NIIEFA-P--0906.

НИИЭФА П-0906

НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ
ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКОЙ АППАРАТУРЫ им. Д.В.ЕФРЕМОВА

Ю.А.Аристов, Г.М.Воробьев, А.В.Кузнецов

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ВИТКОВ ИНДУКТОРА ТОКАМАКА

П р е п р и н т

МОСКВА
ЦНИИАТОМИНФОРМ
1992

УДК 533.9.621.039.6 М-28
Аристов Ю.А., Воробьёв Г.М, Кузнецов А.В. Оптимизация положения витков индуктора токамака:
Препринт 0905.-М.: ЦНИИатоминформ, 1992, 39с. с ил.,
цена 1р.80к

В работе рассматриваются постановка и методы решения задачи оптимизации положения витков индуктора токамака. Целью оптимизации является определение положения витков индуктора, обеспечивающего минимально возможное рассеянное магнитное поле в области камеры при любом наперёд заданном значении вольт-секунд. Описаны алгоритмы решения поставленных задач, и приведены результаты расчетов для токамака STX. Показано, что разработанные методы могут быть использованы для определения оптимального положения витков любых катушек полоидального магнитного поля, обеспечивающих заданные конфигурацию и уровень магнитного поля.

Оглавление

© Центральный научно-исследовательский институт управления, экономики и информации Минатом Российской Федерации (ЦНИИатоминформ), 1992г.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, система катушек полоидального магнитного поля токамака состоит из катушек системы равновесия и индуктора. Индуктор является основным источником вихревого электрического поля, возбуждающего и поддерживающего электрический ток плазмы. В большинстве современных токамаков применяется индуктор без железного магнитопровода, что позволяет увеличить запас вольт-секунд и тем самым величину тока плазмы и длительность плазменного разряда. Для того, чтобы индуцировать разряд и обеспечить подъём тока плазмы, необходимо минимизировать рассеянное магнитное поле в области плазмы, поскольку рассеянное магнитное поле затрудняет пробой газа и отрицательно влияет на равновесие и устойчивость плазмы из-за своей высокой мультипольности. Опыт эксплуатации токамаков показывает, что уровень рассеянного магнитного поля перед пробоем газа не должен превышать нескольких гаусс, поскольку в противном случае увеличивается напряжение пробоя и возрастает доля убегающих электронов.

Важным является вопрос о выборе области внутри разрядной камеры, в которой необходимо обеспечить малый уровень рассеянных магнитных полей. Исследования пробоя на токамаке Т-7 [1] показали, что для успешного старта разряда необходимо обеспечить малый уровень рассеянного магнитного поля во всём объёме разрядной камеры. При уровне магнитного поля в центре индуктора 10 - 15 Тл уровень рассеянного магнитного поля в разрядной камере не должен превышать нескольких гаусс. Такой уровень магнитного поля требует тщательного выбора положения витков индуктора.

Известно, что положение плазменного шнура очень чувствительно к величине вертикальной и горизонтальной составляющих удерживающего магнитного поля. Поэтому чем ближе к идеальному индуктор, тем меньше уровень рассеянного магнитного поля и тем ближе к плазме можно расположить его витки и как следствие этого:

- потребуется менее мощная энергетика, поскольку будет меньше собственная индуктивность и больше взаимная индуктивность индуктора с плазмой, а также будет меньше электрическое сопротивление катушки и тепловые нагрузки на катушке;
- снизится вихревое напряжение пробоя, что позволит уменьшить скорость изменения магнитного поля на витках индуктора и тем самым удовлетворить ограничениям на величину и скорость роста тока, которые вытекают из требований к прочности конструкции, сверхпроводимости и т.д;
- повысится управляемость плазменного шнура, поскольку отпадёт необходимость в компенсации рассеянного магнитного поля индуктора полем катушек системы равновесия.

В настоящей работе описываются постановка и методы решения задачи оптимизации положения витков индуктора на основе методов нелинейной оптимизации. Поскольку методы нелинейной оптимизации находят локальный оптимум и быстро сходятся в достаточно малой окрестности оптимума, в настоящей работе уделяется большое внимание построению первого приближения. С помощью предлагаемого в настоящей работе метода построения первого приближения удаётся попасть в достаточно малую окрестность глобального оптимума.

Описываемые в настоящей работе численные методы оптимизации позволяют при заданных конструктивных ограничениях на положение витков индуктора из-за наличия в реальных конструкциях запрещённых для их размещения зон (в запрещенных зонах расположены камера, катушки тороидального поля и системы равновесия, диагностики, инжекторы и другие элементы конструкции) разместить витки индуктора таким образом, что рассеянное магнитное поле в области плазмы минимально при любом наперёд заданном значении вольт-секунд.

В разд.1 рассматриваются постановка и различные методы решения задачи оптимизации положения витков индуктора. Показано, что задача оптимизации положения витков индуктора сводится к задачам нахождения минимума некоторых функционалов (1),(6) или нахождения решения системы нелинейных уравнений (8),(9) при заданных ограничениях (2) на положение витков.

В § 1.1 рассматриваются четыре группы методов, с помощью которых решалась поставленная задача. Численные эксперименты показали, что наиболее эффективными оказались методы множителей, объединяющие в себе методы множителей Лагранжа и методы, использующие функции штрафа.

Известно, что методы нелинейной оптимизации хорошо работают в достаточно малой окрестности оптимума. Известно также, что идеальным индуктором можно считать охватывающую тороидальную разрядную камеру сверхпроводящую тороидальную оболочку, по которой течет ток, не создающий внутри оболочки магнитного поля.

В § 1.2 описывается метод построения первого приближения в задаче оптимизации положения витков индуктора, приводящий в достаточно малую окрестность глобального оптимума, при этом положение витков определяется с помощью процедуры, в основе которой лежит аппроксимация плотности поверхностного тока сверхпроводящей оболочки дискретными токами.

В разд.2 приведены примеры конкретных расчётов, в которых использовалась геометрия токамака STX. При этом выяснилось, что функция, описывающая сечение контура индуктора, витки которого расположены равномерно и в основном в центральной части соленоида, *должна быть достаточно гладкой (должна иметь непрерывную* вторую производную), а само сечение должно иметь большую треугольность, умеренную вытянутость и малое аспектное отношение.

1. ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ ВИТКОВ ИНДУКТОРА

Как отмечалось во введении, идеальный индуктор не должен создавать рассеянного магнитного поля в заданной области S. Это может быть область разрядной камеры или плазмы.

При определении оптимального положения витков индуктора достаточно вычислить рассеянное магнитное поле на границе l области S, поскольку рассеянное магнитное поле внутри области S меньше, чем на границе.

В дальнейшем мы будем использовать цилиндрическую систему координат (R,φ,Z) с осью Z, направленной вдоль главной оси тора.

Пусть в сечении $\varphi = const$ цилиндрической системы координат контур l является границей области S, а значение магнитного поля индуктора B_o - верхним уровнем допустимого рассеянного магнитного поля (или его составляющих B_r или B_z) на границе l области S.

Тогда задачу оптимизации положения витков индуктора можно свести к задаче минимизации функционала [2]

$$F(R_k,Z_k) = \int_l (B(l) - B_o)^2 dl \qquad (1)$$

при заданных ограничениях на положение (R_k,Z_k) витков индуктора вида:

$$h(R_k,Z_k) = 0; \qquad (2а)$$

$$g(R_k,Z_k) \leqslant 0; \qquad (2б)$$

$$R_{min} \leqslant R_k \leqslant R_{max} \text{ и } Z_{min} \leqslant Z_k \leqslant Z_{max}. \qquad (2в)$$

Ограничения на положение витков индуктора появляются из-за наличия в реальных конструкциях запрещённых для их размещения зон. В запрещённых зонах расположены камера, катушки тороидального поля и системы равновесия, диагностики, инжекторы и другие элементы конструкции. В общем случае ограничения на положение витков индуктора могут быть достаточно сложными. Например, в случае, когда витки индуктора должны принадлежать заданному контуру, ограничения на их положение имеют вид равенств (2а), а в случае, когда витки индуктора должны быть расположены между заданными контурами, ограничения па их положение имеют вид неравенства (2б), (2в).

