Ciemat 733
ISSN 0214-087X

ESTADÍSTICA DE SISTEMAS DE DETECCIÓN MULTITUBO

Grau Carles, P.
Grau Malonda, A.

CENTRO DE INVESTIGACIONES
ENERGÉTICAS, MEDIOAMBIENTALES Y TECNOLÓGICAS

MADRID, 1994

CLASIFICACIÓN DOE Y DESCRIPTORES:

440102
SCINTILLATION COUNTING
EFFICIENCY
LIQUID SCINTILLATORS
COINCIDENCA METHODS
PHOTOMULTIPLIERS
DISTRIBUTION FUNCTIONS
MATHEMATICAL MODELS

Toda correspondencia en relación con este trabajo debe dirigirse al Servicio de Información y Documentación, Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas, Ciudad Universitaria, 28040-MADRID, ESPAÑA.

Las solicitudes de ejemplares deben dirigirse a este mismo Servicio.

Los descriptores se han seleccionado del Thesauro del DOE para describir las materias que contiene este informe con vistas a su recuperación. La catalogación se ha hecho utilizando el documento DOE/TIC-4602 (Rev. 1) Descriptive Cataloguing On-Line, y la clasificación de acuerdo con el documento DOE/TIC.4584-R7 Subject Categories and Scope publicados por el Office of Scientific and Technical Information del Departamento de Energía de los Estados Unidos.

Este trabajo se ha recibido para su impresión en Mayo de 1993.

Depósito Legal nº M-14875-1994
ISBN 84-7834-236-2
ISSN 0214-087-X
NIPO 238-94-014-X

IMPRIME CIEMAT

INDICE

1. INTRODUCCION

El desarrollo de sistemas de recuento y espectrómetros, basados en la técnica de centelleo líquido, se ha producido gracias a la mejora de las características de los fotomultiplicadores y al desarrollo de sistemas electrónicos de coincidencia y adición de los impulsos electrónicos.

La detección y el recuento de partículas cargadas, mediante un solo fotomultiplicador, presenta la ventaja de una elevada eficiencia de recuento. Sin embargo, la existencia del ruido termoiónico, procedente de los fotocátodos, reduce enormemente su utilización práctica cuando la energía de las partículas caragadas es baja, del orden de unos keV.

Una forma práctica de eliminar el ruido termoiónico consiste en utilizar dos o más tubos fotomultiplicadores conectados a uno o más sistemas de coincidencia. Los sistemas dotados con dos fotomultiplicadores son los que se cumplen habitualmente en la mayor parte de las aplicaciones y los que se han comercializado hasta la fecha. Sin embargo, en ciertas aplicaciones metrológicas los sistemas con tres o más tubos pueden dar resultados de gran interés. Tal es el caso de la calibración absoluta de nucleidos beta de baja energía: ^{3}H, ^{241}Pu, ^{63}Ni.

La explotación eficaz de estos sistemas requiere el desarrollo de modelos de cálculo que permitan obtener la eficiencia de recuento en función de un parámetro libre. En el caso de tres tubos, se han desarrollado dos modelos estadísticos, uno binomial, Broda y col. 1988 y otro Poissoniano, Grau Malonda y col. 1988. A pesar de la aparente diferencia entre ambos modelos se ha demostrado (Grau Malonda 1990) que ambos conducen a los mismos valores de la eficiencia de recuento. Se ha demostrado también que la calibración absoluta de radionucleidos que se desintegran por captura electrónica, al contrario de lo que ocurre con los emisores beta, presenta dos dificultades importantes ligadas a la curva de calibración eficiencia-relación triple/doble. Por una parte, esta curva no es unívoca: a un valor del parámetro triple/doble pueden corresponder dos valores distintos de la eficiencia de recuento; por otra parte, la extrapolación de la curva a parámetro libre cero da como resultado valores de una incertidumbre muy elevada. La utlización de curvas de calibración tridimensionales permite salvar la primera de las dificultades pero no reduce la incertidumbre de la extrapolación (Grau Carles y col. 1989).

En todos los modelos se requiere conocer la expresión matemática de la eficiencia de recuento para una forma de conectar los diferentes fotomultiplicadores. Las fórmulas para sistemas con dos, tres o cuatro fotomultiplicadores se han publicado en un trabajo previo (Grau Malonda 1993).

En el presente trabajo se considera el caso general de un sistema de detección dotado con p fotomultiplicadores de los cuales q son activos y están conectados de una forma determinada. Se demuestra y aplica un nuevo teorema de gran potencia y generalidad que permite obtener la expresión de la eficiencia de recuento en función del número medio de fotoelectrones producidos en cada uno de los fotocátodos a partir de las diferentes distribuciones de electrones generados a la salida de éste.

Este teorema es de gran interés, además, para obtener expresiones de probabilidades en el caso de distribuciones complejas de probabilidad. Puesto que la ley de Poisson sólo interviene en el proceso para facilitar el cálculo y desaparece al final del proceso, hemos denominado método catalítico al utilizado para calcular las probabilidades de las distribuciones de electrones. El procedimiento de cálculo se aplica a diferentes casos particulares en lo que el número de fotomultiplicadores en coincidencia y suma es diferente.

