 60	Radiologie et médecine nucléaire
A 13	Physique de l'état solide et physique des fluides	D 10	Isotopes et sources de rayonnements
A 14	Physique des plasmas et réactions thermonucléaires	D 20	Applications des isotopes et des rayonnements
A 15	Astrophysique et cosmologie, rayonnement cosmique	E 11	Thermodynamique et écoulement des fluides
A 16	Conversion directe d'énergie	E 13	Structures mécaniques et équipements
A 17	Physique des basses températures et cryogénie	E 14	Explosions nucléaires
A 20	Physique des hautes énergies	E 15	Manutention des matériaux radioactifs
A 30	Physique neutronique et physique nucléaire	E 16	Accélérateurs
B 11	Analyse chimique et isotopique	E 17	Essais des matériaux
B 12	Chimie minérale, chimie organique et chimie-physique	E 20	Réacteurs à fission (généralités)
B 13	Radiochimie et chimie nucléaire	E 30	Types spécifiques de réacteurs à fission et centrales associées
B 14	Chimie des rayonnements	E 40	Instrumentation
B 16	Combustibles nucléaires	E 50	Gestion des déchets
B 22	Métaux et alliages	F 10	Sociologie et sciences économiques
B 23	Céramiques et cermets	F 20	Droit
B 24	Autres matériaux	F 30	Documentation nucléaire
B 30	Sciences de la terre	F 40	Garanties nucléaires et contrôle de vérification
C 10	Tous les effets et aspects variés de l'irradiation externe en biologie	F 50	Méthodes mathématiques et codes pour ordinateur
C 20	Effets et cinétique des radioisotopes	F 60	Divers
C 40	Sciences de la vie appliquées		

Note CEA-N-2679

Cote-matière de ce rapport : G36

MOTS CLEFS (extraits du thesaurus INIS)

en français

en anglais

THEORIE DU TRANSPORT DES NEUTRONS	NEUTRON TRANSPORT THEORY
ABSORPTION PAR RESONANCE	RESONANCE ABSORPTION
THEORIE DU RALENTISSEMENT DES NEUTRONS	NEUTRON SLOWING-DOWN THEORY
STRUCTURE FINE	FINE STRUCTURE
EFFET DOPPLER-FIZEAU	DOPPLER EFFECT
SECTIONS EFFICACES	CROSS SECTIONS
CORRECTION DE DANCOFF	DANCOFF CORRECTION
FACTORISATION	FACTORIZATION
CODES A	A CODES

NOTE CEA-N-2679 - Paul REUSS

"THEORIE DE L'ABSORPTION RESONNANTE DES NEUTRONS"

Sommaire - Après quelques rappels sur la physique de l'absorption résonnante des neutrons pendant leur ralentissement, ce document présente des aspects essentiels des développements théoriques menés par "l'école française" de physique des réacteurs : la méthode des taux de réaction effectifs dite *théorie Livolant-Jeanpierre*, les généralisations qu'en a faites l'auteur et la méthode des tables de probabilité.

1991 - Commissariat à l'Energie Atomique - France

NOTE CEA-N-2679 - Paul REUSS

"NEUTRON RESONANCE ABSORPTION THEORY"

Summary - After some recalls on the physics of neutron resonance absorption during their slowing down, this paper presents the main features of the theoretical developments performed by the "french school" of reactor physics : the effective reaction rate method so called *Livolant-Jeanpierre theory*, the generalizations carried out by the author, and the probability table method.

1991 - Commissariat à l'Energie Atomique - France

- Note CEA-N-2679 -

Centre d'Etudes de Saclay
Direction des Réacteurs Nuciéaires
Département de Mécanique et de Technologie
Service d'Etudes des Réacteurs et de Mathématiques Appliquées

**THÉORIE DE L'ABSORPTION RÉSONNANTE
DES NEUTRONS**

par

Paul REUSS

ISSN 0429 - 3460

1/2

SOMMAIRE

AVANT-PROPOS	5
------------------------	---

Première partie : LA PHYSIQUE DE L'ABSORPTION RESONNANTE

I. La structure résonnante des sections efficaces	13
II. L'effet Doppler	17
III. Le ralentissement des neutrons	23
IV. La théorie intégrale du transport	30
V. Approche élémentaire du problème de l'absorption résonnante	32

Deuxième partie : LA METHODE DES TAUX DE REACTION EFFECTIFS

VI. Factorisation du flux en situation homogène	41
VII. Solutions approximatives de l'équation de structure fine	49
VIII. Absorption résonnante en situation hétérogène simple	53
IX. Absorption résonnante en situation hétérogène quelconque	60
X. Traitement approximatif des cas rencontrés en pratique	65
XI. Généralisation des équations de structure fine aux cas à plusieurs noyaux résonnants	69
XII. Généralisation de l'équivalence hétérogène-homogène	75
XIII. Valeur moyenne de la matrice de couplage	83
XIV. Diagonalisation des équations de structure fine	87
XV. Généralisation des tabulations	93
XVI. Calcul des flux macroscopiques	96

Troisième partie : LA METHODE DES TABLES DE PROBABILITE

XVII. Présentation générale de la méthode des tables de probabilité	107
XVIII. Problèmes à plusieurs sections efficaces ; cas des sections efficaces partielles	113
XIX. Traitement des mélanges de noyaux résonnants dans l'hypothèse d'indépendance statistique	118
XX. Traitement du ralentissement	124
CONCLUSIONS	131

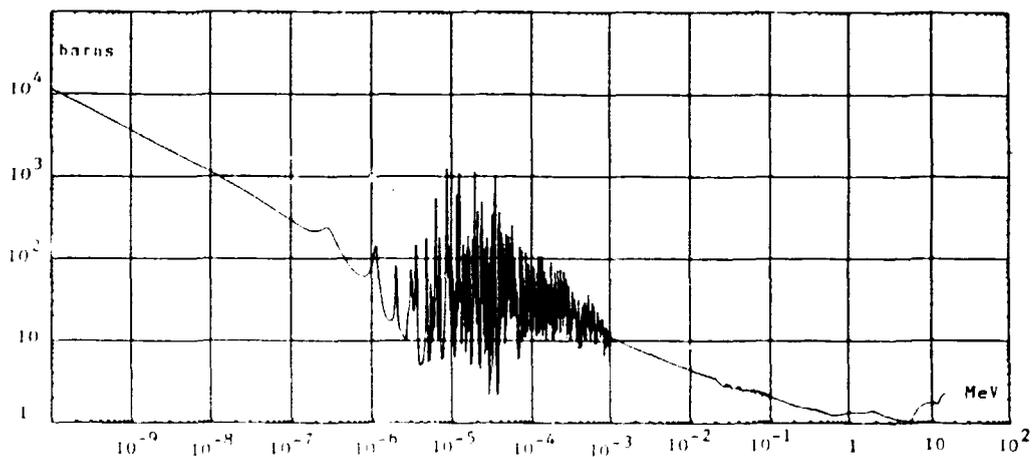
ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE	139
INDEX DES NOTATIONS de la deuxième partie	143
INDEX DES NOTATIONS de la troisième partie	147
INDEX DES SUJETS	149

AVANT-PROPOS

AVANT-PROPOS

Le calcul de l'absorption résonnante¹ des neutrons est certainement l'un des problèmes les plus difficiles qu'ait à résoudre le neutronicien. Un simple coup d'oeil à une courbe de sections efficaces d'un noyau lourd suffit pour s'en convaincre ! Une véritable "fôret" de résonances apparaît : pour une infime variation de la vitesse (ou de l'énergie cinétique) du neutron incident, la section efficace peut varier de plusieurs décades, et ceci de très nombreuses fois.



Section efficace d'absorption de l'uranium 235

1. Rappelons – puisque la faute est souvent faite – que résonance ne prend qu'un seul n , alors que résonnant en exige deux !

AVANT-PROPOS

Les pionniers de la physique des réacteurs étaient bien évidemment incapables de traiter en détails ce problème de la capture résonnante des neutrons pendant leur ralentissement ; ils ont dû se contenter de formules phénoménologiques très simples de "l'intégrale effective", telles celles ajustées par E. Hellstand sur les résultats de ses mesures.

Mais même aujourd'hui, à l'ère des puissants calculateurs électroniques, un traitement numérique complet des équations s'avère difficilement envisageable en dehors de quelques cas de référence. C'est pourquoi une "théorie de l'absorption résonnante" reste entièrement d'actualité. Son objectif est d'obtenir avec précision les taux de réaction en évitant un volume de calculs prohibitif. On peut même constater que les projets récents de réacteurs nucléaires – notamment le recyclage du plutonium où se pose de façon cruciale le problème du mélange de plusieurs noyaux résonnants – ont apporté un regain d'intérêt à ces questions.

*
* *

Dans un souci de cohérence et d'harmonisation – et aussi, je dois l'avouer, pour parler de ce que je connais le mieux – j'ai décidé de ne présenter que l'approche de "l'école française" de la théorie de l'absorption résonnante des neutrons, développée au Commissariat à l'Energie Atomique.

Il n'est pas possible de citer ici tous les auteurs qui ont contribué à cette théorie, mais la bibliographie placée à la fin devrait y remédier. Précisons seulement que les premiers jalons de cette théorie ont été posés autour des années 1970 avec les travaux de Michel Livolant et Françoise Jeanpierre, et avec l'écriture de la première version du code de transport des neutrons, *APOLLO*, par Alain Kavenoky, Annick Boivineau, Alain Hoffmann et coll. L'apparition, au début des années 1980, de problèmes plus difficiles avec l'étude de projets de réacteurs à eau avancés – recyclage du plutonium, réacteurs à haut taux de conversion² – a coïncidé avec la mise en chantier par Richard Sanchez, Jacques Mondot et coll. d'une version entièrement nouvelle du code de transport, *APOLLO 2*, ce qui a donné une seconde impulsion aux développements avec les travaux de ces auteurs,

2. On a notamment à traiter des réseaux fortement irréguliers (plusieurs types de crayons) et des problèmes d'interaction entre les résonances de différents noyaux lourds.

AVANT-PROPOS

de Pierre Ribon sur la méthode des tables de probabilité et de moi-même sur la généralisation de la théorie de Livolant et Jeanpierre. Je dois aussi associer Henry Tellier qui, dès les débuts, a apporté une contribution essentielle sur les sections efficaces et la qualification des algorithmes de calcul.

Je tiens à remercier ces personnes – citées et non citées – avec lesquelles j'ai travaillé sur ces problèmes : je veux leur dire le plaisir que j'ai pris aux fructueuses discussions avec elles pendant de nombreuses années. Je dédie ces propos à celles qui seront amenées à poursuivre ces développements dans le cadre d'APOLLO 2, en particulier Gilles Mathonnière, Zarko Stankovski et Mireille Coste. J'y associe Alain Hoffmann, Jean-Baptiste Thomas et Jean Bergeron, chefs du département, du service et du laboratoire où se mènent ces travaux, et qui donc les animent. Je remercie particulièrement ces derniers d'avoir pris en charge la publication de ce texte.

*
* *

Cet exposé se fera selon un plan qui reflète un peu ce rapide historique.

La première partie sera une introduction rappelant les aspects essentiels de la physique de l'absorption résonnante. C'est un résumé des chapitres consacrés à ce problème dans mes ouvrages précédents, auxquels on pourra se référer pour plus de détails : *Traité de neutronique* (écrit avec Jean Bussac), *Eléments de physique nucléaire* et *Eléments de neutronique*.

La deuxième partie présentera la théorie de Livolant et Jeanpierre, puis les généralisations qui en ont été faites par la suite.

L'autre approche du problème, basée sur l'utilisation de tables de probabilité, sera développée dans la troisième partie.

Les théories exposées ici sont, pour certaines, récentes, et même en cours de développement. C'est dire que ces présentations iront de l'acquis vers l'escompté et que des pistes de recherche se dégageront des conclusions.

*
* *

AVANT-PROPOS

Je me suis efforcé d'harmoniser au maximum les notations et de respecter une certaine logique dans les choix. Un index placé à la fin permettra au lecteur de se les remémorer pour éviter des confusions entre des notions qu'il importe de bien distinguer.

Première partie

LA PHYSIQUE DE L'ABSORPTION RESONNANTE

11/12

Chapitre I

LA STRUCTURE RESONNANTE

DES SECTIONS EFFICACES

Dans l'interaction d'un neutron avec un noyau, deux processus doivent être fondamentalement distingués : le premier est la **diffusion potentielle** au cours de laquelle l'onde associée au neutron est simplement diffusée par "l'obstacle", sans qu'il y ait, à proprement parler, pénétration du neutron dans le noyau ; cette diffusion potentielle est observée pour tous les éléments et pour toutes les énergies du neutron ; elle est caractérisée par une section efficace σ_p à peu près constante en énergie et généralement de l'ordre d'une dizaine de barns, c'est-à-dire la section droite géométrique du noyau.

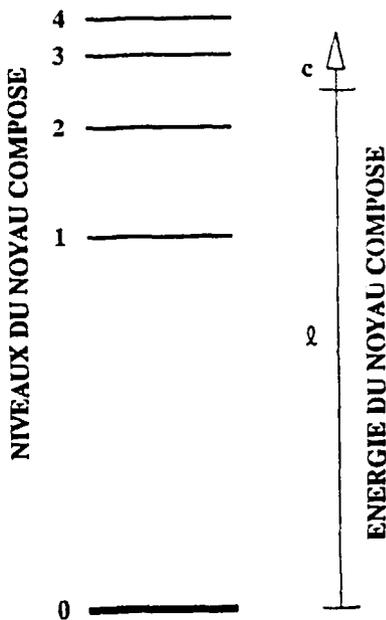
L'autre processus passe par la **formation d'un noyau composé**. Là, au contraire, le neutron pénètre dans le noyau cible $^A X$ pour former son isotope $^{A+1} X^*$ qui sera fortement excité (ce que rappelle l'astérisque), puisqu'il aura acquis l'énergie de liaison E_l du neutron supplémentaire (ce travail des forces nucléaires est de l'ordre de 5 à 7 MeV pour les noyaux lourds) plus l'apport d'énergie cinétique E_C :

$$E^* = E_l + E_C \quad (1)$$

Comme tout système quantique, un noyau est caractérisé par une structure de niveaux d'énergie possibles. Le niveau fondamental d'énergie minimum (pris comme origine) correspond à l'état le plus stable. Au-dessus, aux énergies E_1, E_2, \dots se trouvent les niveaux excités instables.

La section efficace pour la formation du noyau composé est liée à la position de l'énergie d'excitation E^* par rapport aux niveaux E_k (voir le schéma). En particulier, elle sera grande si E^* est égal à ou proche de l'une des E_k – ce qui sera réalisé pour certaines valeurs de E_C , puisque E_l est une constante – et faible sinon. Ainsi s'explique la structure résonnante des sections efficaces.

SECTIONS EFFICACES



D'une façon générale, la densité des niveaux d'énergie augmente avec E^* et la structure générale est d'autant plus "tassée" que le noyau considéré est lourd. Cela se manifeste concrètement par le fait que pour les noyaux légers on observe peu de résonances sur les courbes de sections efficaces – voire aucune – et, au contraire, de nombreuses résonances pour les noyaux lourds.

Des effets de parité interviennent aussi : c'est ainsi que l'espacement moyen des résonances est de l'ordre de l'électron-volt pour les noyaux lourds impairs (uranium 235, plutonium 239, etc.) et de l'ordre de la vingtaine d'électron-volts pour les noyaux lourds pairs (thorium 232, uranium 238, etc.).

On remarquera aussi qu'il y a des résonances "positives", dont on peut observer les pics sur les courbes de sections efficaces (par exemple, celles associées à E_3, E_4, \dots sur le schéma) et des résonances "négatives" (associées à E_1 et à E_2 sur le schéma) : on n'observe évidemment pas les pics pour ces dernières mais les "ailes" peuvent apporter une contribution non négligeable aux sections efficaces mesurées.

Les niveaux excités, en effet, donc les résonances, ont une certaine largeur caractéristique Γ liée, par les relations d'incertitude de Heisenberg, à la durée de vie du système sur le niveau considéré.

La désexcitation du noyau composé $A + 1X^*$ peut se faire selon différents modes : la ré-émission d'un neutron (on parlera alors de diffusion résonnante), l'émission d'un photon γ (capture radiative), parfois la fission, etc. A ces différents modes sont associées des largeurs partielles Γ_j , donc des sections efficaces partielles σ_j .

Ces sections efficaces s'obtiennent en explicitant, dans le cadre de la mécanique quantique, la formation et la désexcitation du noyau composé. On est obligé de faire des simplifications pour aboutir à des formules exploitables en pratique. C'est pourquoi il

SECTIONS EFFICACES

existe plusieurs modélisations. La plus simple est l'approximation de Breit et Wigner à un niveau où l'on néglige les effets d'interférence entre les résonances. Pour certains noyaux, par exemple ^{238}U , une modélisation plus précise (telle celle de Reich et Moore) s'avère nécessaire [H. Tellier, note CEA 2078]. En pratique le neutronicien n'a pas besoin de connaître le détail de ces calculs – sauf s'il désire entreprendre une analyse critique des sections efficaces : il lui suffit d'entrer dans ses calculs les courbes fournies par les physiciens nucléaires. Il est bon cependant qu'il ait une idée de la forme mathématique des expressions. Rappelons donc les formules obtenues dans le cadre de l'approximation la plus simple, celle de Breit et Wigner, donnant les sections efficaces en fonction de l'énergie cinétique du neutron incident :

a. Pour les réactions d'absorption ($i = \gamma, f, \dots$) :

$$\sigma_i = \sum_k \left[\pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_i}{(E-E_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \right]_k \quad (2)$$

b. Pour la diffusion, donc aussi pour la section totale ($i = s$ ou t) :

$$\sigma_i = \sum_k \left[\pi \lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_i}{(E-E_0)^2 + (\Gamma/2)^2} + 2\lambda g \sqrt{\pi \sigma_p} \frac{\Gamma_n (E-E_0)}{(E-E_0)^2 + (\Gamma/2)^2} + \sigma_p \right]_k \quad (3)$$

Dans ces formules E_0 est l'énergie au pic de la résonance, g un facteur statistique ; la longueur d'onde réduite du neutron est définie par :

$$\lambda = \hbar/p \quad p = \sqrt{2\mu E} \quad \mu = m \frac{A}{A+1}$$

m étant la masse du neutron et Am celle du noyau cible. Dans la deuxième formule le terme intermédiaire provient de l'interférence entre la diffusion résonnante (premier terme) et la diffusion potentielle (troisième terme).

Les largeurs Γ_i des résonances et les espacements entre résonances fluctuent selon des lois statistiques connues. Il en résulte une allure caractéristique des courbes de

SECTIONS EFFICACES

sections efficaces où l'on distingue trois domaines, bien typés pour les noyaux lourds (voir, par exemple, la figure placée dans l'avant-propos) :

a) le *domaine résolu* dans la partie à plus basse énergie où les résonances sont suffisamment bien séparées pour qu'on puisse mesurer leurs paramètres ;

b) le *domaine statistique*, intermédiaire, où la structure résonnante subsiste mais où la discrimination expérimentale n'est plus possible ;

c) le *domaine du continuum* à haute énergie où les largeurs dépassent les espacements de sorte que les résonances se recouvrent mutuellement à tel point que les sections efficaces n'ont plus que des variations lentes.

Chapitre II

L'EFFET DOPPLER

Les formules de Breit et Wigner rappelées au chapitre précédent, ou des formules similaires obtenues dans le cadre d'autres modélisations, donnent la section efficace en fonction de l'énergie cinétique E du couple neutron plus noyau dans le système du centre de masse. En pratique, les calculs de neutronique utilisent les sections efficaces en fonction de l'énergie cinétique E' du neutron dans le système lié au réacteur, c'est-à-dire le système du laboratoire.

Si l'on suppose le noyau cible immobile (avant l'impact) dans le système du laboratoire, un calcul élémentaire de cinématique fournit la relation entre E et E' , d'où les sections efficaces en fonction de cette dernière ; il suffit d'écrire :

$$E = \frac{A+1}{A} E' \quad (1)$$

et :

$$\lambda = \frac{A+1}{A} \lambda' \quad \lambda' = \hbar / \sqrt{2mE'} \quad (2)$$

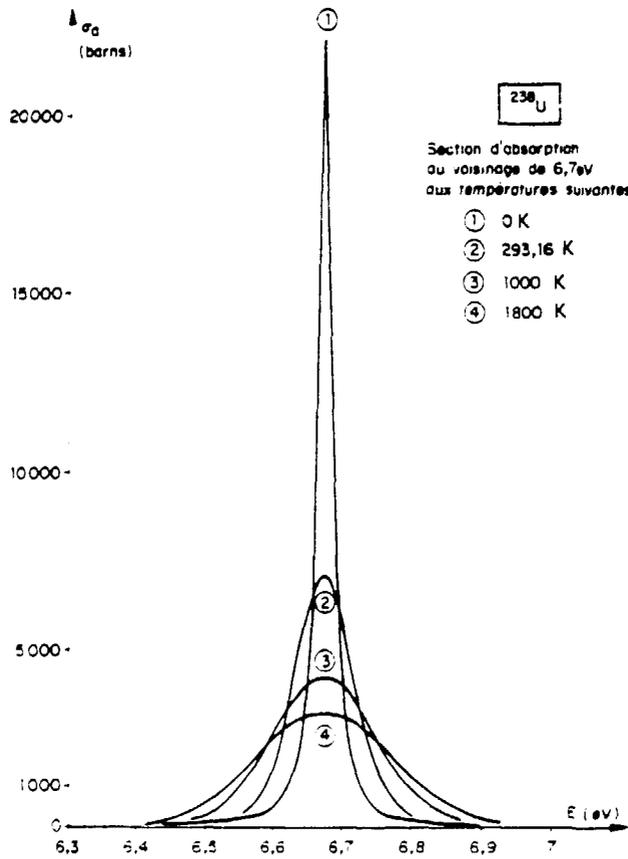
En fait les noyaux cibles ne sont pas immobiles, puisqu'ils sont soumis à l'agitation thermique de la matière dont ils font partie : on peut s'imaginer la chose comme une vibration autour d'une position d'équilibre, d'autant plus forte en moyenne que la température est élevée, aléatoire tant en direction (on peut admettre que la répartition est isotrope) qu'en intensité (on peut, en première approximation, assimiler le spectre en énergie à un spectre de Maxwell).

A une énergie du neutron E' donnée dans le système du laboratoire correspond donc non pas une valeur unique de E dans le système du centre de masse mais une répartition statistique autour de la valeur donnée par la formule précédente, qu'on peut déterminer si l'on se donne les lois de l'agitation thermique. L'interaction neutron-noyau sera

EFFET DOPPLER

finaleme^{nt} caractérisée par une section efficace "apparente" qui est une moyenne de $\sigma(E)$ pondérée par cette répartition statistique.

Si $\sigma(E)$ variait peu, cette moyenne serait peu différente de la valeur au point "cible immobile" et l'effet de l'agitation thermique – dit effet Doppler – pourrait être négligé. S'il y a, au contraire, une structure résonnante, les variations de $\sigma(E)$ peuvent être très rapides, et l'effet Doppler considérable. La figure suivante l'illustre sur l'exemple de la plus importante résonance de l'uranium 238.



Effet Doppler pour la résonance de ^{238}U à 6,7 eV

Il est immédiat de montrer que le signe de l'écart entre les courbes de la section "apparente" et de la section "cible immobile" est celui de la courbure (dérivée seconde) de cette dernière : l'effet Doppler amène un "écrasement" des pics de résonance et à un élargissement des ailes, ceci se faisant à *intégrale de résonance* (aire sous la courbe) *inchangée*¹, puisque l'intégrale d'une loi de probabilité est égale à 1.

Cette dernière remarque pourrait faire penser que l'effet neutronique est globalement nul. Or, il n'en est rien ! Si l'intégrale de résonance ne varie pas, l'intégrale effective — qui, comme nous le verrons, caractérise le taux de réaction —, elle, *augmente* : l'élargissement des résonances joue plus que l'abaissement des pics ; les "trappes" — domaines d'énergie où les neutrons trouvent une grande section efficace et subissent donc presque sûrement une interaction — deviennent plus vastes. C'est pourquoi il est nécessaire de prendre en compte l'effet Doppler dans les calculs.

Dans l'hypothèse où l'on caractérise l'agitation thermique par un spectre de Maxwell et une répartition isotrope, on montre qu'il suffit (pour les résonances qui ne sont pas à trop basse énergie) de remplacer dans les formules de Breit et Wigner :

$$\frac{1}{1+x^2} \quad \text{par} \quad \psi(x, \xi) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\xi^2(x-y)^2/4]}{1+y^2} dy \quad (3)$$

et :

$$\frac{x}{1+x^2} \quad \text{par} \quad \chi(x, \xi) = \frac{\xi}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp[-\xi^2(x-y)^2/4]}{1+y^2} 2y dy \quad (4)$$

où l'on a posé $x = (E-E_0)/(\Gamma/2)$; le paramètre sans dimension $\xi = \Gamma/\Delta$ caractérise l'effet Doppler par le rapport de la largeur Γ de la résonance à la "largeur Doppler" :

$$\Delta = \sqrt{4E_0 kT/A} \quad (5)$$

1. En toute rigueur, c'est l'intégrale en énergie qui est inchangée ; le neutronicien considère plutôt les intégrales sur la léthargie (voir le chapitre III) de la section réelle ou effective (voir le chapitre V).

EFFET DOPPLER

(k est la constante de Boltzmann, T la température absolue et kT l'énergie caractéristique du spectre de Maxwell.)

Les fonctions Ψ et χ ont été tabulées et sont disponibles dans les bibliothèques mathématiques des ordinateurs utilisés par les physiciens des réacteurs.

Il est à noter que le formalisme de Adler et Adler se prête aussi à un calcul d'élargissement Doppler par les fonctions Ψ et χ ; par contre, d'autres formalismes (par exemple celui de Reich et Moore) obligent à effectuer numériquement la convolution (calcul de l'intégrale donnant la section efficace apparente), ce qui est évidemment plus lourd en volume de calculs.

Si ce point peut être considéré comme secondaire — puisque les calculs d'élargissement n'auront à être faits qu'une fois pour toutes aux températures nécessaires —, il est important d'insister sur le fait qu'un spectre de Maxwell représente mal le spectre en énergie de l'agitation, en dehors du cas des gaz, alors que les noyaux lourds placés dans les réacteurs le sont plutôt sous forme solide ! (uranium ou plutonium métalliques, oxydes, nitrures,...). Notamment, cette agitation thermique ne disparaît pas totalement lorsque la température absolue tend vers zéro ! Cette physique (cristallographie, calorimétrie,...) est à vrai dire assez mal connue et les artifices mis en oeuvre pour prendre en compte cet écart au spectre de Maxwell ne peuvent être considérés que comme des palliatifs. Le modèle couramment utilisé consiste à assimiler le spectre d'agitation à un spectre de Maxwell à une température "effective" T_{eff} supérieure à la température vraie T . La valeur de cette température effective dépend de la température vraie et du spectre de vibration : on admet que celui-ci est correctement décrit par le modèle de Debye caractérisé par un paramètre θ , dit "température de Debye". On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{T_{\text{eff}}}{T} &= 24 \left[\frac{T}{\theta} \right]^3 \int_0^{\theta/2T} t^3 \coth(t) dt & (6) \\ &= 1 + \frac{1}{20} \alpha^2 - \frac{1}{1680} \alpha^4 + \frac{1}{90720} \alpha^6 - \frac{1}{4435200} \alpha^8 + \dots \end{aligned}$$

avec : $\alpha = \theta/T$.

