

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

КиУА: - 92 - 4

Препринт КИЯИ-92-4

В.В.Колотый, К.К.Кисурин, Ю.К.Максимов,
В.А.Пашин

ФОКУСИРОВКА ДУБЛЕТОМ КВАДРУПОЛЬНЫХ
ЛИНЗ

КИЕВ

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНЫ
ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Препринт КИИИ-92-4

В.В.Колотый, К.К.Кисурин, Ю.К.Максимов,
В.А.Пашин

ФОКУСИРОВКА ДУБЛЕТОМ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

Киев 1992

Фокусировка дублетом квадрупольных линз/ Колотий В.В., Кисурин К.К., Максимов Ю.К., Пашин В.А.-Киев, 1992.-16 с.- (Препр./АН Украины. Ин-т ядерных исслед.; КИНИ-92-4).

Описываются фокусировка пучков ускоренных заряженных частиц дублетом магнитных квадрупольных линз, изображение сечения пучка на фазовой плоскости, отличие лучевой (геометрической) оптики от оптики пучков, а также приводятся конкретные примеры расчетов фокусировки. Разработанная программа дает возможность пользователю работать с ЭВМ в диалоговом режиме.

Ил.6. Табл.2. Список лит.: с.16 (6 назв.)

The focusing by the doublet of quadrupole lenses/ Kolotij V.V., Kisurin K.K., Maksimov Yu.K., Pashin V.A.- Kiev, 1992.-16 p.- (Prepr./ Academy of Sciences of Ukraine. Institute for Nuclear Research; KINR-92-4).

The beam focusing of accelerated charged particles by the doublet of quadrupole lenses, the image of beam cross-section on phase plane, the difference of geometrical optics from beam optics are described as well as specific examples of focusing calculations are presented. The developed programme for computers operates with a user in the interactive operation.

6 figs., 2 tables, 6 refs.

Утверждено к печати ученым советом
Института ядерных исследований АН Украины

© В.В.Колотий, К.К.Кисурин,
Ю.К.Максимов, В.А.Пашин, 1992

Фокусировкой пучков ускоренных заряженных частиц приходится заниматься не только специалистам-ускорительщикам, но и физикам-пользователям. Для фокусировки обычно используются магнитные квадрупольные линзы. Почти любая сложная система транспортировки пучка может быть разбита на участки, содержащие по одному кублету линз, параметры которых необходимо рассчитывать, чтобы не терять частицы на стенках инопровода и получить заданные сечения пучка в районе коллиматоров и мишеней.

Поперечный размер пучка определяется отклонениями частиц от оси системы транспортировки. При движении во внешних электрических и магнитных полях эти отклонения в горизонтальной и вертикальной плоскостях можно считать в первом приближении не зависящими друг от друга, что с хорошей точностью подтверждается практикой. Каждая частица в пучке характеризуется, например, в горизонтальной плоскости отклонением x от оси системы y и углом α между этой осью и направлением траектории частицы. Для малых углов можно считать

$$\alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_x}{v_y} = \frac{dx}{dy} = x'$$

Таким образом, любая частица может быть представлена точкой с координатами x и x' на, так называемой, фазовой плоскости $/1/$, на которой все частицы пучка занимают определенную ограниченную область. Площадь этой области, деленная на \mathcal{N} , называется эмиттансом пучка. Если поперечный размер пучка не диафрагмирован, а определяется только амплитудами и фазами свободных колебаний частиц, то фигура, ограничивающая пучок на фазовой плоскости, является эллипсом.

Изменение координат частицы x и x' при переходе от одной точки оси системы транспортировки y_1 к другой точке y_2 определяется решением уравнения движения по оси x на этом участке перехода. Если участок длиной L свободен от силовых полей, то уравнение движения $x'' = 0$ имеет решение $x_2 = x'_1 L + x_1$, $x'_2 = x'_1$. Удобно пользоваться записью решения в матричном виде $/2/$. В этом

случае для свободного промежутка решение записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix} = (M) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1' \end{pmatrix}.$$

Матрицу (M) называют матрицей перехода.

Для фокусировки пучка в системах транспортировки широко применяются квадрупольные магнитные линзы [3]. Каждая такая линза фокусирует пучок в одной плоскости, например горизонтальной, и дефокусирует в другой — вертикальной. Использование двух и более линз дает возможность сфокусировать пучок в обеих плоскостях. Для участка, занятого фокусирующей квадрупольной линзой длиной l , матрица перехода равна

$$\begin{pmatrix} \cos l\sqrt{k} & \frac{1}{\sqrt{k}} \sin l\sqrt{k} \\ -\sqrt{k} \sin l\sqrt{k} & \cos l\sqrt{k} \end{pmatrix},$$