2. DETECCION Y RECUENTO

Llamaremos detección al proceso por el cual una partícula que interacciona con el líquido centelleador genera un impulso eléctrico en el elemento detector. Por otra parte, denominaremos recuento, al proceso por el cual el sistema detector entrega una señal al sistema de cuenta, lo cual es equivalente a decir que las señales de los sistemas de detección generan una señal que va al sistema de cuenta.

Puesto que las señales de detección pasan primero por los sistemas de suma y de coincidencia dependerá de estos sistemas que se produzca o no recuento. No siempre que hay detección se genera recuento y no siempre que hay recuento se ha producido detección en todos los elementos detectores del sistema. Téngase en cuenta que cuando varios elementos detectores se conectan a un sistema suma basta que uno de ellos produzca una señal de detección para que el sistema genere un impulso. En cambio, cuando los elementos detectores están conectados a un sistema de coincidencia, basta que uno de ellos no haya detectado para que no se produzca recuento.

En este trabajo los elementos detectores se designarán con letras mayúsculas, generálmente la letra A, para indicar el elemento detector; un subíndice distinguirá unos elementos de otros. En el caso de que los elementos se conecten a un sistema suma se indicará, por comodidad de escritura, con el signo + ,(aunque sería más correcto el signo unión U). Así pues, $A_1 + A_2 + ... + A_p$ indicará que p elementos detectores se han conectado a un sistema de adición. Bastará que uno de ellos haya detectado para el sistema responda con una señal eléctrica. Cuando los elementos se conecten a un sistema de coincidencia los elementos implicados se escribirán consecutivamente: $A_1\ A_2\ ...\ Ap$. El significado matemáticamente más concreto es el de intersección $\cap$. Por lo tanto, para que este sistema dé un impulso de respuesta será necesario que todos los p elementos hayan detectado.

Lo dicho hasta aquí nos permite dar las siguientes definiciones, que son imprescindibles para el resto del trabajo.

<u>Definición 1</u>.- Se dice que el conjunto formado por q fotomultiplicadores $\{A_1, A_2, ..., A_q\}$ está trabajando en coincidencia cuando se cumplen las siguientes condiciones:

a) Si cualquier fotocátodo A_i emite al menos un fotoelectrón se producirá una señal de coincidencia.

b) Si algún fotocátodo A_i no emite ningún electrón no se producirá señal de coincidencia.

<u>Definición 2</u>.- Se dice que el sistema formado por q fotomultiplicadores $\{A_1, A_2, ..., A_q\}$ está trabajando en suma cuando se cumplen las siguientes condiciones:

a) Si algún fotocátodo A_i emite al menos un fotoelectrón diremos que se produce una señal de suma.

b) Si ningún fotocátodo A_i emite ningún fotoelectrón diremos que no hay señal de suma.

Consideremos, por ejemplo, un sistema formado por 6 fotomultiplicadores conectados según el esquema: $A_1A_2A_3 + A_4A_5A_6$. En este caso el conjunto de los fotomultiplicadores A_1, A_2 y A_3 están en coincidencia, lo mismo que A_4, A_5 y A_6. Además las salidas de ambas coincidencias se han conectado a un sistema de suma. Así pues, para que se produzca el recuento es necesario que los fotomultiplicadores A_1A_2 y A_3, o los A_4, A_5 y A_6 detecten. Sin embargo, cuando sólo detectan los fotomultiplicadores A_2, A_3,A_5 y A_6 no se producirá recuento ya que ninguna de las dos coincidencias generará una señal que vaya al sistema suma. Otra forma de conectar estos 6 fotomultiplicadores podría ser la siguiente $(A_1+A_2+A_3)$ $(A_4+A_5+A_6)$. En la que los fotomultiplicadores A_1A_2 y A_3, por un lado, y los A_4A_5 y A_6 por otro, están conectados cada uno a un sistema suma. Para que haya recuento es necesario que ambos sistema suma produzcan una señal de salida. Así pues, habrá recuento cuando A_1A_2 o A_3 y A_4A_5o A_6 detecten.

3. MODELO POISSONIANO

La hipótesis básica de este modelo es que cuando al fotocátodo de un fotomultiplicador le llega una determinada cantidad de luz, la respuesta del fotomultiplicador sigue la ley estadística de Poisson. En otros términos, cuando la media esperada de fotoelectrones a la salida del fotocátodo es $\bar{n}$, la probabilidad de que salgan n viene dada por la expresión:

$$P\,(n,\,\bar{n}) = \frac{\bar{n}^n\ e^{-\bar{n}}}{n!} \tag{1}$$

Una segunda hipótesis, implícitamente admitida, es que la emisión de uno o más fotoelectrones por el fotocátodo implica una detección . Por consiguiente, en el caso de un sistema dotado con un sólo fotomultiplicador, la eficiencia de recuento vendrá dada por la expresión:

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} P\,(n,\,\bar{n}) \tag{2}$$

o también por:

$$\varepsilon = 1 - P(0,\,\bar{n}) = 1 - e^{-\bar{n}} \tag{3}$$

A fin de ligar el valor de la energía cinética de la partícula E, con el valor medio del número de electrones esperados a la salida del fotocátodo m, se define el parámetro libre λ como:

$$\lambda \equiv \frac{E\ Q\ (E)}{m} \tag{4}$$

en la que Q(E) es un factor de corrección debido a la extinción por ionización. Este factor tiene en cuenta los efectos no lineales debidos a la interacción de la partícula con el centelleador y la subsiguiente producción de luz. Hay que subrayar que m es el número medio esperado de fotoelectrones debido a todos los fotomultiplicadores del sistema, estén activos o inactivos. Para un sistema dotado de un solo fotomultiplicador se verifica $m = \bar{n}$ y para un sistema con p fotomultiplicadores $m = p\,\bar{n}$.

