объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P2-92-443

Н.А.Черников

ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ НЬЮТОНА

Направлено в Труды Международной конференции
"Лобачевский и современная геометрия", Казань, 1992г.

1992

Лобачевский, создавая неевклидову геометрию, опирался на пример созданной Ньютоном теории тяготения. Он писал:

"*Некоторые математики невозможность определения линий помощию углов хотели принять за основание геометрии, но такое основание недостаточно, потому что разнородные количие могут быть в зависимости друг от друга*" [1, с. 69],

"*...величина притягательной силы, например, выражается массою, разделённой на квадрат расстояния... но когда верно, что силы зависят от расстояния, то линии могут быть также в зависимости с углами. По крайней мере разнородность одинакова в обоих случаях, которых различие не заключается собственно в понятии, но только в том, что мы познаём одну зависимость из опытов, а другую при недостатке наблюдений должны предполагать умственно, либо за пределами видимого мира, либо в тесной сфере молекулярных притяжений*" [2, с. 159-160].

Сравним установленную Лобачевским зависимость

$$tg \frac{1}{2} \Pi = exp \left(- \frac{p}{k}\right) \tag{1}$$

угла параллельности П от перпендикуляра p с установленной Ньютоном зависимостью ускорения f планеты от расстояния ρ до Солнца

$$f = \gamma m / \rho^2 . \tag{2}$$

Чтобы согласовать меру ускорения с мерой отношения массы Солнца m к квадрату расстояния, Ньютон ввёл в теорию тяготения константу γ, а чтобы согласовать меру угла с мерой расстояния, Лобачевский ввёл в геометрию константу k.

Но Лобачевский рассматривал теорию тяготения Ньютона не только в качестве примера. Он первым ввел неевклидову геометрию в небесную механику и поставил вопрос о том, какую перемену это введение внесёт в ньютоновскую теорию *тяготения. Сам же и ответил на* него [2, с. 159], заметив, что ускорение (2) можно написать в виде

$$f = 4 \pi \gamma m / S , \tag{3}$$

и установив , что в неевклидовом пространстве площадь сферы радиуса ρ равна

$$S = 4 \pi (k \, sh \frac{\rho}{k})^2 . \tag{4}$$

На основе этих результатов мною решена задача о движении планеты в пространстве Лобачевского [3]. Подведём итог.

Площадь (4) и длина окружности радиуса ρ в пространстве Лобачевского равны, соответственно, $4 \pi r^2$ и $2 \pi r$, где

$$r = k \, sh \frac{\rho}{k} . \tag{5}$$

Основная метрическая форма

$$d l^2 = L_{\alpha\beta} \, d x^\alpha \, d x^\beta \tag{6}$$

пространства Лобачевского в сферических координатах ρ, θ, φ равняется

$$d l^2 = d \rho^2 + r^2 (d \theta^2 + sin^2 \theta \, d \varphi^2) . \tag{7}$$

Функцию (3) можно представить в виде

$$f = \frac{\partial U}{\partial \rho} , \tag{8}$$

где U - гравитационный потенциал, порождаемый точечной массой m. Дополнительно принимаем условие

$$\lim_{\rho \to \infty} U = 0 . \tag{9}$$

Отсюда находим, что в пространстве Евклида

$$U = - \gamma m / \rho , \qquad (10)$$

а в пространстве Лобачевского

$$U = \frac{\gamma m}{k} \left(1 - cth \frac{\rho}{k}\right) . \qquad (11)$$

Потенциал (11) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U = 4 \pi \gamma m \delta (x) \delta (y) \delta (z) , \qquad (12)$$

где δ - обобщённая функция Дирака с аргументами

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \cos \varphi, \quad z = r \cos \theta, \qquad (13)$$

Δ - оператор Лапласа-Бельтрами в пространстве Лобачевского. Для скалярной функции U, не зависящей от углов θ и φ,

$$\Delta U = r^{-2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}\right) . \qquad (14)$$

Как указание на уравнение (12) мною были поняты следующие слова Лобачевского:

"*Полагаем, как и многие в этом уверены, что силы притягательные слабеют от распространения своего действия по сфере*" [2, с. 159].

