

*Collection de notes internes  
de la Direction  
des Etudes et Recherches*

**APPORTS DE METHODES ALTERNATIVES POUR LE  
TRAITEMENT DE LA CONVECTION EN ELEMENTS FINIS :  
METHODE SUPG, METHODE UPWIND**

***ALTERNATIVE METHODS FOR THE CONVECTION TERM  
TREATMENT USING FINITE ELEMENTS : SUPG METHOD,  
UPWIND METHOD***

**EDF**

Electricité  
de France

Direction des Etudes et Recherches

**EDF**

**Direction des Etudes et Recherches**

*IPN*

**Electricité  
de France**

SERVICE APPLICATIONS DE L'ELECTRICITE ET ENVIRONNEMENT  
Département Laboratoire National d'Hydraulique

*362*

Cession INIS  
Doc. enreg. le : 9/5/96  
N° TRN : F.P. 9.0.0.0.94.6  
Destination : I,I+D,D

Novembre 1995

BOUCKER M.  
CARUSO A.  
MECHITOUA N.

*IP56257 N. FR*

**APPORTS DE METHODES ALTERNATIVES POUR  
LE TRAITEMENT DE LA CONVECTION EN  
ELEMENTS FINIS : METHODE SUPG, METHODE  
UPWIND**

***ALTERNATIVE METHODS FOR THE  
CONVECTION TERM TREATMENT USING  
FINITE ELEMENTS : SUPG METHOD, UPWIND  
METHOD***

Pages : 60

96NB00039

Diffusion : J.-M. Lecœuvre  
EDF-DER  
Service IPN. Département SID  
1, avenue du Général-de-Gaulle  
92141 Clamart Cedex

© Copyright EDF 1996

ISSN 1161-0611

## **SYNTHÈSE :**

Ce rapport se situe dans le contexte des actions menées dans le but d'améliorer la prise en compte des termes de convection des équations de Navier-Stokes dans un cadre éléments finis tel que dans le code N3S. Il s'agit de l'étude de méthodes alternatives autres que celle traditionnellement employée, c'est-à-dire la méthode des caractéristiques sous forme forte.

Les méthodes testées sont des méthodes de deux : la méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) et une méthode directement inspirée des différences finies que l'on nommera UPWIND d'ordre un.

Actuellement la méthode SUPG est un des moyens les plus utilisés pour obtenir un traitement numérique stable d'un problème dominé par la convection, à partir d'une formulation variationnelle, dans un contexte éléments finis.

La méthode UPWIND proposée consiste à utiliser un schéma décentré amont sur l'élément en tenant compte de manière linéaire de toute l'information locale de cet élément.

Une combinaison des deux méthodes est également proposée. La mise en oeuvre numérique est détaillée. Par la suite, sont présentés des résultats de tests effectués sur des cas élémentaires couramment utilisés pour tester les schémas numériques sur l'équation de convection pure ainsi que des cas de dynamique des fluides (incompressible et compressible) afin de valider les nouveaux modules de convection ainsi réalisés. Des comparaisons avec la méthode des caractéristiques utilisée dans N3S sont également présentées.

**BOUCKER M. : Stagiaire DEA Paris VI  
CARUSO A., MECHITOUA N.**

## **EXECUTIVE SUMMARY :**

This report is a contribution to the actions destined to improve the numerical treatment of the convection term into the Navier-Stokes equations using finite elements technique like N3S software. It concerns the study of two alternative methods, different of the characteristic method usually employed.

These methods are variationnal methods, compatible with the treatment of the Stokes problem : a SUPG method (Streamline Upwind Petrov-Galerkin) and an UPWIND one order method directly deduced from finite differences.

Actually, the SUPG method is one of the most employed method to obtain a stable numerical treatment of flow dominated by convection effects, using a variationnal formulation with finite elements.

The UPWIND method proposed consists in using an upwind scheme taking into account the upwind element and computing locally in a linear way the information.