где $k = \frac{2}{H_0} Mg$, G — градиент магнитного поля в линзе, H_0 — импульс частицы. Для участка с дефокусирующей линзой соответствующая матрица перехода равна:

$$\begin{pmatrix} \cosh l\sqrt{k} & \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh l\sqrt{k} \\ \sqrt{k} \sinh l\sqrt{k} & \cosh l\sqrt{k} \end{pmatrix}.$$

При повороте пучка в горизонтальной плоскости на угол φ однородным магнитным полем секторного магнита координаты x и x' меняются согласно матрице перехода

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & R \sin \varphi \\ -\frac{1}{R} \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ где } R - \text{ радиус поворота.}$$

При прохождении пучком последовательно участков с линзами, свободными промежутками и отклоняющими магнитами результирующая матрица равна произведению всех соответствующих матриц перехода, записанных в обратном порядке. Предположим, система состоит из расположенных вдоль оси y двух линз одинаковой эффективной длины l , разделенных промежутком длиной l' , причем первая линза фокусирует в горизонтальной плоскости (x, y) , а вторая — в вертикальной (z, y) . Градиенты магнитного поля в первой линзе G_1 , во второй — G_2 , которые зависят соответственно от значений протекающего через линзы электрического тока. Пусть в горизонтальной плоскости эффективный источник находится на расстоянии ρ от входа в первую линзу, а его изображение — на расстоянии L за выходом из второй линзы. Для вертикальной плоскости эти расстояния обозначим соответственно φ и T (рис. I). Тогда решения уравнений движения для горизонтальной и вертикальной плоскостей можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} X_L \\ X_P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \rho \sqrt{\kappa_2} & \frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} \operatorname{sh} \rho \sqrt{\kappa_2} \\ \sqrt{\kappa_2} \operatorname{sh} \rho \sqrt{\kappa_2} & \operatorname{ch} \rho \sqrt{\kappa_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \rho \sqrt{\kappa_1} & \frac{1}{\sqrt{\kappa_1}} \sin \rho \sqrt{\kappa_1} \\ -\sqrt{\kappa_1} \sin \rho \sqrt{\kappa_1} & \cos \rho \sqrt{\kappa_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_P \\ X_P' \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} Z_T \\ Z_T' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \rho \sqrt{\kappa_2} & \frac{1}{\sqrt{\kappa_2}} \sin \rho \sqrt{\kappa_2} \\ -\sqrt{\kappa_2} \sin \rho \sqrt{\kappa_2} & \cos \rho \sqrt{\kappa_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & S \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \rho \sqrt{\kappa_1} & \frac{1}{\sqrt{\kappa_1}} \operatorname{sh} \rho \sqrt{\kappa_1} \\ \sqrt{\kappa_1} \operatorname{sh} \rho \sqrt{\kappa_1} & \operatorname{ch} \rho \sqrt{\kappa_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_P \\ Z_P' \end{pmatrix},$$

где $\kappa_1 = \frac{q_1}{H\rho}$; $\kappa_2 = \frac{q_2}{H\rho}$.

Из выражения $X_L = a_{11} X_P + a_{12} X_P'$ видно, что условием фокусировки по X , т.е. условием минимальной величины X_L при любых X_P' , является $a_{12} = 0$. Аналогично для вертикального движения по Z условием фокусировки будет $b_{12} = 0$. Таким образом, для фокусировки пучка в обеих плоскостях при известных параметрах ρ, S, ρ, q, L, T необходимо решить систему из двух трансцендентных уравнений

$$\begin{cases} a_{12} = 0 \\ b_{12} = 0 \end{cases} \quad (I)$$

относительно неизвестных κ_1 и κ_2 , которые позволяют найти тригнометрические значения градиентов (и токов) в каждой линзе. Решение этой системы возможно с помощью ЭВМ.

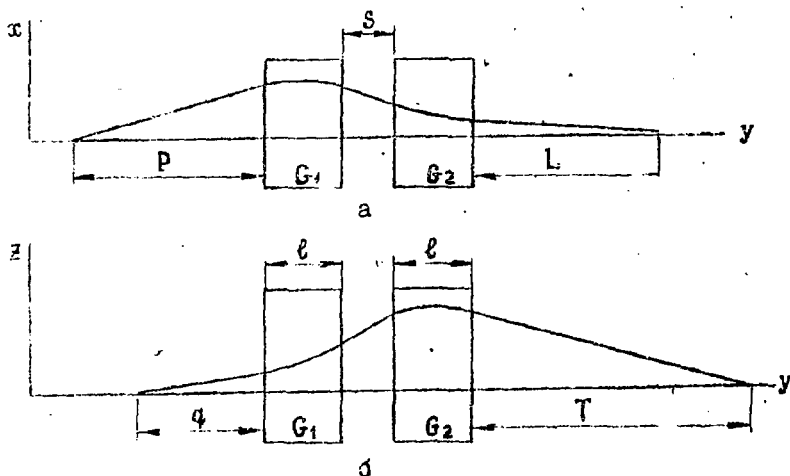


Рис. 1. Фокусировка пучка дублетом квадратичных магнитных линз: а - в горизонтальной плоскости (x, y) ; б - в вертикальной плоскости (z, y) .