Теперь, располагая метрикой (7) и потенциалом (11), составим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \frac{d l^2}{d t^2} - U \qquad (15)$$

и задаваемые ею уравнения движения планеты

$$\frac{d}{d t} \frac{d x^\alpha}{d t} + L^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{d x^\mu}{d t} \frac{d x^\nu}{d t} + L^{\alpha\sigma} \partial_\sigma U = 0 . \qquad (16)$$

Здесь ∂_σ означает частную производную по координате x^σ,

$L^{\alpha\sigma}$ - кометрический тензор, определяемый через метрический тензор $L_{\sigma\beta}$ и единичный аффинор δ^{α}_{β} из условия

$$L^{\alpha\sigma} L_{\sigma\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} , \tag{17}$$

$L_{\mu\nu}^{\alpha}$ - компоненты аффинной связности Кристоффеля, равные

$$L_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} L^{\alpha\sigma} (\partial_{\mu} L_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} L_{\sigma\nu} - \partial_{\sigma} L_{\mu\nu}) . \tag{18}$$

Кроме того, мы ввели здесь абсолютное, по Ньютону, время t (и абсолютно покоящееся пространство Лобачевского).

Теперь мы можем приступить к решению задачи Кеплера в пространстве Лобачевского.

В силу сферической симметрии сохраняется момент количества движения планеты с компонентами

$$M_1 = y \frac{d z}{d t} - z \frac{d y}{d t}, \quad M_2 = z \frac{d x}{d t} - x \frac{d z}{d t},$$

$$M_3 = x \frac{d y}{d t} - y \frac{d x}{d t}, \tag{19}$$

где x, y, z равны (13). Поэтому достаточно рассмотреть движение планеты в плоскости Лобачевского, на которой

$$\theta = \frac{\pi}{2} . \tag{20}$$

При этом $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = M$, где

$$M = r^2 \frac{d \varphi}{d t} . \tag{21}$$

Далее, так как функция Лагранжа (15) не зависит от времени, то сохраняется энергия планеты, равная

$$E = \frac{1}{2} \frac{d l^2}{d t^2} + U . \tag{22}$$

В случае (20) имеем

$$E = \frac{1}{2} [(\frac{d \rho}{d t})^2 + r^2 (\frac{d \varphi}{d t})^2] + U . \tag{23}$$

Исключая d t из (21) и (23), получаем дифференциальное уравнение

$$E = \frac{1}{2} M^2 r^{-4} \left[\left(\frac{d\rho}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right] + U \qquad (24)$$

первого порядка для траектории $\rho = \rho(\varphi)$.

Чтобы проинтегрировать уравнение (24), обозначим

$$k\, th \frac{\rho}{k} = \frac{1}{w} . \qquad (25)$$

Так как $d w = - r^{-2} d \varphi$, $w^2 = r^{-2} + k^{-2}$, то уравнение (24) преобразуется к виду

$$E = \frac{1}{2} M^2 \left[\left(\frac{d w}{d \varphi} \right)^2 + w^2 - k^{-2} \right] + \gamma m (k^{-1} - w) . \qquad (26)$$

Отсюда находим

$$k\, th \frac{\rho}{k} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} , \qquad (27)$$

где

$$p = \frac{M^2}{\gamma m} , \quad \varepsilon = \sqrt{(1 - \frac{p}{k})^2 + 2 \frac{p E}{\gamma m}} . \qquad (28)$$

Константа интегрирования уравнения (26) выбрана так, что наибольшему значению w соответствует угол $\varphi = 0$. Заметим, что подкоренное выражение в формуле (28) для ε не может быть отрицательным. Действительно, из (26) следует, что

$$E \geq \frac{1}{2} M^2 [w^2 - k^{-2}] + \gamma m (k^{-1} - w) . \qquad (29)$$

Тем уверенней можно сказать, что

$$E \geq - \frac{\gamma m}{2 p} (1 - \frac{p}{k})^2 , \qquad (30)$$

так как в правой части последнего неравенства стоит минимальное значение полинома от w, стоящего в правой части неравенства (29). Следовательно, ε - число действительное.

По определению, планета находится в финитном движении, которое возможно либо в случае $\varepsilon = 0$, $0 < p < k$, либо в случае $\varepsilon > 0$, $p > 0$, $p + k\,\varepsilon < k$. В первом случае орбита планеты является окружностью, а во втором - эллипсом. Интересно, что на плоскости Лобачевского, как и на плоскости Евклида, орбиту можно определить как множество точек, от которых до заданных двух точек (фокусов) сумма расстояний задана, причём в одном из фокусов находится Солнце. Если обозначить 2 a сумму расстояний от планеты до фокусов, то

$$E = \frac{\gamma\, m}{k} \left(1 - cth\, \frac{2\,a}{k}\right) . \qquad (31)$$

Располагая формулами (21) и (27), можно подсчитать период T обращения планеты вокруг Солнца:

$$T = \frac{\pi\, k}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{-E}} - \frac{1}{\sqrt{-E + 2\,\gamma\, m / k}} \right) . \qquad (32)$$