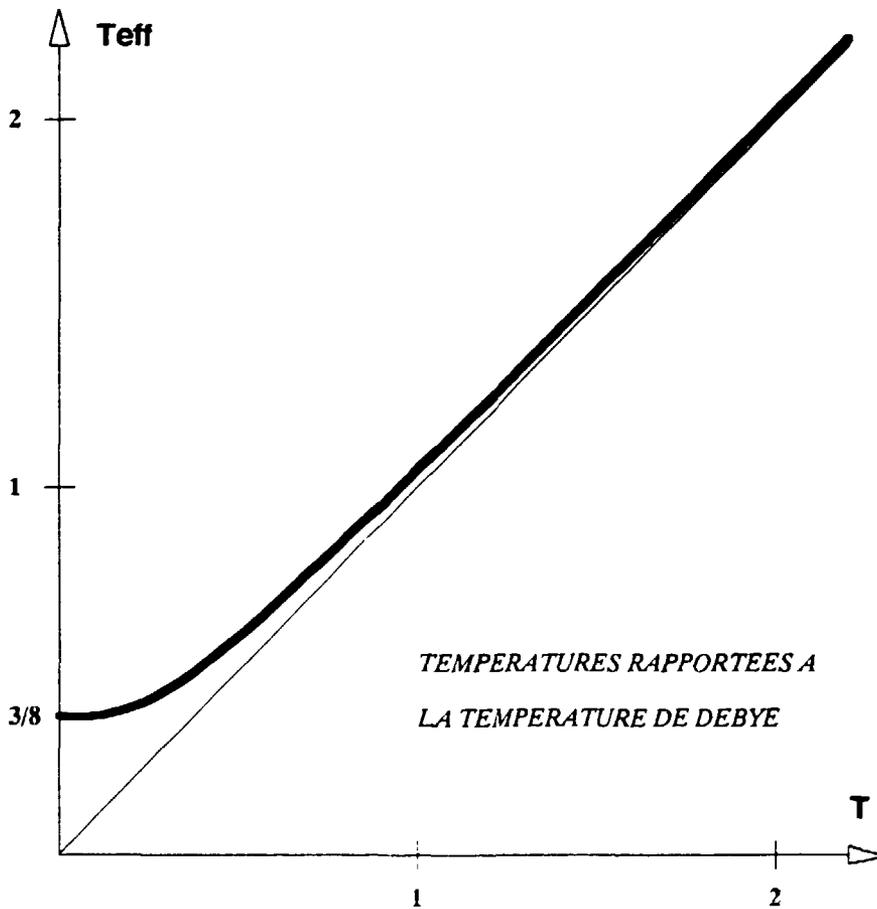
Si $\alpha > 3$ ou 4 ce développement à l'origine doit être remplacé par le développement asymptotique (qu'on peut tronquer à $n = 3$) :

EFFET DOPPLER

$$T_{\text{eff}}/T = 3\alpha/8 + \pi^3/(5\alpha^3) - 3\alpha \sum_{n=1}^{\infty} F(n\alpha) \quad (7)$$

avec :

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{x} \left[1 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{6}{x^3} \right]$$



Température effective en fonction de la température vraie

EFFET DOPPLER

En pratique, la température de Debye est ajustée à partir de résultats de mesures. Le physicien des réacteurs a tendance à privilégier des expériences de neutronique (mesures d'effet Doppler). C'est ainsi que H. Tellier [note SERMA 1442] a obtenu pour l'oxyde d'uranium UO_2 , à partir d'expériences d'oscillation faites sur Minerve à Cadarache, $\theta = 615 \pm 30$ K. On notera qu'avec une valeur de θ de cet ordre de grandeur, l'écart entre T_{eff} et T n'est pas négligeable à température ambiante (de l'ordre de 60 K) mais est faible pour un combustible de réacteur dans les conditions nominales de fonctionnement : T de l'ordre de 1000 K, $T_{eff} - T$ de l'ordre de 20 K.

Chapitre III

LE RALENTISSEMENT DES NEUTRONS

Emis par fission selon un spectre d'énergie moyenne de l'ordre de 2 MeV, les neutrons subissent généralement un certain nombre de diffusions avant d'être absorbés, ce qui va dégrader progressivement leur énergie.

Pour les réacteurs à neutrons rapides, ce ralentissement est relativement peu important : les neutrons sont absorbés à une énergie typiquement de l'ordre d'une centaine de keV.

Dans les réacteurs à neutrons thermiques, au contraire, on cherche à favoriser le ralentissement des neutrons avant qu'ils ne soient absorbés. Une majorité d'entre eux atteint l'énergie "thermique", c'est-à-dire celle de l'agitation thermique de la matière : asymptotiquement le spectre neutronique tend vers le spectre de Maxwell à la température des matériaux thermalisant les neutrons dans le réacteur ; en pratique, cet équilibre n'est jamais réellement atteint¹.

En particulier, cette absorption peut avoir lieu dans le domaine intermédiaire entre le spectre de fission et le spectre thermique, que l'on appelle "domaine du ralentissement", où, pour les noyaux lourds notamment, les sections efficaces présentent des résonances : c'est ce problème qui est étudié ici.

Pour les transferts en énergie du neutron, entrant en compétition avec l'absorption, deux types de diffusions doivent être distingués :

1. Notons que la population des neutrons peut être assimilée à un gaz : le spectre d'équilibre, s'il était atteint, serait *réellement* un spectre de Maxwell.

RALENTISSEMENT DES NEUTRONS

a) Dans la *diffusion élastique* – qui, comme on l'a vu, peut être potentielle ou résonnante –, il y a conservation de l'énergie cinétique. En explicitant également la conservation de l'impulsion, on établit facilement les lois du choc : les formules sont celles de la mécanique classique. La diffusion élastique s'observe sur tous les noyaux et à toutes les énergies de neutron.

b) Dans la *diffusion inélastique*, le noyau cible X , initialement dans son état fondamental, reste dans un état excité après la ré-émission du neutron :



(Il se déexcitera ultérieurement par émission de γ .) Il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique puisqu'une partie de l'énergie apportée par le neutron incident aura été utilisée à amener le noyau cible sur l'un de ses niveaux excités. C'est donc une réaction à seuil : le neutron incident doit avoir au moins l'énergie séparant le premier niveau du fondamental de X . Comme cette "distance" est d'autant plus faible que le noyau est lourd, c'est essentiellement sur les noyaux lourds que sera observée la diffusion inélastique dans les réacteurs nucléaires (seuil d'une à quelques dizaines de keV). Le traitement de l'interaction fait évidemment intervenir la structure des niveaux de X et un formalisme quantique.

On doit signaler aussi les *réactions* ($n, 2n$) où, après formation du noyau composé, deux neutrons sont émis. Le seuil de cette réaction est égal à l'énergie de séparation S_n d'un neutron de X (ou énergie de liaison de "dernier" neutron) : c'est dire que ces réactions sont rares ; dans les réacteurs elles conduisent à une augmentation du facteur de multiplication de l'ordre d'une centaine de p.c.m.².

Dans tous les cas de diffusion, l'interaction peut être caractérisée par une *section efficace* $\sigma_S(E')$ permettant d'exprimer l'intensité de la diffusion de neutrons d'énergie³ E' par le noyau considéré, et une *loi de transfert* $P(E' \rightarrow E)dE$ donnant le nombre de neutrons arrivant dans l'intervalle $[E ; E+dE]$ pour un neutron diffusé à l'énergie E' : l'intégrale sur E de cette loi est égale à 1 pour les diffusions élastiques et inélastiques,

2. 1 p.c.m. (pour cent-mille) = 10^{-5} .

3. Les énergies considérées ici sont celles des neutrons dans le système du laboratoire.

RALENTISSEMENT DES NEUTRONS

et à 2 pour les réactions (n,2n). Pour la commodité de l'écriture on introduit souvent la *section efficace différentielle* de diffusion :

$$\sigma_S(E' \rightarrow E) = \sigma_S(E') P(E' \rightarrow E) \quad (1)$$

La structure résonnante des sections efficaces est essentiellement observée dans la partie la plus basse du domaine de ralentissement, où seule la diffusion élastique est possible : pour le problème de l'absorption résonnante, les courbes de sections efficaces peuvent être fort complexes, mais le mécanisme de transferts en énergie sont, au contraire, simples, ceci d'autant plus qu'on peut souvent admettre que la diffusion est *isotrope* dans le système du centre de masse.

Rappelons donc les lois du choc élastique, qui seules seront utiles ici, dans l'hypothèse d'un noyau-cible initialement *immobile*⁴.

• Rapport des énergies après et avant la collision en fonction de l'angle de déviation θ du neutron dans le système du centre de masse :

$$\frac{E}{E'} = \frac{A^2 + 2A\cos\theta + 1}{(A + 1)^2} \quad (2)$$

où A est la masse du noyau-cible rapportée à celle du neutron. Ce rapport est compris entre 1 (pour $\theta = 0$) et :

$$\alpha = \left[\frac{A-1}{A+1} \right]^2 \quad (3)$$

(pour $\theta = \pi$). Ce paramètre α est d'autant plus faible – donc le ralentissement d'autant plus efficace – que le noyau est léger.

4. Pour traiter l'effet Doppler, on conserve cette hypothèse en "élargissant" les sections efficaces ; cette procédure simple peut s'avérer un peu insuffisante comme l'ont montré des travaux récents de M. Ouislounen [thèse, Orsay, 1989].

RALENTISSEMENT DES NEUTRONS

- Angle de déviation ψ du neutron dans le système du laboratoire :

$$\cos \psi = \frac{A \cos \theta + 1}{\sqrt{A^2 + 2A \cos \theta + 1}} \quad (4)$$

Comme θ cet angle varie entre 0 et π et l'on a $\psi \leq \theta$.

Pour les calculs d'absorption résonnante concernant des neutrons d'énergie relativement basse, l'hypothèse de diffusion *isotrope* dans le système du centre de masse est généralement adoptée. Elle signifie que la probabilité que l'angle de déviation dans ce système soit comprise entre θ et $\theta + d\theta$ est :

$$P(\theta) d\theta = \frac{1}{2} \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{2} |d \cos \theta| \quad (5)$$

Dans cette hypothèse :

- L'énergie E (variant linéairement avec $\cos \theta$) suit une loi de probabilité uniforme dans son intervalle de variation :

$$P(E) dE = \frac{dE}{(1-\alpha)E'} \quad (\alpha E' \leq E \leq E') \quad (6)$$

En particulier la valeur moyenne de E est :

$$\langle E \rangle = \frac{1+\alpha}{2} E' \quad (7)$$

- L'expression de la valeur moyenne du cosinus de l'angle de déviation dans le système du laboratoire est particulièrement simple :

$$\mu = \langle \cos \psi \rangle = 2/(3A) \quad (8)$$

Elle montre que la diffusion est d'autant plus anisotrope dans le système lié au réacteur que le noyau est léger.

On préfère souvent utiliser dans les calculs, plutôt que l'énergie, la variable *léthargie* définie par :

RALENTISSEMENT DES NEUTRONS

$$u = \ln(E_0/E) \quad (9)$$

où E_0 est une énergie de référence, par exemple 10 MeV.

• L'équation (2) conduit à une relation entre le *gain* de léthargie au cours d'un choc $v = u - u'$ et l'angle θ . Ce gain est compris entre zéro et une valeur maximum :

$$\varepsilon = - \ln \alpha \quad (10)$$

• Pour une diffusion isotrope dans le système du centre de masse :

$$P(v)dv = \frac{e^{-v}}{1-\alpha} \quad (0 \leq v \leq \varepsilon) \quad (11)$$

d'où une valeur moyenne du gain de léthargie :

$$\langle v \rangle = \xi = 1 - \frac{\alpha \varepsilon}{1-\alpha} \quad (12)$$

L'équation du ralentissement régit le flux Φ d'une population neutronique en train de se ralentir. On l'obtient simplement en explicitant la densité des chocs $\Sigma\Phi$ (Σ étant la section efficace macroscopique totale) dans l'élément d'énergie ou de léthargie considéré, et s'il y lieu dans l'élément de volume et/ou pendant l'intervalle de temps infinitésimal.

Le cas le plus simple est celui du milieu *homogène* en régime *permanent* : les variables d'espace n'interviennent pas si la situation est uniforme tant en ce qui concerne les propriétés de la matière que la distribution des neutrons ; le temps non plus si l'on considère que les sources sont constantes et si on s'intéresse au régime établi. Dans ces conditions, comme tout neutron placé à une énergie (ou léthargie) donnée ne peut que subir un choc à *cette* énergie (ou léthargie), le taux de collisions est la somme des sources et des arrivées par transfert lors d'une diffusion :

$$\Sigma(u)\phi(u) = S(u) + \int_{-\infty}^u \Sigma_S(u' \rightarrow u)\phi(u')du' \quad (13)$$

Remarquer que les neutrons ne pouvant que *gagner* de la léthargie (dans le domaine du ralentissement) les transferts ne concernent que des neutrons diffusés à une léthargie *inférieure* à u (ou à une énergie supérieure à celle qui est considérée).

RALENTISSEMENT DES NEUTRONS

Le caractère intégral de cette équation rend difficile une résolution analytique⁵, même dans le cas le plus simple du ralentissement élastique et isotrope. En fait le seul exemple où la solution s'explique complètement est celui dit de "l'hydrogène" : ralentissement élastique et isotrope dans un milieu constitué uniquement de noyaux de masse $A = 1$. (Il représente approximativement celui d'une solution de noyaux absorbants dans de l'eau si l'on confond la masse du proton – le noyau de l'hydrogène usuel – avec celle du neutron et si l'on néglige le ralentissement par tous les autres noyaux.) Pour une source représentée par la distribution de Dirac⁶ $\delta(u)$ (un neutron émis à la léthargie choisie comme origine) on obtient⁷ :

$$\Phi(u) = \frac{1}{\Sigma_s(u)} \frac{\Sigma_s(0)}{\Sigma_t(0)} e^{-p \left[- \int_{-\infty}^u \frac{\Sigma_a(u')}{\Sigma_t(u')} du' \right]} \quad (14)$$

(Σ_a est la section efficace d'absorption.)

Bien que cette formule corresponde à un cas tout à fait particulier, elle est intéressante à commenter car l'essentiel des aspects physiques y figurent.

- Le premier facteur vient de la différence de *nature* entre un flux qui représente une densité de neutrons présents et un "courant" qui l'alimente, soit directement (la source), soit après un transfert en énergie.
- Le second facteur exprime simplement que seuls les neutrons qui n'auront pas été absorbés lors de leur premier choc, à la léthargie origine, participeront au ralentissement.
- Le troisième facteur est celui qui nous intéressera le plus : c'est la probabilité qu'un neutron émis parvienne à se ralentir jusqu'à la léthargie considérée en ayant échappé aux absorptions, souvent appelée *probabilité* (ou facteur) *antitrappe* (les pics de

5. Par contre, une résolution numérique est assez aisée à cause du caractère "triangulaire" de la matrice qui discrétisera la loi de transfert.

6. Le cas d'une source plus générale s'obtient en superposant de telles sources donc les flux correspondants.

7. Ce cas $A = 1$ est plus simple du fait que la loi exponentielle de transfert en léthargie va jusqu'à l'infini et non pas une valeur finie ε ; l'équation intégrale peut alors se transformer en une équation différentielle qui s'intègre sans difficulté.

RALENTISSEMENT DES NEUTRONS

sections efficaces que sont les résonances représentent des "trappes" potentielles où risquent de "tomber", donc de disparaître, les neutrons). On notera la forme exponentielle du facteur antitrappe qui dans une certaine mesure se généralise : elle traduit l'amenuisement progressif du nombre des neutrons au fur et à mesure qu'ils "avancent" dans leur ralentissement ; ne restent à la léthargie u que les neutrons qui ont "réussi" à passer tous les intervalles élémentaires de léthargie depuis l'origine, le franchissement de chacun d'eux présentant un "risque".

Chapitre IV

LA THEORIE INTEGRALE DU TRANSPORT

Le problème homogène est intéressant sur le plan de l'analyse physique, mais trop schématique : en effet, les phénomènes antagonistes de l'absorption et du ralentissement qui gouvernent la probabilité antitrappe se déroulent généralement dans des milieux différents. L'essentiel de l'absorption se fait dans le *combustible* et l'essentiel du ralentissement dans le *modérateur* qui l'entoure¹. C'est dire que la prise en compte de l'hétérogénéité, du transport des neutrons (échanges entre zones) est absolument nécessaire dans le traitement du problème de l'absorption résonnante.

Nous nous limiterons ici à quelques rappels nécessaires pour la suite sur la méthode de résolution de l'équation du transport sous sa forme intégrale².

Pour simplifier la présentation, nous nous limiterons au cadre d'une théorie monocinétique, en régime permanent et en hypothèse d'une diffusion isotrope³.

L'équation du transport régissant la répartition spatiale du flux s'obtient, comme pour l'équation du ralentissement, en explicitant l'ensemble des contributions au taux de collision dans un élément de volume dV placé au point \vec{r} ; dans les hypothèses faites :

-
1. Dans les réacteurs à neutrons rapides cette distinction est moins nette mais l'hétérogénéité intervient aussi.
 2. C'est-à-dire l'approche la plus utilisée en France ; d'autres chercheurs ont élaboré la théorie de l'absorption résonnante dans le cadre de l'approche intégral-différentielle.
 3. Dans le système du laboratoire. Nous avons vu que cette hypothèse, dans le cas des noyaux légers, était assez illicite ; il s'avère cependant que les effets d'anisotropie du choc sont peu marqués dans les réacteurs usuels.

$$\Sigma(\vec{r})\phi(\vec{r}) = \int [S(\vec{r}') + c\Sigma(\vec{r}')\phi(\vec{r}')] P(\vec{r}' \rightarrow \vec{r}) dV' \quad (1)$$

l'intégrale portant sur le volume total du système. La section efficace de diffusion Σ_s a été écrite sous la forme $c\Sigma$ où c est le nombre de secondaires par choc et Σ la section efficace totale (indice t sous-entendu). La probabilité P qu'un neutron émis au point \vec{r}' subisse sa première collision au point \vec{r} ne dépend que de la distance géométrique R et de l'opacité ω (intégrale en ligne droite de Σ) entre ces deux points :

$$P(\vec{r}' \rightarrow \vec{r}) = \frac{e^{-\omega}}{4\pi R^2} \Sigma(\vec{r}) \quad (2)$$

Pour une résolution numérique on remplace les éléments de volumes infinitésimaux par des éléments de dimension finie V_i, V_j, \dots en pratique homogènes. L'équation intégrée sur un volume V_i conduit à :

$$V_i \Sigma_i \phi_i = \sum_j V_j [S_j + c_j \Sigma_j \phi_j] P_{ji} \quad (3)$$

Les quantités P_{ji} , appelées *probabilités de première collision*⁴, sont les intégrales sur V_j et les moyennes sur V_j de la loi de choc P . Noter que le fait de prendre la moyenne sur V_j revient à faire une hypothèse dite de *flux* (et de source) *plat(e)* : la structure fine dans V_j est négligée. Ces probabilités de première collision sont calculées numériquement en évaluant les intégrales multiples par des formules de quadrature dépendant du nombre et du type des variables d'espace prises en compte.

4. Nous convenons que le premier indice désigne le volume d'émission et le second celui où est observé éventuellement le choc. (Certains auteurs adoptent la convention inverse.)

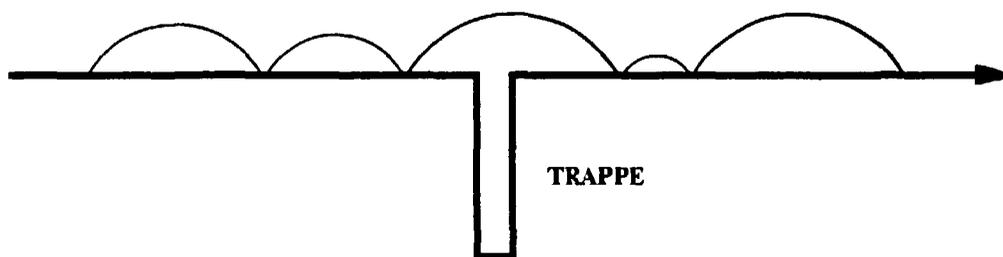
Chapitre V

APPROCHE ELEMENTAIRE

DU PROBLEME DE L'ABSORPTION RESONNANTE

La physique de l'absorption résonnante est fondamentalement liée au caractère *discontinu* du ralentissement des neutrons : ceux-ci ne passent pas à proprement parler par toutes les énergies (ou léthargies) ; un peu à la manière de kangourous qui progressent par bonds successifs, les neutrons parcourent l'axe des léthargies en n'atteignant que quelques points.

Si une trappe a été placée sur le sentier, un animal rampant y tombera certainement. Le kangourou, au contraire, a une bonne chance de sauter par dessus au cours de son cheminement, sans même s'apercevoir qu'il a eu la chance d'éviter cette trappe !



Cheminement d'un kangourou

Il en est de même pour les neutrons : des trappes sont placées sur leur parcours (domaine d'énergie où la section efficace d'absorption est très grande), mais ces trappes sont étroites : beaucoup d'entre eux passeront par dessus sans se "rendre compte" qu'ils ont évité les domaines d'énergie où la probabilité d'absorption était grande.

Mais bien entendu aussi, le kangourou qui ne calcule pas son bond peut atterrir à l'emplacement de la trappe et y sombrer ; de même les neutrons peuvent être amenés après une diffusion à une énergie de résonance où ils auront toute chance de disparaître.

APPROCHE ELEMENTAIRE DU PROBLEME

Avant d'introduire (deuxième partie) la formulation précise de ce phénomène qu'ont proposé M. Livolant et F. Jeanpierre, examinons quelques cas simples qui nous permettront de dégager les aspects physiques importants.

Commençons par le problème académique d'une *trappe noire* : on suppose que la section efficace d'absorption est nulle partout sauf dans un intervalle de léthargie $0 \leq u \leq \gamma$ où elle est infinie. Nous nous proposons de calculer la proportion des neutrons qui tombent dans cette trappe et, par différence, celle des neutrons qui y échappent.

Il faut d'abord examiner la situation *avant* la trappe, c'est-à-dire la solution de l'équation du ralentissement [éq. (13) du ch. III] en l'absence d'absorption ($\Sigma = \Sigma_S$). Si l'on prend cette équation au-delà des léthargies où sont émis les neutrons ($S = 0$), on remarque une solution évidente :

$$\Sigma_S(u)\phi(u) = \text{cte}$$

si la loi de transfert P n'est fonction que du gain de léthargie¹. Nous adopterons cette hypothèse².

Cette solution n'est atteinte en fait qu'asymptotiquement, "loin" des sources (au-delà de trois ou quatre fois la valeur de ε)³ ; c'est le cas pour le problème de l'absorption résonnante qui se situe à basse énergie par rapport au spectre d'émission des neutrons par fission.

La constante est liée au nombre Q de neutrons en train de se ralentir, appelé *courant de ralentissement*, ici égal au nombre de neutrons émis par la source puisqu'il n'y a pas d'absorption : en effet, chaque neutron "avance" en moyenne de ξ unités de léthargie

-
1. Dans ces conditions l'intégrale sur la léthargie de départ peut être remplacée par l'intégrale sur la léthargie d'arrivée. Cette dernière – somme des probabilités de toutes les éventualités – est égale à 1 (il n'y a plus de réactions $(n,2n)$ dans le domaine qui nous intéresse).
 2. Elle est notamment vérifiée si le ralentissement est élastique et isotrope [éq. (11) du ch. III], et assuré par des noyaux ayant tous la même masse.
 3. Le physicien G. Placzek a étudié le transitoire de la densité de diffusion au voisinage d'une source "en δ " ; ce transitoire n'existe pas (ou plus précisément se réduit à une fonction δ) dans le cas de l'hydrogène.

APPROCHE ELEMENTAIRE DU PROBLEME

(gain moyen) à chaque choc et subit donc en moyenne $1/\xi$ chocs dans chaque intervalle unité de léthargie, d'où $\Sigma_S \Phi = q/\xi$ soit :

$$\phi(u) = \frac{q}{\xi \Sigma_S(u)} \quad (1)$$

Remarque : on a $\xi = 1$ pour l'hydrogène : cette formule est un cas particulier de l'éq. (14) du ch. III prise avec $\Sigma_a = 0$.

En normalisant à $q = 1$, on obtiendra des probabilités. En notant p celle d'échapper à la trappe et en explicitant le complément à 1, c'est-à-dire en décomptant les neutrons tombant dans la trappe, on aura :

$$1 - p = \int_{u-\varepsilon}^0 du' \int_0^\gamma du \frac{1}{\xi} \frac{e^{-(u-u')}}{1 - \alpha}$$

La constante $1/\xi$ représente le taux de diffusion avant la trappe avec la normalisation adoptée ; le dernier terme est la loi de choc ; les bornes de l'intégrale sur u correspondent à la trappe ; celles de l'intégrale sur u' explicitent :

- a) que seuls risquent de tomber dans la trappe des neutrons diffusés avant la trappe ;
- b) que le gain de léthargie ne peut pas dépasser ε .

Le calcul des intégrales est immédiat :

$$p = 1 - \frac{1 - e^{-\gamma} - \alpha\gamma}{\xi(1 - \alpha)} \quad (2)$$

On remarque que $p \rightarrow 0$ lorsque que la largeur γ de la trappe atteint ε ; au-delà la formule n'a évidemment plus de sens.

En pratique les trappes sont le plus souvent étroites : $\gamma \ll \varepsilon$. En effet, γ peut être assimilée à la largeur pratique des résonances⁴, en variable léthargie :

$$\gamma \approx \frac{\Gamma}{E_0} \sqrt{\sigma_{\max}/c_p} \quad (3)$$

4. Domaine où la section efficace dépasse le double de la section efficace potentielle ; voir *Traité de neutronique*, p. 120.

APPROCHE ELEMENTAIRE DU PROBLEME

soit, par exemple, $\gamma = 0.209$ pour la plus grande résonance de l'uranium 238 et des valeurs plus faibles pour les suivantes (à cause de E_0) ; et par ailleurs, on peut assimiler le gain moyen de léthargie par diffusion à celui du modérateur, par exemple, 1 pour H ; 0,725 pour D ; 0,158 pour C⁵.

En développant la formule au premier ordre en γ , on obtient :

$$p \approx 1 - \frac{\gamma}{\xi} \quad (4)$$

Cette formule s'interprète très simplement : si la trappe est étroite, le nombre de neutrons arrivant à une léthargie u dans la trappe est presque le même que celui qu'on aurait en supprimant la trappe, soit $1/\xi$. Seuls manquent, en effet, les neutrons qui auraient été diffusés vers u depuis l'intervalle $0 < u' < u$ par hypothèse très petit devant l'intervalle de longueur ε d'où peuvent provenir les neutrons ; en d'autres termes la densité d'arrivée (terme intégral de l'équation du ralentissement) n'est pratiquement pas modifiée par la présence de la trappe.

Cette remarque permet d'écrire instantanément la formule de p pour une trappe "grise" étroite. Il suffit, dans l'intégrale exprimant les absorptions de multiplier la densité d'arrivée $1/\xi$ par la probabilité Σ_a/Σ_t que le choc soit une absorption :

$$p \approx 1 - \int_{\text{Trappe}} \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma_t(u)} \frac{du}{\xi} \quad (5)$$

En pratique les sections efficaces ne présentent non pas une mais de très nombreuses résonances : il y a donc un ensemble de trappes et la probabilité de les franchir toutes est le produit des probabilités de franchir chacune d'elles :

$$p = \prod_i p_i \quad (6)$$

Si l'on admet que les trappes sont bien séparées (ce qui n'est pas toujours le cas en pratique), les termes transitoires de Placzek induits par une résonance (absorption

5. On voit donc que pour ce dernier l'hypothèse n'est parfois pas tout à fait licite.

APPROCHE ELEMENTAIRE DU PROBLEME

équivalente à une source négative) sont négligeables au niveau des suivantes et la formule (5) de la trappe grise peut être utilisée pour chaque ρ_j . Comme ces trappes sont, en outre, supposées *étroites*, ces facteurs sont proches de 1 : en approximant $1-x$ par e^{-x} , on remplace le produit par une somme des arguments des exponentielles :

$$\rho \approx \exp\left[- \int \frac{\Sigma_a(u)}{\Sigma_t(u)} \frac{du}{\xi} \right] \quad (7)$$

(On peut considérer que l'intégrale porte sur tout le domaine concerné, la fonction intégrée étant nulle en dehors des trappes.)

Ces expressions simples mettent en évidence le *phénomène d'autoprotection des résonances* :

1) En dehors des résonances, la section efficace se réduit à la section potentielle de diffusion Σ_p (constante). Dans les résonances elle prend brutalement des valeurs très élevées en absorption et en diffusion.

2) Ces résonances sont *étroites* : le terme source de l'équation du ralentissement n'est pratiquement pas affecté dans une résonance par la présence de cette résonance ; le flux est approximativement inversement proportionnel à la section efficace totale.

3) Donc plus la section efficace dans la résonance est élevée, plus est accentuée la *dépression du flux* : la résonance se protège elle-même. Contrairement à ce que l'intuition pourrait laisser penser à première vue, de gigantesques sections efficaces n'entraînent pas nécessairement une gigantesque absorption.

En adoptant l'hypothèse d'un flux inversement proportionnel à la section efficace totale, on peut écrire :

$$\phi(u) \approx \phi_{as} \frac{\Sigma_p}{\Sigma_t(u)} \quad (8)$$

où ϕ_{as} est la valeur du flux en dehors de la résonance lorsque la section efficace se réduit à Σ_p .

Le taux d'absorption est le produit de la section efficace d'absorption par le flux ; on peut l'écrire sous la forme :

APPROCHE ELEMENTAIRE DU PROBLEME

$$\Sigma_a(u)\phi(u) = \Sigma_{a,eff}(u)\phi_{as} \quad (9)$$

avec :

$$\Sigma_{a,eff}(u) = \frac{\Sigma_p}{\Sigma_t(u)} \Sigma_a(u) \quad (10)$$

Cette section *effective* d'absorption est celle qu'il faudrait associer au flux asymptotique (sans la dépression) pour respecter le taux d'absorption, c'est-à-dire celle qu'on *aurait sans le phénomène* d'autoprotection. Au niveau d'une résonance, la section efficace réelle peut devenir grande mais le *facteur d'autoprotection* Σ_p/Σ_t devient alors petit de sorte que la section effective reste toujours finie (inférieure à Σ_p).