Отсутствие рассеянного магнитного поля в области S эквивалентно условию постоянства магнитного потока в этой области, включая границу. Это значит, что для всех точек (R,Z), принадлежащих области S, должно выполняться условие

$$\Phi(R,Z) = \Phi_{ind} = \text{const}. \qquad (3)$$

Здесь Φ_{ind} – заданное значение магнитного потока индуктора в области S и

$$\Phi(R,Z) = \sum_{k=1}^{N} G(R,Z;R_k,Z_k)\, I, \qquad (4)$$

где (R_k,Z_k) – координаты витков индуктора; I – ток в одном витке индуктора; $G(R,Z;R_k,Z_k)$ – величина магнитного потока в точке с координатами (R,Z) от единичного кольцевого тока, имеющего координаты (R_k,Z_k). В дальнейшем будем отделять координаты точки наблюдения от координат источника тока точкой с запятой. Функция $G(R,Z;R_k,Z_k)$ является функцией Грина и вычисляется по хорошо известным формулам:

$$G(R,Z;R_i,Z_i) = \frac{\mu_0}{\pi k}\sqrt{R\,R_i}\left[\ (1-\frac{k^2}{2})K(k) - E(k)\ \right], \qquad (5)$$

где $k^2 = \dfrac{4RR_i}{(R + R_i)^2+(Z - Z_i)^2}$;

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\ ; \quad E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\ d\varphi.$$

$K(k)$ и $E(k)$ - полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Заметим, что формулы (4) и (5), справедливые для тонких колец с током, будут справедливы и для витков катушки, если позаботиться о том, чтобы форма сечения витков катушки не влияла на величину магнитного поля внутри разрядной камеры. Этого можно добиться, если сечение витков катушки разбить на части так, чтобы погрешность, вносимая формой сечения витков катушки, была пренебрежимо мала.

Следуя (1), задачу оптимизации положения витков индуктора в терминах магнитного потока можно свести к задаче минимизации функционала:

$$F(R_k,Z_k) = \int_S (\Phi(R,Z) - \Phi_{\iota nd})^2\ dRdZ \qquad (6)$$

при ограничениях (2).

И, наконец, задачу оптимизации положения витков индуктора можно свести к задаче нахождения решения системы нелинейных алгебраических уравнений. С этой целью в формуле (4) положим $I = 1$ и построим сетку $(R_i,Z_i) \in S$, $i = \overline{1,n}$, покрывающую область S.

Тогда из условий (3), (4) получим систему нелинейных алгебраических уравнений относительно координат (R_k, Z_k) индуктора:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{ind} &= \sum_{k=1}^{m} G(R_1, Z_1; R_k, Z_k) + \sum_{k=m+1}^{N} G(R_1, Z_1; R_k, Z_k); \\
&\vdots \\
\Phi_{ind} &= \sum_{k=1}^{m} G(R_j, Z_j; R_k, Z_k) + \sum_{k=m+1}^{N} G(R_j, Z_j; R_k, Z_k); \\
&\vdots \\
\Phi_{ind} &= \sum_{k=1}^{m} G(R_n, Z_n; R_k, Z_k) + \sum_{k=m+1}^{N} G(R_n, Z_n; R_k, Z_k).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Здесь m – число витков индуктора, меняющих своё положение; N – общее число витков индуктора; n – число узлов сетки, охватывающей область S.

Пусть для определённости

$$\Phi_{ind} = \sum_{k=1}^{N} G(R_1, Z_1; R_k, Z_k).$$

Тогда система (7) будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m} (G(R_2, Z_2; R_k, Z_k) - G(R_1, Z_1; R_k, Z_k)) + \\
&+ \sum_{k=m+1}^{N} (G(R_2, Z_2; R_k, Z_k) - G(R_1, Z_1; R_k, Z_k)) = 0; \\
&\vdots \\
&\sum_{k=1}^{m} (G(R_n, Z_n; R_k, Z_k) - G(R_1, Z_1; R_k, Z_k)) + \\
&+ \sum_{k=m+1}^{N} (G(R_n, Z_n; R_k, Z_k) - G(R_1, Z_1; R_k, Z_k)) = 0.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Таким образом, имеем систему n нелинейных алгебраических уравнений с m неизвестными.

В общем случае $n \neq m$. В частном случае, когда координаты витков индуктора принадлежат некоторому заданному контуру, описываемому с помощью уравнений, аргументом которых является некий параметр φ (см., например, (16)), система (3) будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m} \left(G(R_2,Z_2;\varphi_k) - G(R_1,Z_1;\varphi_k)\right) + \\
&+ \sum_{k=m+1}^{N} \left(G(R_2,Z_2;\varphi_k) - G(R_1,Z_1;\varphi_k)\right) = 0; \\
&\quad \vdots \\
&\sum_{k=1}^{m} \left(G(R_n,Z_n;\varphi_k) - G(R_1,Z_1;\varphi_k)\right) + \\
&+ \sum_{k=m+1}^{N} \left(G(R_n,Z_n;\varphi_k) - G(R_1,Z_1;\varphi_k)\right) = 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Таким образом, задача оптимизации положения витков индуктора сводится к задаче нахождения решения системы нелинейных алгебраических уравнений (8), (9) при ограничениях на положение витков (2).

§ 1.1. МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОЛОЖЕНИЯ ВИТКОВ ИНДУКТОРА

Используя хорошо известные формулы численного интегрирования, задачи (1),(2) и (2),(6) можно свести к задачам минимизации функции многих переменных при ограничениях, заданных в виде равенств или неравенств. В общем случае они формулируются следующим образом:

Найти минимум функции $f(x)$

при условиях $h(X) = 0$ и $g(X) \leqslant 0$,

где $f\colon R^n \to R$, $h\colon R^n \to R^m$, $g\colon R^n \to R^r$ – заданные функции, причём $m \leqslant n$, $r \leqslant n$.

Введением вектора дополнительных переменных z задачу, содержащую ограничения в виде равенств и неравенств, можно свести к задаче, все ограничения которой имеют вид равенств:

Найти минимум функции $\bar{f}(x,z)$

при условиях $\bar{h}_i(x,z) = 0, \qquad i = 1, m;$

$\bar{g}_i(x,z) = 0, \qquad i = 1, r;$

где $\bar{f}(x,z) = f(x);$

$\bar{h}_i(x,z) = h_i(x), \qquad i = 1, m;$

$\bar{g}_i(x,z) = g_i(x) + z_i^2, \quad i = 1, r.$

В реальных проектах число витков индуктора может достигать несколько сот и даже тысяч, поэтому использование поисковых методов типа симплексного метода Нелдера-Мида [3] для решения задач (1),(2); (2),(6); (2),(8); (2),(9) неприемлемо, поскольку требует больших вычислительных затрат. В настоящей работе рассматриваются методы, использующие производные. В задачах (2), (6); (2),(8); (2),(9) можно получить аналитический вид производных. Производные магнитного потока Φ по координатам R и Z выражаются через составляющие поперечного магнитного поля (b_r и b_z, см. (14)) с помощью формул:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 2\pi R b_z; \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = -2\pi R b_r.$$

В задаче (1),(2) вычисление аналитических производных можно заменить вычислением производных с помощью разностных схем, однако возникающие при этом ошибки, особенно в окрестности экстремума, где градиент близок к нулю, ограничивают применение подобной аппроксимации.

Из большого числа методов решения задач нелинейной оптимизации с ограничениями мы рассматривали методы, которые условно можно объединить в четыре основные группы:

1. *Методы возможных направлений*, в основе которых лежит идея итеративного спуска, не выводящего за пределы допустимого множества. Если x_k - допустимая точка, то очередное направление спуска d_k определяется из условий убывания ($\nabla f(x_k)\, d_k < 0$) и допустимости (точка $x_k + \alpha d_k$ должна быть допустимой при достаточно малых положительных α).

