



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P11-93-265

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов

ГЕНЕРАТОРЫ МАТРИЧНО-ФАКТОРИЗОВАННЫХ  
ПРЕДСТАВЛЕНИЙ  
БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ  
И ИМ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

Направлено в «Siberian Journal of Computer Mathematics»

1993







$$\begin{pmatrix} E_{K+1} \\ (\beta) E_{K+1, K+2} \\ \dots \\ (\beta) E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [B^{-1} - z \cdot \hat{c}] (z)_{K+1, K+1} & & \\ & \dots & \\ & & [B^{-1} - z \cdot \hat{c}] (z)_{m-1, m-1} \\ & & & [B^{-1}]_{m, m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [B^{-1}] (z)_{K+1, K+1} \\ [B^{-1} - \beta \cdot z] (z)_{K+2, K+2} \\ \dots \\ [B^{-1} - \beta \cdot z] (z)_{m-1, m-1} \\ [B^{-1} - \beta \cdot z] (z)_{m, m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{K+1} \\ (\hat{c}) E_{K+2, K+2} \\ \dots \\ (\hat{c}) E_m \end{pmatrix} \quad (I. II)$$

А также

Представления I.4 (при условии II)

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_{K-1} \\ \dots \\ E_{K-1} \\ \dots \\ E_{K-1} \\ \dots \\ E_{K+1} \\ \dots \\ E_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1^{K-2} \\ \dots \\ \Lambda_K \quad z_K \\ \dots \\ P_K \quad G_{K-1} \\ \dots \\ C_m^m \\ \dots \\ C_{K+1}^m \end{pmatrix} = C(A, G) = C \quad (I. I2)$$

$\{\hat{c}_j = -\prod_{\beta=K+1}^j \beta\}_{j=K+1}^m, \{\hat{c}_i = -\prod_{\beta=i+1}^{K-1} \beta\}_{i=1}^{K-2}, \{\hat{z}_j = P \cdot \prod_{\beta=j+1}^{K-2} \hat{c}_{\beta} \cdot B(A, G)\}_{j=1}^{K-2}, \{\hat{z}_i = B(A, G) \cdot \prod_{\beta=K+2}^i \beta \cdot P\}_{i=K+2}^m$  (I. I3)  
а соответствующие структурные матрицы  $[\beta, \hat{\beta}, c, \hat{c}]$  и последовательности матриц  $\{\Lambda\}$  и  $\{G\}$  — определены в (I.9).

Здесь также  $[C_1^{K-2}$  и  $C_{K+1}^m]$  — ведущие усечённые блочно-трёхдиагональные подматрицы общего вида (I. I), для которых имеют место /I3/ представления вида

$$\begin{pmatrix} [B^{-1} - \beta \cdot P]_{11} & & & \\ & [B^{-1} - \beta \cdot P]_{22} & & \\ & & \dots & \\ & & & (P) [B^{-1} - \beta \cdot P]_{K-3, K-3} \\ & & & & (P) [B^{-1}]_{K-2, K-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(c)_{1, 2} \\ E(c)_{2, 3} \\ \dots \\ E(c)_{K-3, K-2} \\ E_{K-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(\hat{\beta})_{1, 2} \\ E(\hat{\beta})_{2, 3} \\ \dots \\ E(\hat{\beta})_{K-3, K-2} \\ E_{K-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [B^{-1}]_{11} \\ (P) [B^{-1} - P \cdot C]_{1, 2} \\ \dots \\ (P) [B^{-1} - P \cdot C]_{K-3, K-3} \\ (P_{K-2}) [B^{-1} - P \cdot C]_{K-2, K-2} \end{pmatrix} \quad (I. I4)$$

$$\begin{bmatrix} [B^{-1} - \hat{\beta} \cdot P]_{N+1, N+1} & & & \\ (P)[B^{-1} - \hat{\beta} \cdot P]_{N+2, N+2} & & & \\ \dots & & & \\ (P)[B^{-1} - \hat{\beta} \cdot P]_{m-1, m-1} & & & \\ (P_m)[B_{mm}^{-1}] & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(c)_{N+1, N+2} \\ E(c)_{N+2, N+3} \\ \dots \\ E(c)_{m-1, m} \\ E_m \end{bmatrix} = C(A, G) = \begin{bmatrix} E(\hat{\phi})_{N+1, N+2} \\ E(\hat{\phi})_{N+2, N+3} \\ \dots \\ E(\hat{\phi})_{m-1, m} \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B^{-1}]_{N+1, N+1} \\ (P)[B^{-1} - P \cdot c]_{N+2, N+2} \\ \dots \\ (P)[B^{-1} - P \cdot c]_{m-1, m-1} \\ (P_m)[B_{mm}^{-1} - P_m \cdot c_m] \end{bmatrix} \quad (I.15)$$

Кроме того, в работе /I<sub>4</sub>/ факторизации I.1 (при условии I<sub>1</sub>) и факторизации I.2 (при условии I<sub>2</sub>) были представлены в виде:

Представление I.5 (при условии I<sub>1</sub>)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_{N-2} \\ z_1 \dots z_{N-1} E_{N-1} \\ E_{N, N+1} \dots F_m \\ E_{N+1} \\ \dots \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{N-2} \\ \Lambda_N z_N \\ P_N (q_N - \theta_N) \\ C_m^m \end{bmatrix} = C(\Lambda) = C \begin{bmatrix} E_1 z_1 \\ E_2 z_2 \\ \dots \\ E_{N-2} z_{N-2} \\ E_{N-1} \\ E_N \\ z_{N+1} E_{N+1} \\ z_{N+2} E_{N+2} \\ \dots \\ z_m E_m \end{bmatrix}, \text{ где} \quad (I.16)$$

$$\left\{ \begin{aligned} z_j &= P \cdot \beta(A) \cdot \prod_{\beta=j+1}^{N-2} \beta_j^{N-2}, \quad \{F_j = z_j \cdot \prod_{\beta=N+1}^j C_\beta \cdot \beta(A)\}_{j=N+1}^m, \quad \{z_i = \prod_{\beta=i+1}^{N-2} \beta(A) \cdot z_i\}_{i=1}^{N-2}, \quad \{z_i = \beta(A) \cdot \prod_{\beta=N+1}^i \beta_\beta \cdot P_{N+1}\}_{i=N+1}^m, \\ \theta_N &= z_{N+1} \cdot \beta(A) \cdot P_{N+1}. \end{aligned} \right. \text{ При этом } (q_N - \theta_N) = G_{N-1}, \text{ если } \{det(G_j) \neq 0\}_{j=N}^m, \text{ а} \quad (I.17)$$

соответствующие структурные матрицы  $[\beta, c]$  определены в (I.5).

Представление I.6 (при условии I<sub>2</sub>)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_{N-2} \\ z_1 \dots z_{N-1} E_{N-1} \\ E_{N, N+1} \dots z_m \\ E_{N+1} \\ \dots \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{N-2} \\ (q_{N-1} - \hat{\theta}) z_N \\ P_N G_{N-1} \\ C_m^m \end{bmatrix} = C(G) = C \begin{bmatrix} E_1 z_1 \\ E_2 z_2 \\ \dots \\ E_{N-2} z_{N-2} \\ E_{N-1} \\ E_N \\ z_{N+1} E_{N+1} \\ z_{N+2} E_{N+2} \\ \dots \\ z_m E_m \end{bmatrix}, \text{ где} \quad (I.18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{\Gamma}_j &= P_{K-1} \prod_{\beta=j+1}^{K-2} \hat{C}_\beta \cdot B(\hat{G}) \Big\}_{j=1}^{K-2}, \quad \hat{C}_j = 2 \cdot B(\hat{G}) \cdot \prod_{\beta=K+1}^j \hat{\beta}_\beta \Big\}_{j=K+1}^m, \quad \hat{A}_i = B(\hat{G}) \cdot \prod_{\beta=i+1}^{K-2} \hat{\beta}_\beta \Big\}_{i=1}^{K-2}, \quad \hat{A}_i = \prod_{\beta=K+1}^i \hat{C}_\beta \cdot B(\hat{G}) \cdot P \Big\}_{i=K+1}^m \\ \hat{G}_{K-1} &= P_{K-1} \cdot B_{K-2, K-2}(\hat{G}) \cdot 2_{K-1}. \end{aligned} \right. \text{При этом } (q_\alpha - \hat{G})_{K-1} = \Lambda_\alpha, \text{ если } \{ \det(\Lambda_\beta) \neq 0 \}_{\beta=2}^{K-1}, \text{ а}$$

соответствующие структурные матрицы  $[\hat{\beta}, \hat{C}]$  определены в (I.6).