*
* *

Cette approche élémentaire a fait appel à quelques hypothèses simplificatrices. Il faudra sans doute les critiquer car une grande précision est recherchée dans les calculs d'absorption résonnante. Il faut se rappeler, en effet, que l'objectif que peuvent se proposer les neutroniciens des réacteurs nucléaires est d'évaluer un facteur de multiplication avec une précision de l'ordre de la centaine de p.c.m. (objectif probablement pas atteint aujourd'hui), et que ce problème de l'absorption résonnante peut concerner plusieurs dizaines de pour-cent des neutrons⁶.

Une formulation plus rigoureuse sera donc nécessaire et ce sera l'objet de la suite de ce document. En gros, quatre types de problèmes se posent, en effet :

1) On ne peut pas totalement ignorer le *ralentissement par les noyaux lourds résonnants* eux-mêmes et, là, l'étroitesse des résonances peut ne pas être vérifiée puisque le gain le léthargie par choc est d'autant plus faible que le noyau est lourd (exemple : $\xi = 0,0085$ pour l'uranium 238).

6. Dans les réacteurs bien thermalisés, environ 10 % des neutrons sont capturés pendant leur ralentissement ; dans les réacteurs à eau, cette proportion atteint environ le quart et même plus s'ils sont sous-modérés ; dans les réacteurs à neutrons rapides, en revanche, le problème est souvent moins crucial en ce sens que la plupart des neutrons sont absorbés avant le domaine des grandes résonances.

APPROCHE ELEMENTAIRE DU PROBLEME

2) Les *résonances* ne peuvent *pas* être considérées comme *séparées* (plus on se place à haute énergie, plus elles ont tendance à se recouvrir mutuellement) : d'une résonance à la suivante le flux n'a pas le "temps" de retrouver son comportement asymptotique.

3) La *structure* des réacteurs est le plus souvent *hétérogène* : l'absorption dans les résonances des noyaux lourds du combustible n'a pas lieu dans la même zone que le ralentissement pas le modérateur.

4) On a enfin affaire à des *mélanges de noyaux résonnants* (les structures des sections efficaces se superposent ce qui peut donner lieu à des couplages dans les effets d'autoprotection) et ces noyaux peuvent se trouver dans des *situations variées* (plusieurs types de crayons combustibles, gradients de température, etc.).

La théorie "classique" de M. Livolant et F. Jeanpierre répond correctement aux trois premiers problèmes ; les extensions de cette théorie et la méthode des tables de probabilité sont des développements que les derniers problèmes ont rendu nécessaires.

Deuxième partie

LA METHODE DES TAUX DE REACTIONS

EFFECTIFS

Chapitre VI

FACTORISATION DU FLUX EN SITUATION HOMOGENE

Pour représenter numériquement, par discrétisation, une courbe de section efficace d'un noyau lourd dans le domaine du ralentissement des neutrons – telle celle qui est reproduite dans l'avant-propos – donc pour traiter le problème du spectre et de l'absorption des neutrons, plusieurs milliers de points en énergie paraissent a priori nécessaires. Même avec la puissance actuelle des ordinateurs, un calcul aussi fin, dans une structure géométrique en pratique hétérogène, semble exclu en dehors de quelques cas de référence. Tout le problème de l'absorption résonnante se résume dans la question : *comment faire à un coût raisonnable un calcul précis des taux de réaction ?*

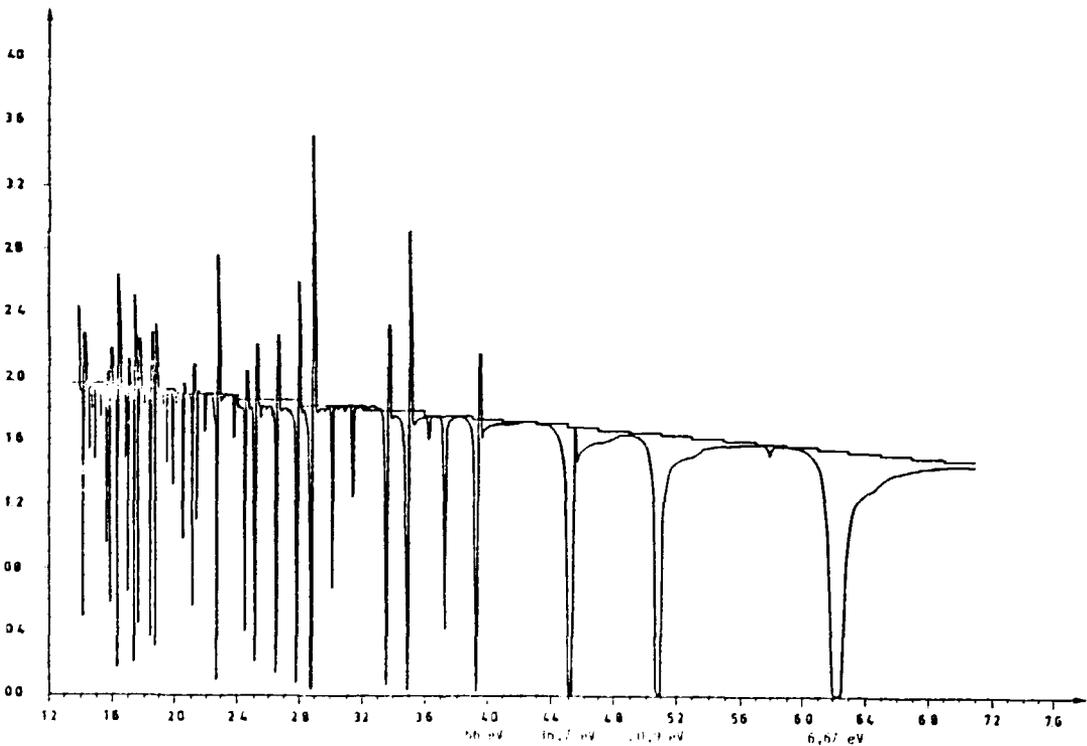
Rappelons qu'un taux de réaction est le produit d'une section efficace par un flux. Si ce dernier était régulier, l'utilisation de simples moyennes des sections efficaces par domaines d'énergie suffirait. Mais ce n'est pas le cas ; au contraire le flux présente une structure qui reproduit un peu en négatif celle des sections efficaces ainsi que nous l'avons constaté au chapitre précédent. L'analyse élémentaire que nous avons faite est corroborée par des calculs précis, par exemple la courbe suivante obtenue par H. Tellier et C. Van der Gucht. C'est le *phénomène d'autoprotection* qu'il faudra traiter avec précision : lorsque la section efficace devient grande, le flux se creuse et vice-versa.

L'examen de cette figure suggère l'idée d'une factorisation qui est la base de la théorie de M. Livolant et F. Jeanpierre : le flux apparaît, en effet, comme le produit d'une *fonction macroscopique* lentement décroissante avec la léthargie, ce qui traduit la diminution progressive du nombre de neutrons due à l'absorption, et d'une *structure fine* résultant du phénomène d'autoprotection.

La factorisation proposée par ces auteurs découle des rôles *antinomiques* de deux types de noyaux dans la compétition entre la diffusion qui ralentit les neutrons et l'absorption qui les fait disparaître :

FACTORISATION EN SITUATION HOMOGENE

- *Les noyaux lourds* qui présentent de nombreuses résonances absorbent les neutrons mais modifient peu leur énergie.
- *Les noyaux légers ou intermédiaires* qui ont peu ou pas de résonances, qui absorbent peu les neutrons, mais qui, par contre, les ralentissent (c'est précisément selon ces critères qu'on les choisit pour les réacteurs à neutrons thermiques).



Structure fine du flux
(ici dans le modérateur d'une cellule d'un réacteur à eau)

La théorie de M. Livolant et F. Jeanpierre de l'absorption résonnante s'applique au cas d'un *seul noyau résonnant* dans une *seule situation physique*. Si l'on admet que seul l'uranium 238 est fortement autoprotégé et que celui-ci est régulièrement disposé dans le réacteur, cette théorie suffit. Nous la présenterons, dans ce chapitre, pour la situation homogène ; au chapitre suivant nous l'introduirons pour la situation hétérogène. Nous rechercherons ensuite comment généraliser cette théorie en conservant les principes qui en sont à la base.

Considérons donc un milieu homogène, mélange d'un noyau résonnant (indice 0) et d'autres noyaux (indice 1) ; le flux est supposé spatialement uniforme.

Bilan neutronique

Le flux neutronique ϕ fonction de la léthargie u est régi par l'équation :

$$\int \Sigma_{S0}(u' \rightarrow u) \phi(u') du' + \int \Sigma_{S1}(u' \rightarrow u) \phi(u') du' = [\Sigma_0(u) + \Sigma_1(u)] \phi(u) \quad (1)$$

qui traduit l'équilibre d'un régime permanent : l'égalité des arrivées et des départs à toute léthargie u . On suppose que l'absorption résonnante intervient dans un domaine d'énergie où les sources (neutrons émis par fission) sont négligeables. Le symbole Σ désigne la section efficace macroscopique *totale* et Σ_S la section efficace différentielle de *diffusion*. Pour simplifier, on notera R les opérateurs de diffusion-transfert ayant Σ_S comme noyau ; nous réécrivons donc cette équation sous la forme :

$$R_0 \phi + R_1 \phi = (\Sigma_0 + \Sigma_1) \phi \quad (1 \text{ bis})$$

La section Σ_1 et l'opérateur R_1 peuvent être considérés comme constants au moins à l'échelle des irrégularités que vont induire les résonances du noyau 0 par les termes Σ_0 et R_0 .

Factorisation

Cette remarque va être utilisée pour chercher à écrire le flux sous une forme factorisée :

$$\Phi = \Psi\phi \tag{2}$$

où Ψ sera une structure *macroscopique* lentement variable en fonction de la léthargie et ϕ une structure *fine* prenant en compte les irrégularités dues aux résonances.

L'un des termes doit être défini pour que l'autre s'en déduise. Les auteurs ont proposé de définir la structure macroscopique par :

$$\Psi = \frac{R_1\phi}{\Sigma_1} \tag{3}$$

Cette fonction a la même dimension que ϕ , donc ϕ est sans dimension ; on peut vérifier par l'équation (1) que ϕ tend vers 1 en dehors des résonances. La fonction Ψ ainsi définie est effectivement à variation lente puisque Σ_1 est pratiquement constant et que R_1 est un opérateur intégral qui *moyenne* le flux sur un intervalle de léthargie ϵ_1 (gain maximum de léthargie par diffusion par un noyau non résonnant) toujours grand devant la largeur des résonances. Cette relation (3) n'est autre qu'un procédé de *lissage* du flux.

Equation de structure fine

Contrairement à R_1 l'opérateur R_0 est à courte portée puisqu'il concerne un noyau lourd. Dans l'intégrale qui explicite $R_0\phi$, on peut admettre que $\Psi(u')$ est peu différent de $\Psi(u)$, car u' est forcément voisin de u ($u-u' \leq \epsilon_0$) et Ψ varie peu. Ce facteur sort donc de l'intégrale ; en d'autres termes, on peut faire l'approximation :

$$R_0(\phi\Psi) \approx \Psi R_0\phi \tag{4}$$

En reportant (2), (3) et (4) dans (1), on constate que Ψ s'élimine : on obtient une équation ne contenant que la structure fine ϕ :

$$R_0\phi + \bar{\Sigma}_1 = (\bar{\Sigma}_0 + \Sigma_1)\phi \tag{5}$$

FACTORISATION EN SITUATION HOMOGENE

On a l'habitude de la diviser par la concentration N_0 du noyau résonnant de façon à ne faire intervenir que des sections efficaces microscopiques :

$$r_0\varphi + \sigma_e = (\sigma_0 + \sigma_e)\varphi \quad (6)$$

où r_0 est l'opérateur de noyau σ_0 . Cela a l'intérêt de montrer que l'équation ne fait intervenir que le *seul* paramètre :

$$\sigma_e = \frac{\Sigma_1}{N_0} \quad (7)$$

appelé *section équivalente* (ou section de dilution). Il caractérise la situation du noyau résonnant dans le mélange.

Interprétation de l'équation de structure fine

L'équation de structure fine (5) ou (6) a une interprétation physique simple et intéressante : sa solution φ est le flux qu'on *aurait* dans le problème suivant que nous appellerons *problème P* :

- Les propriétés du noyau résonnant ne sont pas modifiées par rapport au problème réel.
- Les noyaux non résonnants sont remplacés par des noyaux *purement absorbants*, de mêmes sections efficaces totales ; des *sources* d'intensités égales à ces sections efficaces sont *ajoutées*.

Tabulation des taux de réaction effectifs

Pour chaque noyau résonnant qu'on aura à considérer en pratique, on peut admettre qu'il est possible de résoudre *une fois pour toutes* l'équation de structure fine (6) pour quelques valeurs du paramètre σ_e . On mettra en oeuvre pour cela un calcul fin (code *AUTOSECOL*, par exemple) permettant de bien décrire la structure résonnante des sections efficaces (typiquement quelques milliers de groupes).

De ces calculs on conservera les *taux de réaction* associés, dits *effectifs*, dans une structure multigroupe beaucoup moins fine, celle qui sera utilisée par la suite pour les calculs de transport des réacteurs (typiquement quelques dizaines de groupes dans le domaine des résonances) :

$$\tau_{i,0}^g = \int_{(g)} \sigma_{i,0}(u) \varphi(u) du \quad (8)$$

où g est le domaine couvert par le macrogroupe concerné et i le type de la réaction.

Remarque : les produits $\sigma \varphi$ sont appelés *sections efficaces effectives* : les taux de réaction effectifs sont donc les intégrales par groupe de ces sections efficaces effectives.

La structure en groupes larges des calculs de transport est celle qui est considérée comme suffisante pour une bonne description globale du spectre des neutrons. Ce calcul utilisera les taux de réaction effectifs pour évaluer correctement les taux des réactions résonnantes, ainsi que nous allons le préciser. Mais notons avant qu'à cause de l'effet Doppler, la tabulation doit être faite non seulement en fonction de σ_E mais aussi de la *température* du noyau résonnant.

Sections efficaces et flux multigroupes

Après la factorisation (2) qui a été introduite et la résolution de l'équation de structure fine, il pourrait paraître naturel de chercher à calculer la fonction macroscopique Ψ . C'est effectivement une voie possible (que nous examinerons par la suite) mais ce n'est pas celle qui a été choisie dans le code *APOLLO*¹. La motivation originelle est la recherche d'une cohérence du formalisme entre le domaine des résonances et les autres domaines d'énergie.

Rappelons le principe d'un traitement multigroupe : on remplace les fonctions continues $\sigma(u)$ et $\varphi(u)$ par un jeu discret de valeurs σ^g et φ^g représentant des valeurs moyennes par groupes. Ces moyennes doivent être définies de façon à *respecter les taux de réaction* :

1. Ce point n'a pas été clairement mis en évidence dans le "Traité de neutronique".

$$\sigma^g \phi^g = \int_{(g)} \sigma(u) \phi(u) du \quad (9)$$

et formules similaires pour les sections efficaces de transfert². Cette définition laisse un degré de liberté : si l'on choisit une convention pour l'un des termes, la règle s'en déduit pour l'autre.

En réalité un choix s'impose : les équations du bilan neutronique, une fois discrétisées sous forme multigroupe, établissent *aussi* une relation entre les flux et les sections (quand on résout les équations, on ne fait que calculer les flux *en fonction* des sections efficaces). Les taux de réaction multigroupes sont donc en définitive des fonctions des sections efficaces multigroupes que l'on aura prises. Respecter ces taux de réaction fournit ainsi (théoriquement) la règle de condensation des sections efficaces sous forme d'équations implicites, d'où celle pour les flux par (9). C'est ce qu'on appelle l'*équivalence multigroupe-continu*.

Nous avons qualifié cela de "théorique" parce que la mise en oeuvre pratique supposerait la connaissance de la solution exacte continue, que précisément on ne veut pas (et même peut pas) faire (et qu'on remplace par un calcul multigroupe) ! Cependant tout espoir n'est pas perdu ! En effet, nous connaissons maintenant que nous avons résolu le problème de la structure fine, la solution sinon exacte du moins précise d'un problème *voisin* du problème réel : le problème **P**. [La seule différence entre les deux problèmes est l'approximation (4).] C'est donc sur **P** – qu'à ce titre on peut qualifier de *situation fondamentale* – que sera faite l'équivalence.

Concrètement elle sera faite en deux étapes³ :

- Calcul des taux de réaction $\tau^g_{j,0}$ du problème **P** par interpolation en fonction de la section efficace équivalente et, s'il y a lieu, de la température dans les tables préalablement constituées.

2. On divise parfois le second membre par l'intervalle de léthargie de façon à passer d'une notion de flux intégré à celle de flux moyen.

3. Pour le code *APOLLO* dans le sous-programme *BIEFF*.

- Calcul des sections efficaces multigroupes respectant les taux de réaction de ce problème, donc par le système d'équations :

$$\sum_h \sigma^{h \rightarrow g}_s, 0 \phi^h + \sigma_e = (\sigma^g_0 + \sigma_e) \phi^g \quad (10)$$

$$\sigma^g_{i, 0} \phi^g = \tau^g_{i, 0} \quad (11)$$

Remarque : le lecteur pourra constater que pour le cas *homogène* cette équivalence conduit tout simplement aux valeurs des sections efficaces moyennées par ϕ ; dans le cas général, il faut résoudre le système (10) et (11) par une technique itérative ; le sens physique des sections efficaces multigroupes ainsi obtenues est sans doute moins évident.

Calcul du cas réel

Une fois obtenues les sections efficaces multigroupes par équivalence sur le problème **P**, on traite le problème réel par les équations multigroupes correspondantes [similaires à (10) et (11)]. Dans la mesure où l'équivalence est faite sur un cas voisin du cas auquel on s'intéresse – c'est-à-dire où l'approximation (4) est licite – les résultats sont précis : ce point a effectivement été vérifié par H. Tellier [9] pour une cellule de réacteur à eau par comparaison avec des calculs par méthode Monte-Carlo.

Remarque : dans *APOLLO* on fait une approximation supplémentaire qui n'affecte probablement pas trop la précision (cf. le test fait par H. Tellier) : on ne tabule *que* les taux d'absorption et de diffusion mais pas les taux de transfert ; ces derniers sont obtenus en multipliant les taux de diffusion par les probabilités *non* autoprotégées de transferts dans les différents groupes d'arrivée des neutrons. (En pratique, comme il s'agit de noyaux lourds, ces transferts ont lieu surtout dans le groupe où le neutron a été diffusé, et un peu dans le groupe suivant.)

Chapitre VII

**SOLUTIONS APPROXIMATIVES
DE L'EQUATION DE STRUCTURE FINE**

L'équation de structure fine :

$$r_0\varphi + \sigma_e = (\sigma_0 + \sigma_e)\varphi \quad (1)$$

ne peut être résolue concrètement que de façon numérique à cause de l'opérateur intégral qui apparaît au premier terme. Cet opérateur représente le ralentissement des neutrons par diffusions sur le noyau (lourd) considéré.

Dans l'hypothèse, habituellement admise dans le problème de l'absorption résonnante, du choc élastique et isotrope dans le système du centre de masse, cet opérateur est simple. Une résolution analytique de l'équation (1) est cependant exclue du fait des variations de la section efficace totale σ_0 de ce noyau. C'est dommage car la résolution numérique – heureusement faite seulement un petit nombre de fois pour toutes – est coûteuse : il faut discrétiser suffisamment finement la fonction σ_0 qui peut être extrêmement complexe.

Cette équation fait intervenir deux "échelles" en léthargies : celle à laquelle les variations de σ_0 sont significatives, d'une part, la portée de l'opérateur r_0 , d'autre part. Dans la mesure où ces deux échelles sont très différentes, des approximations peuvent être proposées, présentant l'intérêt de conduire à des expressions explicites de φ .

Il s'agit donc de deux cas limites, relativement bien représentatifs des situations aux deux extrémités du domaine résonnant pour les noyaux lourds. Une expression intermédiaire pour la solution approximative de (1) – à vrai dire plus intuitive que rigoureuse – est parfois proposée pour les autres résonances.

Hypothèse résonance étroite

La portée de l'opérateur de ralentissement peut être caractérisée par le gain moyen $\bar{\xi}$ de léthargie au cours d'un choc [ch. III, éq. (12)] ; la taille des trappes par la largeur pratique γ [ch. V, éq. (3)]. En pratique, les trappes des noyaux lourds peuvent toujours être considérées comme étroites vis-à-vis de la portée du ralentissement par les principaux noyaux modérateurs (légers), comme cela a été admis au chapitre V. Mais dans l'équation de structure fine, c'est le ralentissement par le noyau résonnant lui-même qui est considéré (ralentissement évidemment secondaire en ce qui concerne le déplacement en énergie du spectre neutronique mais cependant non négligeable dans le problème de l'absorption résonnante). Le gain de léthargie au cours d'une diffusion étant d'autant plus faible que le noyau est lourd, γ peut être du même ordre de grandeur que $\bar{\xi}$. Ce dernier paramètre variant à peu près de façon inversement proportionnelle à l'énergie de la résonance, les cas $\gamma \ll \bar{\xi}$ et $\gamma \gg \bar{\xi}$ (et bien sûr tous les cas intermédiaires) peuvent s'observer.

Nous commencerons par le premier : $\gamma \ll \bar{\xi}$, souvent bien vérifié dans la partie à plus haute énergie du domaine résonnant. La largeur des trappes est supposée très faible devant la portée de l'opérateur de ralentissement : hypothèse résonance étroite ou *NR* (narrow resonance).

Nous pouvons alors reprendre les considérations faites au chapitre V. L'opérateur de ralentissement porte sur un vaste intervalle où presque partout la section efficace du noyau résonnant se réduit à sa valeur en dehors des résonances, à savoir σ_p ; et le flux de structure fine à 1. L'approximation $\sigma_S \phi \approx \sigma_p \times 1$ sous le signe somme conduit à :

$$r_0 \phi \approx \sigma_p \quad (2)$$

En reportant dans (1), on en tire une expression explicite du flux de structure fine :

$$\phi = \frac{\sigma_p + \sigma_e}{\sigma_0 + \sigma_e} \quad (3)$$

Remarque importante : l'expression "résonance étroite" suppose aussi que les résonances sont bien séparées pour que l'approximation faite sur la fonction sous le signe somme soit "presque toujours" correcte.

Hypothèse résonance large

L'autre cas extrême, souvent relativement bien vérifié pour les résonances dans la partie à basse énergie du domaine de ralentissement, se caractérise par des résonances larges devant la portée du ralentissement (hypothèse *WR*, comme *wide resonance*). On peut alors, à la limite, considérer que la section efficace de diffusion du noyau, et par voie de conséquence la fonction φ , ne varient pas de façon appréciable sur le domaine de léthargie sur lequel porte l'intégrale : on peut donc remplacer leur valeurs courantes par les valeurs à la léthargie où est prise l'équation :

$$r_0\varphi \approx \sigma_s\varphi \quad (4)$$

En reportant dans (1), on en tire, à nouveau, une expression explicite du flux de structure fine :

$$\varphi = \frac{\sigma_e}{\sigma_a + \sigma_e} \quad (5)$$

où l'indice *a* rappelle l'absorption.

Hypothèse résonance intermédiaire

La similitude des expressions (3) et (5) a suggéré la formule d'une approximation intermédiaire :

$$\varphi = \frac{\lambda\sigma_p + \sigma_e}{\lambda\sigma_s + \sigma_a + \sigma_e} \quad (6)$$

où λ est un paramètre compris entre zéro et un (les cas *NR* et *WR* correspondent respectivement à $\lambda = 1$ et à $\lambda = 0$).

Outre la difficulté de déterminer ce paramètre, cette expression ne se déduit pas comme les précédentes de considérations simples sur l'opérateur de ralentissement.

SOLUTIONS APPROXIMATIVES

Intégrales de résonance

Signalons que les expressions (3), (5) et (6) du flux de structure fine permettent de calculer les intégrales de résonances :

$$\int \sigma \phi \, du$$

si on décrit la section efficace par une loi de Breit et Wigner. Le lecteur intéressé trouvera dans [Traité de neutronique] les formules en hypothèses résonances étroite et large.

Chapitre VIII



ABSORPTION RESONNANTE

EN SITUATION HETEROGENE SIMPLE

Pour aborder le problème de l'hétérogénéité, nous choisirons le cas simple à deux milieux de petites dimensions, l'un, indicé 0, contenant le noyau résonnant, l'autre, indicé 1, contenant les autres noyaux.

Bilan neutronique

En faisant l'approximation du *flux plat* (en espace) dans chacune des régions, le bilan à chaque léthargie s'explique par :

$$\begin{aligned} V_0 P_{00} R_0 \phi_0 + V_1 P_{10} R_1 \phi_1 &= V_0 \Sigma_0 \phi_0 \\ V_0 P_{01} R_0 \phi_0 + V_1 P_{11} R_1 \phi_1 &= V_1 \Sigma_1 \phi_1 \end{aligned} \quad (1)$$

où $P_{\ell m}$ représente la probabilité qu'un neutron placé dans la région ℓ subisse sa première collision dans la région m . Ces fonctions dépendent de la géométrie et des seules sections efficaces totales à la léthargie u où est considérée cette équation.

Equation de structure fine

Les relations de conservation :

$$P_{00} + P_{01} = 1$$

$$P_{10} + P_{11} = 1$$

et de réciprocity :

$$V_1 \Sigma_1 P_{10} = V_0 \Sigma_0 P_{01}$$

SITUATION HETEROGENE SIMPLE

permettent d'exprimer ces probabilités en fonction de l'une d'entre elles, par exemple P_{00} .

La première des équations (1) s'écrit alors, après simplification par V_0 :

$$P_{00}R_0\phi_0 + \Sigma_0(1 - P_{00}) \frac{R_1\phi_1}{\Sigma_1} = \Sigma_0\phi_0$$

ce qui suggère de poser comme précédemment :

$$\phi_2 = \phi_2\Psi \quad (2)$$

avec :

$$\Psi = \frac{R_1\phi_1}{\Sigma_1} \quad (3)$$

qui est sans structure fine pour les mêmes raisons que dans le cas homogène. En reprenant en outre l'hypothèse :

$$R_0(\phi_0\Psi) \approx \Psi R_0\phi_0 \quad (4)$$

on voit que Ψ se barre. Après division par P_{00} et par N_0 , on obtient une équation similaire à l'équation (6) du chapitre précédent :

$$r_0\phi_0 + \sigma_e = (\sigma_0 + \sigma_e)\phi_0 \quad (5)$$

si l'on pose :

$$\sigma_e = \frac{\sigma_0(1 - P_{00})}{P_{00}} \quad (6)$$

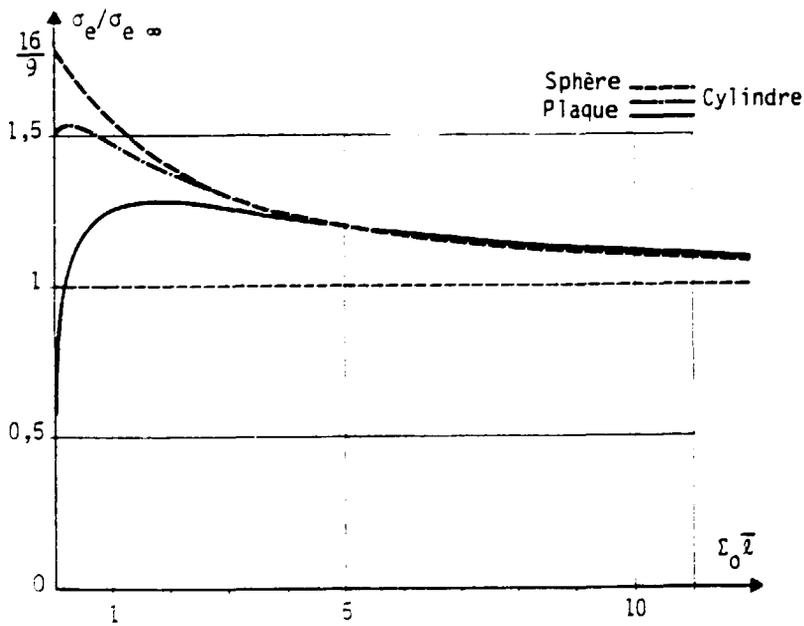
L'interprétation physique (problème **P**) est la même qu'au chapitre précédent.

Facteur de Bell

Contrairement au cas homogène, la section équivalente définie par (6) *dépend de la léthargie*. Mais alors que σ_0 peut évoluer sur plusieurs décades lorsque la léthargie varie autour d'une léthargie de résonance, σ_e ne varie que de *quelques dizaines de pour cent* par rapport à sa valeur asymptotique pour $\sigma_0 \rightarrow \infty$:

$$\sigma_{e\infty} = \frac{1}{\ell N_0} \tag{7}$$

($\ell = 4V_0/S_0$: corde moyenne de la région 0), comme le montre la figure ci-dessous [Traité de neutronique] pour les trois géométries décrites avec une seule variable d'espace¹.