Si se supone que los efectos no lineales se deben exclusivamente a la extensión por ionización y se toma la fórmula semiempírica de Birks 1965, para calcular Q(E), tendremos:

$$Q(E) = \frac{1}{E}\int_{o}^{E} \frac{dE}{1+kB\left(\frac{dE}{dx}\right)} \tag{5}$$

en la que k es una constante y B (dE/dx) es la concentración de centros de ionización.

Cuando el sistema detector está constituido por p fotomultiplicadores, se admitirá que la probabilidad de no detección de cada uno de los fotomultiplicadores es la misma, lo que equivale a afirmar que la respuesta de los fotomultiplicadores es la misma. Si se quiere tener en cuenta el efecto de la diferente respuesta de los fotomultiplicadores resulta muy cómodo introducir un factor de asimetría entre fototubos, Grau Malonda y col. 1987, han considerado el caso particular de tres fotomultiplicadores. En el caso general de p fotomultiplicadores designaremos con $n_1, n_2, \ldots, n_p$ el número medio esperado de fotoelectrones a la salida de los fotocátodos $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Supondremos que $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_p$.
Sea n_o la media de estos valores esperados:

$$n_o = \frac{\sum_{i=1}^{p} n_i}{p} \tag{6}$$

Definiremos las discrepancias relativas como:

$$\Delta_i = \frac{n_i - n_o}{n_o} \tag{7}$$

de modo que:

$$n_i = n_o\,(1 + \Delta_i) \tag{8}$$

Cuando los p fotomultiplicadores trabajan en coincidencia y se supone que sus respuestas son iguales, la eficiencia de recuento se obtiene a partir de:

$$\varepsilon_o = \int_o^{E_m} N(Z,E) \left\{1 - \exp\left(-n_o\right)\right\}^p dE \tag{9}$$

en la que N(Z,E) es la distribución beta normalizada a la unidad y

$$n_o = \frac{E.Q(E)}{p\ \lambda} \tag{10}$$

La eficiencia de recuento real se calcula a mediante la expresión:

$$\varepsilon' = \int_o^{E_m} N(Z.E) \prod_{i=1}^{p} \left\{1 - \exp\left(-n_i\right)\right\} dE \tag{11}$$

y la discrepancia relativa de la eficiencia de recuento debido a las asimetrías entre los fotomultiplicadores es:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' - \varepsilon_o}{\varepsilon_o} \tag{12}$$

4. CASO GENERAL DE p TUBOS. TEOREMAS

Antes de entrar a estudiar el caso general y los teoremas implicados en su solución vamos a introducir algunos conceptos importantes mediante un ejemplo sencillo. Consideremos un sistema de detección constituido por p=6 fotomultiplicadores C $\{A_1A_2A_3A_4A_5A_6\}$. Supongamos que los fotomultiplicadores A_1 y A_2 están conectados a un sistema de coincidencia. Además las salidas de las coincidencias se han conectado a un sistema de suma. Diremos que el sistema activo es: $A_1A_2+ +A_3A_4$. Los fotomultiplicadores activos son $A_1A_2A_3$ y A_4 y el número de fotomultiplicadores activos es q =4. El número mínimo de fotomultiplicadores coincidentes es k=2.

Definición 3.- Dado un conjunto finito de elementos (fotomultiplicadores) $C = \{A_1, A_2, \ldots, A_p\}$ y las operaciones de unión (suma) y de interacción (coincidencia), se denominrá **sistema posible** al constituido por un subconjunto de elementos de C relacionados por las operaciones de coincidencia y suma.

Teorema 1.

La eficiencia de recuento de un sistema posible formado por q fotomultiplicadores activos viene dado por la expresión:

$$\varepsilon = 1 - \sum_{j=1}^{q} a_j \; e^{-j\bar{n}} \tag{13}$$

Obsérvese que esta es una condición necesaria. No toda expresión de la forma (13) corresponde a un sistema posible. Por ejemplo, la expresión:

$$\varepsilon = 1 - e^{-\bar{n}} - e^{-2\bar{n}}$$

en la que $q=2$ y $a_1 = a_2 = 1$, no corresponde a ningún sistema real, ya que los únicos sistemas reales que podemos formar con dos tubos son: A_1; $A_1 + A_2$; A_1A_2, para los que las expresiones de las eficiencias de recuento son: $\varepsilon = 1 - e^{-\bar{n}}$; $\varepsilon = 1 - e^{-2\bar{n}}$; $\varepsilon = 1 - 2\,e^{-\bar{n}} + e^{-2\bar{n}}$, respectivamente.