Здесь также  $C_1^{K-2}$  и  $C_{K+1}^m$  есть ведущие усечённые блочно-треугольные матрицы общего вида (I.1), для которых имеют место известные представления

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (\hat{\beta}) E_{2,2} \\ \dots \\ (\hat{\beta}) E_{K-2, K-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \dots \\ \Lambda_{K-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(\hat{C}) \\ E(\hat{C}) \\ \dots \\ E(\hat{C}) \\ E_{K-2} \end{bmatrix} = C_1^{K-2}(\Lambda), \quad \begin{bmatrix} E(\hat{\beta}) \\ E(\hat{\beta}) \\ \dots \\ E(\hat{\beta}) \\ E_{K-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \dots \\ G_{K-4} \\ G_{K-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ (\hat{C}) E_2 \\ \dots \\ (\hat{C}) E_{K-3} \\ (\hat{C}) E_{K-2} \end{bmatrix} = C_1^{K-2}(\hat{G}) \quad (I.20)$$

$$\begin{bmatrix} E_{K+1} \\ (\hat{\beta}) E_{K+2, K+2} \\ \dots \\ (\hat{\beta}) E_{m, m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{K+2} \\ \Lambda_{K+3} \\ \dots \\ \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(\hat{C}) \\ E(\hat{C}) \\ \dots \\ E(\hat{C}) \\ E_m \end{bmatrix} = C_{K+1}^m(\Lambda), \quad \begin{bmatrix} E(\hat{\beta}) \\ E(\hat{\beta}) \\ \dots \\ E(\hat{\beta}) \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_K \\ G_{K+1} \\ \dots \\ G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{K+1} \\ (\hat{C}) E_{K+2, K+2} \\ \dots \\ (\hat{C}) E_m \end{bmatrix} = C_{K+1}^m(\hat{G}) \quad (I.21)$$

Здесь в (I.8)+(I.19) диагональные  $B_{\beta\beta}$ -элементы-блоки  $B = C^{-1}$  определены  $/I_4, I_8/$  в соответствующих представлениях в виде:

$$B = \begin{cases} B_{\beta\beta}(\Lambda, \hat{G}) = (\Lambda_{\beta+1} + G_{\beta-1} - q_\beta)^{-1}, \quad 1 \leq \beta \leq K-2; \quad B_{\beta\beta}(\Lambda, \hat{G}) = (\Lambda_{\beta+1} + G_{\beta-1} - q_\beta)^{-1}, \quad K+1 \leq \beta \leq m; \\ \left\{ \begin{aligned} B_{\beta\beta}(\Lambda) &= \sum_{\mu=\beta}^{K-2} \prod_{i=\beta+1}^{\mu} c_i \cdot \Lambda_{\mu+1}^{-1} \cdot \prod_{i=\beta+1}^{\mu} \beta_i \longleftrightarrow \Lambda_{\beta+1}^{-1} + c_{\beta+1} \cdot B_{\beta+1}(\Lambda) \cdot \beta_{\beta+1}, \quad B_{\beta+1}(\Lambda) = \Lambda_{\beta+1}^{-1}, \quad \beta = K-3, \dots, 1; \\ B_{\beta\beta}(\Lambda) &= \sum_{\mu=\beta}^m \prod_{i=\beta+1}^{\mu} c_i \cdot \Lambda_{\mu+1}^{-1} \cdot \prod_{i=\beta+1}^{\mu} \beta_i \longleftrightarrow \Lambda_{\beta+1}^{-1} + c_{\beta+1} \cdot B_{\beta+1}(\Lambda) \cdot \beta_{\beta+1}, \quad B_{\beta+1}(\Lambda) = \Lambda_{\beta+1}^{-1}, \quad \beta = m-1, \dots, K+1; \end{aligned} \right. \quad (I.22) \\ \left\{ \begin{aligned} B_{\beta\beta}(\hat{G}) &= \sum_{\mu=K+1}^{\beta} \prod_{i=K+1}^{\mu} \hat{c}_i \cdot G_{\mu+1}^{-1} \cdot \prod_{i=K+1}^{\mu} \hat{\beta}_i \longleftrightarrow G_{\beta-1}^{-1} + \hat{c}_{\beta-1} \cdot B_{\beta-1}(\hat{G}) \cdot \hat{\beta}_{\beta-1}, \quad B_{\beta-1}(\hat{G}) = G_{\beta-1}^{-1}, \quad \beta = K+2, K+3, \dots, m; \\ B_{\beta\beta}(\hat{G}) &= \sum_{\mu=1}^{\beta} \prod_{i=K+1}^{\mu} \hat{c}_i \cdot G_{\mu+1}^{-1} \cdot \prod_{i=K+1}^{\mu} \hat{\beta}_i \longleftrightarrow G_{\beta-1}^{-1} + \hat{c}_{\beta-1} \cdot B_{\beta-1}(\hat{G}) \cdot \hat{\beta}_{\beta-1}, \quad B_{\beta-1}(\hat{G}) = G_{\beta-1}^{-1}, \quad \beta = 2, 3, \dots, K-2. \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Отметим также, что каждое из четырёх различных нетрадиционных представлений (I.10)+(I.11) и (I.14)+(I.15) усечённых подматриц  $C_1^{K-1}$  и  $C_{K+1}^m$  сводится к двум различным известным представлениям (I.20) и (I.21) только при использовании (I.22)<sub>I</sub>, т.е. аддитивной скобки

$$B_{\beta\beta}(\Lambda, \hat{G}) = (\Lambda_{\beta+1} + G_{\beta-1} - q_\beta)^{-1}.$$

2. Структурно-инвариантные <sup>х)</sup> представления мультипликативного типа блочно-трёхдиагональных матриц общего вида  $C(1.1)$  при наличии нулевых ведущих блочно-угловых миноров

Выше, во введении настоящей работы, мы привели явный вид множества различных матрично-факторизованных представлений блочно-трёхдиагональных матриц вида  $C(1.1)$  при наличии у них лишь по одному разного типа (или обоих типов) нулевых блочно-угловых миноров. Это параметрические по сути представления, параметрами в которых служат матрицы из матричных последовательностей  $\{A\}$  (I.2) и  $\{G\}$  (I.3). Если же число ведущих нулевых блочно-угловых миноров у  $C(1.1)$  оказывается два и более, то решение проблемы представлений  $C(1.1)$  и их систематизации при указанной выше параметризации становится практически затруднительным. Поэтому становится очевидной необходимость введения более общей (структурно-инвариантной) параметризации факторизованных представлений  $C(1.1)$ , которая позволила бы более просто справиться с решением указанной проблемы. Полученные в этом параграфе результаты и дают по сути ответы на поставленные выше вопросы.

Итак, имеет место следующая

**Теорема 2.1.** Пусть  $C$  - невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.1) с прямоугольными элементами-блоками  $\{P_z, Q_z\}_{z=2}^m$  и соответствующими квадратными блоками  $\{Q_z\}_{z=1}^m$ , в общем случае разных размерностей. Пусть также для  $\{\Delta_z^z\}$ ,  $\{\Delta_z^m\}$  - ведущих блочно-угловых миноров  $C(1.1)$  выполняется одно из условий I<sub>1</sub>), I<sub>2</sub>), II. Тогда для  $C(1.1)$  имеет место следующее единственное структурно-инвариантное матрично-факторизованное представление

<sup>х)</sup> **Замечание 2.1.** Здесь и далее под структурной инвариантностью представлений мы понимаем, во-первых, формальное совпадение структуры матричных сомножителей представления 2.1 и представлений I.3+I.6. Во-вторых, представление 2.1 может служить генератором всевозможных (в том числе и I.3+I.6) представлений  $C(1.1)$  при условиях I<sub>1</sub>); I<sub>2</sub>); II, поскольку в отличие от представлений I.3+I.6 оно построено (как на параметрах) на элементах последней строки и последнего столбца матрицы  $B_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$  и первой строки и первого столбца матрицы  $B_{k+1}^m = [C_{k+1}^m]^{-1}$  без указания способов их вычисления (представления).