В некоторых случаях для приблизительных оценок удобно пользоваться, так называемым, приближением "тонкой" линзы /4/. В этом случае матрицы перехода для фокусирующей и дефокусирующей линз с фокусными расстояниями f_1 и f_2 соответственно равны

$$\dots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/f_2 & 1 \end{pmatrix},$$

причем длины линз считаются равными нулю, а все остальные размеры по оси y должны быть соответствующим образом скорректированы.

Решения уравнений движения в этом случае принимают вид

$$\begin{pmatrix} x_L \\ x'_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L+e/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s+e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p+e/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ x'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_p \\ x'_p \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} z_T \\ z'_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T+e/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s+e \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & q+e/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_q \\ z'_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_q \\ z'_q \end{pmatrix}.$$

В связи с тем, что фокусные расстояния фокусирующей и дефокусирующей линз соответственно равны

$$f_{\text{фок.}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon} \sin \epsilon \sqrt{\kappa}}, \quad f_{\text{дефок.}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon} \sin \epsilon \sqrt{\kappa}},$$

то при равных длинах линз и градиентах магнитного поля они связаны между собой выражением /4/

$$f_{\text{фок.}} = f_{\text{дефок.}} + e/3.$$

(Использованы первые члены разложения в ряд $\sin \epsilon \sqrt{\kappa}$ и $\sin \epsilon \sqrt{\kappa}$).
Перемножение матриц с учетом того, что $f_1 = f_1 - \alpha$, $f_2 = f_2 + \alpha$ и $\alpha = e/3$, дает следующую систему из двух уравнений относительно f_1 и f_2 :

$$\begin{cases} a_{12} = f_1 f_2 (p+d+L) + f_1 L (p+d) - f_2 p (d+L) - p_1 L, d = 0; \\ b_{12} = f_1 f_2 (q+d+T) + f_1 [d(q+d+T) - T(q \cdot d)] + f_2 [L(q, d) - \alpha(q, d+T)] + \alpha(q, d+L, T, T, d) - \alpha(q, d+T, T) - q, T, d = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где: $p_1 = p + e/2$, $q_1 = q + e/2$, $d = s + e$, $L_1 = L + e/2$, $T_1 = T + e/2$.

Решив систему (2) относительно неизвестных f_1 и f_2 , можно найти значения градиентов в линзах из выражений

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon} \sin \epsilon \sqrt{\kappa}}, \quad \text{и} \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon} \sin \epsilon \sqrt{\kappa}}.$$

С помощью калькулятора задача легко решается.

Например, для выбранных параметров $p = q = 2,57$ м, $L = T = 1,63$ м, $s = 0,32$ м, $e = 0,58$ м, $H\sigma = 1,053640$ Тл·м решением являются $f_1 = 0,932$ м, $f_2 = 0,6447$ м, откуда $\sqrt{\kappa}_1 = 1,44402$, $\sqrt{\kappa}_2 = 1,53351$, т.е. $G_1 = 2,1968$ Тл/м, $G_2 = 2,4776$ Тл/м. Решение же системы (1)

трансцендентных уравнений с помощью ЭВМ для данного примера дало значения $G_1 = 2,1897$ Тл/м и $G_2 = 2,4639$ Тл/м.

Таким образом, приближение "тонкой" линзы дает неплохую точность расчета, которая тем лучше, чем меньше эффективная длина линзы по сравнению с расстояниями s, p, q, L, T .

Приведенный метод расчета, т.е. когда решается систем уравнений $A_{\mu} = 0, b_{\mu} = 0$, является полной аналогией расчета условий фокусировки линзами в геометрической оптике. Однако этот метод совсем подходит для расчета фокусировки пучков ускоренных частиц. Он дает удовлетворительный результат, если размер эффективного источника достаточно мал, а эмиттанс пучка приближается к нулю. Этот метод годится также при расчете фокусировки продуктов реакции, вылетающих из мишени. В этом случае можно говорить о фокусировке и получении изображения той области мишени, на которую попадает первичный пучок ускоренных частиц.