Demostración:

Considérese un sistema general de conexión de los q elementos activos: $A_1A_2\ldots A_r + A_{r+1}$, $A_{r+2}\ldots A_{2r} + \ldots + A_{(n-1)r}\ldots A_{nr}$. Si designamos por: $H_1 = A_1\,A_2\ldots A_r$; $H_2 = A_{r+1}\ldots A_{2r}$ $H_n = A_{(n=1)r}\ldots A_{nr}$. de manera que en cada H haya el mismo número de elementos podemos escribir:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= P\,(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} H_n\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{u} \binom{u}{i} \left[\left(1 - e^{-\bar{n}}\right)^r\right]^i (-1)^{i+1} = 1 - \sum_{j=1}^{q} a_j \; e^{-j\bar{n}}\end{aligned} \tag{13'}$$

Los siguientes dos teoremas permiten definir las condiciones para que un sistema sea posible y además obtener la eficiencia de recuento en función de la distribución de los fotoelectrones a la salida de los diferentes fotocátodos.

Teorema 2.

La condición necesaria y suficiente para que un sistema sea posible es que se verifique la expresión:

$$p^n = \sum_{j=1}^{q} a_j \, (p-j)^n \tag{14}$$

sujeta a la condición $o \leq n \leq k - 1$.

Teorema 3.

La eficiencia de recuento para un sistema posible dotado con p elementos de los cuales q son activos y k es el número mínimo de coincidentes, viene dada por la expresión:

$$\varepsilon = \sum_{n=k}^{\infty} P\,(n,\ p\bar{n}) \left\{ 1 - p^{-n} \sum_{j=1}^{q} a_j (p-j)^n \right\} \tag{15}$$

los coeficientes a_j son los mismos en las expresiones (13), (14) y (15).

Demostración:

Las expresiones (13) y (15) corresponden a la eficiencia de recuento de un sistema posible y, por lo tanto, los valores obtenidos para la eficiencia de recuento serán iguales. La expresión (13) permite calcular la eficiencia de recuento a partir de la probabilidad de no detección de cada elemento. En cambio, la expresión (15) es el resultado de sumar todas las probabilidades de detección en las que hay respuesta.

Desarrollando el segundo miembro de (15) y después de algunas operaciones elementales resulta:

$$\varepsilon = 1 - \sum_{j=1}^{q} a_j \; e^{-j\bar{n}} + \sum_{j=1}^{q} a_j \; e^{-j\bar{n}} \sum_{n=0}^{n-1} P\left[n, (p-j)\bar{n}\right] - \\ - \sum_{n=0}^{k-1} P\,(n, \; p\bar{n}) \qquad (16)$$

Para que esta expresión coincida con la (13) basta que se verifique:

$$\sum_{j=1}^{q} a_j \; e^{-j\bar{n}} + \sum_{n=o}^{k-1} P\left[n, (p-j)\bar{n}\right] - \sum_{n=o}^{k-1} P\left[n, (p-j)\bar{n}\right] = 0 \qquad (17)$$

que al desarrollarla resulta:

$$p^n = \sum_{j=1}^{k-1} a_j \; (p-j)^n \qquad (18)$$

para $o \leq n \leq k - 1$. c.q.d.

5 APLICACIONES

5.1. Fotomultiplicadores en coincidencia pura.

Para aclarar las ideas consideremos el caso de un sistema detector formado por p tubos trabajando en coincidencia: $A_1 A_2 ... A_p$. En este caso tendremos que p=q=k.

Puesto que la probabilidad de detección es:

$$P(o, \; \bar{n}) = e^{-n} \qquad (19)$$

La probabilidad de detección de un tubo resulta ser:

$$1 - e^{-\bar{n}} \qquad (20)$$

y la probabilidad de que se produzca un impulso a la salida del sistema o, lo que es lo mismo, la eficiencia de recuento es:

$$\varepsilon = \left(1-e^{-\bar{n}}\right)^{p} = 1 - \sum_{j=1}^{p} \binom{p}{j} e^{-j\bar{n}} \, (-1)^{j+1} \qquad (21)$$

con lo que se verifica el teorema 1, ya que los coeficientes a_j vienen dados por la fórmula:

$$a_j = \binom{p}{j} (-\ 1))^{j+1}$$

Por otra parte de la definición de sistema real resulta que:

$$\sum_{j=1}^{p} a_j \, (p-j)^n = p^n \qquad \text{para} \qquad o \leq n \leq p-1 \qquad (22)$$

por lo tanto, resulta el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{ll}
a_1 + a_2 + \quad \ldots\ldots + \quad a_{p-2} \quad + a_{p-1} = 1 & \\
a_1\,(p\text{-}1) + a_2\,(p\text{-}2) + \quad \ldots\ldots + \quad 2\,a_{p-2} \; + a_{p-1} \quad = p & \\
a_1\,(p\text{-}1)^2 + a_1\,(p\text{-}2)^2 + \quad \ldots\ldots + \quad 2^2\,a_{p-2} + a_{p-1} \quad = p^2 & \qquad (23) \\
\text{— — — — — — — — — —} & \\
a_1(p\text{-}1)^{p-1} + a_2\,(p\text{-}2)^{p-2} + \ldots. + 2^{p-1}\,a_{p-2} + a_{p-1} \quad = p^{p-1} &
\end{array}$$

puesto que:

$$a_j = \binom{p}{j} (-1)^{j+1} \qquad (24)$$

la r-esima ecuación será:

$$\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}(-1)^{j+1}(p-j)^{r-1} = \sum_{j=o}^{p}\binom{p}{j}(-1)^{j+1}(p-j)^{r-1} + p^r = p^r \tag{25}$$

lo que nos indica que se cumplen todas las ecuaciones del sistema para los valores a_j definidos por (24).