Затем на множестве $\{ x_k + \alpha d_k \mid \alpha > 0 \}$ находится α_k и вычисляется новая допустимая точка $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, такая, что $f(x_{k+1}) < f(x_k)$. Методы возможных направлений хорошо зарекомендовали себя в задачах с линейными ограничениями, но они неприменимы в задачах с нелинейными ограничениями в виде равенств, а многие из них к тому же непригодны и в задачах с нелинейными ограничениями в виде неравенств.

2. *Методы Лагранжа* основаны на решении системы уравнений и неравенств, которые могут быть получены из необходимых условий оптимальности, и в задаче с ограничениями в виде равенств записываются в виде:

$$\nabla_x L(x,\lambda) = \nabla f(x) + \lambda^* \nabla h(x);$$
$$\nabla_\lambda L(x,\lambda) = h(x) = 0,$$

где $L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^* h(x)$ - функция Лагранжа.

Вектор множителей Лагранжа λ рассматривается как вектор неизвестных, равноправный с вектором x, и итерации ведутся одновременно по x и λ.

3. *Методы штрафов*, в которых ограничения учитываются с по-

мощью функций штрафа. Методы состоят в последовательном решении задачи безусловной оптимизации:

минимизировать $f(x) + C_k\ |h(x)|^2/2$ при условии $x \in R^n$, где $\{C_k\}$ - числовая последовательнсость положительных чисел, удовлетворяющих условиям $C_k < C_{k+1}$ при всех k и $C_k \to \infty$.

Методы штрафов привлекли наше внимание (несмотря на свои недостатки, главными из которых являются медленная сходимость и плохая обусловленность задачи при больших значениях элементов числовой последовательности C_k) своей простотой, возможностью легко учитывать нелинейные ограничения, наличием мощных методов безусловной оптимизации.

4. *Методы множителей*, которые объединяют в себе методы, использующие функции штрафа, и метод множителей Лагранжа. К функции Лагранжа добавляется квадратичный штраф. В результате получаетя модифицированная функция Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = f(x) + \lambda^* h(x) + C\ |h(x)|^2.$$

Метод множителей состоит в решении последовательности задач безусловной минимзации:

$$\text{минимизировать } L_{C_k}(x,\lambda_k) \quad \text{при условии } x \in R^n, \tag{10}$$

где $\{C_k\}$ - последовательность положительных значений параметра штрафа. Последовательность векторов множителей $\{\lambda_k\}$ вычисляется по рекурентной формуле

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + C_k\ h(x_k), \tag{11}$$

где x_k - решение задачи (10). Начальный вектор λ_1 задаётся до начала итеративного процесса, а последовательность $\{C_k\}$ может выбираться *либо* заранее, *либо* C_k могут вычисляться в ходе итеративного процесса.

Для сходимости метода множителей не нужно неограниченно увеличивать C_k. Поэтому в методе множителей не возникает трудностей из-за плохой обусловленности, как в методе штрафа. Кроме того, итеративный процесс (10) обычно сходится к вектору множителей Лагранжа значительно быстрей, чем последовательность $\{C_k h(x_k)\}$ в методе штрафа.

Как уже было сказано, число витков в индукторе может достигать многих сотен, а ограничения на их положение иметь довольно сложный характер (с учётом их взаимного положения) и, кроме того, методы нелинейной оптимизации хорошо работают в окрестности оптимума, поэтому методы построения первого приближения, приводящие в окрестность глобального оптимума, существенно облегчают поиск глобального оптимума в задачах нелинейной оптимизации.

Перейдём к описанию метода построения первого приближения в задаче оптимизации положения витков индуктора.

§ 1.2. МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПОЛОЖЕНИЯ ВИТКОВ ИНДУКТОРА

Пусть в сечении φ = const цилиндрической системы координат контур C, описываемый уравнением $f(R,Z)$ = const, ограничивает сверхпроводящую тороидальную оболочку. Тогда ток J, индуцированный в тороидальном сверхпроводнике, распределяется так, что магнитное поле внутри сверхпроводника равно нулю.

Уравнение для определения плотности тока $j(l)$ получается из условия обращения в нуль тангенциальной составляющей магнитного поля на внутренней стороне контура C и имеет вид [4]

$$\int_C (\; b_\tau(l;l_1)j(l_1) - b_\tau(l_1;l)j(l)\;)\; dl = 0, \qquad (12)$$

где $b_\tau(l, l_1)$ – тангенциальная составляющая магнитного поля на контуре C в точке наблюдения l от единичного тока, находящегося в точке l_1.

Используя хорошо известные формулы численного интегрирования, интегральное уравнение (12) можно свести к системе линейных алгебраических уравнений, которую нужно дополнить условием нормировки (например, равенством единице интеграла от плотности тока тороидального сверхпроводника, имеющего в своём сечении контур C).

Ядро интегрального уравнения вычисляется с помощью простой формулы

$$b_\tau(R,Z;R_1,Z_1) = b_Z(R,Z;R_1,Z_1)\cos\omega - b_r(R,Z;R_1,Z_1)\sin\omega, \quad (13)$$

где ω – угол между осью R и вектором нормали l_n, проведённым к контуру C и пересекающим его в точке (R,Z) $\in$ C (см. приложение, стр. 23, рис.1).

$$tg\,\omega = \frac{\partial f}{\partial r} \Big/ \frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

В формуле (13) $b_Z(R,Z;R_1,Z_1)$ и $b_r(R,Z;R_1,Z_1)$ являются значениями магнитного поля в точке (R,Z) от единичного тока, расположенного в точке (R_1,Z_1), и вычисляются по хорошо известным формулам:

$$b_r(R,Z;R_1,Z_1)=\frac{\mu_0}{2\pi R}\frac{(Z-Z_1)}{\sqrt{(R+R_1)^2+(Z-Z_1)^2}}\left[\frac{R^2+R_1^2+(Z-Z_1)^2}{(R-R_1)^2+(Z-Z_1)^2}E(k) - K(k)\right];$$

$$(14)$$

$$b_Z(R,Z;R_1,Z_1)=\frac{\mu_0}{2\pi\sqrt{(R+R_1)^2+(Z-Z_1)^2}}\left[K(k) - \frac{R^2-R_1^2+(Z-Z_1)^2}{(R-R_1)^2+(Z-Z_1)^2}E(k)\right].$$

Численно решая уравнение (12) на контуре C произвольного сечения с помощью формул (13), (14) и функций $f(R,Z) = const$ или $dZ/dR = f(R)$ (см., например, (15)), описывающих контур C, получим искомое распределение плотности поверхностного тока $j(l)$, не создающего рассеянного магнитного поля внутри тороидальной сверхпроводящей оболочки заданного сечения.

Для определения положения витков индуктора необходимо аппроксимировать распределение поверхностного тока $j(l)$ дискретно распределёнными токами. В настоящей работе предлагается аппроксимировать поверхностный ток $J(l)$ делением контура C на N_{ind} неравных частей (по числу витков однослойного индуктора) следующим образом:

- вычислить значение тока I_o в одном витке индуктора делением $J(l) = \int\limits_l j(l)dl$ на N_{ind} равных частей;

- вычислить значение концов $[l_i, l_{i+1}]$ отрезков контура C, при которых $\int\limits_{l_i}^{l_{i+1}} j(l)dl$ равен I_o;

- по значениям величин l_i, l_{i+1} и функции $f(R,Z)=const$, описывающей контур C, вычислить координаты витков однослойного индуктора, помещая виток с током I_o в центр тяжести криволинейной трапеции, основаниями которой являются отрезок $[l_i, l_{i+1}] \in C$ и функция $j(l)$, $l \in [l_i, l_{i+1}]$.