В реальных условиях эмиттанс пучка не равен нулю. В свободном от силовых полей пространстве форма и наклон эллипса на фазовой плоскости меняются. На рис. 2а показаны огибающие пучка в свободном пространстве, например в горизонтальной плоскости, вдоль оси системы y (линии со стрелками). В точке y_1 пучок является сходящимся, его поперечный размер равен $2x_1$, на рис. 2б верхняя часть соответствующего ему эллипса на фазовой плоскости наклонена влево. В точке y_0 пучок имеет минимальный размер $2x_0$. Соответствующий

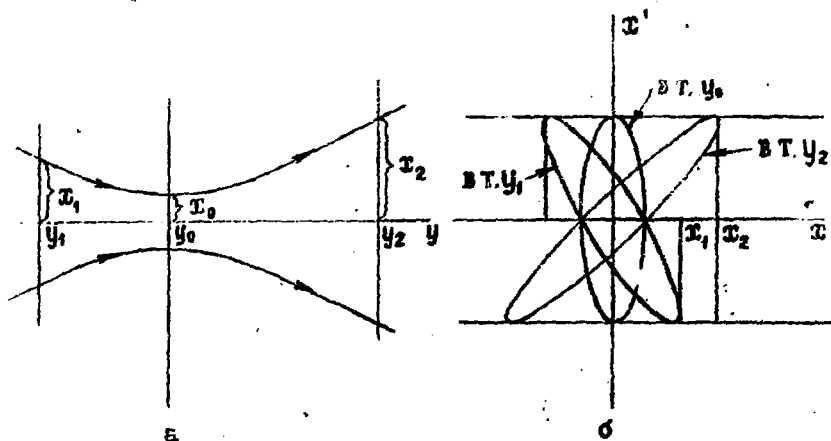


Рис. 2. Огибающие пучка в свободном пространстве (а) и фазовые эллипсы для трех точек оси y : y_1, y_0, y_2 (б).

эллипс пучка расположен вертикально (прямо), т.е. без наклона в ту или другую сторону. Такой эллипс называется прямым и соответствует месту минимального поперечного размера пучка, который называется кроссовером пучка. После кроссовера пучок снова расходитс и в точке X_2 имеет разм $\rho \propto X_2$, а соответствующий ему эллипс имеет наклон вправо. Согласно теореме Диувилля эмиттансы всех трех эллипсов (их площади) равны.

Если известны полуоси X_0 и X_0' прямого эллипса и матрица перехода $(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ от этого кроссовера в произвольную точку системы транспортировки, то можно найти значение отгибающих пучка в этой точке (т.е. максимальные отклонения частиц по координате X и углу X') из следующих выражений [2]:

$$\tilde{X} = \sqrt{(a_{11}X_0)^2 + (a_{12}X_0')^2}; \quad \tilde{X}' = \sqrt{(a_{21}X_0)^2 + (a_{22}X_0')^2}.$$

Только в кроссовере, т.е. когда эллипс прямой, выполняется равенство $\tilde{X} \tilde{X}' = X_0 X_0'$. Учитывая $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$ и обозначив $X = \frac{X_2}{X_1}$ это условие фокусировки кроссовера в кроссовер в горизонтальной плоскости можно записать в виде:

$$a_{12}a_{22} + X a_{11}a_{21} = 0. \quad (3)$$

Величина $X = \frac{X_2}{X_1}$ называется характеристической длиной пучка и равна расстоянию, на котором пересекаются в свободном от силовых полей пространстве выходящие из кроссовера две траектории частиц, имеющие начальные координаты $(X_0, 0)$ и $(0, X_0')$.

В работе Бенфорда [5] приводится общий вид матрицы перехода для фокусировки кроссовера в кроссовер

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{X_2}{X_1}} \cos \varphi & \sqrt{\frac{X_2}{X_1}} \sin \varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{\frac{X_2}{X_1}}} \sin \varphi & \frac{1}{\sqrt{\frac{X_2}{X_1}}} \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad (4)$$

где $\varphi = \frac{X_2}{X_1}$; φ - произвольный параметр; X_1 - характеристическая длина пучка в исходном кроссовере; X_2 - то же в конечном кроссовере. Исключая φ и произвольный параметр φ , можно получить это же уравнение (3), заменяя элементы матрицы при фокусировке кроссовера в кроссовер.

Рассмотрим случай фокусировки кроссовера в кроссовер одной тонкой линзой, например, в горизонтальной плоскости (рис.3). Матрица перехода в этом случае буде иметь вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & P \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f} & P + L - \frac{PL}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{PL}{f} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

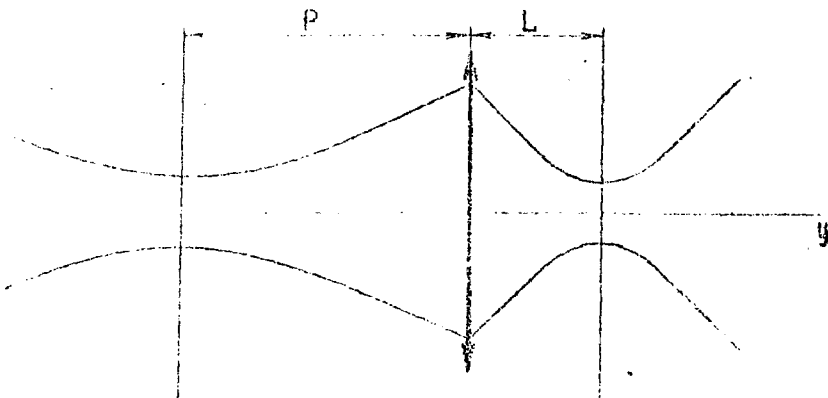


Рис.3. Фокусировка кроссовера в кроссовер одной тонкой линзой.