A combination of both SUPG and UPWIND methods is proposed. The numerical techniques employed are detailed. Results concerning test cases usually used to validate numerical schemes solving a pure convection equation and Navier-Stokes test cases (incompressible and compressible) are then presented. Comparisons with the characteristic method employed into the N3S code are also presented.

## SOMMAIRE

<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>3</b>
<b>I.METHODE SUPG - METHODE UPWIND.....</b>	<b>5</b>
I.1 METHODE SUPG.....	5
I.1.1 Equation de convection pure.....	5
I.1.2. Discrétisation spatiale.....	6
I.1.3 Les fonctions poids SUPG.....	7
I.3.1 <i>Forme générale</i> .....	7
I.3.2 <i>Le paramètre de décentrement</i> .....	8
I.1.4 Estimation de l'erreur.....	9
I.2 METHODE UPWIND .....	9
<b>II. METHODES NUMERIQUES.....</b>	<b>12</b>
II.1 FORMULATION MATRICIELLE.....	12
II.2 DISCRETISATION TEMPORELLE ET ALGORITHMES.....	13
II.2.1 <i>Algorithme semi-implicite</i> .....	13
II.2.2 <i>Algorithme prédicteur-correcteur</i> .....	16
II.3 SCHEMA COUPLE SUPG+UPWIND.....	17
II.3.1 <i>Principe</i> .....	17
II.3.2 <i>Tests de pentes</i> .....	18
II.3 PROGRAMMATION.....	19
II.3.1 <i>Calcul des matrices</i> .....	19
II.3.2 <i>Discrétisation du champ convecteur</i> .....	21
II.3.3 <i>Calcul du paramètre de décentrement</i> .....	22
<b>III. VALIDATION.....</b>	<b>23</b>

III.1 TRANSPORT D'UN SCALAIRE "PASSIF".....	23
III.1.1 <i>Cas test instationnaire : le cône tournant</i> .....	23
III.1.2 <i>Cas tests stationnaires</i> .....	24
III.1.2.a <i>Echelon transversal</i> .....	25
III.1.2.b <i>Cosinus tournant</i> .....	26
III.1.2.c <i>Cas test de Smith et Hutton</i> .....	26
III.1.3 <i>Estimation expérimentale de l'ordre de la méthode</i> .....	26
III.2 VALIDATION EN DYNAMIQUE DES FLUIDES.....	27
II.2.1 <i>Application de SUPG aux équations de Navier-Stokes</i> .....	27
II.2.1.a <i>Les équations de Navier-Stokes</i> .....	27
II.2.1.b <i>Algorithme de résolution</i> .....	28
II.2.2 <i>Cas tests "convectifs" en mécanique des fluides</i> .....	29
III.2.2.a <i>Cavité entraînée en régime laminaire</i> .....	29
III.2.2.b <i>Marche d'escalier en régime turbulent</i> .....	30
III.2.2.c <i>Calcul compressible : soupape "CLAPET 2D"</i> .....	30
III.3 COUT DE LA METHODE.....	31
CONCLUSION.....	33
REFERENCES.....	35
FIGURES.....	37

**NEXT PAGE(S)  
left BLANK**

## INTRODUCTION

Dans les codes de calcul de mécanique des fluides de la DER à EDF, les équations sont le plus souvent résolues selon un algorithme à pas fractionnaire qui comprend plusieurs étapes correspondant aux différents opérateurs. Ceci permet notamment de choisir pour chaque étape la méthode de résolution la plus adaptée. L'étape de convection est une des plus délicates en ce qui concerne le choix des méthodes numériques car elle fait intervenir une équation de transport pur, donc à caractère hyperbolique. Au niveau du problème continu, la méthode qui apparaît naturellement est la méthode des caractéristiques ; c'est celle qui est traditionnellement employée dans les codes de calcul de la DER.