Variations de la section équivalente en fonction de la section efficace du noyau résonnant

1. En l'absence d'effet Dancoff (voir chapitre suivant).

SITUATION HETEROGENE SIMPLE

Cette constatation suggère de remplacer par une constante $\langle\sigma_e\rangle$ la section équivalente définie par (6) ; le facteur de Bell b caractérise cette valeur moyenne unique :

$$\langle\sigma_e\rangle = b\sigma_{e0} \quad (8)$$

Ce facteur a une interprétation simple : remplacer σ_e par une constante est équivalent à approximer la probabilité P_{00} par la formule de Bell-Wigner :

$$P_{00} \approx \frac{\Sigma_0 \lambda}{b + \Sigma_0 \lambda} \quad (9)$$

Une telle approximation a un grand intérêt pratique : elle permettra d'utiliser pour la situation hétérogène les tables de taux de réaction effectifs établies pour la situation homogène (situation où σ_e est constante).

Choix du facteur de Bell : équivalence hétérogène-homogène

Cette approximation ne peut être précise que si la valeur moyenne $\langle\sigma_e\rangle$ est correctement choisie : c'est l'objectif de l'équivalence hétérogène-homogène.

Le critère d'équivalence sera le respect de la grandeur physique que l'on estime être la plus pertinente : en l'occurrence, on choisira, bien évidemment, le *taux d'absorption effectif*.

On écrit donc que ce taux calculé avec la solution de l'équation (5) est le même que celui calculé avec la solution $\langle\phi_0\rangle$ que l'on obtient en remplaçant σ_e par $\langle\sigma_e\rangle$:

$$r_0\langle\phi_0\rangle + \langle\sigma_e\rangle = (\sigma_0 + \langle\sigma_e\rangle)\langle\phi_0\rangle \quad (10)$$

Les taux de réaction effectifs doivent être considérés sur un certain intervalle de léthargie ; on déduira du principe d'équivalence la valeur de $\langle\sigma_e\rangle$ (ou du facteur de Bell) pour cet intervalle. Dans *APOLLO*, on prend tout le domaine des résonances donc un seul facteur de Bell, mais on pourrait envisager d'avoir un facteur de Bell dans plusieurs domaines d'énergie, voire pour chaque groupe.

SITUATION HETEROGENE SIMPLE

Concrètement, réaliser l'équivalence en toute rigueur supposerait la résolution des équations (5) et (10) : or c'est précisément ce qu'on l'on veut éviter pour se ramener aux tabulations faites pour les situations homogènes. C'est pourquoi on la met en oeuvre en utilisant une hypothèse simplificatrice pour le calcul des flux, évidemment la *même* pour ces deux équations. Dans *APOLLO* on a choisi l'hypothèse résonance étroite :

$$r_0 \phi_0 \approx p_0$$

(section potentielle constante du noyau résonnant) ; cette hypothèse conduit à des expressions explicites des flux de structure fine :

$$\phi_0 = \frac{p_0 + \sigma_e}{\sigma_0 + \sigma_e}$$

et analogue pour la solution de l'équation (10).

Dans ces conditions l'équation d'équivalence définissant $\langle \sigma_e \rangle$ s'écrit :

$$\int \sigma_{a,0} \frac{p_0 + \sigma_e}{\sigma_0 + \sigma_e} du = \int \sigma_{a,0} \frac{p_0 + \langle \sigma_e \rangle}{\sigma_0 + \langle \sigma_e \rangle} du \quad (11)$$

Noter que par l'intermédiaire de (6), σ_e (au premier membre) est une fonction de σ_0 . Cette remarque permet d'évaluer très facilement ces intégrales par la technique de Lebesgue :

$$\int \pi(\sigma_0) \frac{p_0 + \sigma_e}{\sigma_0 + \sigma_e} d\sigma_0 = \int \pi(\sigma_0) \frac{p_0 + \langle \sigma_e \rangle}{\sigma_0 + \langle \sigma_e \rangle} d\sigma_0 \quad (12)$$

où $\pi(\sigma_0)d\sigma_0$ est la somme de $\sigma_{a,0}du$ sur les intervalles de léthargie où la section totale du noyau résonnant est comprise entre σ_0 et $\sigma_0+d\sigma_0$. Cette densité peut être déterminée une fois pour toutes (et discrétisée) pour chaque noyau lourd intervenant dans les réacteurs et, s'il a lieu, en fonction de la température. Le premier membre de (12) est évalué à partir de calculs de la probabilité de collision P_{00} pour les valeurs de σ_0 où π est tabulée ; l'égalisation au second membre fournit l'équation (implicite) donnant $\langle \sigma_e \rangle$ ou le facteur de Bell. (Dans *APOLLO* ces calculs sont réalisés par le module *JEZABEL*.)

Sections efficaces et flux multigroupes : équivalence continu-multigroupe

Une fois $\langle \sigma_e \rangle$ obtenue, une simple interpolation dans les tables fournit les taux de réaction effectifs par groupe $\tau_{i,0}^g$ pour le problème **P** hétérogène.

On peut écrire en approximation multigroupe les équations de ce même problème :

$$\sum_h \sigma^{h \rightarrow g}_{s,0} \varphi_0 + \sigma_e^g = (\sigma_0^g + \sigma_e^g) \varphi^g \quad (13)$$

avec :

$$\sigma_e^g = \frac{\sigma_0^g (1 - P_{00}^g)}{P_{00}^g} \quad (14)$$

où P_{00}^g désigne la valeur de P_{00} calculée avec σ_0^g .

En écrivant d'autre part le respect des taux de réaction par groupes :

$$\sigma_{i,0}^g \varphi_0 = \tau_{i,0}^g \quad (15)$$

(en pratique pour $i = a$ et s), on obtient les équations implicites d'équivalence continu-multigroupe donnant les sections efficaces multigroupes. (Pour *APOLLO* ce calcul itératif est réalisé par le sous-programme *BIEFF*.)

Calcul du cas réel

Une fois les sections multigroupes ainsi déterminées par équivalence sur le problème **P**, elles sont utilisées pour résoudre le problème réel (1) réécrit sous forme multigroupe.

Comme pour le cas homogène, les grandeurs – taux de réaction – qu'on a respecté par équivalence sur le problème **P** – proche du problème réel – seront bien calculées par cette procédure. Mais il faut noter que les sections efficaces et flux multigroupes ne sont plus des moyennes simples de sections efficaces et flux réels. On montre en particulier que le *creusement spatial* du flux dans la région 0 au niveau d'une résonance évalué avec les sections multigroupes est *atténué* par rapport au creusement réel : comme il est

SITUATION HETEROGENE SIMPLE

bien connu, la moyenne d'une fonction diffère de la fonction pour la valeur moyenne de l'argument.

Chapitre IX

ABSORPTION RESONNANTE

EN SITUATION HETEROGENE QUELCONQUE

Nous supposons toujours qu'il n'y a qu'un seul noyau résonnant, indicé 0, mais dans un milieu "combustible" c pouvant contenir aussi d'autres noyaux indicés "prime c". Ce milieu c peut être entouré d'un nombre quelconque d'autres milieux, indicés i ou j, sans noyaux résonnants.

Bilan neutronique

En conservant l'approximation du *flux plat* dans chacune des régions, le bilan neutronique à chaque léthargie s'explique par le système d'équations :

$$V_c P_{ci} [R_0 \phi_c + R'_c \phi_c] + \sum_{j \neq c} V_j P_{ji} R_j \phi_j = V_i \Sigma_i \phi_i \quad (1)$$

En particulier, pour $i = c$ et en utilisant les relations de réciprocité :

$$V_j \Sigma_j P_{jc} = V_c (\Sigma_0 + \Sigma'_c) P_{cj}$$

on obtient, après simplification par V_c :

$$P_{cc} [R_0 \phi_c + R'_c \phi_c] + \sum_{j \neq c} (\Sigma_0 + \Sigma'_c) P_{cj} \frac{R_j \phi_j}{\Sigma_j} = (\Sigma_0 + \Sigma'_c) \phi_c$$

Equation de structure fine

Les fonctions :

$$\psi_j = \frac{R_j \phi_j}{\Sigma_j} \quad \psi_c = \frac{R'_c \phi_c}{\Sigma'_c} \quad (2)$$

sont sans structure fine. Nous ferons une *hypothèse supplémentaire* en admettant qu'elles sont peu différentes les unes des autres.

Dans ces conditions, et en reprenant l'approximation :

$$R_0 \phi_c \approx \psi_c R_0 \phi_c$$

avec :

$$\phi_c = \psi_c \phi_c$$

leur valeur commune se barre et l'on obtient :

$$P_{cc} [R_0 \phi_c + \Sigma'_c] + \sum_{j \neq c} (\Sigma_0 + \Sigma'_c) P_{cj} = (\Sigma_0 + \Sigma'_c) \phi_c$$

La relation de conservation permet d'écrire :

$$\sum_{j \neq c} P_{cj} = 1 - P_{cc}$$

d'où :

$$P_{cc} [R_0 \phi_c + \Sigma'_c] + (\Sigma_0 + \Sigma'_c)(1 - P_{cc}) = (\Sigma_0 + \Sigma'_c) \phi_c$$

Cette équation se met sous la forme précédente :

$$r_0 \phi_c + \sigma_e = (\sigma_0 + \sigma_e) \phi_c \quad (3)$$

si l'on pose :

$$\sigma_e = \frac{1}{N_0} \left[\Sigma'_c + (\Sigma_0 + \Sigma'_c) \frac{1 - P_{cc}}{P_{cc}} \right] \quad (4)$$

Interprétation de l'expression de la section équivalente

Le premier terme de cette section équivalente est le terme *homogène* : c'est celui qu'on aurait si le milieu c était seul ; on reconnaît une expression similaire à celle trouvée au chapitre VI [équation (7)].

Le deuxième terme est le terme *hétérogène* : c'est celui qu'on aurait si le milieu c ne contenait que le noyau résonnant ; on reconnaît une expression analogue à l'équation (6) écrite au chapitre VIII.

Mais cette dernière :

$$\sigma_e = \frac{\sigma_0(1 - P_{00})}{P_{00}} \quad (5)$$

peut être retrouvée de façon rigoureusement identique en introduisant la probabilité qu'un neutron émis dans le milieu c où se trouve le noyau résonnant subisse sa première collision sur un noyau de ce type :

$$P_{00} = P_{cc} \frac{\Sigma_0}{\Sigma_0 + \Sigma'_c} \quad (6)$$

(Le premier facteur exprime la probabilité que la collision ait lieu dans le milieu combustible et le deuxième que ce soit sur un noyau résonnant 0.)

Dans ces conditions, tout ce qui a été dit au chapitre précédent peut être repris *in extenso* : interprétation de l'équation de structure fine (problème P), équivalence hétérogène-homogène, équivalence continu-multigroupe, calcul du cas réel.

Facteur de Bell

L'expression (4) montre qu'à la limite $\sigma_0 \rightarrow \infty$:

$$\sigma_e \rightarrow \sigma_{e,\infty} = \frac{\Sigma'_c}{N_0} + \frac{1}{2N_0}$$

où $\bar{\ell}$ est la corde moyenne du milieu c .

SITUATION HETEROGENE QUELCONQUE

On a l'habitude d'introduire le facteur de Bell sur le terme *hétérogène* seulement en posant :

$$\langle \sigma_e \rangle = \frac{\Sigma'_c}{N_0} + \frac{b}{\ell N_0} \quad (7)$$

de façon à interpréter cette formule comme l'approximation de Bell-Wigner sur la probabilité P_{CC} :

$$P_{CC} \approx \frac{(\Sigma_0 + \Sigma'_c)\ell}{b + (\Sigma_0 + \Sigma'_c)\ell} \quad (8)$$

Facteur de Dancoff

L'*effet Dancoff* est la possibilité pour un neutron émis par la région c de subir sa première collision dans une partie de cette région *non connexe* à la zone d'émission : concrètement, la possibilité pour un neutron émis dans un crayon de combustible d'un réseau de subir sa première collision dans un *autre* crayon¹.

Si l'on fait l'hypothèse que *le courant* des neutrons quittant (sans choc) la zone d'émission *est isotrope* à la surface de cette zone, on peut écrire :

$$P_{CC} = P_{CC}^+ + \frac{(1 - P_{CC}^+)P_{SS}^+P_{SC}^+}{1 - P_{SS}^+(1 - P_{SC}^+)}$$

où les probabilités P^+ sont relatives au cas *sans* effet Dancoff (sans traversées de neutrons par la surface S d'une zone de la région c) ; la probabilité P_{SS}^+ , en général notée plus simplement C , concerne les neutrons voyageant à l'*extérieur* de la région c , d'une zone à l'autre : elle est appelée facteur de Dancoff et caractérise l'effet Dancoff.

En exprimant P_{SC}^+ en fonction de P_{CC}^+ grâce aux relations de réciprocity et de complémentarité, on établit facilement l'expression du facteur de Bell b en fonction de b^+ , celui qu'on aurait en l'absence d'effet Dancoff [défini à partir de P_{CC}^+ par une relation analogue à (8)] :

1. Cet effet peut évidemment exister même dans le cas étudié au chapitre précédent d'un milieu combustible uniquement composé des noyaux résonnants.

SITUATION HETEROGENE QUELCONQUE

$$b = \frac{(1 - C)b^+}{1 - C + \alpha C b^+} \quad (9)$$

Remarque : le facteur de Bell édité par *APOLLO 1* est **a** défini par :

$$b = (1 - C)a$$

Chapitre X

TRAITEMENT APPROXIMATIF

DES CAS RENCONTRES EN PRATIQUE

Nous présenterons au chapitre suivant la généralisation qu'on peut faire au cas à plusieurs noyaux résonnants. Dans la version actuelle (1) du code *APOLLO* cela n'est pas programmé : on y utilise donc la théorie que nous venons de rappeler ; mais comme les problèmes que l'on rencontre en pratique sont plus complexes que celui que considère cette théorie — un seul type de noyaux résonnants, dans une seule situation — des approximations supplémentaires doivent être faites. Elles concernent deux types de problèmes :

- des noyaux résonnants du même type mais dans des situations physiques différentes ;
- des noyaux résonnants de plusieurs types différents.

Cas de plusieurs types de noyaux résonnants

Le second problème se rencontre de façon très systématique en pratique ; par exemple, on a presque toujours affaire à un mélange des deux isotopes 235 et 238 de l'uranium, et d'autres noyaux lourds apparaissent au cours de l'évolution (plutonium, etc.).

Dans *APOLLO 1*, on mène les calculs en traitant ces noyaux *un par un* indépendamment des autres : on traite le premier noyau résonnant selon le formalisme que nous venons de voir en supposant non résonnantes les sections efficaces des autres noyaux ; dans une deuxième étape, on fait de même pour le second noyau résonnant ; et ainsi de suite.

La question qui évidemment se pose est de savoir par quoi remplacer les sections efficaces résonnantes des noyaux non traités comme tels lors de l'étape considérée. La réponse habituellement adoptée est : par les sections multigroupes. Si le noyau en question a déjà été traité, se seront des sections multigroupes auto-protégées (au sens où nous les avons définies ci-dessus) ; sinon se seront de simples sections efficaces moyennes telles qu'elles existent dans la bibliothèque de base.

TRAITEMENT APPROXIMATIF

Cette procédure est cohérente si ces calculs sont itérés jusqu'à convergence : les sections efficaces des noyaux autres que celui qui est traité seront alors toutes des sections efficaces auto-protégées. Mais en pratique cette itération n'est pas faite car il n'est pas sûr que la solution convergée soit meilleure que celle obtenue à la première itération. Mais on remarquera qu'alors, le résultat obtenu dépend de l'ordre dans lequel sont traités les différents noyaux résonnants (on commence en général par les noyaux les plus auto-protégés).

Une autre solution qui a été préconisée [A. Santamarina], semble-t-il un peu plus précise dans les cas usuels (et pour laquelle le problème de l'itération disparaît), consiste à remplacer les sections efficaces des noyaux résonnants autres que celui qui est traité par les sections efficaces *potentielles* : l'esprit de cette démarche est proche de celui de l'hypothèse "résonance étroite".

En tout état de cause, ces techniques ne sont que des palliatifs : elles ne peuvent pas prendre en compte l'effet sur le phénomène d'auto-protection (creusement du flux) de résonances de noyaux différents se recouvrant partiellement.

Approximation dite " P_{ic} "

Le formalisme que nous venons de rappeler oblige à traiter en une seule zone d'espace les régions où se trouvent les noyaux résonnants considérés (d'un type donné). Ce peut être un handicap, par exemple si l'on a plusieurs types de crayons combustibles différents, ou, tout simplement, si l'on désire détailler les flux et taux de réaction au sein d'une zone combustible.

L'approximation " P_{ic} " a pour but de lever cette restriction¹, mais cela au prix d'une approximation supplémentaire.

Désignons par α, β, \dots les milieux physiques où se trouvent les noyaux résonnants de type 0 (avec éventuellement d'autres noyaux non résonnants de type 1) et par i, j, \dots les zones sans noyaux résonnants. Pour le noyau résonnant en zone α , le bilan neutronique conduit à :

1. Elle tire son nom de la notation adoptée par F. Jeanpierre et M. Livolant pour la probabilité notée ci-dessous P_{i0} .

TRAITEMENT APPROXIMATIF

$$\sum_{\beta} V_{\beta} P_{\beta\alpha} (R_{0\beta} \phi_{\beta} + R_{1\beta} \phi_{\beta}) + \sum_j V_j P_{j\alpha} R_j \phi_j = V_{\alpha} (\Sigma_{0\alpha} + \Sigma_{1\alpha}) \phi_{\alpha}$$

Nous conviendrons que $P_{j\alpha}$ désigne le nombre de chocs dans la zone α pour un neutron émis dans la zone j , et analogue pour $P_{\beta\alpha}$.

Posons :

$$\psi_j = \frac{R_j \phi_j}{\Sigma_j} \quad \psi_{\beta} = \frac{R_{1\beta} \phi_{\beta}}{\Sigma_{1\beta}}$$

et supposons que ces fonctions sont *égales* entre elles.

Pour le noyau résonnant, faisons l'approximation :

$$R_{0\beta} \phi_{\beta} \approx \psi R_{0\beta} \phi_{\beta}$$

avec :

$$\phi_{\beta} = \psi \varphi_{\beta}$$

Utilisons enfin les relations de réciprocité. On obtient ainsi les équations de structure fine :

$$\sum_{\beta} P_{\alpha\beta} \frac{R_{0\beta} \varphi_{\beta} + \Sigma_{1\beta}}{\Sigma_{\beta}} + \sum_j P_{\alpha j} = \varphi_{\alpha}$$

qui ont toujours la même interprétation (problème P).

A cause des relations de conservation :

$$\sum_j P_{\alpha j} = 1 - \sum_{\beta} P_{\alpha\beta}$$

d'où :

$$\sum_{\beta} P_{\alpha\beta} \left(1 - \frac{R_{0\beta} \varphi_{\beta} + \Sigma_{1\beta}}{\Sigma_{\beta}} \right) = 1 - \varphi_{\alpha} \quad (1)$$

TRAITEMENT APPROXIMATIF

L'approximation consiste à supposer que le rapport :

$$y = \frac{R_0 \varphi_\beta}{\Sigma_0 \beta} = \frac{r_0 \varphi_\beta}{\sigma_0} \quad (2)$$

(donc $r_0 \varphi_\beta$) est le même dans toutes les zones où se trouve le noyau résonnant (ce qui n'est exact, en réalité, qu'en hypothèse résonance étroite). On obtient alors :

$$(1 - y) P_{\alpha 0} = 1 - \varphi_\alpha$$

avec :

$$P_{\alpha 0} = \sum_{\beta} P_{\alpha \beta} \frac{\Sigma_0 \beta}{\Sigma_\beta} \quad (3)$$

probabilité qu'un neutron émis en zone α ait son premier choc sur le noyau résonnant 0, n'importe où.

L'approximation faite permet donc d'obtenir des équations de structure fine *découplées*² : en remplaçant, en effet, y par son expression (avec l'indice α), on peut mettre ces équations sous la forme usuelle :

$$r_0 \varphi_\alpha + \sigma_{e\alpha} = (\sigma_0 + \sigma_{e\alpha}) \varphi_\alpha \quad (4)$$

avec :

$$\sigma_{e\alpha} = \frac{\sigma_0 (1 - P_{\alpha 0})}{P_{\alpha 0}} \quad (5)$$

On a une section équivalente propre à chaque zone qui fait intervenir, pour un neutron placé dans cette zone, la probabilité qu'il subisse son premier choc sur un noyau résonnant dans n'importe quelle zone.

Chacune des équations de structure fine peut être traitée comme on l'a fait précédemment. Cela conduit, pour le noyau résonnant, à un jeu de sections efficaces multi-groupes dans chacune des zones où il se trouve.

2. Nous verrons plus loin que, pour ce problème, on peut obtenir des équations découplées sans introduire d'approximation.

Chapitre XI

GENERALISATION DES EQUATIONS DE STRUCTURE FINE

AUX CAS A PLUSIEURS NOYAUX RESONNANTS

Il est clair que le formalisme Livolant-Jeanpierre, même étendu comme l'on vu au chapitre précédent, ne permet pas de traiter de façon vraiment satisfaisante le problème de l'absorption résonnante dans toute sa généralité. Quelques exemples concrets illustreront ces insuffisances.

1. Seule une valeur moyenne des taux de réaction est obtenue. C'est ainsi que le code *APOLLO* ne permet pas de déterminer correctement la répartition – dans un crayon de combustible – de la formation du plutonium à partir des captures de neutrons par l'uranium 238.

2. Les interférences entre résonances de noyaux lourds placés ensemble dans un réacteur ne sont que très imparfaitement prises en compte ; en particulier, la position relative des résonances des différents noyaux n'intervient pas dans le résultat qu'on calcule¹.

3. L'interaction entre zones contenant un même noyau résonnant mais en concentration et géométrie différentes² n'est à peu près correctement traité qu'en moyenne. L'approximation P_{jc} qui est faite pour déterminer la répartition spatiale du taux d'absorption peut être sujette à caution.

1. Si cela n'est pas crucial pour un combustible en uranium faiblement enrichi, les effets sont certainement beaucoup plus importants pour les réacteurs recyclant le plutonium où cet élément est utilisé en teneur importante sur un "support" en uranium.

2. Par exemple un réseau constitué de crayons des différents types tels que ceux qui sont envisagés dans les réacteurs à variation de spectre ; noter que ce problème est du même type que le problème 1.

4. Les variations spatiales de la température donc de l'élargissement Doppler (par exemple au sein d'un élément de combustible) ne peuvent pas être prises en compte³.

Ce sont ces raisons qui ont amené l'auteur de ce document à rechercher à généraliser les équations de la théorie Livolant-Jeanpierre tout en en conservant les principes. Ce sera l'objet de la suite de la deuxième partie. On notera que, contrairement aux points précédemment exposés, ces généralisations n'ont pas encore été ni testées sur le plan de la physique, ni programmées.

Comme cela a déjà été dit, d'autres approches sont possibles – peut-être plus prometteuses en ce qui concerne les problèmes "plusieurs noyaux - plusieurs situations". La troisième partie présentera l'approche par tables de probabilités.

*
* *

Présentation du problème et des notations

"L'objet" que nous voulons traiter est constitué d'un nombre quelconque de *types* de noyaux situés dans un nombre quelconque de *zones*, une zone étant définie au sens d'un calcul par probabilités de collision : volume contenant un matériau homogène, suffisamment petit pour qu'on puisse y supposer le flux neutronique uniforme.

Une zone peut contenir plusieurs types de noyaux, et inversement, des noyaux de même type peuvent se trouver dans des zones différentes ; dans ce cas nous leur donnerons des numéros (1, m, n,...) différents, puisque les situations physiques (autres noyaux mélangés, flux) sont distinctes.

Ces numéros 1, m, n,... se répartissent en deux classes :

- celle des noyaux résonnants désignés par x, y, z,...
- celle des noyaux non résonnants désignés par i, j, k,...

3. Ce problème est un cas particulier du problème 2 où les noyaux en interaction sont très semblables puisqu'ils ne diffèrent que par l'élargissement Doppler.

GENERALISATION DES EQUATIONS DE STRUCTURE FINE

Nous noterons V_l le volume de la zone où se trouve le noyau l (caractérisé par Σ_l et R_l , ou N_l , σ_l et r_l) et par Φ_l le flux qui y règne. La probabilité P_{lm} sera définie comme la probabilité pour un neutron placé dans le volume V_l où se trouve le noyau l de subir sa première collision sur le noyau m placé dans le volume V_m .

Lorsque deux noyaux m et n sont mélangés de façon homogène dans une même zone, on a évidemment :

$$\begin{aligned} V_n &= V_m & \Phi_n &= \Phi_m \\ P_{nl} &= P_{ml} & P_{ln}/\Sigma_n &= P_{lm}/\Sigma_m \end{aligned} \quad (1)$$

(quel que soit l). Il est clair qu'on tiendra compte de ces relations pour simplifier les calculs ; en particulier, seules les "vraies" zones seront distinguées au niveau des calculs de probabilités de collision : nous désignerons alors par λ, μ, ν, \dots les zones physiquement distinctes et par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ celles qui sont "résonnantes", c'est-à-dire qui contiennent des noyaux résonnants.

Bilan neutronique

Les probabilités de première collision permettent d'explicitier le bilan neutronique :

$$\sum_m V_m P_{ml} R_m \Phi_m = V_l \Sigma_l \Phi_l \quad (2)$$

En introduisant les relations de réciprocité :

$$V_m \Sigma_m P_{ml} = V_l \Sigma_l P_{lm}$$

on peut simplifier l'équation 1 par $V_l \Sigma_l$:

$$\sum_m P_{lm} \frac{R_m \Phi_m}{\Sigma_m} = \Phi_l \quad (3)$$

(Cette forme montre à l'évidence que les flux associés à deux noyaux mélangés dans une même zone sont identiques.)

Structures macroscopiques et structures fines

En reprenant le choix proposé par Livolant et Jeanpierre, on définira pour chaque noyau *non résonnant* une structure macroscopique :

$$\Psi_i = \frac{R_i \phi_i}{\Sigma_i} \tag{4}$$

Pour introduire une factorisation, des structures macroscopiques Ψ_X doivent aussi être définies pour les noyaux *résonnants* : nous ferons provisoirement abstraction de ce problème car ce choix va s'imposer dans les équations que nous allons écrire.

Supposons donc toutes les fonctions Ψ définies. Cela permet d'introduire des structures fines en écrivant :

$$\phi_j = \Psi_j \phi_j \tag{5}$$

Remarquons que *tous* les noyaux⁴ sont assortis d'une structure macroscopique et d'une structure fine ; pour deux noyaux dans une même zone [notamment deux noyaux non résonnants, à cause de la définition (4)], les fonctions Ψ , donc les structures fines ϕ , ne sont pas a priori identiques, bien que les flux Φ le soient.

Equations de structure fine

Distinguons dans la somme au premier membre de (3) les deux types de noyaux et reprenons pour ceux qui sont résonnants l'approximation faite dans la théorie Livolant-Jeanpierre :

$$R_X \phi_X \approx \Psi_X R_X \phi_X \tag{6}$$

(cf. éq. (4) du chapitre VI) ; on obtient :

$$\sum_y P_{xy} \Psi_y \frac{R_y \phi_y}{\Sigma_y} + \sum_i P_{xi} \Psi_i = \Psi_X \phi_X \tag{7}$$

4. Y compris les noyaux situés dans les zones non résonnantes.

GENERALISATION DES EQUATIONS DE STRUCTURE FINE

Il est naturel de choisir des définitions telles qu'en dehors des résonances Ψ et Φ soient identiques, donc que ϕ vale 1, comme dans la théorie de Livolant et Jeanpierre. En dehors des résonances, la section efficace des noyaux résonnants se réduit à la section de diffusion potentielle et $R_y\phi_y/\Sigma_y = 1$; l'équation (7) s'écrit ainsi dans ce cas :

$$\sum_y P_{xy}\Psi_y + \sum_i P_{xi}\Psi_i = \Psi_x \quad (8)$$

Ces équations s'imposent donc pour définir, en dehors des résonances, les fonctions macroscopiques associées aux noyaux résonnants à partir de celles associées aux noyaux non résonnants définies par (4). Dans les résonances, il est naturel de conserver la même définition, donc d'utiliser (8) pour n'importe quelle léthargie. Nous montrerons ultérieurement que comme les Ψ_i définies par (4), les Ψ_x définies par (8) n'ont pratiquement pas de structure fine.