Если бы источник был точечный, а эмиттанс равен нулю, то условие фокусировки было бы $\alpha_{12} = 0$, т.е. $p + L - \frac{pL}{f} = 0$, что соответствует хорошо известному уравнению линзы из геометрической оптики

$$f = \frac{pL}{p+L}.$$

Используя свойства матрицы перехода (4) для фокусировки кроссовера в кроссовер, находим

$$\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{21}} = -X_1 X_2 = pL - pf - Lf,$$

откуда

$$f = \frac{pL + X_1 X_2}{p+L}.$$

Это выражение совпадает с уравнением линзы в геометрической оптике только в случае, когда источник **точечный**, т.е. когда характеристическая длина исходного пучка X_1 равна нулю.

Из матрицы перехода (5) и условия фокусировки кроссовера в кроссовер (3) получается уравнение для фокусного расстояния линзы

$$f^2(p+L) - f(p^2 + 2pL + X_1^2) + p^2 L + X_1^2 L = 0.$$

Это квадратное уравнение и поэтому имеет решение только при условии $X_1^2 - 2X_1 L + p^2 \geq 0$, откуда следует, что при $p \geq L \cdot X_1$ и нет быть любым, а при $p < L$ должны выполняться условия $X_1 \leq L - \sqrt{L^2 - p^2}$ или $X_1 \geq L + \sqrt{L^2 - p^2}$. Другими словами, не всякий кроссовер может быть сфокусирован в заданное место. Два решения квадратного уравнения для f соответствуют двум вариантам фокусировки. Первое решение дает сфокусированный пучок минимального поперечного сечения с меньшей характеристической длиной пучка, т.е. кроссовер (рис.4а). Второе решение дает также прямой эмиттанс, но с большей характерис-

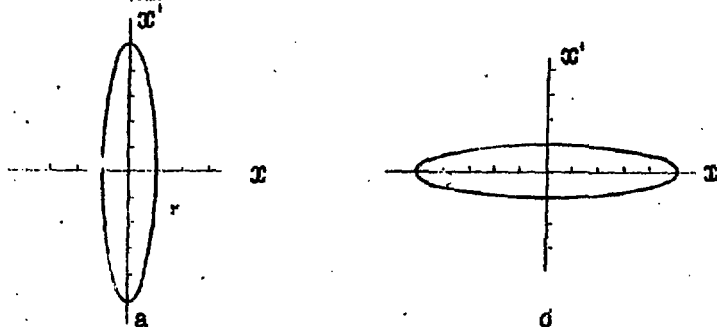


Рис.4. Два решения уравнения тонкой линзы: а - сфокусированный пучок; б - "параллельный" пучок.

тической длиной (гл.с.4б). По аналогии с геометрической оптикой второй случай соответствует получению почти "параллельного" пучка.

Используя общий характер свойств матрицы перехода при фокусировке кроссовера в кроссовер, можно написать условия для фокусировки пучка двумя линзами в горизонтальной и вертикальной плоскостях одновременно:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21} + X_1^2 a_{11}a_{21} = 0; \\ b_{11}b_{21} + Z_1^2 b_{11}b_{21} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Решение этой системы из двух трансцендентных уравнений позволяет найти необходимые значения токов в линзах для получения кроссоверов в заданных местах системы транспортировки (L и T), если известны места расположения и параметры исходных кроссоверов, т.е. $p, q, x_0, x_0', z_0, z_0'$.

В более общих случаях, когда между исследуемым дублетом линз и положениями кроссоверов находятся другие линзы с известными параметрами или отклоняющие магниты, матрицы свободных промежутков p, q, L, T зам. нятся на соответствующие матрицы перехода от исходных кроссоверов до первой линзы и от второй линзы до получаемых кроссоверов, т.е.

$$(p) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}; (q) = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}; (L) = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}; (T) = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Для решения системы (6), с учетом выражений (7), нахождения $\sqrt{K_1}$ и $\sqrt{K_2}$ (а следовательно и градиентов в обеих линзах) была составлена программа для ЭВМ. Вычисления с помощью ЭВМ дают четыре пары значений $\sqrt{K_1}$ и $\sqrt{K_2}$ (G_1 и G_2). Они соответствуют четырем вариантам фокусировки:

- 1) фокусировка по X и Z ;
- 2) фокусировка по X' , по Z' - "параллельный" пучок;
- 3) фокусировка по Z' , по X' - "параллельный" пучок;
- 4) по X и по Z' - "параллельный" пучок.