La méthode des caractéristiques semble très bien adaptée, en terme de coût calcul et de qualité de résultats, aux codes à maillages structurés (de la génération d'ESTET /1/) : facilité de localisation, interpolation d'ordre élevé au pied de la caractéristique ; dans le cas des codes utilisant une formulation de type éléments finis avec un maillage non structuré, l'emploi de la méthode des caractéristiques sous forme forte (comme dans le code N3S /2/) peut surprendre dans le sens où elle ne fait intervenir aucune formulation variationnelle. Par ailleurs, l'aspect non structuré du maillage ne facilite pas les tâches de localisation et d'interpolation. Des tentatives de convection dite "faible" ont été faites : quoique donnant d'excellents résultats, cette méthode s'avère difficile à mettre en oeuvre et coûteuse en temps CPU. Il existe cependant des formulations variationnelles plus simples à mettre en oeuvre permettant de traiter les problèmes de convection.

Le but de ce rapport est de présenter les tests exploratoires effectués à l'aide de deux méthodes dans une version de recherche 2D du code N3S :

- la méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin), proposée par Hughes /3/
- une méthode de type UPWIND d'ordre 1

La méthode SUPG est un des moyens les plus utilisés -avec succès- pour obtenir un traitement numérique stable d'un problème dominé par la convection, à partir d'une formulation variationnelle, dans un contexte éléments finis. Les formulations variationnelles habituellement employées sont de type Galerkin, c'est-à-dire que les fonctions poids et les fonctions d'interpolation sont les mêmes. Or ceci correspond à un traitement "centré" des opérateurs différentiels, dans le cadre des différences finies. On sait bien que les schémas centrés sont peu stables ou instables et produisent des oscillations. Une des techniques permettant de remédier à ces problèmes consiste à utiliser des schémas décentrés amont (ou "upwind"). Le principe de la méthode SUPG

consiste à adapter cette technique aux éléments finis, le décentrement étant introduit par une modification des fonctions poids. De plus, cette perturbation est construite de façon à minimiser la diffusion numérique introduite par le décentrement.

La méthode UPWIND d'ordre 1 (que l'on nommera par la suite UPWIND, par souci de simplification) proposée consiste à utiliser un schéma décentré amont sur l'élément en tenant compte de manière linéaire de toute l'information locale de cet élément (ou plutôt du sous élément, étant donné que l'on utilise des éléments P1-isoP2). Cette technique s'avère plus diffusive que la précédente ou que la méthode des caractéristiques avec une interpolation d'ordre supérieur à un.

Dans ce rapport, nous présentons tout d'abord la méthode SUPG telle que Hughes l'a introduite et que nous l'avons appliquée, ainsi que la méthode UPWIND. Nous exposerons également une combinaison des deux permettant de supprimer les "shoots" éventuels inhérents à la méthode SUPG. Ensuite, nous évoquons les méthodes numériques utilisées pour les implanter dans le code de calcul. Dans la troisième partie, nous présentons les résultats des tests effectués sur des cas élémentaires et des cas de dynamique des fluides (incompressible et compressible) afin de valider les nouveaux modules de convection ainsi réalisés.

# I METHODE SUPG ET METHODE UPWIND

## I.1 METHODE SUPG

Ce qui suit est essentiellement issu de /3/. Par ailleurs, on pourra se référer à /12/, concernant l'application de la méthode SUPG aux équations de Saint Venant dans le cadre du projet TELEMAC.

### I.1.1 Equation de convection pure

On considère l'équation de convection pure d'un scalaire  $G(\vec{x}, t)$  dépendant du temps et de l'espace par le champ de vecteurs  $\vec{U}$  supposé connu en tout point et indépendant du temps :

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla G = 0, \quad (\text{I.1})$$

où  $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n=1, 2$  ou  $3$ ) et  $t \in ]0, T[$ . Dans la suite, on supposera  $n=2$  puisque c'est dans ce cas que la méthode a été implantée.