Представление 2.1

$$\left[ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_{k-2} \\ (P \cdot B) \dots (P \cdot B) E \\ \begin{matrix} k-1 & k-2 & \dots & k-2 & k-2 & k-1 \\ k & k+1 & k+1 & k+1 & k+1 & m \end{matrix} \end{array} \right] \cdot \left[ \begin{array}{c} (B \cdot Z) \dots (B \cdot Z) \\ \begin{matrix} k & k+1 & k+1 & k+1 & k+1 & m \end{matrix} \\ E_{k+1} \\ \dots \\ E_m \end{array} \right] = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} Q_1 Z_2 \\ P_2 Q_2 Z_3 \\ \dots \\ P_{k-2} Q_{k-2} \\ (Q - P \cdot B \cdot Z) (Z_k) \\ (P) (Q - Z \cdot B \cdot P_{k+1}) \\ \dots \\ Q_{k+1} Z_{k+2} \\ P_{k+2} Q_{k+2} Z_{k+3} \\ \dots \\ P_m Q_m \end{array} \right]}_{\cong \mathbb{C}_k} = \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \omega_k \\ \dots \\ \omega_k \end{array} \right]}_{\omega_k} \quad (2.1)$$

$$\left[ \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_{k-2} \\ E_{k-1} \\ E_k \\ (B \cdot P) \dots (B \cdot P) \\ \begin{matrix} k+1 & k+1 & k+1 & k+1 \\ k+2 & k+2 & k+2 & k+2 \end{matrix} \\ E_{k+1} \\ \dots \\ E_m \end{array} \right] = \mathbb{C}$$

При этом для  $\mathbb{C}_1^{k-2}$  и  $\mathbb{C}_{k+1}^m$  - ведущих усечённых блочно-треугольных подматриц имеют место (при соответствующих условиях) одно из представлений  $\mathbb{C}_1^{k-2}(A), \mathbb{C}_{k+1}^m(A); \mathbb{C}_1^{k-2}(G), \mathbb{C}_{k+1}^m(G); \mathbb{C}_1^{k-2}(A, G), \mathbb{C}_{k+1}^m(A, G)$  вида (I.20) ÷ (I.21), (I.10) ÷ (I.11), (I.14) ÷ (I.15). А для  $\{B_{k+2j}\}_{j=1}^{k-2}$  - строки,  $\{B_{ik-2}\}_{i=1}^{k-2}$  - столбца обратной матрицы  $B_1^{k-2} = [\mathbb{C}_1^{k-2}]^{-1}$  и  $\{B_{ik+1}\}_{i=k+1}^{m-(k+1)}$  - столбца,  $\{B_{k+1j}\}_{j=k+1}^m$  - строки обратной матрицы  $B_{k+1}^m = [\mathbb{C}_{k+1}^m]^{-1}$  имеют место следующие представления:

При условии  $I_I$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{k-2j}(\lambda) = B_{k-2k-2}(\lambda) \cdot \prod_{\beta=j+1}^{k-2} \beta, \quad B_{ik-2}(\lambda) = \prod_{\beta=i+1}^{k-2} \beta \cdot B_{k-2k-2}(\lambda), \quad B_{ik+1}(\lambda) = B_{ik+1}(\lambda) \cdot \prod_{\beta=k+2}^i \beta, \quad B_{k+1j}(\lambda) = \prod_{\beta=k+2}^j \beta \cdot B_{k+1j}(\lambda), \\ \text{здесь} \quad (Q_{k-1} - P_{k-1} \cdot B_{k-2k-2}(\lambda) \cdot Z_{k-1}) = \Lambda_k, \quad (Q_k - Z_{k+1} \cdot B_{k+1k+1}(\lambda) \cdot P_{k+1}) = (Q_k - \Theta_k). \end{array} \right. \quad (2.2)$$

х) Замечание 2.2.  $\{B_{k+2j}\}_{j=1}^{k-2}, \{B_{ik-2}\}_{i=1}^{k-2}, \{B_{ik+1}\}_{i=k+1}^m, \{B_{k+1j}\}_{j=k+1}^m$  могут быть получены и любым другим, из известных в алгебре, способом.

При условии I<sub>2</sub>)

$$\left\{ \begin{aligned} B_{\kappa-2}(\mathcal{G}) &= \prod_{\substack{\beta=j+1 \\ \beta=1}}^{\kappa-2} \hat{c}_{\beta} \cdot B_{\beta}(\mathcal{G}), \quad B_{\beta}(\mathcal{G}) = B_{\beta}(\mathcal{G}) \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha=1}}^{\kappa-2} \hat{\beta}_{\alpha}, \quad B_{\beta}(\mathcal{G}) = \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha=1}}^{\beta} \hat{c}_{\alpha} \cdot B_{\alpha}(\mathcal{G}), \quad B_{\beta}(\mathcal{G}) = B_{\beta}(\mathcal{G}) \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha=1}}^{\beta} \hat{\beta}_{\alpha}, \\ \text{здесь } (q_{\kappa-2} \cdot z_{\kappa+1} \cdot B_{\kappa+1}(\mathcal{G}) \cdot p_{\kappa+1}) &= G_{\kappa-1}, \quad (q_{\kappa-1} \cdot p_{\kappa-1} \cdot B_{\kappa-2}(\mathcal{G}) \cdot z_{\kappa-1}) = (q_{\kappa-1} \cdot \hat{\theta}_{\kappa-1}). \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

При условии II

$$\left\{ \begin{aligned} B_{\kappa-2}(\Lambda, \mathcal{G}) \cdot \prod_{\substack{\beta=j+1 \\ \beta=1}}^{\kappa-2} \hat{\beta}_{\beta} &= B_{\kappa-2}(\Lambda, \mathcal{G}) = \prod_{\substack{\beta=j+1 \\ \beta=1}}^{\kappa-2} \hat{c}_{\beta} \cdot B_{\beta}(\Lambda, \mathcal{G}), \quad \prod_{\substack{\beta=j+1 \\ \beta=1}}^{\kappa-2} \hat{c}_{\beta} \cdot B_{\beta}(\Lambda, \mathcal{G}) = B_{\beta}(\Lambda, \mathcal{G}) = B_{\beta}(\Lambda, \mathcal{G}) \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha=1}}^{\beta} \hat{\beta}_{\alpha}, \\ B_{\beta}(\Lambda, \mathcal{G}) \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha=1}}^{\beta} \hat{\beta}_{\alpha} &= B_{\beta}(\Lambda, \mathcal{G}) = \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha=1}}^{\beta} \hat{c}_{\alpha} \cdot B_{\alpha}(\Lambda, \mathcal{G}), \quad \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha=1}}^{\beta} \hat{c}_{\alpha} \cdot B_{\alpha}(\Lambda, \mathcal{G}) = B_{\beta}(\Lambda, \mathcal{G}) = B_{\beta}(\Lambda, \mathcal{G}) \cdot \prod_{\substack{\alpha=1 \\ \alpha=1}}^{\beta} \hat{\beta}_{\alpha}, \\ \text{здесь } (q_{\kappa-1} \cdot p_{\kappa-1} \cdot B_{\kappa-2}(\Lambda, \mathcal{G}) \cdot z_{\kappa-1}) &= A_{\kappa}, \quad (q_{\kappa} \cdot z_{\kappa+1} \cdot B_{\kappa+1}(\Lambda, \mathcal{G}) \cdot p_{\kappa+1}) = G_{\kappa-1}. \end{aligned} \right. \quad (2.4)$$

Здесь в (2.1)+(2.4) (при соответствующих условиях) матрицы  $[\hat{\beta}, \hat{\beta}, \hat{c}, \hat{c}]$  и  $B_{\beta}$  определены в (I.7), (I.8) и (I.22).

**Доказательство.** Справедливость представления 2.1 проверяется путём перемножения его факторизующих матриц. При этом следует воспользоваться основными равенствами  $B_{\beta} \cdot C_{\beta}^{\kappa-2} = E_{\beta}^{\kappa-2} = C_{\beta}^{\kappa-2} \cdot B_{\beta}$  и  $B_{\beta}^m \cdot C_{\beta}^m = E_{\beta}^m = C_{\beta}^m \cdot B_{\beta}^m$  для усечённых подматриц  $C_{\beta}^{\kappa-2}$ ,  $C_{\beta}^m$  и им обратных  $B_{\beta}^{\kappa-2} = [C_{\beta}^{\kappa-2}]^{-1}$ ,  $B_{\beta}^m = [C_{\beta}^m]^{-1}$ . Отметим также, что при переходе от представления 2.1 к соответствующим представлениям I.3+I.6 следует учесть определения матричных последовательностей  $\{\Lambda\}$  (I.2),  $\{\mathcal{G}\}$  (I.3) и матриц  $B_{\beta}$  (I.22). Справедливость же представлений (2.2)+(2.4) является /см. I<sub>4</sub>/ прямым следствием коммутационных свойств  $B_{\beta}$  — элементов-блоков обратных усечённых подматриц  $B_{\beta}^{\kappa-1} = [C_{\beta}^{\kappa-2}]^{-1}$  и  $B_{\beta}^m = [C_{\beta}^m]^{-1}$  соответственно. Теорема доказана.