Эти варианты на фазовых плоскостях (X, X') и (Z, Z') представлены четырьмя комбинациями расположения прямых эллипсов (рис. 5).

Для уже рассмотренного случая расположения линз и крестов AB , т.е. при $p_{11} = p_{22} = q_{11} = q_{22} = L_{11} = L_{22} = T_{11} = T_{22} = 1$, $p_{12} = q_{21} = L_{12} = T_{21} = 0$, $k = 0,58$ м, $\rho' = 0,32$ м, $p_{12} = q_{21} = 2,57$ м, $L_{12} = T_{21} = 1,63$ м, $K_2 = 1,053540$ Тл/м и для некоторых характеристических длин пучка X_i и Z_i , на ЭВМ получены значения градиентов при фокусировке по X и Z (табл. I).

Таблица I. Зависимость решений от характеристических длин пучка.

$X_i, \text{ м}$	$Z_i, \text{ м}$	$G_x, \text{ Тл/м}$	$G_z, \text{ Тл/м}$
0	0	2,1897	2,4639
0,05	0	2,1882	2,4635
0,50	0	2,1942	2,4658
0,154	0,652	2,1743	2,4535
0,196	0,652	2,1649	2,4510
0,236	0,652	2,1530	2,4478
0,26	0,652	} решений нет	
0,30	0,652		
0,35	0,652		

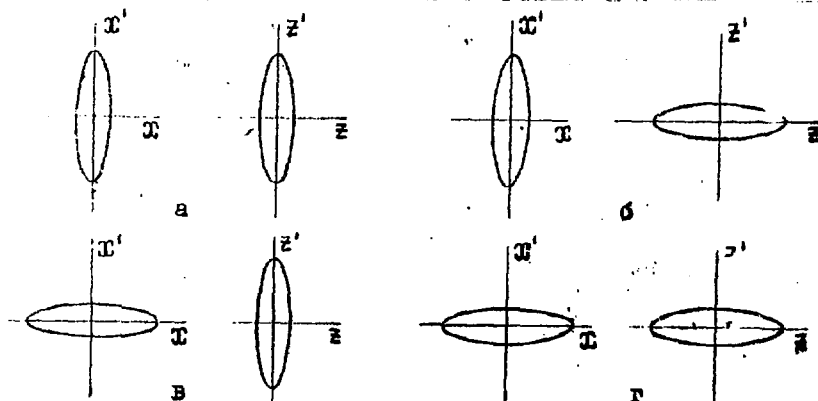


Рис. 5. Четыре варианта решений системы уравнений: а - фокусировка по X и Z ; б - фокусировка по X , по Z - "параллельный" пучок; в - фокусировка по Z , по X - "параллельный" пучок; г - по X и по Z - "параллельный" пучок.

Как видно из табл. I, различия в градиентах при фокусировке по формулам геометрической оптики ($X_1 = Z_1 = 0$) и при фокусировке кроссовера в кроссовер ($X_1 \neq 0, Z_1 = 0$) могут быть невелики. Различия тем меньше, чем меньше значения X_1 и Z_1 .

Вычисленные градиенты в линзах, естественно, отличаются при ошибках в измерении расстояний ρ, q, L, T и особенно при ошибке в определении эффективной длины линзы, что видно из табл. 2.

Таблица 2. Зависимость фокусирующих градиентов от эффективной длины линз и установочных размеров

$\rho = q,$ м	$L = T,$ м	$\ell,$ м	$S,$ м	G I линзы, Тл/м	G II линзы, Тл/м	Примечание
2,0	1,0	0,58	0,32	2,5672	3,1966	$Hq = 1,0535$ Тл·м
1,99	0,99	0,60	0,30	2,5013	3,1164	характ. длина пучка:
2,0	1,05	0,58	0,32	2,5412	3,1298	$X_1 = Z_1 =$
2,05	1,0	0,58	0,32	2,5452	3,1384	$= 0,1$ м

Изменение энергии частиц влияет на фокусирующие градиенты незначительно. Для примера, приведенного в табл. 2, изменение энергии, например на 4%, изменяет градиенты на 0,02%.

Если в системе транспортировки используются несколько дублетов линз, как это имеет место в разводке пучка из циклотрона У-240, то при расчетах градиентов в каждом дублете по законам геометрической оптики значительно возрастает суммарная ошибка расчета всей системы, т.е. в экспериментальном зале после прохождения 4 дублетов параметры пучка далеки от сфокусированного.

К сожалению, как об этом уже говорилось ранее, не любой кроссовер можно сфокусировать в кроссовер в заданном месте. Программа вычислений на ЭВМ в этом случае просто не находит решения. Однако решение можно найти, если изменить какой-либо из параметров ρ, q, L, T .

Теоретический анализ условий получения решения системы из двух трансцендентных уравнений очень сложен (а простой перебор различных вариантов путем вычислений на ЭВМ занимает много времени).