La frontière  $\Gamma$  de  $\Omega$  est décomposée de la façon suivante en deux parties  $\Gamma_f$  et  $\Gamma_h$  sur lesquelles on peut appliquer respectivement des conditions de Dirichlet et de Neumann :

$$\Gamma = \overline{\Gamma_f \cup \Gamma_h}, \quad (\text{I.2})$$

$$\emptyset = \Gamma_f \cap \Gamma_h. \quad (\text{I.3})$$

Ainsi, on peut appliquer des conditions aux limites de Dirichlet sur  $\Gamma_f$  :

$$G(\vec{x}, t) = f(\vec{x}, t), \forall \vec{x} \in \Gamma_f, t \in ]0, T[, \quad (\text{I.4})$$

où  $f$  est une fonction supposée connue. On verra plus loin que les conditions aux limites de type Neumann n'apparaissent pas naturellement dans la formulation variationnelle de l'équation de convection pure.

La condition initiale s'écrit :

$$G(\vec{x}, 0) = G_0(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega, \quad (\text{I.5})$$

où  $G_0$  est une fonction donnée.

Le problème à valeurs initiales et aux limites considéré consiste à trouver  $G = G(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{x} \in \bar{\Omega}$ ,  $t \in ]0, T[$ , satisfaisant (I.1), (I.4) et (I.5). Il s'agit maintenant de proposer une formulation variationnelle pour ce problème.

### I.1.2. Discrétisation spatiale

On considère une discrétisation de  $\Omega$  en éléments finis  $\Omega^e$  :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1}^{n_{el}} \bar{\Omega}^e, \quad (I.6)$$

$$\emptyset = \bigcap_{e=1}^{n_{el}} \Omega^e. \quad (I.7)$$

Soit  $V^h \subset H^1(\Omega)$  un espace de fonctions d'interpolation continues. On suppose de plus que pour tout  $\varphi^h \in V^h$ ,

$$\varphi^h(\vec{x}) = 0, \forall \vec{x} \in \Gamma_f. \quad (I.8)$$

Dans une formulation aux résidus pondérés de type Galerkin, les fonctions poids sont *continues* à travers les frontières inter-éléments. Au contraire, la formulation SUPG introduit des fonctions *discontinues*  $\tilde{\varphi}^h$  que l'on décompose de la façon suivante :

$$\tilde{\varphi}^h = \varphi^h + p, \quad (I.9)$$

où  $\varphi^h$  est une fonction poids continue de  $V^h$  et  $p$  un terme de perturbation que nous appellerons la "contribution amont", ce dernier terme étant discontinu à la traversée des frontières inter-éléments.

La formulation variationnelle SUPG du problème consiste à chercher  $G^h(., t) \in V^h$ ,  $t \in ]0, T[$ , tel que, pour tout  $\varphi^h \in V^h$  :

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial G^h}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla G^h \right) \varphi^h \, d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial G^h}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla G^h \right) p \, d\Omega = 0. \quad (I.10)$$

On remarque que si  $p = 0$ , on retombe sur une formulation classique de Galerkin. D'autre part, il est important de noter que SUPG constitue une méthode *résiduelle* dans le sens où, quand  $G^h \rightarrow G$ , c'est-à-dire quand la solution discrète tend vers la solution exacte, alors l'équation (I.10) est encore vérifiée. Il nous reste à expliciter le terme supplémentaire  $p$  introduit par la méthode.

*Remarque* : la formulation variationnelle que nous avons retenue est uniquement spatiale, la discrétisation temporelle du terme instationnaire reste à faire ; cependant, il a été démontré (par Johnson *et al.* /4/) que le cadre des éléments finis espace-temps est plus approprié pour les phénomènes instationnaires.

### I.1.3. Les fonctions poids SUPG

#### I.3.1.a - Forme générale

Toute la méthode SUPG repose essentiellement sur la forme du terme de perturbation  $p$ . Celui-ci peut s'écrire de la façon suivante :

$$p = \tau \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \varphi^h, \quad (I.11)$$

où  $\vec{U}$  est le champ de vitesse convecteur et  $\tau$  un paramètre ayant la dimension d'un temps dont on précisera la signification plus loin. La fonction poids modifiée s'écrit donc :

$$\tilde{\varphi}^h = \varphi^h + \tau \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \varphi^h \quad (I.12)$$

On voit bien que si  $\varphi^h$  est continu à travers les frontières inter-éléments, alors  $\tilde{\varphi}^h$  est discontinu. On peut considérer par exemple le cas monodimensionnel avec des fonctions  $P_1$  (voir figure A).