Далее рассматриваются представления типа 2.1 для  $\mathcal{C}(1.1)$  при следующих комбинациях однотипных (или обоих типов) нулевых ведущих блочно-угловых миноров:

III. Если  $\{\Delta_{\beta}^{\kappa-1} = 0 \text{ и } \Delta_{\beta}^{\kappa-1} = 0\}$  либо  $\{\Delta_{\beta}^m = 0 \text{ и } \Delta_{\beta}^m = 0\}$  — равны нулю только по два отдалённых минора каждого типа, то

$$\left\{ \begin{aligned} [\det(\Lambda_{\beta}) = 0 \text{ и } \det(\Lambda_{\beta}) = 0, \text{ для любого } \kappa \text{ фиксированного и любого } \ell \text{ из} \\ (\kappa+1 \leq \ell \leq m-1), \text{ но } \{\det(\Lambda_{\beta}) \neq 0\}_{\beta=1}^{\kappa-1}, \{\det(\Lambda_{\beta}) \neq 0\}_{\beta=\kappa+2}^{\ell-1} \text{ и } \{\det(\Lambda_{\beta}) \neq 0\}_{\beta=\ell+2}^{m+1}] \\ \text{либо } [\det(\mathcal{G}_{\beta}) = 0 \text{ и } \det(\mathcal{G}_{\beta}) = 0, \text{ для любого } \ell \text{ фиксированного и} \\ \kappa \text{ из } (3 \leq \kappa < \ell-3), \text{ но } \{\det(\mathcal{G}_{\beta}) \neq 0\}_{\beta=1}^{m-1}, \{\det(\mathcal{G}_{\beta}) \neq 0\}_{\beta=\kappa}^{\ell-3} \text{ и } \{\det(\mathcal{G}_{\beta}) \neq 0\}_{\beta=3}^{\kappa-3}]. \end{aligned} \right.$$

IV. Если  $\{\Delta_{\beta}^{\kappa-1} = 0 \text{ и } \Delta_{\beta}^{\kappa+2} = 0\}$  либо  $[\Delta_{\beta}^m = 0 \text{ и } \Delta_{\beta}^m = 0]$  — равны нулю только по два соседних минора каждого типа, то

$$\left\{ \begin{aligned} [\det(\Lambda_{\beta}) = 0 \text{ и } \det(\Lambda_{\beta}) = 0, \text{ для любого } \kappa \text{ из } (3 \leq \kappa \leq m-4), \text{ но } \{\det(\Lambda_{\beta}) \neq 0\}_{\beta=2}^{\kappa+1}, \\ \det(\Lambda_{\kappa+2} = q) \neq 0, \{\det(\Lambda_{\beta}) \neq 0\}_{\beta=\kappa+5}^{m+1}] \text{ либо } [\det(\mathcal{G}_{\beta}) = 0 \text{ и } \det(\mathcal{G}_{\beta}) = 0, \\ \text{для любого } \kappa \text{ из } (3 \leq \kappa \leq m-4), \text{ но } \{\det(\mathcal{G}_{\beta}) = 0\}_{\beta=\kappa+3}^{m-1}, \det(\mathcal{G}_{\kappa} = q) \neq 0, \{\det(\mathcal{G}_{\beta}) \neq 0\}_{\beta=0}^{\kappa+3}]. \end{aligned} \right.$$



$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \dots \\ E_{k-2} \\ \left[ \begin{matrix} E_{k-1} \\ E_k \end{matrix} \right] \\ \left( \begin{matrix} B \cdot P \\ K_{k-1} K_{k-1} K_{k-1} \\ K_{k-2} K_{k-1} K_{k-1} \\ \dots \\ K_{k-2} K_{k-1} K_{k-1} \end{matrix} \right) \\ \left[ \begin{matrix} E_{k+1} \\ E_{k+2} \\ \dots \\ E_{l-2} \end{matrix} \right] \\ \left( \begin{matrix} B \cdot P \\ K_{k+1} K_{k+1} K_{k+1} \\ K_{k+2} K_{k+1} K_{k+1} \\ \dots \\ K_{l-2} K_{k+1} K_{k+1} \end{matrix} \right) \\ \left[ \begin{matrix} E_{l-1} \\ E_l \end{matrix} \right] \\ \left( \begin{matrix} B \cdot P \\ b_{l-1} b_{l-1} b_{l-1} \\ \dots \\ b_m b_{l-1} b_{l-1} \end{matrix} \right) \\ \left[ \begin{matrix} E_{l+1} \\ \dots \\ E_m \end{matrix} \right] \end{pmatrix} = C \quad (2.5)$$

При этом для  $C_1^{k-2}$ ,  $C_{k+1}^{l-2}$ , и  $C_{l+1}^m$  -вещущих усечённых блочно-трёх-диагональных по матриц общего вида (I.I) при соответствующих условиях имеет место одно из представлений вида (I.20)+(I.2I), (I.I0)+(I.II) и (I.I4)+(I.I5). А для  $\{B_{k-2,j}\}_{j=1}^{k-2}$  -строки,  $\{B_{k-2,i}\}_{i=1}^{k-2}$  -столбца обратной матрицы  $B_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$ ;  $\{B_{l-2,j}\}_{j=k+1}^{l-2}$  -строки,  $\{B_{l-2,i}\}_{i=k+1}^{l-2}$  -столбца, и  $\{B_{k+1,j}\}_{j=k+1}^{l-2}$  -строки,  $\{B_{k+1,i}\}_{i=k+1}^{l-2}$  -столбца обратной матрицы  $B_{k+1}^{l-2} = [C_{k+1}^{l-2}]^{-1}$ ;  $\{B_{l+1,j}\}_{j=l+1}^m$  -строки,  $\{B_{l+1,i}\}_{i=l+1}^m$  -столбца обратной матрицы  $B_{l+1}^m = [C_{l+1}^m]^{-1}$  имеют место представления x):

При условии III<sub>1</sub>)

$$\left\{ \begin{aligned} & B_{l-2,j}(\Lambda) = B_{l-2,j}(\Lambda) \cdot \prod_{z=j+1}^{l-2} \beta_z, \quad B_{l-2,i}(\Lambda) = \prod_{z=i+1}^{l-2} \beta_z \cdot B_{l-2,i}(\Lambda), \quad B_{l+1,j}(\Lambda) = \prod_{z=l+2}^j \beta_z \cdot B_{l+1,j}(\Lambda), \quad B_{l+1,i}(\Lambda) = B_{l+1,i}(\Lambda) \cdot \prod_{z=l+2}^i \beta_z, \\ & \{B_{k-2,j}(\Lambda)\}_{j=1}^{k-2}, \{B_{k-2,i}(\Lambda)\}_{i=1}^{k-2}, \{B_{k+1,j}(\Lambda)\}_{j=k+1}^{l-2}, \{B_{k+1,i}(\Lambda)\}_{i=k+1}^{l-2} \text{ -представлены в виде (2.2);} \\ & (q_{l-1} \cdot \beta_{l-1} \cdot B_{l-1,l-1}(\Lambda) \cdot \beta_{l-1}) = \Lambda_{l-1}, \quad (q_{l-2} \cdot \beta_{l-1} \cdot B_{l-1,l-1}(\Lambda) \cdot \beta_{l-1}) = (q_{l-2} \cdot \theta_{l-1}). \end{aligned} \right. \quad (2.6)$$

При условии III<sub>2</sub>)

$$\left\{ \begin{aligned} & B_{l-2,j}(\Gamma) = \prod_{z=j+1}^{l-2} \hat{\beta}_z \cdot B_{l-2,j}(\Gamma), \quad B_{l-2,i}(\Gamma) = B_{l-2,i}(\Gamma) \cdot \prod_{z=i+1}^{l-2} \hat{\beta}_z, \quad B_{l+1,j}(\Gamma) = B_{l+1,j}(\Gamma) \cdot \prod_{z=l+2}^j \hat{\beta}_z, \quad B_{l+1,i}(\Gamma) = \prod_{z=l+2}^i \hat{\beta}_z \cdot B_{l+1,i}(\Gamma), \\ & \{B_{k-2,j}(\Gamma)\}_{j=1}^{k-2}, \{B_{k-2,i}(\Gamma)\}_{i=1}^{k-2}, \{B_{k+1,j}(\Gamma)\}_{j=k+1}^{l-2}, \{B_{k+1,i}(\Gamma)\}_{i=k+1}^{l-2} \text{ -представлены} \\ & \text{в виде (2.3);} \quad (q_{l-1} \cdot \hat{\beta}_{l-1} \cdot B_{l-1,l-1}(\Gamma) \cdot \hat{\beta}_{l-1}) = (q_{l-1} \cdot \hat{\theta}_{l-1}), \quad (q_{l-2} \cdot \hat{\beta}_{l-1} \cdot B_{l-1,l-1}(\Gamma) \cdot \hat{\beta}_{l-1}) = G_{l-1}. \end{aligned} \right. \quad (2.7)$$

x) Здесь мы не приводим полученные представления типа 2.2 для  $C(1.1)$  при условиях IV, V I в силу ограниченности объёма публикации и очевидного следствия их из представления 2.2. И в этой теореме справедливо также Замечание 2.2.