Para obtener la eficiencia de recuento a partir de la probabilidad de distribución de n electrones a la salida de los p fotocátodos aplicaremos el Teorema 3.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \sum_{n=p}^{\infty} P(n,\, p\bar{n}) \left\{1-p^{-n}\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}(p-j)^n\,(-1)^{j+1}\right\} = \\ &= \sum_{n=p}^{\infty} P(n,\, p\bar{n}) \left\{1-p^{-n}\sum_{r=o}^{p-1}\binom{p}{r} r^n\,(-1)^{p-r+1}\right\} = \\ &= \sum_{n=p}^{\infty} P(n,\, p\bar{n}) \left\{1+p^{-n}\sum_{r=1}^{p-1}\binom{p}{r} r^n\,(-1)^{p-r}\right\}\end{aligned} \tag{26}$$

Esta expresión se puede deducir también a partir de las distribuciones de n electrones entre los p fotocátodos. El número de distribuciones posibles N_p es:

$$N_p = p^n \tag{27}$$

El número de distribuciones favorables N_F al recuento se obtiene contando aquellas distribuciones en las que todos los fotocátodos emiten al menos un fotoelectrón:

$$N_F = P!\, S_n^p \tag{28}$$

en la que S_n^p son los números de Stirling de segunda clase. La fórmula de definición de estos números es:

$$S_n^p = \frac{1}{p!}\sum_{r=o}^{p}(-1)^{p-r}\binom{p}{r} r^n \tag{29}$$

Por lo tanto:

$$N_F = \sum_{r=o}^{p} (-1)^{p-r} \binom{p}{r} r^n \tag{30}$$

y la eficiencia de recuento vendrá dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{n=p}^{\infty} P\,(n,\ p\bar{n}) \sum_{r=o}^{\infty} (-1)^{p-r} \binom{p}{r} r^n\ p^{-n} = \\ &= \sum_{n=p}^{\infty} P\,(n,\ p\bar{n}) \left[1 + p^{-n} \sum_{r=1}^{p-1} (-1)^{p-r} \binom{p}{r} r^n \right] \end{aligned} \tag{31}$$

que coincide con la fórmula(26).

5.2. Fotomultiplicadores en suma pura

Consideremos el caso de p fotomultiplicador definidos como $C\{A_1 A_2 \ldots A_p\}$, q de ellos conectados con suma: $A_1 + A_2 + \ldots + A_q$.

La fórmula para calcular la eficiencia de recuento a partir de la probabilidad de no detección se puede obtener por dos caminos diferentes, uno adecuado para este caso y otro general.

i) La probabilidad de que un fotomultiplicador no detecte es $e^{-\bar{n}}$ y la probabilidad de que los q fotomultiplicadores no detecten es $e^{-q\bar{n}}$. Por lo tanto, la probabilidad de que alguno de ellos detecte, o lo que es lo mismo, la eficiencia de recuento es:

$$\varepsilon = 1 - e^{-q\bar{n}} \tag{32}$$

ii) Otra foma de obtener dicha eficiencia es a partir de la expresión:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= P\,(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_q) = P\left(\bigcup_{j=1}^{q} A_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{q} \binom{q}{j} (1-e^{-\bar{n}})^j\ (-1)^j = 1-e^{-q\bar{n}} \end{aligned} \tag{33}$$

La fórmula para calcular la eficiencia de recuento a partir de la probabilidad de que todos los fotocátodos emitan al menos un fotoelectrón, se va a deducir por dos caminos diferentes: uno contando los casos favorables a la detección y el otro aplicando el Teorema 3.

iii) El número de distribuciones posibles de n electrones entre q fotocátodos es:

$$N_p = q^n \tag{34}$$

y el número de casos favorables lo obtendremos a partir de los casos en que no haya detección. No habrá detección cuando ninguno de los fotocátodos de $A_1, A_2, \cdots A_q$ emita ningún electrón. Ello ocurre cuando los n electrones están distribuidos entre los restantes fotocátodos $A_{q+1}, A_{q+2}, ..., A_p$. El número de distribuciones no favorables N_{NF} a la detección es:

$$N_{NF} = (p\text{-}q)^n \tag{35}$$

el de favorables,

$$N_F = p^n - (p\text{-}q)^n \tag{36}$$

la probabilidad de que la distribución de los electrones dé lugar a una cuenta es:

$$D(n) = 1\text{-}p^{-n}\,(p\text{-}q)^n \tag{37}$$

y la eficiencia de recuento es:

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} P\ (n,\ p\bar{n})\ \left[1 - p^{-n}(p-q)^n\right] \tag{38}$$

iv) Otra forma de obtener la expresión de la eficiencia de recuento es a partir del Teorema 3.

Para que el sistema sea real se tendrá que verificar que:

$$p^n = (p - q)^n \qquad \text{cuando} \qquad n = o \tag{39}$$

lo cual es evidente. Así pues:

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} P\ (n,\ p\bar{n})\ \left[1 - p^{-n}(p-q)^{n}\right] \tag{40}$$

que coincide con la expresión (38).