Для качественного анализа возможных вариантов решения задачи фокусировки можно использовать приближение тонкой линзы. В этом случае уравнения системы (6) будут иметь следующий общий вид:

$$\begin{cases} a_1 f_1^2 + a_2 f_1 f_2 + a_3 f_2^2 + a_4 f_1 f_2 + a_5 f_1^2 + a_6 f_2^2 + a_7 f_1 + a_8 f_2 + a_9 = 0; \\ b_1 f_1^2 + b_2 f_1 f_2 + b_3 f_2^2 + b_4 f_1 f_2 + b_5 f_1^2 + b_6 f_2^2 + b_7 f_1 + b_8 f_2 + b_9 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где коэффициенты a_i зависят от p, l, s, d, X_i , а b_i - от q, T, S, d, Z_i .

Если в эти уравнения подставлять произвольные значения f_1 и находить f_2 , то решение каждого уравнения дает две кривые на плоскости (f_1, f_2) . Причем одна из кривых решения первого уравнения связывает графически значение f_1 и f_2 , при которых в горизонтальной плоскости получается кроссовер, а вторая кривая первого уравнения соответствует получению почти "параллельного" пучка в этой же горизонтальной плоскости. Аналогичным образом две кривые решений второго уравнения системы дают связь f_1 и f_2 при получении кроссовера и почти параллельного пучка в вертикальной плоскости. Точки пересечения этих кривых дают четыре пары значений f_1 и f_2 , которые соответствуют четырем вариантам фокусировки. (см. рис. 5).

Удобнее, однако, рассматривать все на плоскости, где осями координат являются градиенты обеих линз и положительные значения градиентов соответствуют фокусировке пучка в горизонтальной плоскости. Для нахождения графических решений уравнений системы была составлена программа вычислений на ЭВМ с возможностью варьирования различных параметров. На рис. 6 представлены результаты решения системы (8) графическим методом для уже рассмотренного случая $p = q = 2,0$ м и $l = T = 1,63$ м.

Любая система транспортировки пучка, состоящая из магнитов, линз и свободных промежутков, может быть разбита на участки, состоящие по одному дублету квадрупольных линз. Для первого дублета исходный кроссовер пучка определяется измерением эмиттансы выведенного из ускорителя пучка. Положение полученного кроссовера после первого дублета является исходным кроссовером для последующего дублета и т.д. Положения промежуточных кроссоверов могут задаваться в принципе произвольно, но с обязательным учетом требований невыхода пучка за габариты (апертуру) ионопровода. Расчет каждого дублета и определение градиентов в кинзах можно выполнять различными способами, указанными выше и имеющими разную степень точности. Т.е. решением систем уравнений (2), (6), (8).

Самым простым и, однако, наименее точным, является метод реше-

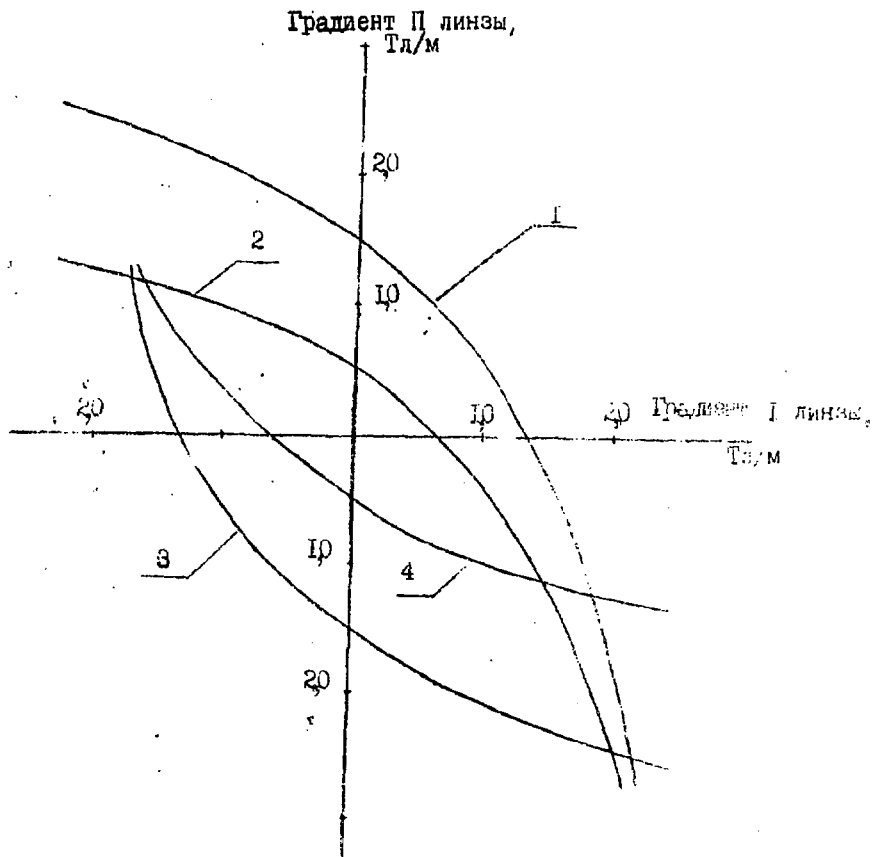


Рис. 6. Графическое изображение решений системы уравнений: 1 - линия минимальных значений X ; 2 - линия "параллельного" пучка по X ; 3 - линия минимальных значений Z ; 4 - линия "параллельного" пучка по Z .