При условии У

$$\left\{ \begin{aligned} & B_{\ell_1 \ell_2}(\Lambda, G) \cdot \prod_{\beta=j_1}^{\ell_2} \beta = B_{\ell_2}(\Lambda, G) = \prod_{\beta=j_1}^{\ell_2} \hat{\beta}_j \cdot B(\Lambda, G), \quad \prod_{\beta=i+1}^{\ell_2} C_{\beta} \cdot B(\Lambda, G) = B_{\ell_2}(\Lambda, G) = B_{\ell_2}(\Lambda, G) \cdot \prod_{\beta=i+1}^{\ell_2} \hat{\beta}_j, \\ & \prod_{\beta=\ell_2}^j C_{\beta} \cdot B_{\ell_1}(\Lambda, G) = B_{\ell_1}(\Lambda, G) \cdot \prod_{\beta=\ell_2}^j \hat{\beta}_j, \quad B_{\ell_1}(\Lambda, G) \cdot \prod_{\beta=\ell_2}^j \beta = B_{\ell_1}(\Lambda, G) = \prod_{\beta=\ell_2}^j \hat{\beta}_j \cdot B_{\ell_1}(\Lambda, G), \\ & \{B_{\ell_2}(\Lambda, G)\}_{j=1}^{k-2}, \{B_{\ell_1}(\Lambda, G)\}_{i=1}^{k-2}, \{B_{\ell_1}(\Lambda, G)\}_{j=k+1}^{\ell_2}, \{B_{\ell_1}(\Lambda, G)\}_{i=k+1}^{\ell_2} \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

виде (2.4);

Доказательство. Справедливость представления 2.2 проверяется путём перемножения его факторизирующих матриц. При этом следует воспользоваться основными равенствами  $B_1^{k-2} \cdot C_1^{k-2} = E_1^{k-2} = B_1^{k-2} \cdot C_1^{k-2}$ ,  $B_{k+1}^{\ell_2} \cdot C_{k+1}^{\ell_2} = E_{k+1}^{\ell_2} = C_{k+1}^{\ell_2} \cdot B_{k+1}^{\ell_2}$  и  $B_{\ell_1}^m \cdot C_{\ell_1}^m = E_{\ell_1}^m = C_{\ell_1}^m \cdot B_{\ell_1}^m$  для усечённых подматриц  $C_1^{k-2}$ ,  $C_{k+1}^{\ell_2}$ ,  $C_{\ell_1}^m$  и им обратных подматриц  $B_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$ ,  $B_{k+1}^{\ell_2} = [C_{k+1}^{\ell_2}]^{-1}$ ,  $B_{\ell_1}^m = [C_{\ell_1}^m]^{-1}$  соответственно. Здесь также отметим, что при переходе от представления 2.2 к соответствующим представлениям /I<sub>3</sub>/ следует учесть определения матричных последовательностей  $\{\Lambda\}$  (I.2),  $\{G\}$  (I.3) и матриц  $B_{\beta}^{\ell_2}$  (I.22). Справедливость представлений (2.6)+(2.8) вновь является прямым следствием /см. I<sub>4</sub>/ коммутационных свойств  $B_{ij}^{\ell_2}$  — элементов-блоков обратных усечённых подматриц  $B_1^{k-2}$ ,  $B_{k+1}^{\ell_2}$  и  $B_{\ell_1}^m$  соответственно. Справедливость представлений (2.6)+(2.8) установлена.

Далее рассматриваются матрично-факторизованные представления типа 2.2 для C(1.1) при следующих комбинациях однотипных (или обоих типов) нулевых ведущих блочно-угловых миноров:

УП. Если  $\{[\Delta_1^{k-1} = 0 \text{ и } \Delta_1^{\ell_1-1} = 0] \text{ либо } [\Delta_k^m = 0 \text{ и } \Delta_{\ell_1-1}^m = 0]\}$  — равно нулю любое конечное число отдалённых миноров каждого типа, то

$$\left\{ \begin{aligned} & [\det(\Lambda_k) = 0 \text{ и } \det(\Lambda_{\ell_1}^m) = 0 \text{ для любых целых } \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n \text{ таких, что} \\ & (k < \ell_1 < \ell_2) \text{ и } (\ell_{i-1} + z < \ell_i) \text{, где } i = 1, 2, \dots, n-1] \text{ либо} \\ & [\det(G_{k+1}) = 0 \text{ и } \det(G_{\ell_1-1}^m) = 0 \text{ для любых целых } \ell_n, \ell_{n-1}, \dots, \ell_1 \text{ та-} \\ & \text{ких, что} \\ & (k > \ell_n > \ell_{i-1}) \text{ и } (\ell_{i-1} - z > \ell_{i-1}) \text{, где } i = n-1, n-2, \dots, 1]. \end{aligned} \right.$$

УП. Если  $\{[\Delta_1^{k-1} = 0 \text{ и } \Delta_1^{\ell_1-1} = 0] \text{ либо } [\Delta_k^m = 0 \text{ и } \Delta_{\ell_1-1}^m = 0]\}$  — равно нулю любое конечное число соседних миноров каждого типа, то

$$\left\{ \begin{aligned} & [\det(\Lambda_k) = 0 \text{ и } \det(\Lambda_{\ell_1}^m) = 0 \text{ для всех целых } \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n \text{ таких, что} \\ & (k < \ell_1 < \ell_2) \text{ и } (\ell_{i-1} + z = \ell_i) \text{, где } i = 1, 2, \dots, n-1] \text{ либо} \end{aligned} \right.$$

$\left\{ \begin{array}{l} \det(G_{\kappa-1}) = 0 \text{ и } \det(G_{\rho}) = 0 \text{ для всех целых } l_n, l_{n-1}, \dots, l_1 \text{ таких, что} \\ (\kappa > l_n > l_{i-1}) \text{ и } (l_i - 3 = l_{i-1}), \text{ где } i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{array} \right\}$ .

IX. Если  $\{[\Delta_{i-1}^{\kappa-1} = 0 = \Delta_{i-1}^{l_{i-1}-1}] \text{ и } [\Delta_{\kappa}^m = 0 = \Delta_{l_{i-1}}^m]\}$  - равно нулю одновременно любое конечное число отдалённых миноров обоих типов, то

$\left\{ \begin{array}{l} \text{[условия УП}_I\text{], но } \{ \det(\Lambda_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=2}^{\kappa-1}, \{ \det(\Lambda_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=\kappa+2}^{\kappa-1}, \{ \det(\Lambda_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=\kappa+2}^{\kappa''-1}, \\ \{ \det(\Lambda_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=\kappa+2}^{m+1} \text{ и} \\ \{ \det(G_{\kappa-1}) = 0, \det(G_{\kappa-1}) = 0 \text{ и } \det(G_{\kappa-1}) = 0, \text{ но } \{ \det(G_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=\kappa''}^{m-1}, \\ \{ \det(G_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=\kappa'}^{\kappa''-3}, \{ \det(G_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=\kappa}^{\kappa''-3}, \{ \det(G_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=0}^{\kappa-3}, \\ \text{где } \kappa = l_{i-1}, \kappa'' = l_i \text{ (} l_{i-1} + 3 < l_i \text{), } i = 1, 2, \dots, n-2, n-1 \end{array} \right\}$ .