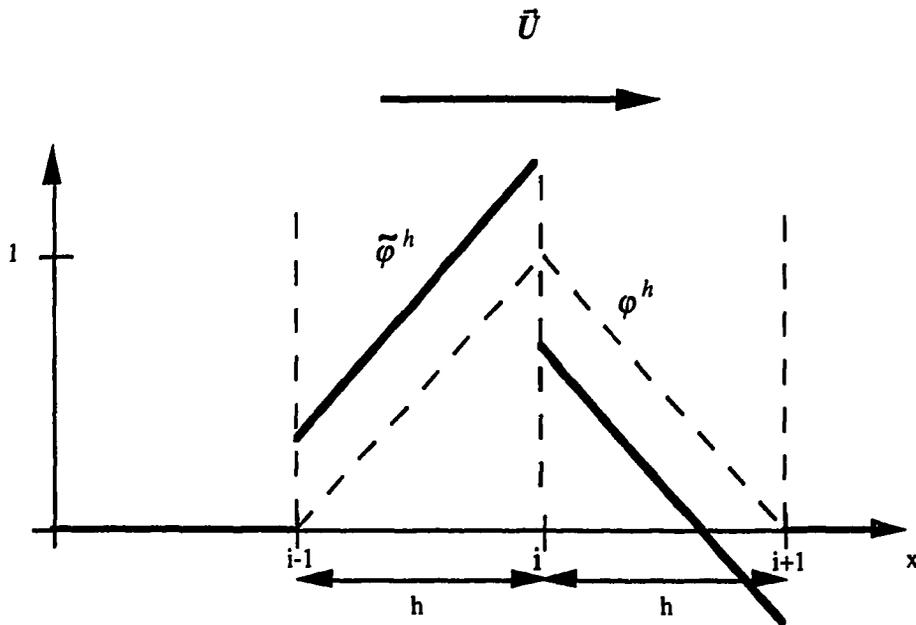


figure A - Les fonctions poids SUPG comparées au fonctions de base P1 en 1D

### I.3.1 b -. *Le paramètre de décentrement*

Le paramètre  $\tau$  apparaît comme un paramètre de décentrement. En divisant  $\tau$  par la norme de la vitesse, on fait apparaître la distance  $\alpha$  sur laquelle on décentre le calcul du gradient :

$$\alpha = \frac{\tau}{|\bar{U}|}. \quad (\text{I.13})$$

Dans le cas monodimensionnel, on peut exprimer  $\alpha$  de façon à obtenir une solution exacte aux noeuds :

$$\alpha = h / 2, \quad (\text{I.14})$$

où  $h$  est la taille de la maille (dans le cas 1D, il s'agit d'un segment).

Dans le cas multidimensionnel, il n'existe pas d'expression de  $\alpha$  qui assure une solution exacte aux noeuds. On est donc amené à utiliser des formules généralisant le cas 1D, en s'adaptant au type d'éléments utilisés afin d'optimiser la précision. Dans le cas

des triangles P1 (et donc dans un cas bidimensionnel), nous avons retenu l'expression suivante /5/ :

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{\bar{U}}{|\bar{U}|} \cdot (\nabla \phi^h)_{\text{élément amont}}} \quad (I.15)$$

La signification du paramètre (mis à part le coefficient 1/3 qui dépend de la dimension de l'espace, ici 2D) apparaît clairement sur la figure B.