5.3. SUMA DE COINCIDENCIAS DOBLES.

Consideremos el caso en que $q = 6$ y p es un número cualquiera, tal que $p \geq q$. El sistema posible es: $A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6$, al que corresponde $k=2$.

La eficiencia de recuento obtenida a partir de la probabilidad de no detección es:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= P\ \left\{(A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4) \cup (A_5 \cap A_6)\right\} = \\ &= 3\ \left(1-e^{-\bar{n}}\right)^2 - 3\ (1-e^{-\bar{n}})^4 + \left(1-e^{-\bar{n}}\right)^6 = \\ &= 1 - \left(8\ e^{-3\bar{n}} - 12\ e^{-4\bar{n}} + 6\ e^{5\bar{n}} - e^{-\bar{n}}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

Si se compara esta expresión con la (13) se obtienen los coeficientes a_j:

$$a_1 = a_2 = 0,\quad a_3 = 8,\quad a_4 = -12,\quad a_5 = 6,\quad a_6 = -1$$

Si es un sistema posible deberá cumplir la expresión (14), o sea:

$$p^n = 8\ (p-3)^n - 12\ (p-4)^n + 6\ (p-5)^n - (p-6)^n$$

para $n = 0,1$. Un sencillo cálculo permite comprobar que se cumple esta expresión.

Si ahora aplicamos (15), se obtiene la otra expresiòn de la eficiencia de recuento:

$$\sum_{n=2}^{\infty} P\ (n,\ p\bar{n})\ \left\{1 - p^{-n}\left[8\ (p-3)^n - 12\ (p-4)^n + 6\ (p-5)^n - (p-6)^n\right]\right\} \tag{42}$$

5.4. SUMA DE COINCIDENCIAS TRIPLES

Supongamos que q=6 y p es arbitrario pero mayor o igual que q, y que los fotomultiplicadores están conectados en coincidencia triple y la salida de dichas coincidencias van a un sistema suma: $A_1A_2A_3 + A_4A_5A_6$. En este caso $k = 3$.

La eficiencia de recuento a partir de la probabilidad de no detección de cada tubo viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= P\left[(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_4 \cap A_5 \cap A_6)\right] = \\ &= 2\left(1-e^{-\bar{n}}\right)^3 - (1-e^{-\bar{n}})^6 = \\ &= 1 - \left(9\ e^{-2\bar{n}} - 18\ e^{-3\bar{n}} + 15\ e^{-4\bar{n}} - 6e^{-5\bar{n}} + e^{-6\bar{n}}\right) \end{aligned} \qquad (43)$$

Así pues, comparando esta expresión con la (13) se obtienen los valores numéricos de los coeficientes a_j.

$$a_1 = 0,\quad a_2 = 9,\quad a_3 = -18,\quad a_4 = 15,\quad a_5 = -6,\ a_6 = 1$$

El sistema es posible y, por lo tanto, debe cumplir la relación (14) en este caso particular:

$$p^n = 9\,(p-2)^n - 18(p-3)^n + 15\,(p-4)^n - 6\,(p-5)^n + (p-6)^n$$

cuando $n = 0, 1, 2$. Mediante un sencillo cálculo se comprueba que se cumple la relación para los valores dados de n.

Por consiguiente, la eficiencia de recuento se obtiene directamente a partir de la expresión (15), que en este caso toma la forma:

$$\varepsilon \sum_{n=3}^{\infty} P\,(n,\ p\bar{n})\ \left\{1 - p^{-n}\left[9\ (p-2)^n - 18\ (p-3)^n + 15\ (p-4)^n - 6\ (p-5)^n + (p-6)^n\right]\right\} \qquad (44)$$

En el caso particular de que $p = q = 6$, esta expresión se convierte en:

$$\varepsilon \sum_{n=3}^{\infty} P\,(n,\ 6\bar{n})\ \left\{1 - 6^{-n}\left[9.2^{n} - 18.3^{n} + 15.2^{n} - 6\right]\right\} \qquad (45)$$

5.5 SUMA DE COINCIDENCIAS CUADRUPLES.

Consideremos el caso en que $q = 8$ y los fotomultiplicadores activos están conectados a dos coincidencias de forma que a cada una de ellas les corresponden 4 fotomultiplicadores distintos. La salida de cada coincidencia se ha conectado, a su vez, a un sistema suma. El esquema de trabajo del sistema posible se puede simbolizar por: $A_1A_2A_3\,A_4 + A_5A_6A_7A_8$. En este caso $k = 4$.

La eficiencia de recuento, en función de la probabilidad de no detección, se obtiene a partir de la expresión:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= P\left[\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\right) \cup \left(A_5 \cap A_6 \cap A_7 \cap A_8\right)\right] = \\ &= 2\left(1-e^{-\bar{n}}\right)^4 - (1-e^{-\bar{n}})^8 = \\ &= 1 - \left(16\ e^{-2\bar{n}} - 48\ e^{-3\bar{n}} + 68\ e^{-4\bar{n}} - 56\ e^{-5\bar{n}} + 28\ e^{-6\bar{n}} - \right. \\ &\quad \left. - 8\ e^{7\bar{n}} + e^{-8\bar{n}}\right) \end{aligned} \qquad (46)$$

Como en los casos anteriores, los coeficientes a_j de la expresión (13) se obtienen comparando (13) con (46): $a_1 = 0$, $a_2 = 16$, $a_3 = -48$, $a_4 = 68$, $a_5 = -56$, $a_6 = 28$, $a_7 = -8$, $a_8 = 1$.