X. Если  $\{[\Delta_{i-1}^{\kappa-1} = 0 = \Delta_{i-1}^{l_{i-1}-1}] \text{ и } [\Delta_{\kappa}^m = 0 = \Delta_{l_{i-1}}^m]\}$  - равно нулю одновременно любое конечное число соседних миноров обоих типов, то

$\left\{ \begin{array}{l} \text{[условия УШ}_I\text{], но } \{ \det(\Lambda_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=2}^{\kappa-1}, \det(\Lambda_{\kappa+2} \rho_{\kappa+1}) \neq 0, \det(\Lambda_{\kappa+2}) \neq 0, \\ \{ \det(\Lambda_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=\kappa+2}^{m+1} \text{ и} \\ \{ \det(G_{\kappa-1}) = 0, \det(G_{\kappa-1}) = 0 \text{ и } \det(G_{\kappa-1}) = 0, \text{ но } \{ \det(G_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=\kappa''}^{m-1}, \\ \det(G_{\kappa}) \neq 0, \det(G_{\kappa}) \neq 0, \{ \det(G_{\beta}) \neq 0 \}_{\beta=0}^{\kappa-3}, \\ \text{где } \kappa' = l_{i-1}, \kappa'' = l_i \text{ (} l_{i-1} + 3 = l_i \text{), } i = 1, 2, \dots, n-2, n-1 \end{array} \right\}$ .

Итак, имеет место следующая

**Теорема 2.3.** Пусть  $C$  - невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.1) с прямоугольными элементами-блоками  $\{P_{\beta}, \hat{c}_{\beta}\}_{\beta=2}^m$  и соответствующими квадратными блоками  $\{Q_{\beta}\}_{\beta=1}^m$ , в общем случае разных размерностей. Пусть также для  $\{\Lambda_i^{\beta}\}; \{\Delta_{\beta}^m\}$  - ведущих блочно-угловых миноров  $C(1.1)$  выполняется одно из условий УП, УШ, IX, X. Тогда для  $C(1.1)$  имеет место следующее единственное структурно-инвариантное матрично-факторизованное представление <sup>x)</sup>

x) Здесь также мы не приводим полученные представления типа 2.3 для  $C(1.1)$  при условиях УШ; X в силу ограниченности объёма публикации и очевидного следствия их из представления 2.3.







3. Структурно-инвариантные представления аддитивно-мультипликативного типа для матриц обратных к блочно-трёхдиагональным общего вида  $C(1.1)$  при наличии нулевых ведущих блочно-угловых миноров

В предыдущем параграфе нами были построены генераторы множества всевозможных представлений мультипликативного типа блочно-трёхдиагональных матриц  $C(1.1)$  общего вида при наличии у них различных комбинаций нулевых ведущих блочно-угловых миноров.

В настоящем параграфе подобная задача решается для им обратных матриц при тех же условиях на миноры. При этом из соображений дальнейшего практического использования полученных в этой работе теоретических результатов для решения систем уравнений  $CX = Y$  нами построены новые представления для  $B = C^{-1}$  аддитивно-мультипликативного типа и найдены их генераторы.

Итак, имеет место следующая

Теорема 3.1. Пусть  $C$  - невырожденная блочно-трёхдиагональная общего вида (1.1) с прямоугольными элементами-блоками  $\{P_j, Z_j\}_{j=2}^m$  и соответствующими квадратными блоками  $\{Q_j\}_{j=1}^m$ , в общем случае разных размерностей. Пусть также для  $\{\Delta_1\}$ ,  $\{\Delta_2^m\}$  - ведущих блочно-угловых миноров  $C(1.1)$  выполняется одно из условий  $I_1), I_2), II$ . Тогда для  $B = C^{-1}$  имеет место следующее единственное структурно-инвариантное аддитивно-мультипликативное представление

Представление 3.1 (типа  $B = \tilde{B} + \Delta B$ )

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} Q_1 Z_2 \\ P_2 Q_2 Z_3 \\ \dots \\ P_{k-3} Q_{k-3} Z_{k-2} \\ P_{k-2} Q_{k-2} \end{array} \right]^{-1} = B_1^{k-2} \\ \left[ \begin{array}{c} 0_{k-1} \\ 0_k \end{array} \right] \\ B_{k+1}^m = \left[ \begin{array}{c} Q_{k+1} Z_{k+2} \\ P_{k+2} Q_{k+2} Z_{k+3} \\ \dots \\ P_{m-1} Q_{m-1} Z_m \\ P_m Q_m \end{array} \right]^{-1} \end{array} \right]}_{\tilde{B}} + \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 0_1 \\ 0_2 \\ \dots \\ 0_{k-2} \end{array} \right] \begin{array}{c} (B \cdot Z)_{1 \times 2 \times k-1} \\ (B \cdot Z)_{2 \times 2 \times k-1} \\ \dots \\ (B \cdot Z)_{k-2 \times 2 \times k-1} \\ E_{k-1} \\ E_k \end{array} \\ \left[ \begin{array}{c} (B \cdot P)_{k+1 \times k+1} \\ (B \cdot P)_{k+2 \times k+1} \\ \dots \\ (B \cdot P)_{m \times k+1} \end{array} \right] \begin{array}{c} 0_{k+1} \\ 0_{k+2} \\ \dots \\ 0_m \end{array} \end{array} \right]}_{\tilde{C}}$$



Замечание 3.1. Отметим также, что обратный переход от аддитивно-мультипликативного представления 3.1 для  $B = C^{-1}$  к сопряженному мультипликативному представлению  $B = C_3^{-1} \cdot C_2^{-1} \cdot C_1^{-1}$  осуществляется следующим образом: Матрица  $\tilde{B}$  в (3.1) заменяется нулевой матрицей, указанные нулевые блоки в матрицах  $\tilde{C}_1$  и  $\tilde{C}_3$  заменяются единичными матрицами, верхний единичный блок в матрице  $\tilde{C}_2$  заменяется на блок  $B_1^{k-2}$ , а нижний единичный блок на блок  $B_{k+1}^m$ . Аналогичные переходы можно выполнить и в аддитивно-мультипликативных представлениях, рассматриваемых ниже в теоремах 3.2 и 3.3.

Далее рассматривается аналогичное матрично-факторизованное представление типа 3.1 для  $B = C^{-1}$  при комбинациях одностипных (или обоих типов) нулевых ведущих блочно-угловых миноров  $C(1.1)$ .

Имеет место следующая

Теорема 3.2. Пусть  $C$  - невырожденная блочно-трехдиагональная матрица общего вида (1.1) с прямоугольными элементами-блоками  $\{P_2, Q_2\}_{2=2}^m$  и соответствующими квадратными блоками  $\{Q_2\}_{2=1}^m$ , в общем случае разных размерностей. Пусть также для  $\{\Delta_2^1\}, \{\Delta_2^m\}$  - ведущих блочно-угловых миноров  $C(1.1)$  выполняется одно из условий  $\text{III}_1, \text{III}_2; \text{IV}_1; \text{IV}_2; \text{V}; \text{VI}$ . Тогда для  $B = C^{-1}$  имеет место следующее единственное структурно-инвариантное аддитивно-мультипликативное представление<sup>X)</sup>:  
Представление 3.2 (типа  $B = \tilde{B} + \Delta B$ )

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} Q_1 \cdot Q_2 \\ P_2 \cdot Q_2 \cdot Q_2 \\ \dots \\ P_{k-2} \cdot Q_{k-2} \end{array} \right]^{-1} = B_1^{k-2} \\ \left[ \begin{array}{c} 0_{k-1} \\ Q_k \end{array} \right] \\ B_{k+1} = \left[ \begin{array}{c} Q_{k+1} \cdot Q_{k+2} \\ P_{k+2} \cdot Q_{k+2} \\ \dots \\ P_{l-2} \cdot Q_{l-2} \end{array} \right]^{-1} \\ \left[ \begin{array}{c} 0_{l-1} \\ Q_l \end{array} \right] \\ B_{l+1}^m = \left[ \begin{array}{c} Q_{l+1} \cdot Q_{l+2} \\ P_{l+2} \cdot Q_{l+2} \cdot Q_{l+3} \\ \dots \\ P_m \cdot Q_m \end{array} \right]^{-1} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} 0_1 \\ \dots \\ 0_{k-2} \end{array} \right] \begin{array}{c} (B \cdot Q_2) \\ \dots \\ (B \cdot Q_2) \\ \dots \\ (B \cdot P) \\ \dots \\ (B \cdot P) \end{array} \\ \left[ \begin{array}{c} E_{k-1} \\ E_k \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} 0_{k+1} \\ \dots \\ 0_{l-2} \end{array} \right] \begin{array}{c} (B \cdot Q_2) \\ \dots \\ (B \cdot Q_2) \\ \dots \\ (B \cdot Q_2) \\ \dots \\ (B \cdot Q_2) \end{array} \\ \left[ \begin{array}{c} E_{l-1} \\ E_l \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} 0_{l+1} \\ \dots \\ 0_m \end{array} \right] \begin{array}{c} (B \cdot P) \\ \dots \\ (B \cdot P) \\ \dots \\ (B \cdot P) \end{array} \end{array} \right]$$

<sup>X)</sup> Здесь и далее мы не приведем полученные представления типа 3.2 для  $B = C^{-1}$  при условиях  $\text{IV}, \text{VI}, \text{VIII}, \text{X}$  в силу ограниченности объема публикации.