Описанная процедура пригодна для определения положения витков однослойного индуктора, когда витки могут располагаться в любом месте контура C. Как уже отмечалось в начале раздела, из энергетических соображений индукторы делают многовитковыми и, следовательно, многослойными. На базе описанной процедуры можно построить многослойный индуктор.

В настоящей работе рассматриваются два способа построения многослойного индуктора. В одном из них на каждой из $N_{сл}$ оболочек (по числу слоёв) с помощью описанной процедуры определяются координаты витков каждого слоя индуктора.

В другом способе задаются размеры окна центральной части, число слоёв и число витков индуктора. Определяются положение середины окна $R_{ср}$ и толщина витка индуктора. Строится контур C, проходящий через точку ($R_{ср}$, 0), и с помощью описанной выше процедуры определяются координаты однослойного индуктора. Координаты Z витков каждого слоя совпадают с координатами Z однослойного индуктора, а координаты R витков каждого слоя будут отличаться от соответствующих координат однослойного индуктора на предварительно вычисленную толщину витка индуктора. При необходимости эти процедуры могут быть легко модифицированы.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Отметим, что замена интеграла (12) суммами по формуле трапеций с 300 узловыми точками даёт достаточно высокую точность вычислений плотности тока $j(l)$. При этом отношение магнитных полей вне и внутри контура C

$$\frac{B_{ср}(R,Z)}{\bar{B}(\bar{0},\bar{0})}$$

для всех нижеприведённых примеров не превышает величины 10^{-}[illegible].

В качестве примеров рассмотрим распределение плотности тока на поверхностях тороидальных сверхпроводников, имеющих различные сечения.

Вначале рассмотрим распределение плотности тока тороидальго сверхпроводника, сечение которого имеет форму одного из так называемых оптимальных соленоидов [5]. Такую форму имеет не оказывающий сопротивление изгибу тороидальный соленоид, опирающийся на цилиндр под давлением собственного магнитного поля.

Уравнение, описывающее контур, опирающийся на цилиндр, имеет вид

$$\frac{dZ}{dR} = \frac{\ln AB - 2\ln R}{\sqrt{\ln^2\frac{B}{A} - (\ln AB - 2\ln R)^2}}, \quad Z(B) = 0, \qquad (15)$$

где $R = A$, пока $Z \leqslant Z_A$, Z_A - значение координаты Z при $R = A$, полученной из решения уравнения (15), A - минимальное, а B - максимальное значения координаты R на контуре C. Значения A и B задаются.

На рис.2 показано сечение тороидального сверхпроводника, описываемое уравнением (15) с аспектным отношением, равным 1.4, распределение плотности тока $j(l)$ тороидального сверхпроводника, не создающего внутри контура C магнитного поля, и распределение поверхностного тока $J(l) = \int\limits_l j(l)dl$.

На рис.2 - рис.13 на оси абсцисс отложена половина длины l контура C, а сечение, распределение плотности тока $j(l)$ и распределение поверхностного тока $J(l)$ тороидального сверхпроводника расположены в том же поряке, что и на рис.2.

На рис.2, 4 обращает на себя внимание наличие пика плотности тока $j(l)$ тороидального сверхпроводника, приходящегося на точку перехода контура от прямолинейного участка к криволинейному, описываемому уравнением (15).

Если при наличии пика плотности тока $j(l)$ следовать описанной в § 1.2 процедуре аппроксимации поверхностного тока дискретными токами, то в окрестности пика плотности будем иметь большую концентрацию витков индуктора, т.е. в центральной части соленоида и в окрестности пика плотности будут разные коэффициенты заполнения витков. Из конструктивных соображений допускать этого нельзя.

Можно показать, что плотность тока $j(l)$ сверхпроводящей тороидальной оболочки зависит от первой производной функции, описывающей контур С. Следовательно, если мы хотим иметь непрерывное распределение плотности тока $j(l)$ и его К-ой производной, то мы должны позаботиться о том, чтобы была непрерывна вместе со своей К + 1 производной функция, описывающая контур С, который является сечением сверхпроводящей тороидальной оболочки.

Примером такого контура может служить контур, описываемый уравнениями:

$$
\begin{aligned}
&R = A, \text{ для } Z \leqslant Z_A; \\
&\left.\begin{aligned} R &= R_o + A_o \cos(\varphi + \gamma \sin\varphi); \\ Z &= Z_o + A_o k \sin\varphi; \end{aligned}\right\} \quad (\text{ для } \pi \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 \;) \\
&\left.\begin{aligned} R &= R_o^1 + A_o^1 \cos(\varphi + \gamma^1 \sin\varphi); \\ Z &= Z_o^1 + A_o^1 k^1 \sin\varphi. \end{aligned}\right\} \quad (\text{ для } \pi/2 < \varphi \leqslant 0 \;)
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

Контур (16) состоит из трёх частей: прямолинейного участка и двух участков, описываемых деформированными эллипсами с параметрами R_o, A_o, γ, k; R_o^1, A_o^1, γ^1, k^1.

Параметры R_o, A_o, γ, k являются соответственно большим и малым радиусами, треугольностью и вытянутостью контура.

При $\gamma = 0$ и $k = 1$ уравнения (16) описывают окружность, при $\gamma = 0$, $k \neq 1$ – эллипс, при $\gamma \neq 0$, $k \neq 1$ – деформированный эллипс.

Заметим, что эллипсы сопряжены на вершине контура С.

Если для определения контура С задаваться теми же параметрами, которые мы использовали для описания контура (15) (A, B, Z_{max}), то в этом случае параметры деформированных эллипсов выразятся через A, B, Z_{max} следующим образом:

$$A_o = (R_{max} - A) / (1 + cos(\pi/2 + \gamma));$$
$$R_o = A_o + A;$$
$$k = (Z_{max} - Z_o) / A_o; \quad (17)$$
$$R = A_o \sin(\pi/2 + \gamma) / k.$$

На рис.3 показан контур С, описываемый уравнениями (16), а на рис.4 показаны плотности токов тороидальных сверхпроводников, имеющих в своем сечении контуры, описываемые уравнениями (15) и (16). Видно, что в случае (16) (вторая кривая) отсутствует пик плотности тока, поскольку уравнения, описывающие контур (16), имеют непрерывную вторую производную.

На рис.5 - рис.7 показаны плотности токов тороидальных сверхпроводников, имеющих в своём сечении контур С, описываемый теми же уравнениями (16), с одинаковыми треугольностями и вытянутостями, но с разными аспектными отношениями, равными соответственно 1.4 и 50. Видно, что при увеличении аспектного отношения плотность тока тороидального сверхпроводника стремится к некоторой постоянной величине.

На рис.8 - рис.10 показаны плотности токов тороидальных сверхпроводников, имеющих в своем сечении контуры с одинаковыми аспектными отношениями и вытянутостями, но разными треугольностями. Видно, что увеличение треугольности приводит к усилению эффекта крутизны установки, т.е. чем круче установка (меньше аспектное отношение) и больше треугольность, тем круче спад плотности тока. Это значит, что большая часть тока сосредоточена во внутренней области катушки.

И наконец, на рис.11 - рис.13 показаны плотности токов тороидальных сверхпроводников, имеющих в своем сечении контуры с одинаковыми аспектными отношениями и треугольностями, но разными вытянутостями. Видно, что в тороидальном сверхпроводнике, имеющем в своём сечении более вытянутый контур, более равномерно распределён ток.

Из всего вышесказанного следует, что если мы хотим иметь индуктор, у которого витки равномерно и в основном распределены в центральной части соленоида, то мы должны позаботиться о том, чтобы функция, описывающая сечение тороидального сверхпроводника, была непрерывна вместе со своей второй производной, а само сечение сверхпроводящей оболочки имело большую треугольность и умеренную вытянутость, а сам сверхпроводник был достаточно крутым.