Si les fonctions macroscopiques sont supposées connues, les équations (7) donnent les structures fines. Nous utiliserons plutôt les différences entre les équations (7) et (8) de façon à faire disparaître la somme sur les noyaux non résonnants :

$$\sum_y P_{xy}\Psi_y\left(1 - \frac{R_y\phi_y}{\Sigma_y}\right) = \Psi_x(1 - \phi_x) \quad (9)$$

On remarquera que les relations de conservation n'ont pas été utilisées donc que ces équations sont valables même s'il y a des fuites de neutrons hors de "l'objet" considéré.

Situation fondamentale

Les équations (9) ne sont pas, à proprement parler des équations de structure fine puisque les fonctions macroscopiques y interviennent aussi. Pour obtenir une situation fondamentale (équations sans structures macroscopiques), une hypothèse supplémentaire est nécessaire : nous supposons l'égalité des flux macroscopiques relatifs aux noyaux résonnants. Ceux-ci se barrent alors dans (9), et l'on obtient :

$$\sum_y P_{xy}\left(1 - \frac{R_y\phi_y}{\Sigma_y}\right) = 1 - \phi_x \quad (10)$$

GENERALISATION DES EQUATIONS DE STRUCTURE FINE

Cette situation fondamentale généralise celle que nous avons décrite au chapitre VI : les structures fines sont les flux qu'on aurait dans le *problème P* suivant :

- Les propriétés des noyaux résonnants ne sont pas modifiées.
- Les noyaux non résonnants sont remplacés par des noyaux purement absorbants de mêmes sections efficaces totales ; des sources d'insensité égale à ces sections efficaces sont ajoutées.

Remarque : dans cette situation, on rétablit l'égalité des flux associés à deux noyaux situés dans la même zone.

Chapitre XII

GENERALISATION DE L'EQUIVALENCE

HETEROGENE-HOMOGENE

La forme que nous venons d'obtenir pour les équations de structure fine en situation fondamentale ne peut pas être considérée comme "définitive" en ce sens que les coefficients P_{xy} qui y apparaissent présentent certainement une structure fine très marquée au niveau des résonances. En suivant la démarche adoptée dans la théorie Livolant-Jeanpierre, nous allons tenter de présenter ces équations sous une autre forme où les coefficients auront de bien moindres variations ; si cet objectif est atteint, on pourra remplacer, sans commettre une erreur trop importante, ces coefficients par des constantes, ainsi que nous l'avons vu aux chapitres VIII et IX.

Dans ce chapitre (dont le titre anticipe aussi un peu les deux suivants), nous rechercherons la forme à donner aux équations de structure fine. Dans le suivant, nous discuterons du critère d'équivalence permettant de remplacer les fonctions à faibles variations par des constantes. Enfin, nous montrerons qu'on peut se ramener à des situations homogènes, ce qui réalisera l'objectif que nous nous sommes proposé.

Introduction des "probabilités" P^*

La forme des équations définissant les Ψ_x à partir des Ψ_j et des équations donnant les structures fines suggère l'introduction de nouvelles grandeurs associées aux probabilités de collision et que nous noterons P^* pour cette raison, bien qu'il ne s'agisse pas à proprement parler de probabilités ; elles seront définies par :

$$P^*_{lm} = P_{lm} + \sum_y P_{ly} P^*_{ym} \quad (1)$$

GENERALISATION DE L'EQUIVALENCE HETEROGENE-HOMOGENE

Ces quantités ont une interprétation physique simple : P^*_{lm} est le *taux de collision* sur le noyau m pour un neutron placé dans V_l dans le *problème Q* suivant qui présente une certaine analogie avec le problème **P** (voir le chapitre VI) :

- pour les noyaux résonnants l'absorption est remplacée par une diffusion ;
- pour les noyaux non résonnants la diffusion est remplacée par une absorption.

Les P^* vérifient un certain nombre de propriétés qu'il est utile de noter :

- Pour deux noyaux m et n placés dans la même zone :

$$P^*_{nl} = P^*_{ml} \quad P^*_{ln}/\Sigma_n = P^*_{lm}/\Sigma_m \quad (2a)$$

- On peut déplacer le signe * dans la somme au deuxième membre de (1) :

$$P^*_{lm} = P_{lm} + \sum_y P_{ly}P^*_{ym} = P_{lm} + \sum_y P^*_{ly}P_{ym} \quad (2b)$$

- On a la relation de réciprocité :

$$V_m \Sigma_m P^*_{ml} = V_l \Sigma_l P^*_{lm} \quad (2c)$$

- Si les relations de conservation sont vérifiées pour les **P** (problème sans fuite), elles le sont aussi pour les P^* :

$$\sum_i P^*_{li} = 1 \quad (2d)$$

(Noter que la somme est limitée aux seuls noyaux *non* résonnants, ceux qui absorbent les neutrons dans le problème **Q**.) Les P^*_{lm} sont réellement des probabilités (d'absorption) pour $m \neq x$.

Pour calculer les P^*_{lm} , il faut procéder par étapes successives :

- 1) En faisant $l = x$ et $m = y$ dans les équations (1), on obtient un système linéaire donnant les P^*_{xy} .
- 2) En faisant $l = i$ et $m = y$, on obtient les P^*_{iy} à partir des précédentes.

GENERALISATION DE L'EQUIVALENCE HETEROGENE-HOMOGENE

3) De même en faisant $l = x$ et $m = j$, on obtient les P^*_{xj} . [Mais il est plus simple de les déduire des P^*_{iy} par les relations de réciprocity (2b).]

4) Enfin en faisant $l = i$ et $m = j$, on obtient les P^*_{ij} à partir des P^*_{iy} ou des P^*_{xj} .

Nouvelle forme des équations

Grâce aux quantités P^* on peut :

- définir de façon explicite les Ψ_x à partir des Ψ_i (cf. éq. (8) du chapitre précédent) :

$$\Psi_x = \sum_i P^*_{xi} \Psi_i \quad (3)$$

- transformer les équations de structure fine (cf. éq. (9) du chapitre précédent) :

$$\sum_y P^*_{xy} \Psi_y \left(\varphi_y - \frac{R_y \varphi_y}{\Sigma_y} \right) = \Psi_x (1 - \varphi_x) \quad (4)$$

Pour la situation fondamentale, elles se réduisent à :

$$\sum_y P^*_{xy} \left(\varphi_y - \frac{R_y \varphi_y}{\Sigma_y} \right) = 1 - \varphi_x \quad (5)$$

Variante : matrice de couplage

Posons :

$$A_{xy} = \frac{P^*_{xy}}{\Sigma_y} \quad (6)$$

Ces éléments sont ceux qui couplent les équations de structure fine qu'on peut, en effet, récrire (par exemple en situation fondamentale) :

$$\sum_y A_{xy} (\Sigma_y \phi_y - R_y \phi_y) = 1 - \phi_x \quad (7)$$

La matrice A sera donc appelée "*matrice de couplage*". L'élément A_{xy} est le *flux* intégré sur V_y pour un neutron émis dans V_x dans le problème Q.

Les A_{xy} jouissent de propriétés qui se déduisent de celles concernant les P^*_{xy} :

- Calcul des A_{xy} :

$$A_{xy} = \frac{P_{xy}}{\Sigma_y} + \sum_z P_{xz} A_{zy} = \frac{P_{xy}}{\Sigma_y} + \sum_z A_{xz} \frac{\Sigma_z}{\Sigma_y} P_{zy} \quad (8a)$$

- Pour deux noyaux y et z dans la même zone :

$$A_{zx} = A_{yx} \quad A_{xz} = A_{xy} \quad (8b)$$

- Relations de réciprocité :

$$V_y A_{yx} = V_x A_{xy} \quad (8c)$$

Cette matrice généralise la notion de "section équivalente"

Un système d'équations tel que (7) régissant les structures fines ne peut être considéré comme une généralisation de l'équation obtenue par Livolant et Jeanpierre *que si* les coefficients qui y apparaissent peuvent être considérés comme constants ou presque constants en dépit des très importantes variations des sections efficaces des noyaux résonnants. Nous allons voir que c'est effectivement le cas.

Pour commencer, notons que dans le cas "*un noyau résonnant dans une zone combustible*" considéré par ces auteurs (voir le chapitre IX) le système (7) se réduit à l'équation qu'ils ont écrite [éq. (3) du chapitre IX]. En effet, pour un seul noyau résonnant (indice 0), l'équation (8a) donne :

$$A_{00} = \frac{P_{00}}{\Sigma_0(1 - P_{00})}$$

et le système (7) :

$$A_{00}(\bar{\Sigma}_0\phi_0 - R_0\phi_0) = 1 - \phi_0$$

On reconnaît les expressions (3) et (5) du chapitre IX avec :

$$\Sigma_e = N_0\sigma_e = 1/A_{00} \quad (9)$$

Dans le cas général, les éléments de la matrice de couplage restent des fonctions variant peu en léthargie. Nous pouvons d'abord le constater de façon intuitive, puis nous le montrerons à partir d'une expression approximative de ces coefficients.

• **Justification physique**

Rappelons que, dans le cadre du problème \mathcal{Q} , A_{xy} est le flux dans le volume V_y pour un neutron émis dans le volume V_x .

Si, dans ce problème, on avait supprimé les noyaux résonnants, ces flux seraient évidemment sans structure fine. En fait, on a considéré que toute réaction de neutron sur ces noyaux était une diffusion : la *trajectoire* des neutrons concernés est modifiée – au lieu de poursuivre une ligne droite, ces neutrons sont réémis de façon isotrope – mais leur *nombre* n'est pas modifié ; on peut penser que cela n'aura pas une très grande influence sur les flux obtenus. (A titre de comparaison, rappelons que dans les cas usuels, l'anisotropie des diffusions a une influence presque négligeable sur les calculs de flux et de taux de réaction.)

• **Justification mathématique**

Notons déjà que les relations (8) permettent d'indicer les éléments de la matrice A non pas avec les numéros $x, y, z \dots$ des *noyaux* résonnants mais avec les numéros $\alpha, \beta, \gamma \dots$ des *zones* résonnantes, c'est-à-dire des zones d'espace où ils se trouvent. En notations matricielles, la première des équations (8a) peut s'écrire :

$$A\bar{\Sigma} = P + P_0A\bar{\Sigma} \quad (10)$$

avec :

A : matrice d'éléments $A_{\alpha\beta}$;

$\bar{\Sigma}$: matrice diagonale d'éléments $\bar{\Sigma}_\alpha$, section efficace totale en zone α ;

GENERALISATION DE L'EQUIVALENCE HETEROGENE-HOMOGENE

P : matrice d'éléments $P_{\alpha\beta}$, probabilité (dans le problème réel) pour un neutron émis dans la zone α de subir sa première collision dans la zone β ;

ρ : matrice diagonale d'éléments $\rho_{\alpha} = \Sigma_{r,\alpha}/\Sigma_{\alpha}$, probabilité qu'un choc en zone α ait lieu sur un noyau résonnant (nous poserons : $\Sigma_{\alpha} = \Sigma_{r,\alpha} + \Sigma'_{\alpha}$, le premier terme concernant les noyaux résonnants et le deuxième les diluants, noyaux non résonnants).

N.B. : les zones *non* résonnantes n'interviennent pas directement dans le calcul de la matrice \hat{A} ; elles ne jouent un rôle que sur les probabilités P .

Admettons l'hypothèse d'isotropie des neutrons aux surfaces des zones résonnantes.

Elle permet d'écrire :

$$P = P^+ + (1-P^+) \{1 - C[1 - \omega(1 - P^+)]\}^{-1} C \omega (1-P^+) \quad (11)$$

avec :

P^+ : matrice diagonale d'éléments $P^+_{\alpha\alpha}$ probabilité de première collision sans sortie de la zone d'émission ;

C : matrice de Dancoff d'éléments $C_{\alpha\beta}$, probabilité qu'un neutron émergent d'une zone résonnante atteigne sans choc la surface d'une autre zone résonnante sans traverser une zone résonnante ; remarque : si la zone α n'est pas connexe, la probabilité $C_{\alpha\alpha}$ n'est pas nulle ;

ω : matrice diagonale d'éléments $\omega_{\alpha} = \ell_{\alpha}\Sigma_{\alpha}$, opacité de la zone α (ℓ désigne la corde moyenne) ;

En reportant (11) dans (10), on établit que :

$$(1 + Q\Sigma')A = Q \quad (12)$$

avec :

$$(1 - C)(Q - Q^+) = C\ell \quad (13)$$

et :

$$Q^+_{\alpha\alpha} = \frac{P^+_{\alpha\alpha}}{\Sigma_{\alpha}(1 - P^+_{\alpha\alpha})} = \frac{\ell_{\alpha}}{b_{\alpha}} \quad (14)$$

Les éléments de la matrice diagonale Q^+ sont les inverses des sections équivalentes macroscopiques des zones résonnantes (isolées) ; les b_α sont les facteurs de Bell de ces zones. La matrice Q est la solution de l'équation :

$$Q\Sigma = P + PQ\Sigma \quad (15)$$

C'est l'analogie de la matrice A dans le problème Q' où :

- dans les zones résonnantes, l'absorption est remplacée par une diffusion ;
- dans les zones non résonnantes, la diffusion est remplacée par une absorption.

Ce problème est similaire au problème Q pour lequel il faut remplacer le mot "zones" par "noyaux" ; ces problèmes diffèrent donc par le traitement des noyaux diluants dans les zones résonnantes.

Nous avons constaté au chapitre VIII que les sections équivalentes des zones résonnantes isolées (inverses des Q^+) pouvaient raisonnablement être assimilées à des constantes, éventuellement caractérisées par des facteurs de Bell b . Comme la matrice C des facteurs Dancoff est une constante, on voit par (13) puis (12) que, comme celles des Q^+_α , les variations des éléments des matrices Q et A sont peu importantes (sous réserve de la validité de l'hypothèse qui a été faite d'isotropie aux surfaces des zones résonnantes).

Justification du choix des structures macroscopiques

Rappelons que nous avons défini par l'équation (3) les structures macroscopiques Ψ_X associées aux noyaux résonnants à partir des Ψ_j associées aux noyaux non résonnants (voir l'éq. (4) du chapitre XI). Ces dernières sont sans structure fine au cause du lissage opéré par les opérateurs de ralentissement des noyaux non résonnants. Nous avons admis au chapitre précédent que les Ψ_X étaient également sans structure fine : cela reste à justifier.

En reprenant l'équation (3), nous avons :

$$\Psi_X = \sum_i A_{Xj} C_j \Psi_j \quad (16)$$

GENERALISATION DE L'EQUIVALENCE HETEROGENE-HOMOGENE

- Si i se trouve dans une zone résonnante, $A_{\chi i}$ s'écrit $A_{\alpha\beta}$ qui, nous venons de le voir, varie peu.
- Sinon, on peut calculer ces grandeurs en utilisant l'équation (2b) et l'hypothèse d'isotropie aux surfaces des zones résonnantes ; on obtient :

$$(1 + Q\Sigma')V = W \quad (17)$$

avec :

$$(1 - C)W = D$$

où V est le vecteur de composantes $A_{\alpha i}\Sigma_i$ (i fixé), W le vecteur analogue dans le problème Q' et D le vecteur dont les composantes sont les probabilités pour un neutron émergent de la zone α de subir sa première collision sur i sans retraverser une zone résonnante, probabilités qui sont des constantes. Cette équation (17) montre donc que, dans ce cas également, les $A_{\alpha i}$ varient peu. En définitive, l'hypothèse d'une faible variation des Ψ_{χ} était par conséquent effectivement licite.

Chapitre XIII

VALEUR MOYENNE DE LA MATRICE DE COUPLAGE

Nous venons de montrer que la matrice de couplage A des équations de structure fine variait peu en fonction des sections efficaces des noyaux résonnants, donc de la léthargie. Mais pour généraliser ce qui est fait dans la procédure de Livolant et Jeanpierre, il faut approximer cette matrice par une matrice rigoureusement constante. Se pose donc le problème de la moyenne.

Nous avons vu (au chapitre VIII) que le critère utilisé devait être le respect du taux d'absorption résonnante ; mais comme on veut éviter de faire un calcul exact, ce critère est mis en oeuvre en utilisant une *approximation des opérateurs de ralentissement par les noyaux résonnants*. Dans *APOLLO 1* on a choisi l'approximation "résonance étroite" et on fait l'équivalence sur tout le domaine d'énergie ; mais il ne serait guère plus difficile de mettre en oeuvre une autre approximation (voir le chapitre VII) et de distinguer plusieurs domaines d'énergie, donc d'avoir des facteurs de Bell par macrogroupes.

Forme pratique des équations de structure fine

Avant d'aborder ce problème de moyenne, nous récrivons les équations de structure fine sous la forme par laquelle il faudrait les traiter en pratique. Dans le formalisme général que nous avons adopté jusqu'ici, nous avons désigné par les indices $x, y \dots$ les *situations* résonnantes – une telle situation étant définie par la présence d'un noyau résonnant d'un certain type (uranium 238, plutonium 240, etc.) dans une certaine zone d'espace dite "zone résonnante". Mais l'ensemble de dimension X des situations fait intervenir, en général, un nombre plus faible de types de noyaux et un nombre plus faible de zones résonnantes. Cela devra être pris en compte en pratique pour ne pas multiplier les jeux de sections efficaces résonnantes (ce sont les mêmes pour un même noyau dans différentes zones) ni les flux (qui sont les mêmes pour différents noyaux dans une même zone).

Nous repèrerons (comme au chapitre précédent) par les indices $\alpha, \beta \dots$ les zones résonnantes, et par les indices S, τ, \dots les types de noyaux résonnants. Nous

VALEUR MOYENNE DE LA MATRICE DE COUPLAGE

désignerons par $N_{S,\alpha}$ la concentration du noyau de type S dans la zone α . (Bien évidemment, si cette concentration est nulle, c'est une situation qui n'apparaît pas dans l'ensemble X .)

Dans ces conditions la première forme des équations de structure fine (équation (10) du chapitre XI) s'explique par :

$$\sum_{S, \beta} P_{\alpha\beta} \frac{N_{S\beta}}{\Sigma_{\beta}} (\sigma_S - r_S \varphi_{\beta}) = 1 - \varphi_{\alpha} \quad (1)$$

et la deuxième forme (équation (7) du chapitre XII) par :

$$\sum_{S, \beta} A_{\alpha\beta} N_{S\beta} (\sigma_S \varphi_{\beta} - r_S \varphi_{\beta}) = 1 - \varphi_{\alpha} \quad (2)$$

Equations d'équivalence

Dans la théorie de Livolant et Jeanpierre, l'équation d'équivalence définit – dans le cadre d'une approximation donnée des opérateurs de ralentissement – une valeur "moyenne" de la section équivalente (voir le chapitre VIII). Mais comme la section équivalente est une fonction de la seule section efficace *totale* du noyau résonnant, cela revient à dire que cette équation d'équivalence définit une valeur moyenne $\langle \sigma_0 \rangle$ de cette section efficace. On pourra s'en persuader en réécrivant l'équation (11) du chapitre VIII en explicitant σ_e :

$$\int \sigma_{a,0} \left(1 - \frac{p_0}{\sigma_0}\right) P_{00}(\sigma_0) du = \int \sigma_{a,0} \left(1 - \frac{p_0}{\langle \sigma_0 \rangle}\right) P_{00}(\langle \sigma_0 \rangle) du \quad (3)$$

ou forme similaire en explicitant les intégrales par la technique de Lebesgue.

On peut généraliser ces considérations en recherchant X valeurs $\langle \sigma_{S\alpha} \rangle$ des sections efficaces totales des noyaux résonnants dans les zones où ils existent.

- Une des approximations usuelles des opérateurs de ralentissement des noyaux résonnants permet de calculer les flux de structure fine : il vaut mieux utiliser la forme (1) des équations que la forme (2) parce que cela évite le calcul intermédiaire des A. En outre,

VALEUR MOYENNE DE LA MATRICE DE COUPLAGE

ces équations donnent explicitement les structures fines en hypothèse "résonance étroite" : $r\varphi \simeq \rho$. (En hypothèses "résonance large" ou "résonance intermédiaire" il y aura une inversion de système linéaire à faire.)

- L'égalité des taux d'absorption résonnante – dans le cadre de l'hypothèse choisie – fournit les équations permettant d'obtenir les $\langle \sigma_{S\alpha} \rangle$:

$$\int \sigma_{a, S} \varphi_{\alpha}(\sigma) du = \int \sigma_{a, S} \varphi_{\alpha}(\langle \sigma \rangle) du \quad (4)$$

où σ et $\langle \sigma \rangle$ désignent respectivement les X sections efficaces totales réelles et moyennes des noyaux résonnants.

Par exemple, en hypothèse résonance étroite, cela s'explique par :

$$\int \sum_{S, \beta} \sigma_{a, S} P_{\alpha\beta}(\sigma) \frac{N_{S\beta}}{\Sigma_{\beta}} (\sigma_S - \rho_S) du = \int \sum_{S, \beta} \sigma_{a, S} P_{\alpha\beta}(\langle \sigma \rangle) \frac{N_{S\beta}}{\langle \Sigma_{\beta} \rangle} (\langle \sigma_S \rangle - \rho_S) du \quad (5)$$

Il s'agit, comme d'ailleurs dans le cas à un seul noyau résonnant, d'équations implicites pour les inconnues $\langle \sigma_{S\alpha} \rangle$: c'est dire que la résolution devra être faite par itérations. On peut encore utiliser la technique de Lebesgue avec des tables de probabilité $\pi(\sigma_S) d\sigma_S$ pour *chaque* noyau résonnant à condition de faire une approximation : remplacer dans les intégrales au premier membre les sections efficaces des noyaux résonnants autres que S par leurs valeurs moyennes (ou leurs approximations au point où l'on est dans les itérations). Sinon, il faudrait introduire des tables de probabilité à plusieurs variables $\pi(\sigma_S; \sigma_t, \dots) d\sigma_S d\sigma_t \dots$ tenant compte des corrélations entre les structures de sections efficaces des différents noyaux résonnants.

Procédure simplifiée¹

Dans la mise en oeuvre d'une telle procédure, il est clair que la plus grosse partie du temps de calcul sera consacrée à la détermination des probabilités de collision. C'est pourquoi il peut être intéressant de simplifier cet aspect.

L'équation (13) du chapitre précédent montre que les éléments de la matrice Q sont des fonctions linéaires des Q^+ sous réserve de la validité de l'hypothèse d'isotropie aux surfaces des zones résonnantes ; l'équation (12) montre que les éléments de la matrice A sont peu différents de ceux de la matrice Q si les sections efficaces Σ' des corps diluant les noyaux résonnants dans les zones résonnantes sont faibles. En admettant la linéarité – ou, plus généralement, en supposant qu'on peut assimiler la moyenne d'un produit ou d'un quotient au produit ou au quotient des moyennes – on peut remplacer le problème de la recherche de la moyenne de A par celle de Q^+ .

Sans modifier le nombre d'inconnues à rechercher, cela simplifie considérablement les équations : la somme sur β disparaît des équations (5) et les probabilités $P_{\alpha\beta}$ sont remplacées par $P^+_{\alpha\alpha}$ qui sont tout à fait élémentaires puisque relatives à une zone isolée de son environnement.

1. Cette procédure peut s'appliquer et pourrait s'avérer intéressante même dans le cas actuellement traité par *APOLLO 1* d'un seul noyau résonnant.

Chapitre XIV

DIAGONALISATION DES EQUATIONS DE STRUCTURE FINE

Comme nous l'avons annoncé, la dernière étape de la généralisation de l'équivalence hétérogène-homogène sera le découplage des équations de structure fine ou diagonalisation du système, de façon à obtenir des équations ne contenant chacune qu'une seule fonction inconnue. Ces équations pourront être interprétées comme relatives à des mélanges homogènes des noyaux résonnants considérés. (Nous examinerons au chapitre suivant ce dernier problème qui est celui de la tabulation des taux de réactions effectifs dans un mélange de noyaux résonnants.)

Condition d'une diagonalisation exacte

Partons de la forme des équations de structure fine que nous avons introduite au chapitre précédent :

$$\sum_{S, \beta} A_{\alpha\beta} N_{S\beta} (\sigma_S - r_S) \varphi_\beta = 1 - \varphi_\alpha \quad (1)$$

où nous considérons maintenant les $A_{\alpha\beta}$ comme des *constantes*.

Diagonaliser veut dire remplacer les fonctions inconnues φ_α par des combinaisons linéaires φ_m de façon à se ramener à un système où chaque équation régit une seule de ces fonctions. Ces dernières équations doivent être du même type que (1) et peuvent s'interpréter comme relatives à des mélanges homogènes, numérotés par un indice m , des noyaux résonnants en concentrations N_{Sm} et d'un diluant de section efficace macroscopique $1/A_m$:

$$\sum_S A_m N_{Sm} (\sigma_S - r_S) \varphi_m = 1 - \varphi_m \quad (2)$$

La recherche d'une diagonalisation peut se faire indifféremment soit en exprimant les φ_α sous forme d'une combinaison linéaire des φ_m , soit l'inverse. Adoptons, par exemple, le premier choix avec des coefficients numériques $\pi_{\alpha m}$:

$$\varphi_\alpha = \sum_m \pi_{\alpha m} \varphi_m \quad (3)$$

En portant dans (1) et en utilisant la linéarité, il vient :

$$\sum_{m, s} (\sigma_s - r_s) \sum_\beta A_{\alpha\beta} N_{S\beta} \pi_{\beta m} \varphi_m = 1 - \sum_m \pi_{\alpha m} \varphi_m \quad (4)$$

Cette dernière équation est une somme pondérée par les $\pi_{\alpha m}$ des équations (2) à deux conditions :

- $$\sum_m \pi_{\alpha m} = 1 \quad (5)$$

- $$\sum_m A_{\alpha\beta} N_{S\beta} \pi_{\beta m} = A_m N_{Sm} \pi_{\alpha m} \quad (6)$$

La deuxième condition montre que $\pi_{\alpha m}$ doit être la composante α du $m^{\text{ième}}$ vecteur propre de la matrice d'éléments $A_{\alpha\beta} N_{S\beta}$. Cette condition ne peut être vérifiée que si les matrices associées aux différents noyaux résonnants S sont *proportionnelles*, donc si $N_{S\beta}$ est factorisé :

$$N_{S\beta} = W_S N''_\beta \quad (7)$$

La *quantité* de matière résonnante, caractérisée¹ par Σ''_β , peut différer d'une zone à l'autre, mais sa *ventilation* selon les noyaux résonnants, caractérisée par les W_S , doit être la même. Dans ce cas, on voit immédiatement par identification que :

1. Nous avons adopté le ¹ pour caractériser, dans une zone, les noyaux non résonnants ; le ^{''} désignera donc les noyaux résonnants.

$$N_{Sm} = W_S ; A_m = \lambda_m \quad (8)$$

λ_m étant la $m^{\text{ième}}$ valeur propre de la matrice $A_{\alpha\beta} N''_{\beta}$.

La première condition (5) permet de définir la normalisation des vecteurs propres (il faut inverser un système linéaire pour déduire de ces équations les facteurs de normalisation).

On notera que lorsqu'il n'y a qu'un seul noyau résonnant cette procédure de diagonalisation permet de faire un calcul à peine plus compliqué que la procédure "P_{IC}" (chapitre X) et qui a l'avantage d'être exact.

Etude des valeurs propres et interprétation des éléments propres

La méthode de diagonalisation n'a d'intérêt que si les compositions des milieux homogènes, donc les valeurs propres de la matrice AN'' , sont réelles. Cela peut effectivement se montrer.

Les éléments de la matrice A vérifient la relation de réciprocité (voir l'éq. (8c) du ch. XII) :

$$V_{\beta} A_{\beta\alpha} = V_{\alpha} A_{\alpha\beta} \quad (9)$$

donc la matrice b d'éléments :

$$b_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{V_{\alpha} N''_{\alpha}} A_{\alpha\beta} N''_{\beta}}{\sqrt{V_{\beta} N''_{\beta}}} \quad (10)$$

est symétrique : ses valeurs propres μ sont réelles. On constate immédiatement que :

$$\lambda = \mu \quad \pi_{\alpha} = v_{\alpha} \sqrt{V_{\alpha} N''_{\alpha}} \quad (11)$$

en désignant par v un vecteur propre de b . Les valeurs propres de AN'' sont donc effectivement réelles.

Les éléments de la matrice A (ne dépendant en fait que des numéros α et β des zones résonnantes) sont définis par les équations (8a) du chapitre XII que nous pouvons ré-écrire sous forme matricielle :

$$A = P/\square + P\square''/\square.A \quad (12)$$

DIAGONALISATION DES EQUATIONS DE STRUCTURE FINE

où P est la matrice des probabilités de première collision, Σ et Σ'' les matrices diagonales dont les éléments sont respectivement les sections efficaces macroscopiques totales par zones de tous les noyaux et des seuls noyaux résonnants.