Доказательство. Представление типа 3.2 получаем из соответствующих факторизаций 2.2 для  $C(1.1)$ . При этом следует воспользоваться основными моментами доказательства теоремы 3.1. Проверка справедливости полученного представления 3.2 осуществляется на основе равенств  $C \cdot B = E = B \cdot C$ .

В следующей Теореме рассматривается матрично-факторизованное представление типа 3.2 для  $B = C^{-1}$  при комбинациях конечного числа однотипных (или конечного числа обоих типов) нулевых ведущих блочно-угловых миноров у  $C(1.1)$ .

Имеет место следующая

Теорема 3.3. Пусть  $C$  — невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (1.1) с прямоугольными элементами-блоками  $\{P_3, Z_3\}_{3=2}^m$  и соответствующими квадратными блоками  $\{Q_3\}_{3=1}^m$ , в общем случае разных размерностей. Пусть также для  $\{\Delta_1^3\}$ ,  $\{\Delta_2^3\}$  — ведущих блочно-угловых миноров  $C(1.1)$  выполняется одно из условий УП, УШ, IX, X. Тогда для  $B = C^{-1}$  имеет место следующее единственное структурно-инвариантное аддитивно-мультипликативное представление:

Представление 3.3 (типа  $B = \tilde{B} + \Delta B$ )

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} Q_{k_1} Z_{k_1} \\ P_{k_2} Q_{k_2} Z_{k_2} \\ \frac{P_{k_2} Q_{k_2} Z_{k_2}}{P_{k_2} Q_{k_2}} \end{array} \right]^{-1} = \tilde{B}_{k_1}^{k-2} \\ \left[ \begin{array}{c} 0_{k-1} \\ 0_{k'} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} Q_{k_{k+1}} Z_{k_{k+1}} \\ P_{k_{k+2}} Q_{k_{k+2}} Z_{k_{k+2}} \\ \frac{P_{k_{k+2}} Q_{k_{k+2}} Z_{k_{k+2}}}{P_{k_{k+2}} Q_{k_{k+2}}} \end{array} \right]^{-1} = \tilde{B}_{k_{k+1}}^{k+1} \\ \left[ \begin{array}{c} 0_{k_{k+1}} \\ 0_{k'} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} Q_{k_{k+1}} Z_{k_{k+1}} \\ P_{k_{k+2}} Q_{k_{k+2}} Z_{k_{k+2}} \\ \frac{P_{k_{k+2}} Q_{k_{k+2}} Z_{k_{k+2}}}{P_{k_{k+2}} Q_{k_{k+2}}} \end{array} \right]^{-1} = \tilde{B}_{k_{k+1}}^{k+1} \\ \left[ \begin{array}{c} 0_{k_{k+1}} \\ 0_{k'} \end{array} \right] \\ \tilde{B}_{k_{k+1}}^m = \left[ \begin{array}{c} Q_{k_{k+1}} Z_{k_{k+1}} \\ P_{k_{k+2}} Q_{k_{k+2}} Z_{k_{k+2}} \\ \frac{P_{k_{k+2}} Q_{k_{k+2}} Z_{k_{k+2}}}{P_m Q_m} \end{array} \right]^{-1} \end{array} \right] +$$



$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c}
 O_1 \\
 O_2 \\
 \dots \\
 O_{k-2}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 (P, B)_{k-1, k-1} \dots (P, B)_{k-1, k-2} \\
 \vdots \\
 E_{k-1}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 (2, B)_{k-1, k-1} \dots (2, B)_{k-1, k-2} \\
 \vdots \\
 E_{k-1}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 O_{k+1} \\
 O_{k+2} \\
 \dots \\
 O_{k-2}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 (P, B)_{k+1, k+1} \dots (P, B)_{k+1, k+2} \\
 \vdots \\
 E_{k+1}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 (2, B)_{k+1, k+1} \dots (2, B)_{k+1, k+2} \\
 \vdots \\
 E_{k+1}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 O_{k+1} \\
 O_{k+2} \\
 \dots \\
 O_{k-2}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 (P, B)_{k+1, k+1} \dots (P, B)_{k+1, k+2} \\
 \vdots \\
 E_{k+1}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 (2, B)_{k+1, k+1} \dots (2, B)_{k+1, k+2} \\
 \vdots \\
 E_{k+1}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 O_{k+1} \\
 O_{k+2} \\
 \dots \\
 O_m
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 (P, B)_{k+1, k+1} \dots (P, B)_{k+1, k+2} \\
 \vdots \\
 E_{k+1}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 (2, B)_{k+1, k+1} \dots (2, B)_{k+1, k+2} \\
 \vdots \\
 E_{k+1}
 \end{array} \right] \\
 \left[ \begin{array}{c}
 O_{k+1} \\
 O_{k+2} \\
 \dots \\
 O_m
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \Bigg] = B \quad (3.5)$$

При этом для  $\{[B_1^{k+2}]_{ij}, [B_{k-2}^{k+1}]_{ij}, [B_{k-2}^{k+1}]_{ij}, [B_{k+1}^m]_{ij}\}$  — элементов-блоков обратных ведущих усечённых подматриц  $\{B_1^{k+2} = [C_1^{k+2}]^{-1}; B_{k-2}^{k+1} = [C_{k-2}^{k+1}]^{-1}; B_{k+1}^m = [C_{k+1}^m]^{-1}\}$ ,  $B_{k-2}^{k+1} = [C_{k-2}^{k+1}]^{-1}$ ,  $B_{k+1}^m = [C_{k+1}^m]^{-1}$  справедливы при соответствующих условиях УП<sub>1</sub>, УП<sub>2</sub>, IX (любое X) из полученных нами /I<sub>4</sub>, 2, 3/ различных прямых факторизованных представлений. Здесь неизвестные  $\{[\tilde{B}_{\beta\mu}]$  — функции от  $\{\Lambda\}$  при условии УП<sub>1</sub>; функции от  $\{G\}$  при условии УП<sub>2</sub> или как функции от  $\{\Lambda, G\}$  при условии IX} — элементы-блоки матриц  $\tilde{\omega}_{k, k', k''}^{-1}$  могут быть найдены любым (в том числе и рассмотренными выше) методом с учётом следующих основных матричных уравнений:

$$\begin{bmatrix}
 [Q_{kk}] [R_{k+1, k}] \\
 [P_{k+1, k}] [Q_{k, k'}] [R_{k+1, k'}] \\
 [P_{k+1, k'}] [Q_{k, k''}] [R_{k+1, k''}]
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 [\tilde{B}_{kk}] [\tilde{B}_{k+1, k'}] [\tilde{B}_{k+1, k''}] \\
 [\tilde{B}_{k+1, k'}] [\tilde{B}_{k, k'}] [\tilde{B}_{k, k''}] \\
 [\tilde{B}_{k+1, k''}] [\tilde{B}_{k, k'}] [\tilde{B}_{k, k''}]
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 [E_{kk}] \\
 [E_{k, k'}] \\
 [E_{k, k''}]
 \end{bmatrix}
 = \quad (3.6)$$

$$=
 \begin{bmatrix}
 [\tilde{B}_{kk}] [\tilde{B}_{k+1, k'}] [\tilde{B}_{k+1, k''}] \\
 [\tilde{B}_{k+1, k'}] [\tilde{B}_{k, k'}] [\tilde{B}_{k, k''}] \\
 [\tilde{B}_{k+1, k''}] [\tilde{B}_{k, k'}] [\tilde{B}_{k, k''}]
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 [Q_{kk}] [R_{k+1, k}] \\
 [P_{k+1, k}] [Q_{k, k'}] [R_{k+1, k'}] \\
 [P_{k+1, k'}] [Q_{k, k''}] [R_{k+1, k''}]
 \end{bmatrix}$$

X) И в этой теореме справедливо также Замечание 3.2.