В общем виде системы (8) и (9) можно записать следующим образом:

$$
\begin{aligned}
& f_1(R,Z) = 0; \\
& \vdots \\
& f_i(R,Z) = 0; \\
& \vdots \\
& f_n(R,Z) = 0;
\end{aligned}
\tag{18}
$$

и введением функционала

$$
F = \Big(\sum_{i=1}^{n} K_i f_i^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{19}
$$

свести задачи (2),(8) и (2),(9) к задачам, описанным в разделе 1.1.

В формуле (19) K_i являются весовыми коэффициентами, позволяющими получать требуемую конфигурацию магнитного поля в заданной области камеры. Заметим, что минимум функционала (19) достигается на решении системы (18). Задавшись начальным приближением, полученным с помощью метода, описанного в § 1.2, находим решения задач безусловной минимизации (18), (19) методами, описанными в § 1.1. При решении задачи безусловной минимизации проводим спуск, например, методом Флетчера-Ривса (поскольку методы спуска имеют более широкую область сходимости, чем методы, специфические для задачи решения системы нелинейных уравнений), и таким путём получим удовлетворительное приближение исходной задачи. Исходя из полученного приближения, на заключительном этапе итераций производим уточнение решения при помощи метода второго порядка, например, квазиньютоновского (поскольку эти методы имеют большую скорость сходимости при наличии достаточно хорошего начального приближения).

Приведённые выше алгоритмы мы использовали при написании соответствующих вычислительных программ, которые затем применили при оптимизации положения витков индуктора токамака STX [6].

Предварительное расположение витков было сделано с помощью описанного в § 1.2 метода. Интегральное уравнение (12) решалось численно. Было получено распределение плотности поверхностного тока $j(l)$. Используя полученное распределение плотности поверхностного тока и описанный в § 1.2 метод, мы определили оптимальное положение витков однослойного индуктора. После этого, с учётом конструктивных ограничений на положение витков, положение последних витков варьировалось вначале по контуру C, затем по всей области с тем, чтобы добиться возможно большей компенсации рассеянного магнитного поля. Для того, чтобы уменьшить объём вычислений, значения функции Грина $G(R,Z;R_k,Z_k)$ и магнитных потоков $\Phi = G\ I$ для витков, не меняющих своё положение, вычислялись один раз и запоминались.

На рис.14 показано распределение модуля рассеянного магнитного поля по оси R в экваториальной плоскости до оптимизации положения внешних витков и после.

На рис.15 показано распределение модуля рассеянного магнитного поля на оси Z на радиусе $R = R_0$. На приведённых рисунках видно, что за счёт оптимизации положения внешних витков удаётся более чем на порядок снизить уровень рассеянного магнитного поля.

На рис.16, 18 и 19 показаны индуктор токамака STX вместе с полной картиной изолиний модуля магнитного поля, а на рис.17 – изолиний магнитного потока в области разрядной камеры. Внутренняя часть соленоида состоит из четырёх слоёв по 75 витков в каждом.

Для сравнения на рис.20 – 23 показаны изолинии модуля магнитного поля и магнитного потока в области разрядной камеры токамака STX, координаты витков индуктора которого выбраны по традиционной схеме.

Приведённые расчёты показывают, что оптимизация положения витков индуктора позволяет снизить уровень рассеянного магнитного поля на границе области разрядной камеры до десяти гаусс при величине магнитного поля в центре индуктора, равной 15 Тл.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описываются постановка и методы решения задачи оптимизации положения витков индуктора. Показано, что оптимальное положение витков индуктора, создающего необходимые конфигурацию и уровень полоидального магнитного поля, может быть получено с помощью методов нелинейной оптимизации.

Исходя из того, что методы нелинейной оптимизации хорошо работают в достаточно малой окрестности оптимума и идеальным индуктором является охватывающая разрядную камеру сверхпроводящая тороидальная оболочка с текущим по ней током, в настоящей работе предложен метод построения первого приближения, приводящий в достаточно малую окрестность глобального оптимума. Метод состоит в аппроксимации плотности поверхностного тока сверхпроводящей тороидальной оболочки дискретными то...ми.

При этом обнаружено, что ...деление плотности тока тороидальной сверхпроводящей оболочки, имеющей в своём сечении не оказывающий сопротивление изгибу тороидальный соленоид, опирающийся на цилиндр под давлением собственного магнитного поля, имеет пик плотности, приходящийся на точку переходе контура от прямолинейного участка к криволинейному. Наличие пика плотности приводило к большой концентрации витков в окрестности пика плотности, чего нельзя было допускать из конструктивных соображений.

Была выяснена причина пика плотности, и предложен способ его устранения. При этом установлено, что функция, описывающая сечение контура индуктора, витки которого расположены равномерно и в основном в центральной части соленоида, должна быть достаточно гладкой (должна иметь непрерывную вторую производную), а само сечение должно иметь большую треугольность, умеренную вытянутость и малое аспектное отношение.

В работе рассматривались четыре группы численных методов, с помощью которых решалась задача оптимизации положения витков индуктора: методы возможных направлений, методы штрафов, методы множителей Лагранжа и методы множителей. Численные эксперименты показали, что наиболее эффективными оказались методы множителей, объединяющие в себе методы множителей Лагранжа и методы, использующие функции штрафа.

В работе приведены примеры расчётов, в которых использовалась геометрия токамака STX. Приведённые расчёты показывают, что использование методов нелинейной оптимизации при выборе положения витков индуктора позволяет снизить уровень рассеянного магнитного поля на границе области разрядной камеры до 10 Гс при величине магнитного поля в центре индуктора, равной 15 Тл.

Проведено сравнение уровня и конфигурации рассеянного магнитного поля токамака STX, витки индуктора которого были выбраны с использованием методов нелинейной оптимизации и по традиционной схеме. Сравнение показало, что уровень рассеянного магнитного поля в первом случае как минимум на порядок ниже, чем во втором.

Очевидно, что разработанные методы применимы и в случае, когда относительное положение витков отдельной группы не меняется. Кроме того, эти же методы могут быть использованы для определения оптимального положения любых катушек полоидального магнитного поля, обеспечивающих наперёд заданные конфигурацию и уровень магнитного поля.

ПРИЛОЖЕНИЕ

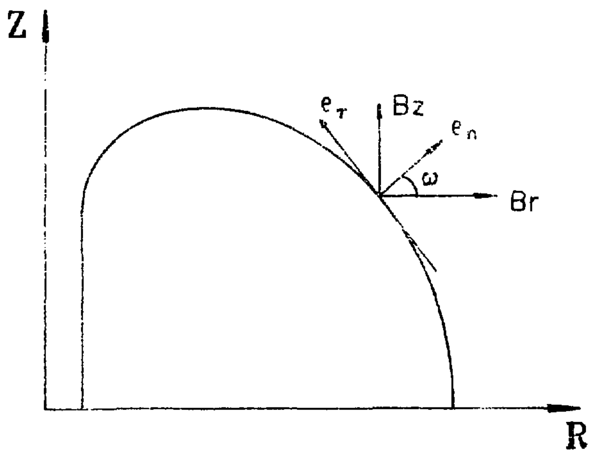

Рис. 1.