Les valeurs propres λ et les vecteurs propres π de AN'' sont donc donnés par :

$$\pi = P \frac{\Sigma''}{\Sigma} \left[1 + \frac{N''}{\lambda \Sigma''} \right] \pi \quad (13)$$

Les éléments d'un vecteur propre π sont les *taux de collision par zone sur les noyaux résonnants*-dans le problème **R** suivant, *critique et monocinétique* :

- pour les *noyaux résonnants*,

$$c = 1 + N'' / (\lambda \Sigma'') = 1 + 1 / (\lambda \sigma'') \quad (14)$$

neutrons secondaires sont ré-émis en moyenne après une collision (σ'' est la section efficace microscopique totale du mélange résonnant) ;

- Pour les *noyaux non résonnants*, la diffusion est remplacée par une absorption.

Le problème **R** ne diffère du problème **Q** que par l'ajout d'un deuxième terme $1 / (\lambda \sigma'')$ au nombre de secondaires par choc sur un noyau résonnant.

Remarque : A a la dimension d'une longueur (ou de l'inverse d'une section efficace macroscopique), comme le montre l'équation (12) ; AN'' et λ ont la dimension de l'inverse d'une section efficace microscopique ; C est donc un nombre sans dimension.

Diagonalisation dans le cas général

Pour le cas de compositions quelconques des zones résonnantes, une diagonalisation rigoureuse ne paraît pas possible bien que l'intuition suggérerait le contraire².

2. J'ai longuement discuté de ce problème avec R. Sanchez : la condition (6) d'une diagonalisation exacte (dans l'hypothèse d'une matrice A constante) montre clairement qu'elle n'est pas possible si les compositions sont différentes puisqu'elle nécessite un jeu *unique* de vecteurs propres.

DIAGONALISATION DES EQUATIONS DE STRUCTURE FINE

La diagonalisation dans le cas général ne peut donc être faite que si une approximation supplémentaire est introduite : nous allons généraliser l'approximation dite P_{ic} qui a été discutée au chapitre X dans le cas d'un seul noyau résonnant.

Reprenons les équations de structure fine sous leur *première* forme [chapitre XI, équation (10)] en distinguant zones et noyaux résonnants :

$$\sum_{S, \beta} P_{\alpha\beta} \frac{N_{S\beta}}{\Sigma_{\beta}} (\sigma_S - r_S \phi_{\beta}) = 1 - \phi_{\alpha} \quad (15)$$

L'approximation P_{ic} consiste à supposer que l'action $r_S \phi_{\beta}$ des opérateurs de ralentissement par les noyaux résonnants sur les flux de structure fine est *indépendante de la zone β* , ce qui n'est en fait exact qu'en hypothèse "résonance étroite" où $r_S \phi_{\beta} = \sigma_{p, S}$.

Si nous remplaçons donc au premier membre de (15) $r_S \phi_{\beta}$ par $r_S \phi_{\alpha}$ les équations seront directement diagonalisées, puisque seul la fonction inconnue ϕ_{α} apparaîtra dans l'équation de numéro α . Il nous faut seulement la mettre sous la forme d'une équation relative à un mélange homogène.

Désignons par :

$$P_{\alpha S} = \sum_{\beta} P_{\alpha\beta} \frac{N_{S\beta} \sigma_S}{\Sigma_{\beta}} \quad (16)$$

la probabilité qu'un neutron émis dans la zone α subisse sa première collision sur un noyau S placé *n'importe où* ; il vient :

$$\sum_S P_{\alpha S} \left(1 - \frac{r_S \phi_{\alpha}}{\sigma_S} \right) = 1 - \phi_{\alpha} \quad (17)$$

Il s'agit d'une équation homogène si on peut la mettre sous la forme :

$$\sum_S \bar{w}_{S\alpha} r_S \phi_{\alpha} + r_{e\alpha} = \left(\sum_S \bar{w}_{S\alpha} \sigma_S + \sigma_{e\alpha} \right) \phi_{\alpha} \quad (18)$$

DIAGONALISATION DES EQUATIONS DE STRUCTURE FINE

où les $\bar{\omega}_{S\alpha}$ (ventilation des noyaux résonnants dans ce mélange) et $\sigma_{e\alpha}$ (section équivalente des matériaux les diluant) peuvent "raisonnablement" être assimilés à des constantes. La comparaison de ces équations montre qu'il faut définir ces grandeurs par :

$$\bar{\omega}_{S\alpha} = F \cdot P_{\alpha S} / \sigma_S \qquad \sigma_{e\alpha} = F \cdot \left(1 - \sum_S P_{\alpha S} \right)$$

où F est un facteur à choisir. Deux possibilités simples apparaissent :

a) Soit on adopte une valeur rigoureusement constante pour la section équivalente $\sigma_{e\alpha}$ [la valeur de cette constante n'a pas d'importance comme le montre l'équation (18)] et on définit les concentrations par :

$$\bar{\omega}_{S\alpha} = \sigma_{e\alpha} \cdot \frac{P_{\alpha S} / \sigma_S}{1 - \sum_S P_{\alpha S}} \qquad (19a)$$

b) Soit on adopte une valeur rigoureusement constante pour la somme des concentrations $\bar{\omega}_{S\alpha}$ (même remarque ; mais il est logique de prendre une somme égale à un) et l'on définit la section équivalente par :

$$\sigma_{e\alpha} = \frac{1 - \sum_S P_{\alpha S}}{\sum_S P_{\alpha S} / \sigma_S} \qquad (19b)$$

Quel que soit le choix – il est vraisemblablement assez indifférent – il faudra évidemment remplacer les fonctions au deuxième membre par des constantes équivalentes en mettant en oeuvre la procédure introduite au chapitre VIII et reprise au chapitre XIII : l'expérience montre qu'avec un seul noyau résonnant les variations de ces fonctions sont limitées et donc qu'une équivalence hétérogène-homogène est possible ; le fait qu'il y ait plusieurs noyaux résonnants ne devrait pas changer cette conclusion puisque les formules restent tout à fait similaires.

Chapitre XV

GENERALISATION DES TABULATIONS

Les généralisations de la théorie de Livolant et Jeanpierre qui ont occupé les chapitres XI à XIV ont permis de ramener – comme dans le cas traité par ces auteurs – un problème quelconque à un problème homogène (ou, plus précisément à un ensemble de problèmes homogènes). Mais naturellement ces problèmes ne concernent plus *un* noyau résonnant en situation fondamentale mais un *ensemble* de noyaux résonnants, tous ceux qui interviennent dans la situation physique considérée. Le problème homogène lui-même doit donc aussi être généralisé.

Pour simplifier les notations, nous récrivons l'équation (3) du chapitre précédent relative à un milieu homogène en omettant l'indice m de ce milieu :

$$\sum_S N_S (\sigma_S \phi - r_S \phi) = 1 - \phi \quad (1)$$

Bien entendu, on peut, comme on le fait actuellement pour *APOLLO I*, résoudre une fois pour toutes cette équation pour quelques valeurs des paramètres constants qui y interviennent¹, puis stocker ces résultats pour les utiliser ensuite dans les cas à traiter en procédant par interpolation dans les tabulations.

Concrètement cela risque cependant d'être assez lourd : si l'on a n noyaux et k valeurs de concentration pour chacun, cela fait k^n résolutions de (1) à effectuer², soit, par exemple, dix milliards si $k = 10$ et $n = 10$!

1. Ce sont ici les N_S qui jouent exactement le même rôle que la section équivalente σ_e dans la formulation classique : pour un seul noyau résonnant, on a $\sigma_e = 1/N$.

2. Au lieu de k^n dans la procédure "un par un" actuelle où, en outre, les équations ne font intervenir qu'un seul opérateur de ralentissement au lieu de n .

Il paraît donc indispensable de chercher à simplifier cette phase des calculs quitte à perdre un peu en précision. Deux techniques possibles pourraient être explorées³.

Factorisation des taux de réaction effectifs

Rappelons que ce ne sont pas les structures fines elles-mêmes qui sont stockées dans les tables mais les taux de réactions effectifs τ , intégrales par groupes d'énergie des taux de réaction calculés avec φ (voir l'équation (8) du chapitre VI).

Considérons un tel taux de réaction relatif au noyau S ; dans le milieu, celui-ci se trouve mélangé avec d'autres noyaux t, u, v, \dots : cela va nécessairement affecter la solution φ de (1) donc τ_S , mais seulement dans la mesure où les résonances de ces différents noyaux se recouvrent partiellement. On peut supposer que ces effets d'interférence ne sont pas corrélés entre eux, autrement dit que l'effet sur τ_S de la présence du noyau t ne dépend pas de celle du noyau u , etc⁴. Si l'on caractérise un effet d'interférence par un facteur multiplicatif f , cette hypothèse conduit à une formule factorisée :

$$\tau_S^{t+u+v+\dots} \approx \tau_S^0 \cdot f_S^t \cdot f_S^u \cdot f_S^v \dots \quad (2)$$

- $\tau_S^{t+u+v+\dots}$ est le taux de réaction effectif du noyau S (pour une réaction donnée sous-entendue) en présence des autres noyaux ;
- τ_S^0 est le taux de réaction de S en l'absence des autres noyaux résonnants (ou, plus précisément, en l'absence des résonances des autres noyaux, c'est-à-dire en prenant $r\varphi = \rho$ pour ces derniers) ;
- f_S^t est calculé comme le quotient τ_S^t / τ_S^0 où τ_S^t est calculé en l'absence des noyaux autres que S et t (même remarque).

3. A l'heure où est écrit ce document seuls quelques tests préliminaires – mais prometteurs, à peu près au même titre pour l'une ou l'autre des voies proposées – ont été faits.

4. Si cette approximation peut être admise pour des noyaux physiquement différents, elle ne peut certainement pas l'être lorsqu'il s'agit d'un même noyau à des températures différentes : les résonances ne sont pas alors élargies pareillement mais sont aux mêmes positions, donc certainement très corrélées.

On voit que cette approximation réduit l'étude à des mélanges de *deux* noyaux résonnants. La tabulation elle-même pourrait peut-être aussi être simplifiée en s'inspirant des formes que prennent les facteurs d'interférence f lorsqu'on approxime les opérateurs de ralentissement.

Calcul direct des effets d'interférence avec approximation des opérateurs de ralentissement⁵

Le plus simple dans la voie d'une approximation des opérateurs de ralentissement consiste sans doute à renoncer à tabuler les effets d'interférence pour les calculer au moment où l'on en a besoin, c'est-à-dire lorsqu'on traite un cas donné.

Cette idée revient à écrire :

$$\tau_S^{t+u+v+\dots} \approx \tau_S^0 \cdot F_S^{t+u+v+\dots} \quad (3)$$

où le facteur d'interférence F est le rapport $\tau_S^{t+u+v+\dots} / \tau_S^0$ calculé en faisant une *approximation sur les opérateurs de ralentissement* (hypothèse résonance étroite, large⁶, voire intermédiaire). Cela suppose, bien entendu qu'on manipule au moment du traitement du cas considéré des données nucléaires fines (où les résonances sont suffisamment bien décrites) et non multigroupes.

*
* *

Disons, en conclusion, que ce problème de tabulation mérite d'être davantage réfléchi en termes de volume de calcul et d'informations à manipuler, et bien entendu en termes de précision.

5. Méthode proposée par Williams.

6. Williams préconise cette hypothèse.

Chapitre XVI

CALCUL DES FLUX MACROSCOPIQUES

Pour terminer le calcul d'un cas réel, l'équivalence *multigroupe-continu* telle qu'elle est faite actuellement peut être reprise dans son principe : une fois qu'on a obtenu, sur le problème **P**, les taux de réaction effectifs considérés comme exacts, on recherche les sections efficaces multigroupes conduisant aux *mêmes* taux de réaction sur ce problème. A ce niveau, les équations (implicites) qui fournissent ces sections efficaces multigroupes sont évidemment d'autant plus complexes que le problème considéré est lui-même complexe.

Il ne reste ensuite qu'à traiter le problème réel en théorie multigroupe.

Une alternative à cette approche – non mise en oeuvre actuellement – serait le calcul non pas des flux réels Φ (en théorie multigroupe) mais celui des flux macroscopiques Ψ . En les multipliant ensuite par les taux de réactions effectifs, on obtiendrait également de cette façon les taux de réaction du problème réel, sans passer par l'équivalence multigroupe-continu.

L'idée de calculer Ψ plutôt que Φ , outre l'intérêt d'éviter donc une étape de calcul qui risque d'être assez lourde, est naturelle dans le cadre de la théorie de Livolant et Jeanpierre, puisque le point de départ est une factorisation $\Phi = \phi\Psi$ du flux. Notons de plus que cela conduirait à des flux *réels* (simples moyennes par groupes), alors qu'après l'équivalence multigroupe-continu, plus aucune interprétation simple des flux et sections efficaces multigroupes n'est possible, seuls leurs produits (taux de réaction) étant conservés.

C'est ce point que nous proposons d'examiner dans le dernier chapitre de cette partie. Pour établir un jeu d'équations régissant les flux macroscopiques, il faut bien entendu partir des équations régissant les flux réels. Ces derniers sont donnés par le bilan neutronique en espace et en énergie (équations (3) du chapitre XI) ; en y distinguant les

CALCUL DES FLUX MACROSCOPIQUES

deux types de noyaux et en y introduisant les flux macroscopiques, ces équations s'écrivent :

$$\sum_y P_{xy} \frac{R_y \phi_y}{\Sigma_y} + \sum_j P_{xj} \psi_j = \phi_x \quad (1)$$
$$\sum_y P_{iy} \frac{R_y \phi_y}{\Sigma_y} + \sum_j P_{ij} \psi_j = \phi_i$$

- Les indices x et y désignent des situations résonnantes (noyau résonnant d'un type donné dans une zone donnée).
- Les indices i et j désignent des situations non résonnantes (noyau non résonnant d'un type donné dans une zone donnée).

Rappelons que nous avons défini les flux macroscopiques associés aux situations non résonnantes par :

$$\psi_i = R_i \phi_i / \Sigma_i \quad (2)$$

et ceux associés aux noyaux résonnants par :

$$\sum_y P_{xy} \psi_y + \sum_i P_{xi} \psi_i = \psi_x \quad (3)$$

Notre objectif sera de mettre ces équations sous une forme permettant un calcul pratique, d'une part en utilisant les considérations précédentes que nous avons faites sur les structures fines, d'autre part en cherchant à nous ramener à des fonctions n'ayant qu'une détermination par zone physique (ce qui n'est pas pas le cas des fonctions ψ qui peuvent différer – légèrement – pour différents noyaux dans une même zone).

Introduction des "probabilités" P^*

L'introduction des P^* qui s'est avérée fructueuse pour l'étude des équations de structure fine (chapitre XII), peut nous permettre également de transformer les équations (1).

CALCUL DES FLUX MACROSCOPIQUES

Multiplions la première par P^*_{ix} , sommons sur x et utilisons la définition des P^* (cf. l'équation (1) du chapitre XII) ; il vient :

$$\sum_y (P^*_{iy} - P_{iy}) \frac{R_y \phi_y}{\Sigma_y} + \sum_j (P^*_{ij} - P_{ij}) \psi_j = \sum_x P^*_{ix} \phi_x$$

Ajoutons la deuxième équation du système (1) et regroupons les termes en distinguant les deux classes de noyaux :

$$\sum_j P^*_{ij} \psi_j - \phi_i = \sum_x P^*_{ix} \left(\phi_x - \frac{R_x \phi_x}{\Sigma_x} \right) \quad (4)$$

Introduction de nouvelles fonctions macroscopiques

La première somme de cette équation suggère de poser :

$$U_l = \sum_j P^*_{lj} \psi_j \quad (5)$$

où l'indice l désignera une situation de n'importe quel type.

Cette définition présente deux intérêts a priori :

- Ces nouvelles fonctions macroscopiques ont une valeur *unique* par zone d'espace.
- Pour les noyaux résonnants (donc pour les zones résonnantes, en vertu du point précédent), elles sont identiques aux flux macroscopiques qui leur sont associés :

$$U_x \equiv \psi_x \quad (6)$$

puisque pour $l = x$ la définition (5) est une forme équivalente à (3) de la définition des ψ_x (cf. l'équation (3) du chapitre XII).

L'introduction de (5) dans (4) conduit à :

CALCUL DES FLUX MACROSCOPIQUES

$$U_i - \phi_i = \sum_x P^*_{ix} \left(\phi_x - \frac{R_x \phi_x}{\Sigma_x} \right) \quad (7)$$

On peut faire disparaître ϕ_j en appliquant l'opérateur R_j à cette équation :

$$R_j U_i - \Sigma_j \psi_j = R_j \left[\sum_x P^*_{ix} \left(\phi_x - \frac{R_x \phi_x}{\Sigma_x} \right) \right] \quad (8)$$

mais cela laisse encore un caractère "hétérogène" : U et ψ subsistent. Pour faire disparaître ce dernier il suffit pondérer les équations de ce système par les coefficients P^*_{ji}/Σ_j . On obtient (après permutation de i et j) :

$$\sum_j \frac{P^*_{ij}}{\Sigma_j} R_j \left[U_j - \sum_x \frac{P^*_{jx}}{\Sigma_x} (\Sigma_x \phi_x - R_x \phi_x) \right] = U_i \quad (9)$$

Introduction de la factorisation des flux relatifs aux noyaux résonnants

En reprenant enfin, pour les noyaux résonnants, la factorisation :

$$\phi_x = \psi_x \phi_x \equiv U_x \phi_x$$

et l'approximation :

$$R(\psi\phi) \approx \psi R(\phi)$$

ces équations s'écrivent (en posant, comme au chapitre XII, $A_{jm} = P^*_{jm}/\Sigma_m$) :

$$\sum_j A_{ij} R_j \left[U_j - \sum_x A_{jx} U_x (\Sigma_x \phi_x - R_x \phi_x) \right] = U_i \quad (10)$$

Forme pratique des équations

Pour une résolution concrète de ces équations, on tiendra évidemment compte du fait que les flux U relatifs à des noyaux dans une même zone sont identiques. Cela amène à indiquer ces fonctions par des numéros de zones d'espace λ ou μ , ou α pour celles qui contiennent des noyaux résonnants :

CALCUL DES FLUX MACROSCOPIQUES

$$\sum_{\mu, j} A_{\lambda\mu} N_{j\mu} r_{j\mu} [u_{\mu} - \sum_{\alpha, s} A_{\mu\alpha} u_{\alpha} N_{s\alpha} (\sigma_{s\alpha} \phi_{\alpha} - r_{s\alpha} \phi_{\alpha})] = u_{\lambda} \quad (11)$$

où l'indice j repère maintenant les *types* de noyaux non résonnants (et non plus les situations non résonnantes) ; comme aux chapitres précédents, l'indice s repère les types de noyaux résonnants et N désigne une concentration.

Un découpage multigroupe standard suffira, puisque les opérateurs de ralentissement qui subsistent sont à longue portée et que les seules fonctions à structure fine marquée $\sigma\phi - r\phi$ sont lissées par ces opérateurs : pour ces dernières, seules des valeurs moyennes par groupe sont nécessaires.

Pour les calcul des probabilités P^* ou des coefficients A , on utilisera bien entendu les sections efficaces moyennes $\langle\sigma\rangle$ caractérisant les noyaux résonnants et obtenues lors de l'équivalence hétérogène-homogène (voir le chapitre XIII).

Ces équations ressemblent aux équations usuelles régissant les flux (cf. l'équation (3) du chapitre XI, ou les équations (1) ci-dessus) : un flux (deuxième membre) s'exprime comme la combinaison linéaire, pondérée par les probabilités de collision, des taux de neutrons ré-émis après diffusion et ralentissement. Mais ici, on a fait en sorte que seuls les noyaux non résonnants interviennent directement dans ce ralentissement (premier signe de sommation), d'où des probabilités relatives au problème Q où les noyaux résonnants sont devenus purement diffusants.

L'absorption résonnante (deuxième signe de sommation) n'apparaît plus sous une forme usuelle : d'une part elle intervient non pas *après* le ralentissement par les noyaux non résonnants et le transport des neutrons dans l'espace mais *avant* ; d'autre part elle se trouve être caractérisée non pas exactement par un taux d'absorption ($\sigma_a\phi$) mais par une grandeur un peu différente :

$$\varepsilon = \sigma\phi - r\phi \quad (12)$$

A l'absorption proprement dite $\sigma_a\phi$ s'ajoute l'écart entre les taux de neutrons partant $\sigma_s\phi$ et arrivant $r\phi$ par diffusion-ralentissement (tous ces taux de réaction étant calculés avec la structure fine ϕ).

Modification des quantités à tabuler

Si l'on envisage de calculer par (11) les flux macroscopiques, on devra, lors du traitement des équations de structure fine et des tabulations, *ajouter* la grandeur ε qui y intervient. (Cette grandeur est, dans la procédure usuelle, calculée – puisqu'on détermine $r\varphi$ pour obtenir φ – mais non tabulée.) Par contre, il ne sera plus nécessaire de tabuler les taux de diffusion effectifs qui ne servent que dans l'équivalence multigroupe-continu.

Bien entendu, quelle que soit la méthode retenue pour traiter le problème réel, la tabulation des taux d'absorption effectifs est indispensable.

Calcul des flux

Si l'on ne recherche que les taux d'absorption résonnante, la détermination des fonctions U suffit : en multipliant celle qui est relative au milieu où se trouve le noyau résonnant considéré par le taux d'absorption effectif de ce noyau, on obtiendra le taux d'absorption réel.

Si l'on souhaite connaître les flux multigroupes réels (moyennes en espace et en énergie)¹, cela est très simple :

- Pour une zone résonnante, il suffit de multiplier la valeur multigroupe de la structure fine (à condition qu'on l'ait prévue dans la tabulation) par la fonction U correspondante.
- Pour une zone non résonnante, il suffit de reprendre la forme (7) des équations pour obtenir les flux à partir des fonctions U :

$$\phi_\lambda = U_\lambda - \sum_{s, \alpha} A_{\lambda\alpha} N_{s\alpha} \varepsilon_{s\alpha} \quad (13)$$

1. Rappelons qu'on ne les obtient pas dans la procédure usuelle passant par l'équivalence multigroupe-continu.

Prise en compte des différences de niveaux macroscopiques dans les zones résonnantes

Une dernière difficulté ne doit pas être sous-estimée : dans le calcul des structures fines nous nous sommes placés en *situation fondamentale*, celle du problème **P** où les flux macroscopiques sont supposés être les mêmes dans toutes les zones résonnantes. Si l'on traite le cas réel en théorie multigroupe après une équivalence multigroupe-continu, cela n'est pas très grave, puisque l'équivalence est faite sur le *même* problème **P**, puis appliquée ensuite au problème réel, voisin.

Si, par contre, on utilise l'approche développée dans ce chapitre, on risque d'introduire ainsi un *biais* : les équations que nous venons d'écrire sont relatives au cas *réel* ; en particulier, les structures fines qui y apparaissent sont relatives à *ce* cas et non à la situation fondamentale.

Mais il est très facile de corriger ce biais : si nous reprenons la formule (3) du chapitre XII, nous constatons qu'il suffit de remplacer la "probabilité" P^*_{xy} qui y apparaît par $P^*_{xy} \psi_y / \psi_x$ ou, en reprenant les notations introduites dans ce chapitre, de remplacer $A_{\alpha\beta}$ par :

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \times \frac{U_\beta}{U_\alpha} \tag{14}$$

Cette correction peut se faire par un calcul *itératif* qui, probablement, convergera en une seule itération :

- Pour la première approximation, on calcule, *pour la situation fondamentale*, les A par équivalence hétérogène-homogène puis on les utilise pour interpoler dans les tables de taux de réaction effectifs après avoir diagonalisé les équations. On en déduit une première approximation des flux macroscopiques U en résolvant (11).
- Ces flux permettent de corriger le biais par (14). On reprend alors la diagonalisation, l'interpolation dans les tables et la résolution des équations (11). (Si cela s'avérait nécessaire, il faudrait reprendre cette deuxième étape une seconde fois.)

*
* * *

CALCUL DES FLUX MACROSCOPIQUES

Nous concluons ce chapitre un peu comme le précédent : les deux approches possibles pour le traitement du cas réel – l'équivalence multigroupe-continu suivie du calcul multigroupe des flux réels et le calcul direct des flux macroscopiques suggéré par la factorisation – devraient être comparables sur le plan de la précision, puisque finalement, dans leurs grandes lignes, elles sont semblables : pour les noyaux résonnants, le passage par une tabulation de taux de réactions effectifs multigroupes ; pour les noyaux non résonnants, un traitement direct du ralentissement en approximation multigroupe.

Le choix devrait donc se faire à partir d'un examen plus approfondi des volumes des calculs respectifs dans les cas que l'on désire traiter en pratique.

Troisième partie

LA METHODE DES TABLES DE PROBABILITE

104/105/106

Chapitre XVII

PRESENTATION GENERALE

DE LA METHODE DES TABLES DE PROBABILITE

Au plan des principes tout à fait généraux, on retrouve dans la méthode des tables de probabilité des notions de *représentation simplifiée* (mais précise), déjà à la base de la méthode des taux de réaction effectifs : les courbes de sections efficaces des noyaux lourds présentent une extrême complexité mais il n'est pas indispensable de traiter systématiquement dans les calculs tous les détails de cette complexité. Au contraire, l'utilisation de paramètres peu nombreux et à caractère synthétique peut s'avérer suffisante pour la précision requise dans les calculs quotidiens à condition, d'une part, qu'ils soient bien choisis et, d'autre part, qu'ils aient été déterminés (une fois pour toutes) en prenant en compte tout le détail de la complexité réelle des phénomènes.

Les taux de réaction effectifs constituent précisément de tels paramètres synthétiques : alors que dans un groupe d'énergie une section efficace peut présenter plusieurs résonances, les taux de réaction effectifs qui permettront d'obtenir les taux de réaction réels se concrétisent par une table limitée à un petit nombre de valeurs en fonction d'une dilution.

Ces taux de réaction effectifs sont élaborés en vue d'un problème précis de neutronique, le calcul d'une absorption résonnante. Les tables de probabilité, au contraire, constituent une représentation condensée des sections efficaces a priori indépendante du problème dans lequel elles interviendront.

La présentation qui en sera faite s'inspire grandement des travaux de P. Ribon. Dans ce chapitre sera traité le cas d'une seule section efficace résonnante : on montrera comment s'introduisent les tables de probabilité en deux étapes successives, un changement de variable d'intégration, puis une formule de quadrature. Dans les chapitres suivants seront esquissés les problèmes faisant intervenir, d'une façon ou d'un autre, plusieurs variables.

Définition intuitive des tables de probabilité

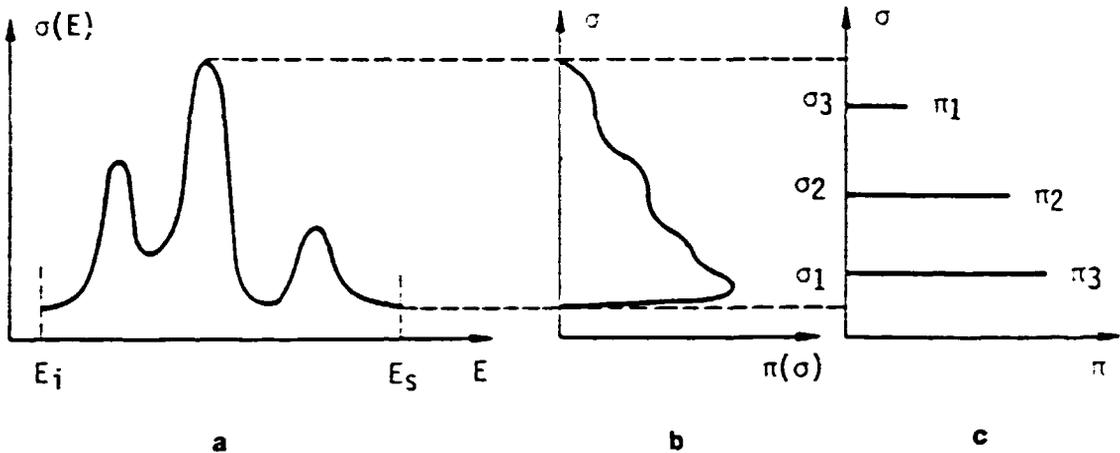
Considérons un groupe d'énergie dans lequel la section efficace σ du noyau auquel on s'intéresse présente des résonances. On peut penser qu'il est plus important de savoir quelles valeurs peut atteindre cette section efficace que de connaître avec exactitude les énergies auxquelles sont obtenues ces valeurs. Et si tel est le cas, l'information pertinente n'est pas la forme et la position des résonances mais la répartition des valeurs possibles de la section efficace¹.

Mathématiquement, cette répartition se représente par une densité de probabilité $\pi(\sigma)d\sigma$: c'est la somme des intervalles élémentaires d'énergie où la section efficace est comprise entre σ et $\sigma+d\sigma$, rapportée à l'intervalle total d'énergie considéré².

Numériquement, cette densité de probabilité pourra être approximée par une courbe "en escalier" ou, mieux, par une suite de distributions de Dirac : on aura alors affaire à une table de probabilité caractérisée par les positions σ_j et les poids π_j de ces distributions.