Как и в евклидовом случае, он не зависит от момента (21). Подставляя в (32) зависимость (31) энергии E от большой полуоси a, находим следующее выражение для квадрата периода:

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2}{\gamma\, m} \left(k\, sh\, \frac{a}{k} \right)^3 ch\, \frac{a}{k} . \qquad (33)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лобачевский Н.И. *Геометрия* (1823). Полн. собр. соч., Т. 2, М.-Л.: Гостехиздат, 1949, с. 43-107.
2. Лобачевский Н.И. *Новые начала геометрии с полной теорией параллельных* (1835). Полн. собр. соч., Т. 2, М.-Л.: Гостехиздат, 1949, с. 147-454.
3. Черников Н.А. *Введение геометрии Лобачевского в теорию гравитации.* В журнале: "Физика элементарных частиц и атомного ядра", 1992, Т. 23, вып. 5, с. 1155-1191.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 ноября 1992 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.00 к.
Д1,2-86-668	Труды 8 Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1986. /2 тома/	7 р.35 к.
Д3,4,17-86-747	Труды Международной школы по нейтронной физике. Алушта,1986.	4 р.50 к.
Д2-87-798	Труды 8 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1987.	3 р.55 к.
Д14-87-799	Труды П Международного симпозиума по проблемам взаимодействия мюонов и пионов с веществом. Дубна, 1987	4 р.20 к.
Д17-88-95	Труды IV Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1987.	5 р.20 к.
Д17-88-681	Труды Международного совещания "Механизмы высокотемпературной сверхпроводимости". Дубна, 1988.	1 р.50 к.
Д13-88-938	Труды XIII Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна,1988.	4 р.30 к.
Р2-89-138	Труды семинара "Гравитационная энергия и гравитационные волны". Дубна,1988.	1 р.10 к.
Д4-89-221	Труды рабочего совещания по разработке и созданию излучателя и детектора гравитационных волн. Дубна, 1988.	1 р.60 к.
Д9-89-52	Труды XI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна,1988 /2 тома/	14 р.35 к.
Д9-89-708	Труды II Международного совещания по циклотронам и их применению. Бехин, ЧССР,1989.	4 р.00 к.
Д7-87-123	Труды Совещания "Ренормгруппа-86". Дубна, 1986.	4 р.45 к.
Д7-87-68	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Дубна,1986.	7 р.10 к.

Д9-89-801	Труды Международной школы молодых ученых по проблемам ускорителей заряженных частиц. Дубна, 1988	2 р.25 к.
Д7-90-142	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Дубна,1989.	7 р.00 к.
Р2-90-245	Труды II семинара "Гравитационная энергия и гравитационные волны". Дубна, 1989.	1 р.70 к.
Д19-90-457	Труды рабочего совещания по исследованию механизма радиационно-индуцированного мутагенеза и репарации ДНК. Дубна, 1990.	4 р.00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79. Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.

Черников Н.А. P2-92-443
Геометрия Лобачевского и
теория тяготения Ньютона

В работе рассмотрены основы теории тяготения Ньютона в пространстве Лобачевского. В данную теорию входят две фундаментальные константы γ и κ. Первая принадлежит Ньютону, вторая - Лобачевскому. Сформулированы три закона Кеплера для планеты, движущейся в пространстве Лобачевского. Работа доложена автором на Международной конференции "Лобачевский и современная геометрия", посвященной двухсотлетию со дня рождения Н.И.Лобачевского (Казань, 1992).

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод Сандуковской Г.Г.

Chernikov N.A. P2-92-443
The Lobachevsky Geometry and
the Newton Gravity Theory

In the paper the principles of the Newton gravity theory in the Lobachevsky space are considered. The theory contains two fundamental constants γ and κ. The first belongs to Newton; and the second, to Lobachevsky. The three Kepler laws for a planet moving in the Lobachevsky space are formulated. The investigation has been presented at invited talk at the International conference "Lobachevsky and Modern Geometry" devoted to the 200th anniversary of the birthday of N.I.Lobachevsky (Kazan, 1992).

The investigation has been performed at the Laboratory Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992

16 коп.

Редактор Е.В.Калинникова. Макет Н.А.Киселевой.

Подписано в печать 13.11.92.
Формат 60х90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 0,54.
Тираж 490. Заказ 45818.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований.
Дубна Московской области.