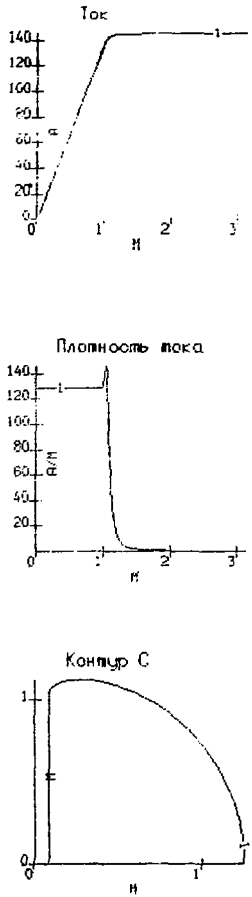

Рис. 2

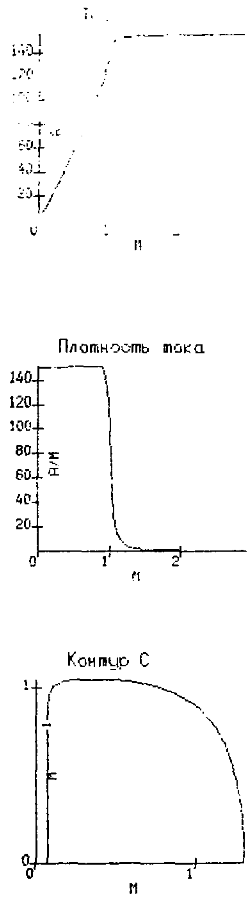

Рис. 3

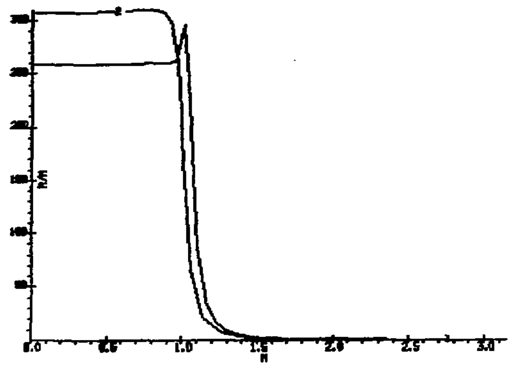

Рис. 4

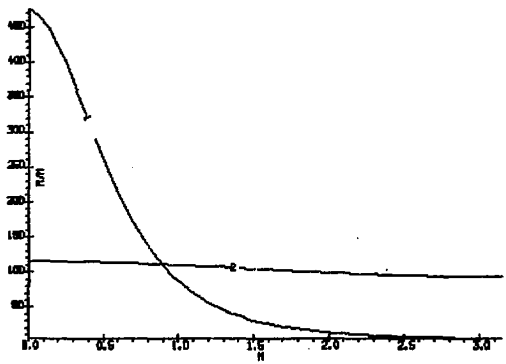

Рис. 5

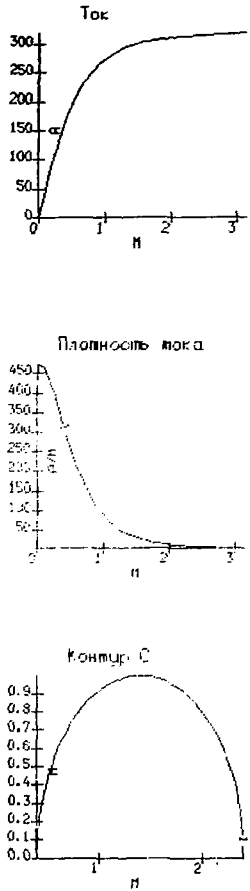
Ток
300
250
200
150
100
50
0
α
0
1
2
3
M
Плотность тока
450
400
350
A/M
0
1
2
3
M
Контур C
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
1
2
M

Рис. 6

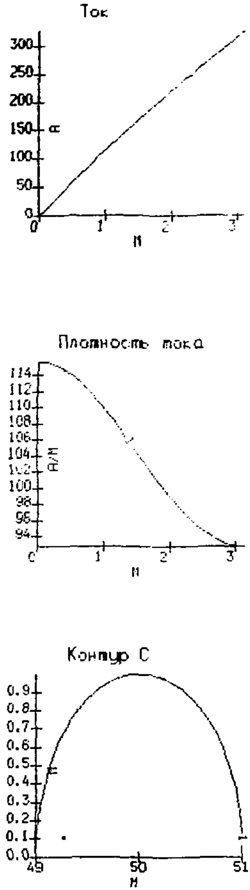
Ток
300
250
200
150
100
50
0
α
0
1
2
3
M
Плотность тока
114
112
110
108
106
104
102
100
98
96
94
A/M
0
1
2
3
M
Контур C
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
49
50
51
M

Рис. 7

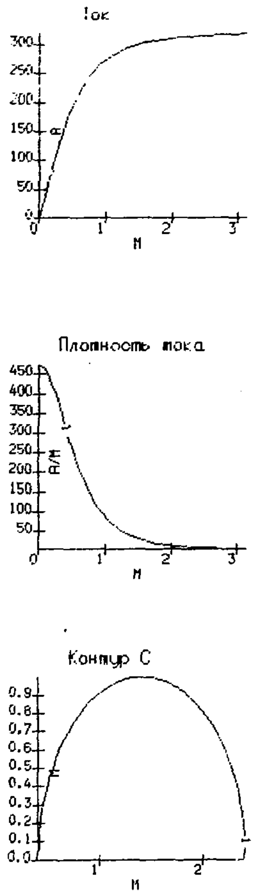
Ток
300
250
200
150
100
50
0
α
0
1
2
3
М
Плотность тока
450
400
350
300
250
200
150
100
50
А/М
0
1
2
3
М
Контур С
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
1
2
М

Рис. 8

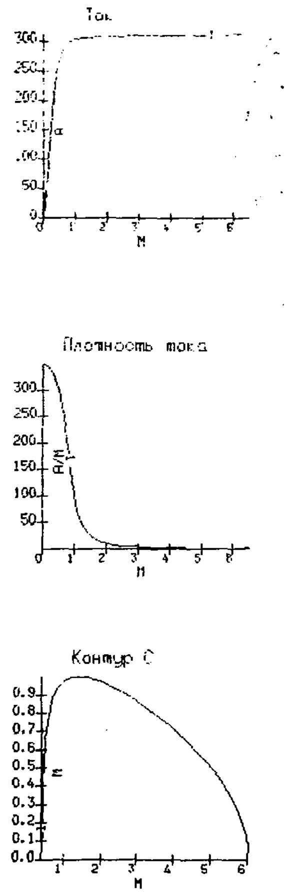
Ток
300
250
200
150
100
50
0
α
0
1
2
3
4
5
6
М
Плотность тока
300
250
200
150
100
50
А/М
0
1
2
3
4
5
6
М
Контур С
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
1
2
3
4
5
6
М