La figure suivante extraite des publications de P. Ribon présente ces deux étapes successives : représentation par une densité de probabilité et discrétisation de cette densité.

-
1. Exemple concret d'une telle situation : la transmission de neutrons répartis en énergie à travers une plaque du matériau résonnant considéré.
 2. S'il y a lieu, on remplacera le mot "énergie" par "léthargie" pour les applications.



Principe d'une table de probabilité

- a) Section efficace en fonction de l'énergie
- b) Densité de probabilité associée
- c) Discretisation de cette densité par trois distributions de Dirac

Définition mathématique des tables de probabilité

Considérons une fonction quelconque F dépendant de la section efficace σ et supposons que nous nous intéressions à l'intégrale dans un groupe g de cette fonction³ :

$$I = \int_g F[\sigma(u)] du \quad (1)$$

Dans un premier temps, un changement de variable d'intégration, suggéré par le schéma b, peut être effectué (technique de Lebesgue) :

$$I = \int_{\sigma_{min}}^{\sigma_{max}} F(\sigma) \pi(\sigma) d\sigma \quad (2)$$

3. Pour l'exemple précédent ce serait le flux total des neutrons transmis.

Dans un deuxième temps, cette intégrale peut évalüée par la formule de quadrature que suggère le schéma c :

$$I = \sum_j F(\sigma_j) \pi_j \quad (3)$$

Comme on le sait [voir par exemple : P. Reuss, rapport SERMA 491], il existe un très grand nombre de formules de quadrature. L'Américain L. B. Levitt [N.S.E., 49, 450, 1971] avait choisi a priori des intervalles (bandes) de section efficace auxquels il associait les intégrales de π . Un autre Américain, D. E. Cullen [N.S.E., 55, 387, 1974] préconisa des bandes équiprobables. Les Soviétiques M. N. Nicolaev *et al.* [Atomnaya Energiya, 1970], qui sont, semble-t-il, les premiers à avoir introduit la notion de table de probabilité (sous la dénomination de "méthode des sous-groupes"), avaient adopté une démarche empirique, l'ajustement par moindres carrés des coefficients σ_j et π_j de façon à réaliser au mieux les égalités (3) sur un certain nombre de calculs de référence d'intégrales effectives. Ce fut le mérite de P. Ribon [note CEA 2485] de remarquer que le meilleur choix devrait très logiquement être associé à la meilleure formule de quadrature, la formule de quadrature de Gauss, puis de le prouver sur des exemples numériques.

Quadrature de Gauss : choix des σ_j et des π_j

Le principe de la formule de quadrature de Gauss est simple : on détermine à la fois les abscisses σ_j et les poids associés π_j de façon que la formule de quadrature (3) :

$$\int F(\sigma) \pi(\sigma) d\sigma \approx \sum_{j=1}^N F(\sigma_j) \pi_j \quad (4)$$

soit exacte pour le plus vaste ensemble possible de fonctions F. [On peut remarquer que l'approche de Levitt (choix a priori des σ_j et détermination des π_j) s'apparente à la formule de quadrature de Newton-Cotes, tandis que celle de Cullen (l'inverse) s'apparente à la formule de Tchebycheff.]

En général, on prend comme fonctions les polynômes : comme on a 2N coefficients à choisir, on peut, en les déterminant de façon que (4) soit rigoureusement vérifié pour 1,

METHODE DES TABLES DE PROBABILITE

$\sigma, \sigma^2, \dots, \sigma^{2N-1}$, avoir l'exactitude pour l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $2N-1$.

En remplaçant $F(\sigma)$ par σ^k dans (4) et en revenant à la variable d'origine pour la première intégrale, ces équations de conservation des moments de la section efficace donnant les éléments de la table de probabilité $[\sigma_j, \pi_j]$ s'écrivent :

$$\sum_{j=1}^N \sigma_j^k \pi_j = \int_g \sigma(u)^k du \quad (5a)$$

ou, en désignant ces moments respectivement par μ_k (lorsqu'ils sont exprimés par la table de probabilité) et par m_k (pour les valeurs exactes) :

$$\mu_k = m_k \quad (5b)$$

La règle usuelle consistant à faire varier k de 0 à $2N-1$ n'est pas forcément la plus judicieuse ; au contraire, il peut s'avérer intéressant, pour avoir une meilleure précision sur les fonctions F auxquelles on s'intéresse en pratique, d'utiliser des moments d'ordre négatif : P. Ribon préconise les moments de $-N+1$ à N . En effet, en respectant les premiers moments d'ordre positif, on approxime correctement les intégrales des fonctions qui se développent bien en puissances positives des sections efficaces ; et avec les moments d'ordre négatif, les intégrales des fonctions qui se développent mieux avec les puissances négatives des sections efficaces.

Concrètement, les équations (5) sont linéaires en ce qui concerne les π_j mais non en ce qui concerne les σ_j . En passant de la notion de formule de quadrature à la notion équivalente d'approximant de Padé, on obtient ces derniers en tant que zéros d'un polynôme [note CEA 2485]. Le code *CALENDF* effectue l'ensemble de ces calculs.

Remarques

Pour prendre en compte l'élargissement des résonances par effet Doppler, il faut que les tables de probabilité dépendent de la température du noyau. En pratique, s'il faut interpoler en température, il s'avère plus exact de le faire sur les moments que sur les tables, mais cela oblige à résoudre les équations (5) à la température considérée.

METHODE DES TABLES DE PROBABILITE

Concluons par une remarque élémentaire mais utile en pratique : si l'on condense des groupes, il suffit d'additionner les moments vrais, les équations (5) donnant ensuite les éléments de la table de probabilité du groupe condensé. L'information importante – et celle qui est la plus coûteuse à acquérir – est la suite des moments vrais : ceux-ci doivent donc être tabulés dans un découpage fin permettant de générer l'ensemble des maillages multigroupes éventuellement moins raffinés qu'on utilisera en pratique.

Chapitre XVIII

PROBLEMES A PLUSIEURS SECTIONS EFFICACES

CAS DES SECTIONS EFFICACES PARTIELLES

Pour un problème ne dépendant que d'une seule variable à comportement "erratique" telle σ , la théorie mathématique de l'approximation qui est faite (quadrature de Gauss ou approximant de Padé) est solidement étayée et le résultat peut être aussi précis qu'on le souhaite : il suffit d'adopter un ordre suffisamment élevé. [En pratique, pour les sections efficaces des noyaux lourds, on utilise des tables d'ordre compris entre 5 (10 éléments) et 10 (20 éléments) selon la précision recherchée.]

Mais les problèmes de neutronique font le plus souvent intervenir plusieurs sections efficaces résonnantes : on doit donc généraliser les principes de calculs par tables de probabilité introduits au chapitre précédent. Mais malheureusement, d'une part, la lourdeur de ces calculs s'accroît rapidement avec la complexité du problème et, d'autre part, la généralisation des justifications mathématiques est, sinon impossible, en tout cas très arbitraire.

Nous commencerons par quelques commentaires généraux sur ce problème (en nous limitant, pour simplifier, à deux sections efficaces).

Puis nous examinerons trois cas particuliers spécialement importants en pratique, sur lesquels des réponses plus spécifiques peuvent être proposées :

1) le calcul de grandeurs dépendant de plusieurs sections efficaces d'un *même noyau* : l'exemple typique est celui d'un taux de réaction effectif en hypothèse résonance étroite, intégrale du produit d'une section efficace partielle par un flux de structure fine dépendant de la section efficace totale :

- 2) la caractérisation d'un *mélange* de noyaux résonnants ;
- 3) la prise en compte du *ralentissement* dans le calcul des taux de réaction effectifs.

Généralisation des tables de probabilité

Supposons donc que nous ayons maintenant affaire à une fonction F dépendant de deux fonctions σ et τ dépendant elles-mêmes – et de façon compliquée – d'une variable u .

Comme précédemment, les variations de σ et τ lorsque u parcourt un intervalle peuvent être caractérisées par une densité de probabilité π ; mais celle-ci dépend maintenant des *deux* variables : $\pi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau$ est la somme des intervalles élémentaires où la première fonction est comprise entre σ et $\sigma+d\sigma$ et la deuxième fonction entre τ et $\tau+d\tau$, rapportée à l'intervalle total considéré.

Une intégrale de F dans cet intervalle peut d'abord être remplacée par une intégrale dans le plan $[\sigma, \tau]$:

$$\int_g F[\sigma(u), \tau(u)] du = \int d\sigma \int d\tau F(\sigma, \tau) \pi(\sigma, \tau) d\sigma d\tau \quad (1)$$

Dans un deuxième temps, la densité de probabilité peut être discrétisée par une table $[\sigma_j, \tau_j, \pi_{ij}]$ qui permet d'approximer l'intégrale :

$$\int_g F[\sigma(u), \tau(u)] du \approx \sum_i \sum_j F(\sigma_j, \tau_j) \pi_{ij} \quad (2)$$

Enfin, l'élaboration concrète des éléments de la table de probabilité pourra être faite en explicitant l'exactitude de la formule (2) pour un nombre adéquat de moments (ou, plus précisément, de co-moments) m_k :

$$\sum_i \sum_j \sigma_i^k \tau_j^l \pi_{ij} = \int_g \sigma(u)^k \tau(u)^l du \equiv m_{kl} \quad (3)$$

PROBLEMES A PLUSIEURS SECTIONS EFFICACES

En prenant l nul dans cette formule, on retrouve les équations (5) du chapitre précédent : on voit donc que les σ_j sont les mêmes (si l'on raisonne au même ordre) et que la somme sur j des π_j n'est autre que le poids π_j considéré au chapitre précédent. On peut faire des remarques analogues en prenant k nul.

Ces équations (3) ne s'avèrent finalement utiles que pour détailler les éléments d'une matrice π_{ij} dont on connaît les sommes des lignes et des colonnes. On remarquera qu'elles constituent alors un système linéaire.

Comme cela a été signalé au chapitre précédent, il peut s'avérer judicieux en pratique d'utiliser pour la construction des tables de probabilité des moments (et co-moments) d'ordres positif et négatif. L'équilibre entre ces deux classes conduit à utiliser des moments et co-moments tels que $-M+1 < k < M$ et $-N+1 < l < N$ où M et N sont les ordres respectifs des tables de σ et τ .

Mais il faut en éliminer un certain nombre de la liste ainsi définie de $4MN$ grandeurs car les équations (3) régissent seulement $MN+M+N$ éléments de table de probabilité à déterminer. Les tests menés jusqu'à maintenant n'ont pas permis de définir un critère clair de choix.

On peut aussi conserver tous ces moments et co-moments et remplaçant les équations (3) par une minimisation – en pratique au sens des moindres carrés – de l'ensemble des écarts entre les valeurs exactes m et les valeurs μ données par les éléments de la table.

Cas particulier des sections efficaces partielles

Nous avons évoqué ci-dessus un exemple caractéristique d'un problème (le calcul d'un taux de réaction effectif) où interviennent deux sections efficaces d'un même noyau, la section efficace totale (que nous identifierons avec σ) et une section efficace partielle (que nous identifierons avec τ). La première conditionne le flux et risque donc d'intervenir de façon plus ou moins compliquée selon la géométrie en tant qu'argument d'une

PROBLEMES A PLUSIEURS SECTIONS EFFICACES

fonction F ; la seconde, en revanche, apparaît *linéairement* dans l'intégrale qui explicite ce taux de réaction¹ :

$$T = \int \tau(u) \phi[\sigma(u)] du \quad (4)$$

Il est clair que cette remarque n'est pas propre à l'exemple choisi, mais est au contraire très générale en neutronique, et l'on peut sans doute en pratique se limiter à ce cas pour les sections efficaces partielles.

Alors, en ce qui concerne τ , *seuls* les moments d'ordre 1 sont nécessaires pour évaluer (4), et par conséquent les seuls co-moments correspondant à $l = 1$ seront à considérer dans (3).

Dans ces conditions, ces équations montrent que la matrice des poids π_{ij} est *diagonale* et les éléments diagonaux sont bien évidemment les poids π_j caractérisant la seule section efficace totale. Pour $l = 0$, on retrouve les équations (5) du chapitre précédent donnant la table de σ ; pour $l = 1$, on obtient un système *linéaire* fournissant les τ_j associés à chacun des σ_j :

$$\sum_i^N \sigma_i^k \pi_i = m_k \quad (5a)$$

$$\sum_i^N \sigma_i^k \tau_i \pi_i = m_{k1} \quad (5b)$$

Comme nous l'avons vu, il faut utiliser $2N$ valeurs de k dans (5a) et le choix qui peut être recommandé est d'équilibrer les valeurs positives et négatives : $-N+1 < k < N$.

En revanche, les équations (5b) ne régissent que N inconnues τ_j ; là aussi il est sans doute judicieux de centrer autour de zéro les N valeurs de k qu'on utilisera.

1. Nous n'utilisons pas ici les mêmes notations que dans la deuxième partie : τ est une section efficace partielle et T un taux de réaction.

PROBLEMES A PLUSIEURS SECTIONS EFFICACES

Notons enfin que si l'on additionne toutes les équations (5b) d'ordre k associées aux différentes sections efficaces partielles et que l'on compare à l'équation (5a) d'ordre $k+1$, on constate qu'il y a *cohérence interne* : la somme des sections efficaces partielles de rang i est égale à la section efficace totale de même rang.

Chapitre XIX

TRAITEMENT DES MELANGES DE NOYAUX RESONNANTS

DANS L'HYPOTHESE D'UNE INDEPENDANCE STATISTIQUE

Nous l'avons vu dans la deuxième partie : si l'on peut se limiter au cas d'un seul noyau résonnant lorsqu'on élabore les principes fondamentaux d'une approche théorique et qu'on cherche à en faire une présentation didactique, on est confronté en pratique à des problèmes faisant intervenir *plusieurs* noyaux résonnants ; l'approximation consistant à les traiter chacun indépendamment des autres n'est pas toujours licite. Cela va obliger à chercher à généraliser les équations en tâchant, dans la mesure du possible, de conserver un bon compromis entre un volume raisonnable de calculs et une bonne précision. La méthode des tables de probabilité n'échappe pas à cette règle générale.

Utilisation de plusieurs tables de probabilité

Si l'on a affaire à, disons pour simplifier, *deux* noyaux de sections efficaces¹ σ_1 et σ_2 , on peut, comme nous l'avons vu au début du chapitre précédent, discrétiser les valeurs de chacune des sections efficaces et introduire un ensemble de probabilités π_{ij} dépendant de *deux* indices : π_{ij} s'interprète comme la probabilité pour que la première section efficace vaille σ_{1j} lorsque l'autre vaut σ_{2j} , ou inversement².

Mais on peut se demander si l'on ne complique pas ainsi inutilement les choses. Intuitivement, on pourrait, en effet, penser qu'il suffit d'appliquer deux fois la formule de quadrature (3) du chapitre XVII après que chacun des noyaux aura été caractérisé par

-
1. Comme ce seront en pratique des sections efficaces *totales* nous les noterons toutes les deux σ plutôt que σ et τ .
 2. Plus généralement, pour un mélange de n noyaux, il y aura des probabilités dépendant de n indices.

une table de probabilité. L'intégrale d'une fonction F dépendant de ces deux sections pourrait être ainsi approximée par une somme double de valeurs discrétisées :

$$\int_g F[\sigma_1(u), \sigma_2(u)] du \approx \sum_i \sum_j F(\sigma_{1i}, \sigma_{2j}) \pi_{1i} \pi_{2j} \quad (1)$$

De même, et comme au chapitre précédent, un taux de réaction du noyau 1 par exemple s'évaluerait par :

$$T_1 \equiv \int_g \tau_1 \phi[\sigma_1(u), \sigma_2(u)] du \approx \sum_i \sum_j \tau_{1i} \phi(\sigma_{1i}, \sigma_{2j}) \pi_{1i} \pi_{2j} \quad (2)$$

Cependant, il convient de noter l'hypothèse sous-jacente qui est faite et qui n'est pas forcément entièrement correcte : *les sections efficaces des deux noyaux sont supposées statistiquement indépendantes*. En d'autres termes, et exprimé de façon plus intuitive, les probabilités respectives que σ_2 vaille $\sigma_{21}, \sigma_{22}, \dots, \sigma_{2j}, \dots$ sont les mêmes lorsque σ_1 vaut $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \dots, \sigma_{1j}, \dots$ (ou inversement).

En effet, si l'on compare l'équation (1) ci-dessus et l'équation (2) du chapitre précédent, on note que l'induction que nous suggérons consiste à faire l'approximation :

$$\pi_{ij} \approx \pi_{1i} \pi_{2j} \quad (3)$$

Ces formules (1) et (2) ne prennent donc pas en compte la position respective des résonances et les éventuels effets d'interférence (ou de recouvrement) qui en résultent³. Un cas où cette hypothèse est très visiblement en défaut est celui où 1 et 2 désignent un même noyau physique à deux températures différentes.

Corriger cette approximation statistique nécessite évidemment l'introduction de co-moments puisque c'est cela qui distingue les tables de probabilités simples et doubles. Mais lorsque l'hypothèse d'indépendance statistique est illicite, il est cependant vraisemblable qu'il n'est pas indispensable d'introduire autant de co-moments que n'en nécessite

3. Voir le deuxième point évoqué dans l'introduction du chapitre XI.

la construction complète des tables de probabilités multiples⁴ ; un volume plus restreint d'informations devrait suffire pour caractériser les écarts à l'indépendance. Cette théorie reste à faire...

Cas du mélange homogène des noyaux résonnants

Ce cas est celui que l'on rencontre le plus souvent en pratique, puisque les noyaux lourds peuvent être considérés comme répartis de façon uniforme dans la matière combustible.

En argument des flux, les sections efficaces ne sont plus alors des variables indépendantes : seule intervient la section efficace *macroscopique* du mélange (somme pondérée par les concentrations). La formule (1) peut donc être écrite de façon plus simple, avec les éléments d'une table unique caractérisant le "noyau" mélange au lieu d'une somme multiple faisant intervenir les éléments des multiples tables.

S'il s'avère qu'on sera amené à s'intéresser plusieurs fois au mélange considéré, il vaut peut-être la peine de chercher à obtenir une fois pour toutes la table du "noyau" mélange pour éviter d'avoir à effectuer systématiquement les sommes multiples. C'est ce problème que nous examinerons maintenant. Pour simplifier la présentation, nous prendrons un mélange de deux constituants seulement.

Cas où les tables de probabilité sont élaborées avec uniquement des moments d'ordre positif

Nous avons vu au chapitre XVII [équations (5)] qu'une table de probabilité se déduisait des moments de la section efficace. La section efficace Σ du mélange s'obtient par :

$$\Sigma = (N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2) \quad (4)$$

si l'on note N_j les concentrations.

4. Leur nombre croît très rapidement, puisque de façon exponentielle, avec le nombre de noyaux.

TRAITEMENT DES MELANGES

En élevant cette relation à la puissance k et en intégrant sur le groupe considéré, on exprime grâce à la formule du binôme le moment M_k de la section efficace du mélange en fonction des co-moments des sections efficaces des constituants :

$$M_k = \sum_{l=1}^k C_{k,l} N_1^l N_2^{k-l} m_{l,k-l} \quad (5)$$

formule où les C sont les coefficients binomiaux et les m les co-moments :

$$m_{k,l} = \int_g \sigma_1^k(u) \sigma_2^l(u) du \quad (6)$$

Pour représenter le mélange par une table d'ordre N , k doit varier de 0 à $2N-1$: il est nécessaire de connaître $4N^2-1$ moments et co-moments, donc de les avoir préalablement tabulés. Si elle a l'avantage d'être rigoureuse⁵, cette procédure est lourde, surtout s'il y a plus de deux constituants.

En revanche, si l'on introduit ici l'*approximation d'indépendance statistique*, il n'y a pas de co-moments à introduire, puisque cette hypothèse revient à écrire :

$$\begin{aligned} m_{k,l} &\equiv \int_g \sigma_1^k(u) \sigma_2^l(u) du \\ &\approx \int_g \sigma_1^k(u) du \int_g \sigma_2^l(u) du \equiv m_{1k} m_{2l} \end{aligned} \quad (7)$$

Comme pour les probabilités, il y a factorisation des co-moments.

Dans ce cas, la séquence de ces calculs a comme seul et unique intérêt d'éviter de refaire les sommations multiples de (1) au cas où le mélange est repris plusieurs fois.

L'autre hypothèse extrême consisterait à supposer une *totale corrélation* entre les deux sections efficaces, c'est-à-dire une relation du type :

5. Et équivalente à l'utilisation d'une table avec des probabilités "croisées".

$$\sigma_2 = \alpha\sigma_1 + \beta$$

permettant d'exprimer (grâce à la formule du binôme) les co-moments, donc les moments du mélange, en fonction des moments de l'une des sections efficaces.

Les cas rencontrés en pratique se rapprochent certainement davantage de l'indépendance statistique que de la corrélation totale⁶, et le calcul des co-moments par simple multiplication des moments [relation (7)] peut être une approximation suffisante. (Et cette approximation permet de mettre en oeuvre le calcul par tables de probabilité des taux de réaction dépendant linéairement des sections efficaces partielles ainsi qu'on l'a montré au chapitre précédent.) Sinon, comme nous le remarquons, il n'est sans doute pas nécessaire d'aller jusqu'à une tabulation exhaustive des co-moments par la formule (4) : on observe [note CEA 2585, figure A2] une remarquable régularité des co-moments si on les porte en fonction des indices, ce qui laisse supposer qu'une représentation simple de l'écart à l'hypothèse d'indépendance statistique devrait suffire.

Cas où les tables de probabilité sont élaborées avec des moments d'ordres positif et négatif

Nous avons signalé au chapitre XVII qu'équilibrer à peu près le nombre de moments positifs et négatifs pouvait être le meilleur compromis pour les fonctions F intervenant en pratique.

La difficulté qui surgit si des moments d'ordre négatif sont introduits est que la formule du binôme ne s'applique plus pour exprimer les moments du mélange en fonction des co-moments : en effet, la formule (5) suppose k positif. Il faudrait alors redéfinir les coefficients m_k dans le cadre de l'approximation d'une double quadrature.

Toutefois, dans l'hypothèse d'indépendance statistique, on peut tenter de se ramener au cas de moments d'ordre tous positifs en mettant en oeuvre, pour chacun des noyaux, la remarque suivante.

Les relations (5) du chapitre XVII, c'est-à-dire :

6. Sauf pour un même noyau à deux températures voisines ; mais alors on n'est pas dans la situation d'un mélange homogène.

TRAITEMENT DES MELANGES

$$\sum_{i=1}^N \sigma_i^k \pi_i = \mu_k$$

(où k peut prendre $2N$ valeurs) établissent une *correspondance* entre d'une part les éléments σ et π de la table de probabilité et d'autre part les moments μ .

Lors de l'établissement de la table, on détermine par ces relations les éléments σ et π qui la constituent en utilisant comme valeurs de μ des moments exacts m , par exemple ceux d'ordres k variant entre $-N+1$ et N .

On peut ensuite, toujours par ces relations, calculer d'autres valeurs de μ , par exemple pour k variant de 0 et $2N$.

Il est bien clair que si l'on rétablissait à nouveau la table avec ce dernier jeu de moments, on retrouverait la même. Ces moments, d'ordre tous positifs, constituent donc un jeu *équivalent* au jeu comprenant des moments d'ordres positif et négatif qui a servi à bâtir effectivement la table.

Les jeux équivalents permettent d'obtenir les moments du mélange (puis la table caractérisant ce mélange) en utilisant la formule du binôme.

Chapitre XX

TRAITEMENT DU RALENTISSEMENT

Il convient de préciser le titre quelque peu elliptique de ce chapitre : il est bien clair que dans tout calcul d'absorption résonnante le ralentissement est pris en compte ; sinon les neutrons n'échapperaient pas aux trappes ! Mais nous avons vu que l'on pouvait distinguer sur le plan phénoménologique deux types de ralentissement assurés par deux types de noyaux aux rôles antinomiques, les noyaux légers, efficaces pour ralentir les neutrons et généralement peu capturants (surtout s'ils sont modérateurs, c'est-à-dire mis dans le réacteur pour ralentir les neutrons), et les noyaux lourds, au contraire peu efficaces en ce qui concerne le ralentissement et fortement absorbants.

Les noyaux légers sont caractérisés, sauf exception, par des sections efficaces très lentement variables : le problème de représenter une variation en fonction de la léthargie au sein d'un groupe ne se pose pas¹.

Les noyaux lourds présentent, par contre, des résonances dans le domaine d'énergie qui nous intéresse, et une représentation par tables de probabilité peut être un moyen parmi d'autres pour prendre en compte les amples et rapides variations de sections efficaces. Cette représentation présente un énorme avantage : elle est très *compacte* ; un petit nombre de valeurs numériques remplace une masse parfois énorme d'information, celle qui décrit les résonances. Mais elle présente aussi un inconvénient – au moins dans la forme élémentaire sous laquelle elle a été introduite au chapitre XVII – : *elle fait disparaître toute information sur la localisation en léthargie de la structure résonnante de la section efficace* dans le groupe considéré. On peut déplacer une résonance, superposer deux résonances initialement distinctes (ou inversement), etc., sans modifier $\pi(\sigma)d\sigma$ donc la table de probabilité.

.. On peut aussi dire que la représentation se fait avec une table d'ordre *un* avec une valeur de section efficace et une probabilité égale à *un*.

TRAITEMENT DU RALENTISSEMENT

Dès que deux sections efficaces interviennent, il faut compliquer le formalisme pour prendre en compte la corrélation des valeurs, précisément liée aux localisations respectives des irrégularités des deux courbes en fonction de la léthargie – ou alors négliger cette corrélation. Nous en avons déjà vu deux exemples.

Le ralentissement par les noyaux lourds qui, bien que peu important, peut avoir une influence non négligeable sur les taux d'absorption résonnante, constitue un troisième exemple. L'effet est le suivant : le taux d'absorption à une léthargie u est directement proportionnel au flux à cette léthargie ; ce flux est régi par le nombre de neutrons arrivant à cette léthargie après ralentissement² ; et notamment après ralentissement par le noyau lourd, c'est-à-dire après diffusion à une léthargie u' placée un peu avant u ; d'où la corrélation. On notera que contrairement à celle des exemples précédents qui concernait des sections efficaces à la *même* léthargie, il s'agit ici d'une corrélation entre sections efficaces à des léthargies *séparées par un choc* (dont l'écart a un caractère lui-même aléatoire). C'est ce problème (développé par M^{me} Bouhéral dans sa thèse) qui est présenté dans ce chapitre.

Equation de structure fine

Puisque c'est le problème du ralentissement par le seul noyau résonnant qui nous intéresse ici, nous centrerons l'étude sur l'équation qui caractérise ce problème, l'équation de structure fine du formalisme Livolant-Jeanpierre [voir le chapitre VI, équation (6)], soit, en simplifiant un peu les notations :

$$r\phi + d = (\sigma + d)\phi \quad (1)$$

où ϕ est le flux, d la dilution, σ la section totale du noyau résonnant et r l'opérateur de ralentissement par ce noyau.

La section efficace σ présente une structure résonnante, et cette équation explicite la structure pareillement complexe, qui en résulte pour le flux. Mais l'équation fait aussi intervenir une *autre* fonction qui doit présenter également une structure résonnante (peut-être pas aussi accentuée à cause du "lissage" dû au ralentissement) : $r\phi$. Cette der-

2. Les arrivées par émission directe par fission sont négligeables dans le problème qui nous intéresse.

TRAITEMENT DU RALENTISSEMENT

nière se présente comme un produit de convolution reliant ce qui se passe à la léthargie u à ce qui se passait à des léthargies u' situées dans un intervalle précédant u , puisque :

$$r\phi = \int_{u-\varepsilon}^u \sigma_S(u') \phi(u') \frac{e^{-(u-u')}}{1-\alpha} du' \quad (2)$$

Par ailleurs, rappelons que l'objectif de tout calcul de flux de structure fine ϕ est l'obtention de taux de réaction "effectifs" :

$$T = \int_{\mathcal{G}} \tau(u) \phi(u) du \quad (3)$$

où τ est une section efficace partielle.

Changement de fonction

Pour mieux expliciter le rôle des trois fonctions à structure fine intervenant dans ces intégrales, nous récrivons (3) en tenant compte de (1) sous la forme :

$$T = \int_{\mathcal{G}} \tau(u) \theta(u) \frac{1}{\sigma(u) + d} du \quad (4)$$

en introduisant le taux de collision :

$$\theta = (\sigma + d)\phi \quad (5)$$

et, en parallèle, cela amène à récrire l'équation du ralentissement avec la fonction θ au lieu de ϕ :

$$\theta = r \left[\frac{\theta}{\sigma+d} \right] + d \quad (6)$$

L'équation (4) montre que nous avons à calculer des intégrales faisant intervenir trois fonctions à structure résonnante, σ , τ et θ . La première intervient par l'intermédiaire d'une fonction homographique simple (si l'on suppose d constant) ; les deux autres interviennent linéairement.