Para comprobar que el sistema es posible hay que ver si se cumple la relación (14):

$$p^n = 16(p-2)^n - 48(p-3)^n + 168\,(p-4)^n - 56\,(p-5)^n + 28\,(p-6)^n - 8\,(p-7)^n + (p-8)^n$$

cuando $n = 0, 1, 2$ y 3. Como puede comprobarse, después de un cálculo un poco engorroso, esta igualdad se cumple para los valores de n indicados.

La eficiencia de recuento, en función del número de electrones emitidos por los fotocátodos, se obtiene mediante la fórmula:

$$\varepsilon = P\ (n,\ pn)\ \Big(1 - p^{-n}\big[16\ (p-2)^n - 48\ (p-3)^n + 68\ (p-4)^n - \\ - 56\ (p-5)^n - 28\ (p-6) - 8\ (p-7)^n + (p - 8)^n\big]\Big\} \tag{47}$$

5.6. SUMA DE DOS COINCIDENCIAS ESCALONADAS

Consideremos el caso de un sistema dotado con q=3 fotomultiplicadores activos, en suma y coincidencia, según el esquema: $A_1 + A_2 A_3$. La eficiencia de recuento en función de la probabilidad de no detección es:

$$\varepsilon = P\ (A_1 \cup (A_2 \cap A_3)) = 1 - \left(2\ e^{-2\bar{n}} - e^{-3\bar{n}}\right) \tag{48}$$

La condición de sistema posible es:

$$p^n = 2\ (p - 2)^n - (p - 3)^n$$

cuado $n = 0$, ya que en este caso el número mínimo de tubos en coincidencia es $k = 1$. La comprobación es inmediata.

La eficiencia de recuento en función de las diferentes probabilidades de Poisson es:

$$\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} P\ (n,\ p\bar{n})\ \Big\{1 - p^{-n}\big[2\ (p-2)^n - (p-3)^n\big]\Big\} \tag{49}$$

5.7. SUMA DE TRES COINCIDENCIAS ESCALONADAS

El número de fotomultiplicadores activos en este caso puede ser $q = 6$, trabajando según el esquema siguiente: $A_1 + A_2 A_3 + A_4\ A_5\ A_6$. El número total de elementos del sistema es $p \geq q$ y el valor de $k = 1$.

La eficiencia de recuento en función de la probabilidad de no detección es:

$$\varepsilon = P\left[\left(A_1 \cup (A_2 \cap A_3)\right) \cup \left(A_4 \cap A_5 \cap A_6\right)\right] = \tag{50}$$
$$= 1 - \left[6\ (p-3)^n - 9\ (p-4)^n + 5\ (p-5)^n - 6\ (p-6)^n\right]$$

Comparando esta expresión con la (13) se obtienen los coeficientes a_j, cuyos valores son:

$$a_1 = a_2 = 0,\quad a_3 = 6,\quad a_4 = 9,\quad a_5 = -5,\ a_6 = -1$$

La condición de sistema posible viene dada por la expresión:

$$p^n = 6\ (p-3)^n = 9\ (p-4)^n + 5(p-5)^n - (p-6)^n$$

para $n = 0$. La comprobación es inmediata.

La eficiencia de recuento, en función de las infinitas probabilidades no cero de Poisson, se deduce de la expresión (15) al aplicar los valores de los coeficiente a_j obtenidos:

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} P\ (n,\ p\bar{n})\ \left\{1 - p^{-n}\left[6\ (p-3)^n - 9\ (p-4)^n + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 5\ (p-5)^n - (p-6)^n\right]\right\} \tag{51}$$

6. REFERENCIAS

BRODA, R., POCHWALSHY, K y RODOSZEWSKI, T. (1988) Appl. Radiat. Isot. 39, 159.

GRAU MALONDA, A. y COURSEY, B.M. (1988) Appl. Radiat. Isot. 39, 1191.

GRAU MALONDA, A. Report CIEMAT 677, Madrid (1990).

GRAU CARLES, A. y GRAU MALONDA, A., (1989) Anales de Física B85, 160.

GRAU MALONDA, A. Report CIEMAT 702, Madrid (1993).

BIRKS,J.B. (1964) "The Theory and Practice of Scintillation Counting". pág. 185, Pergamon Press.

CIEMAT-733

Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas.
Instituto de Investigación Básica.

"Estadística de sistemas de detección multitubo".

GRAU CARLES, P., GRAU MALONDA, A. (1994) 29 pp.; 6 refs.

En el presente trabajo se demuestran y aplican tres nuevos teoremas de estadística que simplifican enormemente la deducción de las fórmulas para calcular la eficiencia de recuento de sistemas multitubo, sea cual fuere la forma de conectarlos en coincidencia y suma. Se estudian varias estructuras de conexión de los fotomultiplicadores a los que se aplican los citados teoremas para mostrar su potencia y aplicabilidad.

CLASIFICACIÓN DOE Y DESCRIPTORES: 440102. Scintillation counting. Efficiency. Liquid scintillators. Coincidence methods. Photomultipliers. Distribution functions. Mathematical models.

CIEMAT-733

Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas.
Instituto de Investigación Básica.