Рис. 9

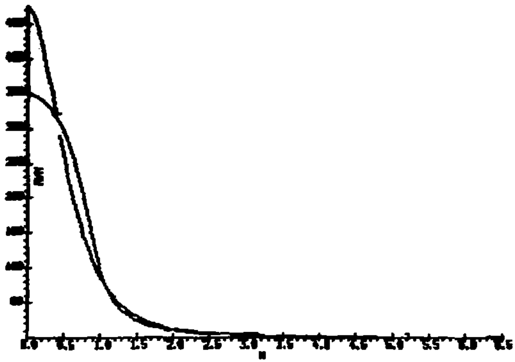

Рис. 10

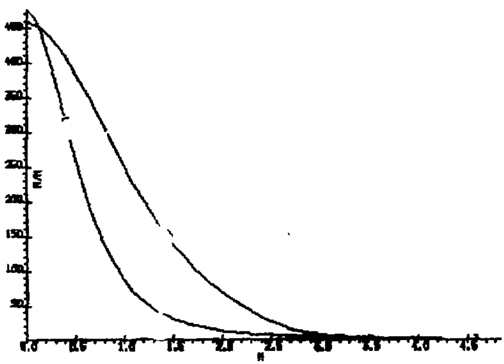

Рис. 11

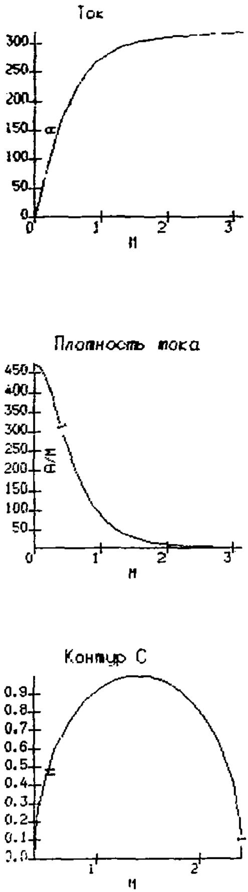
Ток
а
М
Плотность тока
А/М
М
Контур С
М

Рис. 12

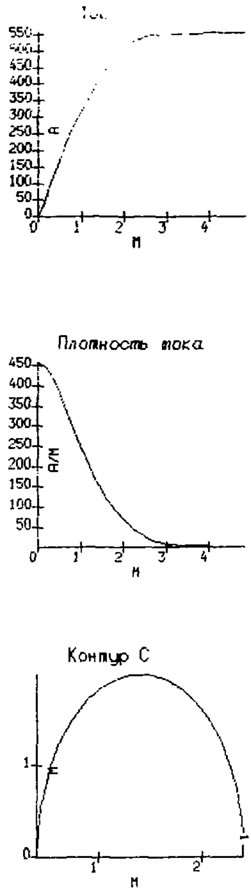
а
М
Плотность тока
А/М
М
Контур С
М

Рис. 13

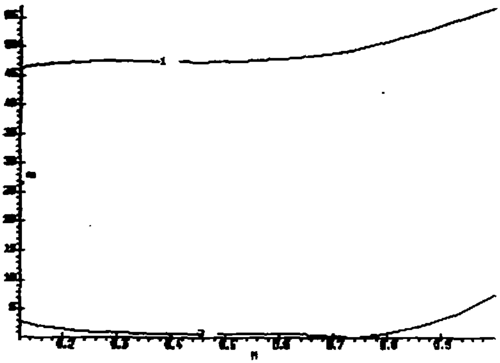

Рис. 14

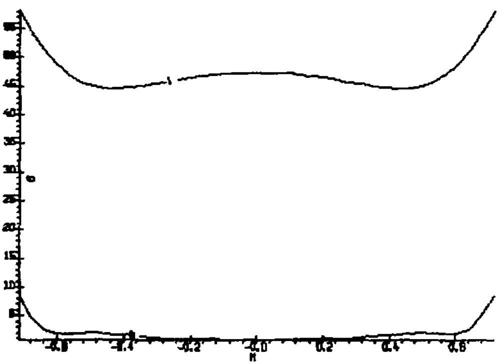

Рис. 15

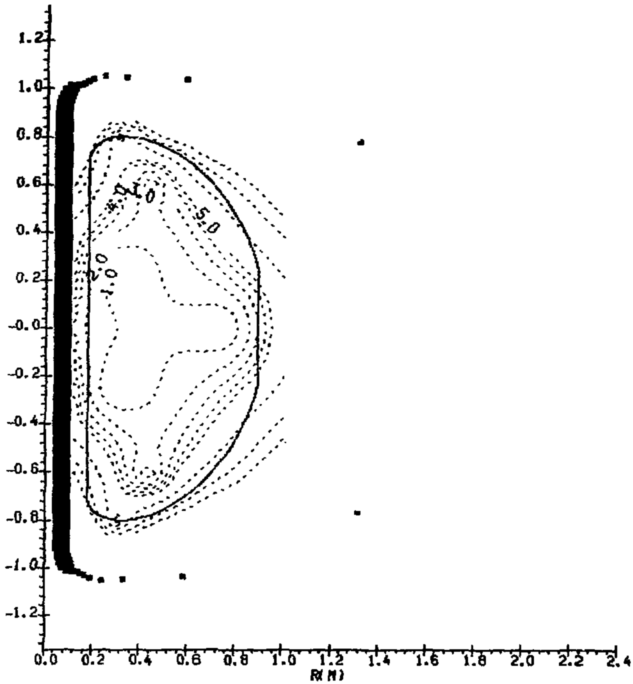

Рис. 16. Изолинии модуля магнитного поля токамака STX

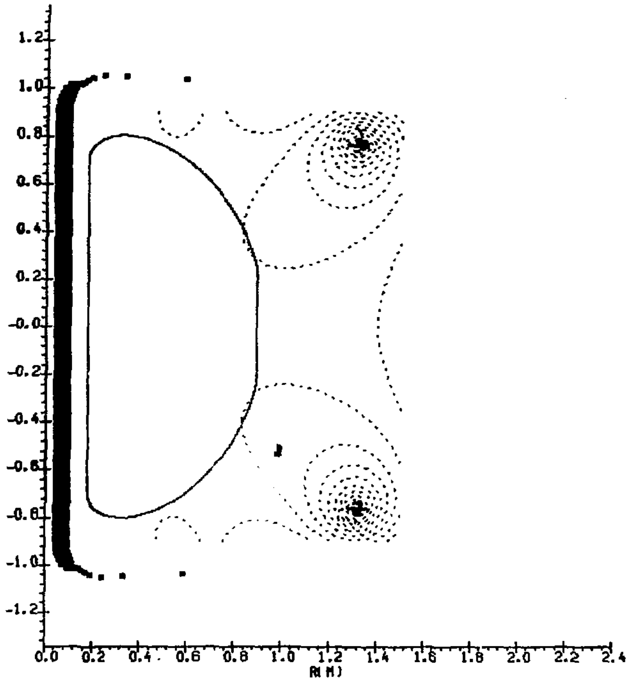

Рис. 17 Изолинии магнитного потока токамака STX

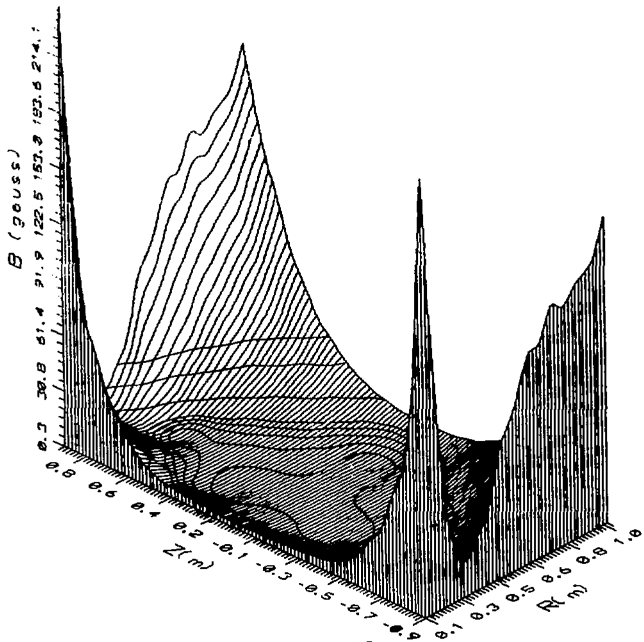
B (gauss)
0.3
30.8
61.4
91.9
122.5
153.0
183.6
214.1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.1
-0.3
-0.5
-0.7
-0.9
Z(m)
0.1
0.3
0.5
0.6
0.8
1.0
R(m)

Рис.18

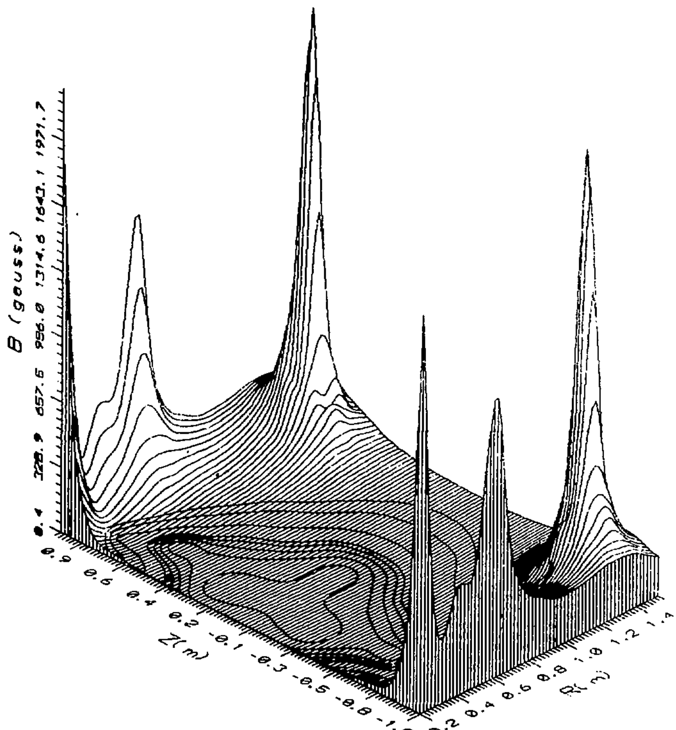
B (gauss)
0.4
328.9
657.6
986.0
1314.6
1643.1
1971.7
0.9
0.6
0.4
0.2
-0.1
-0.3
-0.5
-0.8
-1.0
Z(m)
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
R(m)