Introduction de tables de probabilité

Comme nous l'avons vu au chapitre XVIII le calcul d'une intégrale telle que (4) nécessite, en principe, une table avec des probabilités dépendant de *trois indices*³. Mais on peut chercher à la simplifier au prix de quelques hypothèses.

Les auteurs de ces travaux, P. Ribon et O. Bouhéal, ont considéré que l'on pouvait admettre que θ et τ étaient des fonctions statistiquement indépendantes à condition de prendre en compte, d'une part, la corrélation bien évidente entre τ et σ (sections efficaces partielle et totale prises à la même léthargie), et d'autre part, la corrélation entre θ et σ , c'est-à-dire précisément celle qui nous intéresse dans ce chapitre.

Du fait de la linéarité, la première peut être aisément prise en compte par simple ajout de τ ; sans modification de la table associée à σ , ainsi que nous l'avons constaté au chapitre XVIII.

En dépit de ce que pourrait laisser supposer l'écriture (4), la seconde corrélation est plus complexe : on n'est plus dans le cas où l'une des variables intervient linéairement, car en réalité, ainsi que le montre l'équation (6), $\theta(u)$ est l'écriture abrégée d'une intégrale faisant intervenir σ à des léthargies u' précédant u . Donc il s'agit ici de prendre en compte une corrélation entre les sections efficaces totales à deux léthargies séparées d'un choc.

Ce problème est différent de ceux qui ont été considérés jusqu'ici, qui concernait des fonctions prises à la même léthargie. Il faut donc modifier les critères et les équations.

Tables de probabilité décrivant la corrélation en léthargie

On peut conserver le principe général de construire la table de façon à respecter des moments et co-moments, mais il faut adapter la définition de ces derniers au cas présent. Comme ce cas concerne une corrélation résultant d'une convolution des léthargies u' et u par l'intermédiaire du noyau de ralentissement, il est tout à fait naturel d'intro-

3. On ne peut pas considérer que $\theta\tau$ constitue une seule variable (intervenant linéairement), puisque θ dépend du problème traité.

duire *cette* convolution dans la définition des co-moments. Les éléments de la table⁴ seront maintenant obtenus par les équations suivantes [à comparer aux équations (3) du chapitre XVIII] :

$$\mu_{k\ell} \equiv \sum_i \sum_j \sigma_i^k \sigma_j^\ell \omega_{ij} = \int_g [\sigma(u)]^k du \int_{u-\epsilon}^u [\sigma(u')]^\ell \frac{e^{-(u-u')}}{1-\alpha} du' \quad (7)$$

On notera que l'indice i sert à désigner les valeurs discrétisées de la section efficace dans le groupe g considéré. Mais la léthargie u' peut être située *avant* le groupe g , en pratique dans $g-1$ ou dans g puisque le ralentissement par un noyau lourd est à courte portée ; l'indice j doit donc parcourir l'ensemble des valeurs discrétisées de la section efficace totale dans ces *deux* groupes.

Comme précédemment la question se pose du choix des moments respectés. Dans le travail que nous résumons, les auteurs ont utilisé tous les co-moments avec les valeurs de k et ℓ utilisées dans la constitution des tables de σ et approximé ces équations (7) au sens des moindres carrés.

Résolution de l'équation du ralentissement

Il convient de remarquer enfin qu'il manque encore une information pour évaluer par la méthode des tables de probabilité les taux de réaction (4) : ce sont les valeurs discrétisées du taux de collision θ dans le groupe. C'est évidemment l'équation du ralentissement (6) qui faut utiliser pour cela puisque c'est elle qui régit la fonction θ . Le plus simple pour l'exploiter consiste à intégrer (6) sur le groupe g puis à expliciter par tables de probabilité les intégrales simple au premier membre et double au second membre :

4. Pour rappeler le fait que nous traitons maintenant une corrélation en léthargie, nous remplacerons le π usuel π par le π ionien $\bar{\pi}$.

TRAITEMENT DU RALENTISSEMENT

$$\sum \theta_i \pi_i = \sum_i \sum_j \frac{\sigma_{sj} \theta_j}{\sigma_j + d} \omega_{ij} + dg \quad (8)$$

avec :

$$\pi_i = \sum_j \omega_{ij}$$

On voit que l'on obtient par un système linéaire les valeurs θ_j caractérisant le groupe g en fonction de celles du groupe $g-1$: le calcul se fait donc de proche en proche, comme c'est le cas général dans les problèmes de ralentissement, en traitant les groupes dans l'ordre des léthargies croissantes.

Calcul des taux de réaction effectifs

Dans ces conditions tous les éléments sont réunis pour les calculs des taux de réaction (4) :

$$\tau = \sum_i \frac{\tau_i \theta_i \pi_i}{\sigma_i + d} \quad (9)$$

Les tests qui ont pu être faits sont encourageants : ils tendent à confirmer que la corrélation entre θ et τ peut effectivement être négligée.

CONCLUSIONS

130/131/132

CONCLUSIONS

L'école française de neutronique n'est évidemment pas la seule à s'être intéressée à la théorie de l'absorption résonnante. Bien au contraire, des idées très voisines, sinon identiques, ont été développées par ailleurs, par exemple au Royaume Uni ou au Canada. Mais on peut probablement affirmer sans fausse modestie que c'est en France qu'a été le plus creusée cette théorie. Souhaitons que ces équipes sauront garder cette place prééminente.

Les réalisations techniques toujours plus complexes mises en oeuvre dans les réacteurs et surtout la toujours plus grande précision qu'exigent les ingénieurs ont, en effet, poussé les physiciens à relever ces défis. En dépit des progrès de l'informatique, l'objectif reste, autant qu'à l'époque des travaux de M. Livolant et F. Jeanpierre, la recherche d'un compromis acceptable entre deux impératifs a priori inconciliables : la précision et un volume raisonnable de calcul. En effet, les puissances de calcul disponibles ont augmenté, mais aussi la difficulté des problèmes qu'on a voulu traiter – interférences entre noyaux résonnants, géométries irrégulières, etc.

La nécessité subsiste donc d'une réflexion allant au-delà d'un simple traitement numérique des équations pour intégrer les spécificités physiques des phénomènes.

*
* *

Ce document s'est efforcé de faire la synthèse de l'état actuel de ces réflexions. Comme dans toute synthèse, chercher à présenter un panorama complet oblige à éluder beaucoup de détails ; le résultat est toujours quelque peu insatisfaisant pour cette raison. Je dirai que mon principal objectif fut d'étayer les bases pour un meilleur élan vers l'avenir. Car il est clair – c'est en tout cas la conviction que je voudrais faire partager – que des problèmes restent à résoudre, tant dans la méthode des taux de réaction effectifs que dans celle des tables de probabilité. Ce sont, par exemple, dans le premier cas, l'équivalence hétérogène-homogène et, dans les deux cas, le traitement des mélanges. La carence actuelle la plus grave me semble être l'insuffisance des tests des diverses hypothèses introduites.

CONCLUSIONS

*
* *

Ces deux approches ont souvent été considérées comme concurrentes, peut-être faute d'un dialogue suffisant entre leurs spécialistes respectifs. Je crains qu'arrivé à ce point, le lecteur ait la même impression, car il se peut que je sois moi-même tombé dans ce travers ; je constate en tout cas que dans le plan que j'ai adopté les deuxième et troisième parties sont à peu près indépendantes. Il est donc important de corriger cette impression et de montrer sur quelques points en quoi ces deux approches sont, en fait, complémentaires.

Remarquons pour commencer que la notion de table de probabilité a été aussi introduite par M. Livolant et F. Jeanpierre à propos de l'équivalence hétérogène-homogène (voir le chapitre VIII) mais l'expression n'est pas utilisée (ces auteurs parlent de technique de Lebesgue) ; notons toutefois que pour simplifier les choses le rapport σ_a/σ est inclus dans π contrairement à la définition retenue par P. Ribon.

Même si ce propos doit être nuancé, on peut retenir qu'en gros, la méthode des tables de probabilité est la plus judicieuse dans la partie à plus haute énergie du domaine des résonances, tandis qu'au contraire, la méthode des taux de réaction effectifs est préférable dans la partie à plus basse énergie. En effet :

a) A haute énergie, les résonances sont nombreuses et étroites : l'hypothèse "résonance étroite" s'applique bien ; on peut ignorer le détail du positionnement des résonances. C'est donc typiquement la situation que l'on peut traiter simplement par tables de probabilité puisque que les corrélations peuvent être ignorées. Inversement, la tabulation des taux de réaction effectifs par résolution de l'équation de structure fine est une démarche maladroite puisqu'on dépense un volume important de calculs pour traiter inutilement l'opérateur de ralentissement par le noyau résonnant. La conséquence de cette remarque est que c'est l'approche "tables de probabilité" qui est utilisée dans les codes de transport pour les réacteurs à neutrons rapides. (On parle plus généralement de "sous-groupes" : le principe est celui que nous avons présenté, mais l'obtention des paramètres se fait par ajustements sur des calculs de référence de taux de réaction.)

b) A basse énergie, au contraire, l'effet du ralentissement ne peut être ignoré et, à la limite, l'hypothèse "résonance large" peut s'avérer meilleure que l'hypothèse "résonance

CONCLUSIONS

étroite" : la méthode des taux de réaction effectifs a été précisément élaborée pour traiter cet aspect (et ceux qui l'ont construite sont des physiciens des réacteurs à neutrons ther-miques). La méthode des tables de probabilité n'est, comme nous l'avons vu, pas totale-ment démunie devant ce problème mais à condition de la compliquer passablement.

Selon cet aspect énergétique, se dégagent donc des domaines plus spécifiques pour l'application de chacune des deux approches. La mise en oeuvre, dans leur domaine propre, paraît présenter des caractéristiques similaires : elle est très économique en cal-culs et aisée s'il n'y a qu'un seul noyau résonnant ; elle devient beaucoup plus délicate si l'on veut prendre en compte les corrélations entre les résonances des différents noyaux.

La méthode des tables de probabilité peut être mise en oeuvre directement sur le cas réel ; celle des taux de réaction effectifs suppose en intermédiaire une situation P "idéalisée", d'où les problèmes d'équivalence hétérogène-homogène. L'introduction de cette situation intermédiaire n'est pas forcément un handicap ; c'est au contraire la possi-bilité de définir un modèle avec une grande rigueur. Et d'ailleurs, dans une approche générale du type "taux de réaction effectifs", il serait certainement judicieux d'introduire une "philosophie table de probabilité". Cela serait incontestablement utile à deux niveaux :

a) pour les tabulations des taux de réactions effectifs (au moins en ce qui concerne la partie à haute énergie) ;

b) pour la mise en oeuvre de l'équivalence hétérogène-homogène, c'est-à-dire l'ap-proximation de la matrice de couplage A par une matrice constante.

*
* *

Nous n'avons parlé ici que des calculs de transport "analytiques" ; terminons donc par une remarque sur les calculs Monte-Carlo. On peut toujours, bien entendu, choisir d'entrer dans le code Monte-Carlo les sections efficaces avec tous leurs détails, mais cela n'est sans doute pas toujours nécessaire. Dans l'hypothèse où l'on simplifie la représenta-tion des données nucléaires relatives aux noyaux résonnants, on peut, là encore, hésiter entre les deux possibilités : on peut adopter des sections multigroupes, mais cela suppose, en pratique, la mise en oeuvre de toute la procédure "taux de réactions effectifs" jusqu'au calcul des sections efficaces multigroupes. En revanche, si elle est licite sur le plan de la physique, une approche "table de probabilité" est tout à fait adaptée au calcul Monte-

CONCLUSIONS

Carlo puisque ce dernier, précisément, ne fait qu'exploiter des lois de probabilités régissant les diverses interactions des particules avec la matière.

ANNEXES

BIBLIOGRAPHIE

- Généralités sur la neutronique :

[1] BUSSAC (J.), REUSS (P.) - *Traité de neutronique*, Hermann, 1978.

- Sections efficaces et effet Doppler :

[2] TELLIER (H.) - *Réactions nucléaires induites par neutrons*, CEA/INSTN, coll. Enseignement, 1990.

[3] TELLIER (H.), GRANDOTT-BIETTOLI (M.), VANUXEEM (J.) - *Une étude du désaccord entre les valeurs calculée et mesurée de l'intégrale effective de capture de l'uranium 238*, note CEA-N-2078, 1979.

[4] TELLIER (H.) - *Influence de la température de Debye sur l'élargissement Doppler*, note SERMA-N-1404, 1981.

[5] EL IDRISSE (N.), TELLIER (H.) - *Estimation de la "température de Debye" de l'UO₂ à l'aide de mesures d'effet Doppler dans des réseaux à eau ordinaire*, note SERMA-N-1442, 1981.

[6] OUISLOUMEN (M.) - *Contribution aux développements du code de transport des neutrons APOLLO*, Thèse, Orsay, 1989.

BIBLIOGRAPHIE

- Méthode des taux de réaction effectifs :

- [7] JEANPIERRE (F.) - *Méthode de calcul de sections effectives de corps résonnants lourds en géométrie hétérogène ; application à l'uranium 238*. Thèse, Orsay, 1969.
- [8] JEANPIERRE (F.), LIVOLANT (M.) - *Autoprotection des résonances dans les réacteurs nucléaires ; application aux isotopes lourds*, rapport CEA-R-4533, 1974.
- [9] TELLIER (H.), GONNORD (J.), VAN DER GUCHT (C.), VANUXEEM (J.) - *Dépendance spatiale et énergétique de la capture résonnante de l'uranium 238 dans un réseau hétérogène*, note CEA-N-2398, 1984.
- [10] SANTAMARINA (A.), GASTALDI (B.) - *Formalisme multigroupe de l'effet de protection mutuelle d'isotopes résonnants ; proposition pour une formulation plus précise dans APOLLO*, note SEN-N-84-226, 1984. Voir aussi : GASTALDI (B.) - *Etude et qualification des bibliothèques de sections efficaces pour le calcul des réacteurs à eau*, thèse, Orsay, 1986.
- [11] REUSS (P.) - *A Generalization of the Livolant-Jeanpierre Theory for Resonance Absorption Calculation*, Nuclear Science and Engineering, 92, 261-266, 1986.

- Code APOLLO :

- [12] HOFFMANN (A.), JEANPIERRE (F.), KAVENOKY (A.), LIVOLANT (M.), LORAIN (H.) - *APOLLO, code multigroupe de résolution de l'équation du transport pour les neutrons thermiques et rapides*, note CEA-N-1610, 1973.
- [13] SANCHEZ (R.) - *Le code APOLLO 2*, rapport DEMA-R-90-027 et SERMA-1152, 1990.

BIBLIOGRAPHIE

- Méthode des tables de probabilité :

- [14] NICOLAEV (M. N.) *et al.* - *Méthode des sous-groupes pour la prise en compte de la structure résonnante des sections efficaces dans les calculs neutroniques*, Atomnaya Energiya, 1970.
- [15] LEVITT (L. B.) - *The Probability Table Method for Treating Unresolved Neutron Resonances in Monte Carlo Calculations*, Nucl. Sci. Eng., 49, 450-457, 1971.
- [16] CULLEN (D. E.) - *Application of the Probability Table Method to Multigroup Calculations of Neutrons Transport*, Nucl. Sci. Eng., 55, 387-400, 1974.
- [17] REUSS (P.) - *Formules d'intégration numérique*, rapport SERMA-R-491, 1981.
- [18] RIBON (P.), MAILLARD (J.-M.) - *Les tables de probabilité : application au traitement des sections efficaces pour la neutronique*, note CEA-N-2485, 1986.
- [19] RIBON (P.) - *Les tables de probabilité statistiques : le programme CALENDF*, séminaire OCDE/Banque de données AEN, Saclay, 20-21 juin 1989.
- [20] BOUHELAL (O. K.), RIBON (P.) - *Tables de probabilité non statistiques ; description des effets du ralentissement*, conférence internationale sur la physique des réacteurs, IX-1, Marseille, 23-27 avril 1990.
- [21] BOUHELAL (O. K.) - *Prise en compte du ralentissement pour le calcul des sections effectives : formalisme des tables de probabilité*, thèse, Rabat, 1990. [Ce document contient une bibliographie plus détaillée sur les tables de probabilité.]

INDEX DES NOTATIONS

adoptées dans la deuxième partie

Problèmes spécifiques

- P** Les noyaux résonnants ne sont pas modifiés ; les noyaux non résonnants sont purement absorbants ; des sources d'intensité égale aux sections efficaces des noyaux non résonnants sont ajoutées.
- Q** Les noyaux résonnants sont purement diffusants ; les noyaux non résonnants sont purement absorbants.
- Q'** Les zones résonnantes sont purement diffusantes ; les zones non résonnantes sont purement absorbantes.
- R** Les noyaux résonnants sont multiplicateurs et ré-émettent $1 + N''/(\lambda\Sigma'')$ secondaires par choc ; les noyaux non résonnants sont purement absorbants.

Grandeurs physiques

- a** Facteur de Bell modifié.
- a, A** Matrices de couplage des structures fines.
- b** Facteur de Bell.
- C** Facteur ou matrice de Dancoff.
- f, F** Facteurs d'interférence des résonances.
- ℓ** Corde moyenne.
- n** Concentration rapportée à la section efficace totale du milieu.
- N** Concentration (nombre de noyaux par unité de volume).

INDEX DES NOTATIONS

ρ	Section efficace potentielle (également notée σ_p).
P	Probabilité de première collision ou d'absorption.
r, R	Opérateurs de ralentissement micro et macroscopiques.
S	Surface.
u	Léthargie.
U	Flux macroscopique du deuxième type.
v	Vecteur propre.
V	Volume.
W	Proportion dans un mélange de noyaux résonnants.
ε	Taux de réaction caractéristique d'un noyau résonnant.
λ	Coefficient d'une résonance intermédiaire.
λ, μ	Valeur propre.
π	Densités de probabilité de sections efficaces.
π	Coefficients de pondération de structures fines en milieux homogènes.
ω	Proportion dans un mélange de noyaux résonnants.
ρ	Probabilité qu'un choc dans un milieu ait lieu sur un noyau résonnant.
σ, Σ	Sections efficaces micro et macroscopiques.
τ	Taux de réaction effectif.
φ	Structure fine.
Φ	Flux réel.
Ψ	Flux macroscopique du premier type.

INDEX DES NOTATIONS

ω Opacité d'une zone.

Indices et exposants

- 0 Noyau résonnant (quand il n'y en a qu'un seul).
- 1 Noyaux non résonnants.
- ∞ Valeur limite quand la section efficace du noyau résonnant tend vers l'infini.
- a Absorption.
- c Combustible (zone où se trouve le noyau résonnant).
- e Equivalent.
- g, h Groupes de léthargie.
- i Taux de réaction.
- i, j Zones d'espace.
- i, j, k Situations ou noyaux non résonnants.
- l, m, n Situations ou noyaux de n'importe quel type.
- m Milieu homogène.
- p Potentielle (pour une section efficace).
- s Diffusion (scattering).
- s Surface.
- s, t, u, v Noyaux résonnants.
- x, y, z Situations résonnantes (noyau résonnant donné dans une zone donnée).
- α, β, γ Zones contenant des noyaux résonnants.
- λ, μ Zones de n'importe quel type.

INDEX DES NOTATIONS

+	Sans sortie.
*	Relatif au problème Q .
< >	Valeur moyenne.
'	Non résonnant.
"	Résonnant.

INDEX DES NOTATIONS

adoptées dans la troisième partie

Grandeurs physiques

C	Coefficients binomiaux.
d	Dilution (ou section équivalente).
F	Fonction à intégrer dépendant d'une ou plusieurs grandeurs à structure fine.
g	Groupe (intervalle de léthargie).
m	Moment ou co-moment exact.
M, N	Ordre d'une table de probabilité.
M	Moment de la section efficace macroscopique d'un mélange.
N	Concentration.
r	Opérateur de ralentissement.
T	Taux de réaction.
u	Variable "naturelle" du problème (ici : léthargie).
θ	Taux de collision.
μ	Moment ou co-moment exprimé par table(s) de probabilité.
π	Densité de probabilité.
ω	Densité de probabilité pour deux valeurs de la section efficace totale séparées par un choc.
σ	Section efficace microscopique totale.

INDEX DES NOTATIONS

Σ	Section efficace macroscopique totale.
τ	Section efficace microscopique partielle.
ϕ	Flux.

Indices et exposants

i, j	Éléments d'une table de probabilité.
k, l	Ordres de moments ou co-moments.
s	Diffusion.

INDEX DES SUJETS

N.B. : les noms des auteurs français ne sont pas cités dans cet index.

A

Adler et Adler (formalisme d'-) : 20
Anisotropie de la diffusion : 26
Antitrappe (probabilité ou facteur -) : 28
APOLLO : 8, 48, 56, 57, 64, 65, 69
Approximant de Padé : 113
Approximation Fic : 66, 91
Approximation de Williams : 95
Autoprotection des résonances : 36
Autoprotection (facteur d'-) : 37
Autoprotection (phénomène d'-) : 41
AUTOSECOL : 45

B

Bell (facteur de -) : 55, 56, 62, 80
Bell-Wigner (approximation de -) : 56, 63
BIEFF : 47, 58
Bilan neutronique : 43, 53, 71
Breit et Wigner (formule de -) : 15, 19

C

CALENDF : 111
Centre de masse (système du -) : 17
Choc élastique (lois du -) : 25
Collision (probabilités de première -) : 31
Combustible : 30
Composé (noyau -) : 13
Conservation des moments : 111
Corde moyenne : 55

INDEX DES SUJETS

Corrélation en léthargie résultant du ralentissement : 127
Corrélation entre deux sections efficaces : 121
Couplage (matrice de -) : 77, 83
Courant de ralentissement : 33
Courant isotrope : 63, 80
Co-moments : 114
Co-moments (factorisation des -) : 121

D

Dancoff (facteur de - et effet -) : 63
Dancoff (matrice de -) : 80
Debye (modèle et température de -) : 20
Dépression du flux : 36
Diagonalisation des équations de structure fine : 87
Différentielle (section efficace - de diffusion) : 25
Diffusion élastique et inélastique : 24
Diffusion isotrope : 25
Diffusion-transfert (opérateur de -) : 43
Dilution (section de -) : 45
Domaine du continuum : 16
Domaine du ralentissement : 23
Domaine résolu : 16
Domaine statistique : 16
Doppler (effet -) : 17

E

Effectif (taux de réaction -) : 46
Effectifs (factorisation des taux de réaction -) : 94
Effectifs (tabulation des taux de réaction -) : 101
Effectifs (taux de réaction -) : 129
Effective (intégrale -) : 19
Effective (section efficace -) : 37, 46
Effective (température -) : 20
Elastique (diffusion -) : 24
Elastique (lois du choc -) : 25
Energie de liaison : 13
Equation du ralentissement écrite avec le taux de collision : 126
Equation du ralentissement (résolution par tables de probabilité) : 128
Equivalence continu-multigroupe : 47, 58
Equivalence hétérogène-homogène : 56, 75, 84
Equivalent (jeu - de moments) : 123

INDEX DES SUJETS

Equivalente (section -) : 45, 55, 62, 78, 91
Etroite (hypothèse résonance -) : 50
Excités (niveaux) : 13

F

Facteur antitrappe : 28
Facteur de Bell : 55, 56, 62, 80
Facteur de Dancoff : 63
Facteur d'autoprotection : 37
Facteur d'interférence : 95
Factorisation des co-moments : 121
Factorisation des taux de réaction effectifs : 94
Factorisation du flux : 41, 99
Fine (équation de structure -) : 44, 53, 61, 72, 77, 83, 87, 91
Fine (structure -) : 41
Flux macroscopiques : 96
Flux (dépression du -) : 36
Flux (factorisation du -) : 41
Fonctions macroscopiques : 98
Fondamentale (situation -) : 47, 73, 102
Formule de Bell-Wigner : 56
Formule de Breit et Wigner : 15, 19

G

Gain de léthargie : 27
Gauss (quadrature de -) : 110

H

Hydrogène (ralentissement par -) : 28
Hypothèse d'indépendance statistique : 118
Hypothèse résonance étroite : 50
Hypothèse résonance intermédiaire : 51
Hypothèse résonance large : 51

I

Indépendance statistique : 118
Inélastique (diffusion -) : 24
Intégrale de résonance : 19, 52
Intégrale effective de résonance : 19
Interférence entre diffusions résonnante et potentielle : 15

INDEX DES SUJETS

Interférence entre noyaux résonnants : 94
Interférence (facteur d') : 95
Intermédiaire (hypothèse résonance -) : 51
Isotrope (diffusion -) : 25
Isotropie du courant d'interface : 63, 80

J

JEZABEL : 57

K

Kangourous (image des -) : 32

L

Laboratoire (système du -) : 17
Large (hypothèse résonance -) : 51
Largeur des résonances : 14
Largeur pratique des résonances : 34
Lebesgue (technique de -) : 57, 84, 109
Léthargie : 26
Liaison (énergie de -) : 13
Loi de transfert : 24

M

Macroscopique (structure - du flux) : 41, 72
Macroscopiques (flux -) : 81, 96, 98
Matrice de Dancoff : 80
Matrice de couplage : 77, 83
Maxwell (spectre de -) : 17, 23
Mélange de noyaux résonnants (table de probabilité d'un -) : 118
Modèle de Debye : 20
Modérateur : 30
Moments d'une section efficace : 111
Moments (conservation des -) : 111
Moments (jeu équivalent de -) : 123
Monte-Carlo (calculs par méthode -) : 135
Multigroupe (section efficace -) : 46, 58

INDEX DES SUJETS

N

Niveaux excités : 13
Noyau composé : 13
Noyaux résonnants (traitement un par un des -) : 65

O

Opacité : 31, 80
Opérateur de ralentissement : 27, 43, 45, 49

P

Padé (approximant de -) : 113
Partielles (sections efficaces -) : 115
Pic (approximation -) : 66, 91
Placzek (transitoire de -) : 35
Plat (approximation du flux -) : 31, 60
Potentielle (diffusion - et section efficace -) : 13
Probabilité (table de -) : 107
Probabilités P^* : 75, 97
Probabilités de première collision : 31
Problème P : 45, 74
Problème Q : 76
Problème Q' : 81
Problème R : 90

Q

Quadrature : 110

R

Ralentissement des neutrons : 23
Ralentissement par les noyaux lourds : 37
Ralentissement par l'hydrogène : 28
Ralentissement (caractère discontinu du -) : 32
Ralentissement (courant de -) : 33
Ralentissement (équation du -) : 27, 126
Ralentissement (opérateur de -) : 27, 43, 45, 49
Ralentissement (traitement du - par tables de probabilité) : 124
Réactions ($n,2n$) : 24
Reich et Moore (modélisation de -) : 15

INDEX DES SUJETS

Résonance : 14
Résonance étroite (hypothèse -) : 50
Résonance intermédiaire (hypothèse -) : 51
Résonance large (hypothèse -) : 51
Résonance négative : 14
Résonance (intégrale de -) : 19, 52
Résonances (autoprotection des -) : 36
Résonnante (structure -) : 13
Résonnants (traitement un par un des noyaux -) : 65

S

Section de dilution : 45
Section efficace effective : 37, 46
Section efficace multigroupe : 46, 58
Section équivalente : 45, 55, 62, 78, 91
Sections efficaces : 13
Sections efficaces partielles : 115
Situation fondamentale : 47, 73, 102
Spectre de Maxwell : 17, 23
Statistique (indépendance -) : 118
Structure fine : 41
Structure fine (équation de -) : 44, 53, 61, 72, 77, 83, 87, 91
Structure macroscopique du flux : 72, 81

T

Table de probabilité : 107
Table de probabilité (définition d'une -) : 108, 109
Tables de probabilité (généralisation des -) : 114
Tabulation des taux de réaction effectifs : 45, 93, 101
Taux de collision (équation du ralentissement écrite avec le -) : 126
Taux de réaction effectif : 46, 129
Taux de réaction effectifs (factorisation des -) : 94
Taux de réaction effectifs (tabulation des -) : 45, 93, 101
Température de Debye : 20
Température effective : 20
Traitement un par un des noyaux résonnants : 65
Transfert (loi de -) : 24
Transitoire de Placzek : 35
Transport (théorie intégrale du -) : 30
Trappe étroite : 34
Trappe grise : 35

INDEX DES SUJETS

Trappe noire : 33

Trappes (image des -) : 32

W

Williams (méthode de -) : 95

ISSN 0429 - 3460

La diffusion des rapports et bibliographies du Commissariat à l'Énergie Atomique est assurée par le Service de Documentation et d'Édition Multimédia, CE-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, (France)

Reports and bibliographies of the Commissariat à l'Énergie Atomique are available from the Service de Documentation et d'Édition Multimédia, CE-Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cédex, (France)

Édité par
le Service de Documentation
et d'Édition Multimédia du CE Saclay
Centre d'Études de Saclay
91191 GIF-sur-YVETTE Cédex (France)