явный вид известных  $[Q, R, P]$  – матриц–блоков в (3.6) определён в (3.5).

**Доказательство.** Представление типа 3.3 получаем из соответствующих факторизаций 3.3 для  $C(1.1)$ . При этом вновь следует воспользоваться основными моментами доказательства теоремы 3.2. Проверка справедливости представления 3.3 также осуществляется на основе равенств  $C \cdot B = E = B \cdot C$ . Теорема доказана.

**Замечание 3.3** (Лемма 3.1). Если  $C$  – невырожденная блочно–трёхдиагональная матрица общего вида (1.1) и для её  $\{\Delta_1^2\}$ ;  $\{\Delta_3^m\}$  – ведущих блочно–угловых миноров выполняется одно из условий теорем 2.1; 3.1; 2.2; 3.2; 2.3; 3.3, то характерные /см. 1.7/, 2/ матрицы  $(\omega_k = \tilde{\omega}_k)$ ,  $\omega_{k,l}(\tilde{\omega}_{k,l})$ ,  $\omega_{k,k',k''}(\tilde{\omega}_{k,k',k''})$  являются, при соответствующих условиях, невырожденными.

**Доказательство.** Невырожденность характерных матриц  $\omega_k, \omega_{k,l}, \omega_{k,k',k''}$  является прямым следствием невырожденности  $C(1.1)$ , поскольку  $\det(C) = \det(\tilde{\varphi}_3)$ , где  $\tilde{\varphi}_3$  – индуцированные /см. 1.7/, 2/ матрицы в соответствующих представлениях 2.1, 2.2, 2.3 для  $C(1.1)$ . Невырожденность же характерных матриц  $(\tilde{\omega}_k = \omega_k)$ ,  $\tilde{\omega}_{k,l}$ ,  $\tilde{\omega}_{k,k',k''}$  (также при  $\det(C) \neq 0$ ) вытекает из следующих факторизаций индуцированных матриц  $\tilde{\varphi}_3$  при соответствующих условиях:

**Представление**  $\tilde{\varphi}_3$  (при условиях  $I_1, I_2, II$ )

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{k-2} \\ E_k \\ C_{k+1}^m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E_1^{k-2} \\ \tilde{\omega}_k \\ E_{k+1}^m \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \tilde{\varphi}_k = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{k-2} \\ \tilde{\omega}_k \\ E_{k+1}^m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1^{k-2} \\ E_k \\ C_{k+1}^m \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

**Представление**  $\tilde{\varphi}_{k,l}$  (при условиях  $III_1, III_2, Y$ )

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^{k-2} \\ E_k \\ C_{k+1}^{l-2} \\ E_2 \\ C_{l+1}^m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} E_1^{k-2} \\ \tilde{\omega}_{k,l} \\ E_{k+1}^{l-2} \\ P_{l+1} \\ Q_{2l} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \tilde{\varphi}_{k,l} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^{k-2} \\ \tilde{\omega}_{k,l} \\ E_{k+1}^{l-2} \\ P_{l+1} \\ Q_{2l} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_1^{k-2} \\ E_k \\ C_{k+1}^{l-2} \\ E_2 \\ C_{l+1}^m \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$



Представление  $\mathbb{S}_{\overline{K}, K', K''}$  (при условиях УП<sub>1</sub>), УП<sub>2</sub>), IX)

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{c} C_1^{K-1} \\ E_K \\ C_{K+1}^{K-2} \\ E_{K'} \\ C_{K+1}^{K-2} \\ E_{K''} \\ C_{K+1}^m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} E_1^{K-2} \\ \left[ \begin{array}{c} Q_{KK} \\ \oplus \\ P_{K+1} \end{array} \right] \oplus \left[ \begin{array}{c} R_{K+1K} \\ \oplus \\ Q_{K+1} \\ \oplus \\ R_{K+1K'} \\ \oplus \\ Q_{K+1} \\ \oplus \\ R_{K+1K''} \\ \oplus \\ Q_{K+1} \\ \oplus \\ R_{K+1K} \end{array} \right] \\ \left( \mathbb{S}_{\overline{K}, K', K''} \right) \\ E_{K+1}^m \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} E_1^{K-2} \\ \left[ \begin{array}{c} Q_{KK} \\ \oplus \\ P_{K+1} \end{array} \right] \oplus \left[ \begin{array}{c} R_{K+1K} \\ \oplus \\ Q_{K+1} \\ \oplus \\ R_{K+1K'} \\ \oplus \\ Q_{K+1} \\ \oplus \\ R_{K+1K} \end{array} \right] \\ \left( \mathbb{S}_{\overline{K}, K', K''} \right) \\ E_{K+1}^m \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} C_1^{K-2} \\ E_K \\ C_{K+1}^{K-2} \\ E_{K'} \\ C_{K+1}^{K-2} \\ E_{K''} \\ C_{K+1}^m \end{array} \right] \quad (3.9)
 \end{array}$$

Здесь явный вид  $[Q, R, P]$  - матриц-блоков в (3.8)+(3.9) определен в (2.5) и (2.9) соответственно. Справедливость утверждения леммы 3.1 установлена.

**Замечание 3.4.** Как следует из теоремы 2.3, если у матрицы  $C(1.1)$  более двух нулевых ведущих блочно-угловых минора, то невырожденные характерные матрицы  $\omega_3$  (см., например, (3.9)) обретают общий блочно-трёхдиагональный вид. При этом к ним (в свою очередь) применимы (см., например, /17/, 2/) все полученные выше результаты для  $C(1.1)$ . Процесс полной факторизации  $C(1.1)$  конечен, как следует из теоремы 5/17/, и осуществим всего за два шага.

**Замечание 3.5.** При получении представлений для матриц  $C(1.1)$  и  $B=C^{-1}$  в этой работе мы исходили из возможных комбинаций вырожденности различных её усечённых подматриц. Однако формальный вид полученных представлений сохраняется, если заменить указанные условия вырожденности на условия плохой обусловленности соответствующих подматриц. На основании этого утверждения мы более подробно остановимся в следующей работе.

### Заключение

В настоящей работе построены генераторы множества матрично-факторизованных представлений мультипликативного типа для блочно-трёхдиагональных матриц  $C$  общего вида (1.1) и аддитивно-мультипликативного типа для  $(B=C^{-1})$  -им обратных матриц как при наличии различных комбинаций у них нулевых ведущих блочно-угловых миноров, так и при отсутствии последних.

### Литература

1. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Препринты ОИЯИ: РИИ-87-533. Дубна 1987; РИИ-89-203. Дубна 1989; РИИ-88-922. Дубна 1988; РИИ-93-248. Дубна 1993; РИИ-93-249. Дубна 1993; РИИ-93-250. Дубна 1993; РИИ-89-340. Дубна 1989. РИИ-88-786. Дубна 1988.
2. Емельяненко Г.А. Блочно-трёхдиагональные матрицы и методы численного решения спектральных задач. Автореферат докторской диссертации. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск 1992; ОИЯИ II-92-4. Дубна 1992.
3. Рахмонов Т.Т. О свойствах блочно-трёхдиагональных (и им обратных) матриц и их роли в решении некоторых задач линейной алгебры и обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий. Автореферат кандидатской диссертации. ИВМ АН ГССР. Тбилиси 1990.

**Рукопись поступила в издательский отдел  
13 июля 1993 года.**

Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т.

P11-93-265

**Генераторы матрично-факторизованных представлений  
блочно-трехдиагональных и им обратных матриц**

Построены генераторы множества матрично-факторизованных представлений блочно-трехдиагональных общего вида и им обратных матриц как при наличии у них различных комбинаций нулевых ведущих блочно-угловых миноров, так и в отсутствие последних.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1993

Перевод авторов

Emelyanenko G.A., Rakhmonov T.T.

P11-93-265

**The Generators of Matrix-Factorable Representations  
of Block-Tridiagonal and Inverse to Them Matrices**

The generators of set of matrix-factorable representations of general block-tridiagonal and inverse to them matrices both in case of zero main block-angular minors and nonzero ones are obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1993

30 p.

Редактор М.И.Зарубина. Макет Т.Е.Попеко

Подписано в печать 8.09.93

Формат 60x90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 2,2

Тираж 380. Заказ 46638

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
Дубна Московской области