Рис.19

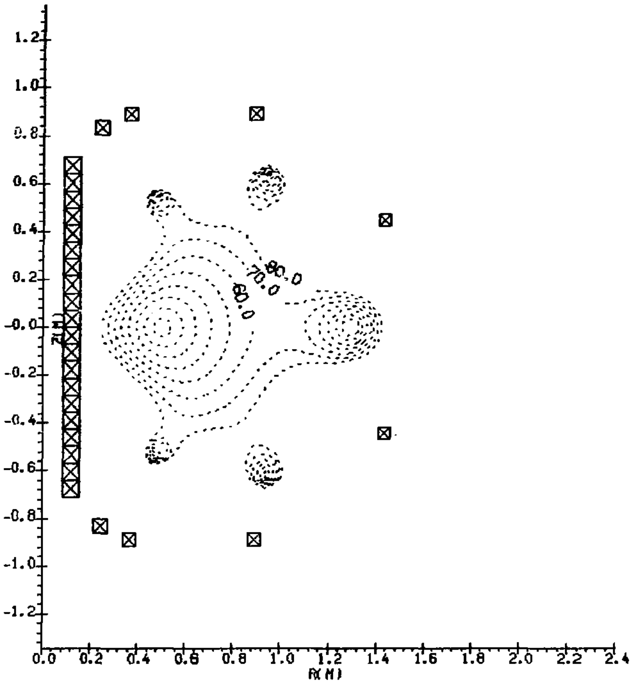

Рис. 20 Изолинии модуля магнитного поля токамака STX

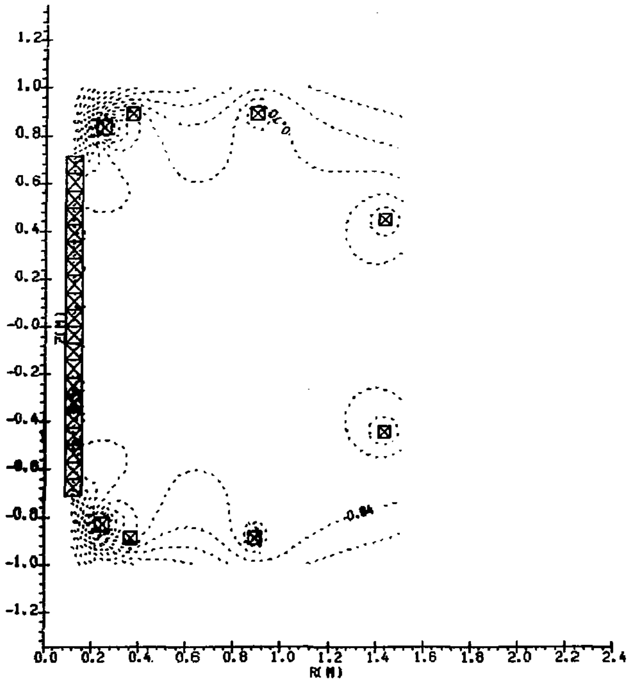

Рис. 21 Изолинии магн[redacted]ово потока
токамака STX

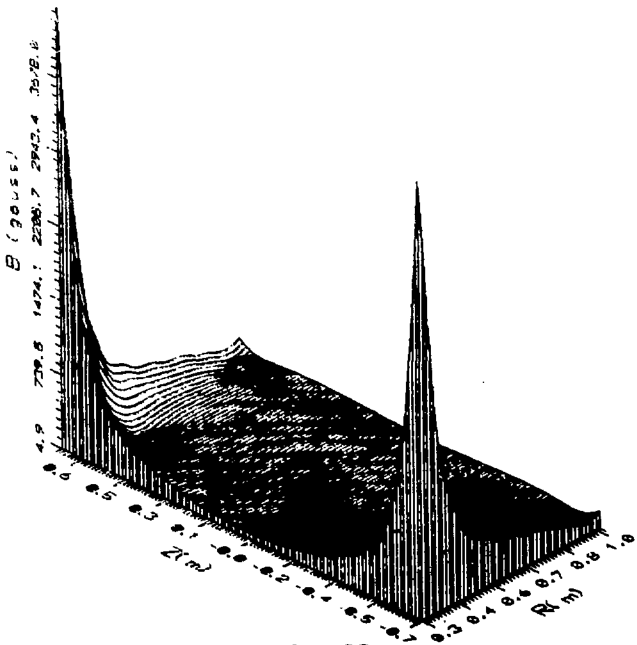

Рис.22

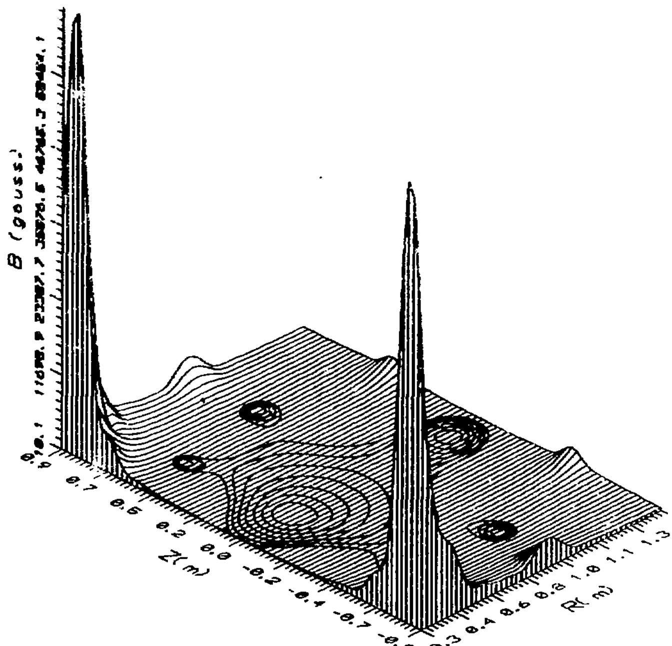

Рис.23

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бревнов Н.Н, Кузнецов Н.В. Изучение физических процессов в начальной стадии формирования плазменного шнура. М., 1984. -19с. (Препринт / ИАЭ: 3984/7).
2. Toi.K. and Takeda T. // Japan. J. appl. Phys. 1977. 16. P.325.
3. Nelder J.A. and Mead R. // Comput.J. 1965. 7. P.308.
4. Zakharov L.E. // Nuclear Fusion. 1973. 13. P.595.
5. Шафранов В.Д. Об оптимальной форме тороидальных соленоидов // ЖТФ 1972. Т.XLII, вып.9.
6. Peng M. Proposal for the spherical torous experiment Oak Ridge, 1985.

Юрий Александрович Аристов
Геннадий Михайлович Воробьёв
Александр Владимирович Кузнецов

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ ВИТКОВ ИНДУКТОРА ТОКАМАКА

Редактор В.Л.Гусева

Зак. N 84/81. Подписано в печать 22.04.92 г. Офсетная печать.
Формат 60x90/16. Уч.-изд.л. 1,8. Тираж 120 экз.
Индекс 3649. Цена 1р.80к.

Отпечатано в НИИЭФА