ния системы (2), т.е. нахождения условий фокусировки по законам лучевой (геометрической) оптики с использованием приближений тонких линз. Этот способ позволяет быстро найти требуемые фокусные расстояния линз одного дублета с ошибкой не более 5%, что является иногда достаточным, потому что, как правило, токи в обеих линзах могут быть откорректированы по наблюдаемому эффекту фокусировки. Если рассчитывается сложная система, состоящая из нескольких дублетов, то ошибка значительно возрастает. Однако, полученные результаты расчета могут служить нулевыми приближениями для оптимизации условий фокусировки при использовании более сложных программ для ЭВМ, например широко известной программы *TRANSPORT* [6].

Программа решения на ЭВМ системы (6) transcendентных нелинейных уравнений написана на языке ФОРТРАН. Наиболее популярными методами решения систем нелинейных уравнений являются итерационные и градиентные. В этой программе использован итерационный метод Ньютона-Рафсона, как обладающий наибольшей скоростью сходимости. Требуемая точность (6 знаков после запятой) достигается обычно за 5 - 8 итераций в зависимости от выбора начального значения аргументов. Время работы программы приблизительно в 3,5 раза меньше времени программы, построенной на основе метода скорейшего спуска. Область определения аргументов в системе устанавливается заранее. Недостаток метода Ньютона-Рафсона заключается в возможности возникновения расхождений при неудачном выборе начальных значений или состоянии системы нелинейных уравнений, склонной к вырождению. Этот недостаток обходится еще на этапе итерационного процесса, если искомое значение хотя бы одного из аргументов выходит за область определения. Проблема выбора начальных значений решается методом прохода по сетке, наложенной на область определения аргументов. Опытным путем было установлено, что для нахождения всех решений системы достаточно шаг сетки сделать равным одной десятой от граничного значения области определения обоих аргументов. Система уравнений составлялась из условия того, чтобы эмиттансы горизонтального и вертикального движений перед входом в дублет линз равнялись произведениям огибающих $\tilde{x} \cdot \tilde{x}'$ и $\tilde{z} \cdot \tilde{z}'$ в заданных местах новых кроссоверов. В большинстве случаев в процессе расчета по программе получается четыре точных решения, при которых упомянутые произведения и исходные эмиттансы равны. Практический интерес, когда нет точных решений, представляют случаи отличия этих произведений от исходных эмиттансов на небольшую величину (до 10%). В этом случае число решений,

приближенных к точным, превосходит четыре. Такая возможность учтена в программе, при этом на терминал выводится информация о числе найденных неточных решений и их численные значения.

Последний вариант программы дает возможность пользователю работать с ЭВМ в диалоговом режиме. Результаты расчета выводятся на терминал и, при необходимости, на АЦПУ. Все требуемые для работы программы параметры вводятся с терминала и в дальнейшем могут быть изменены в процессе диалога с ЭВМ.

Список литературы

1. Ливингуд Дж. Принципы работы циклических ускорителей.-М.: Изд-во иностр.лит.,1963.
2. Штеффен К. Оптика пучков высокой энергии.-М.: Мир, 1969.
3. Явор С.Я. Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами.- М.: Атомиздат, 1968.
4. Котов В.И., Миллер В.В. Фокусировка и разделение по массам частиц высоких энергий.-М.:Атомиздат, 1969.
5. Бенфорд А. Транспортировка пучков заряженных частиц.-М.:Атомиздат, 1969.
6. TRANSPORT.- SERM SCI.REPT.- 1973.- Vol.1, N 016.

Научное издание

КОЛОТЫЙ Владимир Васильевич
КЕСУРИН Константин Константинович
МАКСИМОВ Юрий Климович
ПАВЛИН Владимир Андреевич

ФОТОСНИМКИ ДУБЛЕТОМ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛЕНЗ

Редактор Л.Н.Троян

Подп. в печ. 09.04.92. Формат 60x90/16. Бум. офс. № 2. Офс. печ.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 0,9. Тираж 160 экз. Заказ 127
Цена 20 к.

СКГБ с ЗИ Института ядерных исследований АН Украины
252028, Киев-28, проспект Науки, 47