"Estadística de sistemas de detección multitubo".

GRAU CARLES, P., GRAU MALONDA, A. (1994) 29 pp.; 6 refs.

En el presente trabajo se demuestran y aplican tres nuevos teoremas de estadística que simplifican enormemente la deducción de las fórmulas para calcular la eficiencia de recuento de sistemas multitubo, sea cual fuere la forma de conectarlos en coincidencia y suma. Se estudian varias estructuras de conexión de los fotomultiplicadores a los que se aplican los citados teoremas para mostrar su potencia y aplicabilidad.

CLASIFICACIÓN DOE Y DESCRIPTORES: 440102. Scintillation counting. Efficiency. Liquid scintillators. Coincidence methods. Photomultipliers. Distribution functions. Mathematical models.

CIEMAT-733

Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas.
Instituto de Investigación Básica.

"Estadística de sistemas de detección multitubo".

GRAU CARLES, P., GRAU MALONDA, A. (1994) 29 pp.; 6 refs.

En el presente trabajo se demuestran y aplican tres nuevos teoremas de estadística que simplifican enormemente la deducción de las fórmulas para calcular la eficiencia de recuento de sistemas multitubo, sea cual fuere la forma de conectarlos en coincidencia y suma. Se estudian varias estructuras de conexión de los fotomultiplicadores a los que se aplican los citados teoremas para mostrar su potencia y aplicabilidad.

CLASIFICACIÓN DOE Y DESCRIPTORES: 440102. Scintillation counting. Efficiency. Liquid scintillators. Coincidence methods. Photomultipliers. Distribution functions. Mathematical models.

CIEMAT-733

Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas.
Instituto de Investigación Básica.

"Estadística de sistemas de detección multitubo".

GRAU CARLES, P., GRAU MALONDA, A. (1994) 29 pp.; 6 refs.

En el presente trabajo se demuestran y aplican tres nuevos teoremas de estadística que simplifican enormemente la deducción de las fórmulas para calcular la eficiencia de recuento de sistemas multitubo, sea cual fuere la forma de conectarlos en coincidencia y suma. Se estudian varias estructuras de conexión de los fotomultiplicadores a los que se aplican los citados teoremas para mostrar su potencia y aplicabilidad.

CLASIFICACIÓN DOE Y DESCRIPTORES: 440102. Scintillation counting. Efficiency. Liquid scintillators. Coincidence methods. Photomultipliers. Distribution functions. Mathematical models.

CIEMAT-733

Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas.
Instituto de Investigación Básica.

"Statistics of multi-tube detecting systems".

GRAU CARLES, P., GRAU MALONDA, A. (1994) 29 pp.; 6 refs.

In this paper three new statistical theorems are demostrated and applied. These theorems simplify very much the obtention of the formulae to compute the counting efficiency when the detection system is formed by several photomultipliers associated in coincidence and sume. These theorems are applied to several photomultiplier arrangements in order to show their potential and the application way.

DOE CLASSIFICATION AND DESCRIPTORS: 440102. Scintillation counting. Efficiency. Liquid scintillators. Coincidence methods. Photomultipliers. Distribution functions. Mathematical models.

CIEMAT-733

Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas.
Instituto de Investigación Básica.

"Statistics of multi-tube detecting systems".

GRAU CARLES, P., GRAU MALONDA, A. (1994) 29 pp.; 6 refs.

In this paper three new statistical theorems are demostrated and applied. These theorems simplify very much the obtention of the formulae to compute the counting efficiency when the detection system is formed by several photomultipliers associated in coincidence and sume. These theorems are applied to several photomultiplier arrangements in order to show their potential and the application way.

DOE CLASSIFICATION AND DESCRIPTORS: 440102. Scintillation counting. Efficiency. Liquid scintillators. Coincidence methods. Photomultipliers. Distribution functions. Mathematical models.

CIEMAT-733

Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas.
Instituto de Investigación Básica.

"Statistics of multi-tube detecting systems".

GRAU CARLES, P., GRAU MALONDA, A. (1994) 29 pp.; 6 refs.

In this paper three new statistical theorems are demostrated and applied. These theorems simplify very much the obtention of the formulae to compute the counting efficiency when the detection system is formed by several photomultipliers associated in coincidence and sume. These theorems are applied to several photomultiplier arrangements in order to show their potential and the application way.

DOE CLASSIFICATION AND DESCRIPTORS: 440102. Scintillation counting. Efficiency. Liquid scintillators. Coincidence methods. Photomultipliers. Distribution functions. Mathematical models.

CIEMAT-733

Centro de Investigaciones Energéticas, Medioambientales y Tecnológicas.
Instituto de Investigación Básica.

"Statistics of multi-tube detecting systems".

GRAU CARLES, P., GRAU MALONDA, A. (1994) 29 pp.; 6 refs.

In this paper three new statistical theorems are demostrated and applied. These theorems simplify very much the obtention of the formulae to compute the counting efficiency when the detection system is formed by several photomultipliers associated in coincidence and sume. These theorems are applied to several photomultiplier arrangements in order to show their potential and the application way.

DOE CLASSIFICATION AND DESCRIPTORS: 440102. Scintillation counting. Efficiency. Liquid scintillators. Coincidence methods. Photomultipliers. Distribution functions. Mathematical models.