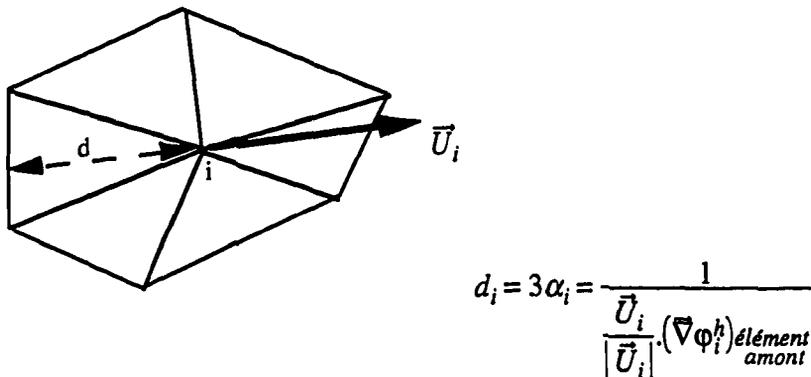


figure B - Signification géométrique du paramètre de décentrement

#### I.1.4. Estimation de l'erreur

Dans le cas stationnaire et avec un choix optimal du paramètre de décentrement, on peut trouver /4, 6/ une estimation de l'erreur  $e = G^h - G$  en norme  $L_2$  :

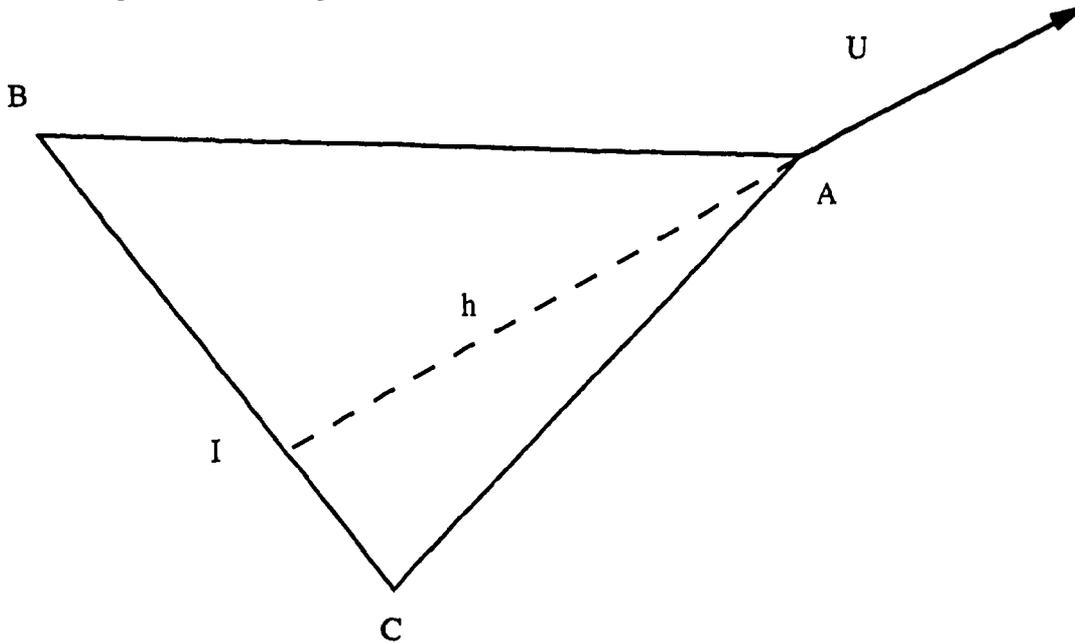
$$|e|_{L_2} = O(h^{k+1/2}) \quad (I.16)$$

où  $|\cdot|_{L_2}$  désigne la norme  $L_2$ ,  $h$  le paramètre de taille de maille,  $k$  l'ordre des polynômes d'interpolation. Pour nous,  $k = 1$  donc l'erreur est donc d'ordre 1,5 . Cependant, des études numériques /7/ semblent indiquer que l'erreur est d'ordre 2 si la solution exacte est suffisamment lisse. Nous avons d'ailleurs vérifié ce comportement sur un cas particulier (voir chapitre III).

## I.2 METHODE UPWIND (ordre 1)

Cette méthode s'inspire directement des schémas aux différences finies. Le principe est simple : il consiste à calculer de manière forte le gradient local de l'opérateur de convection de manière décentrée amont, puis à pondérer par la fonction poids appropriée pour obtenir une formulation "variationnelle".

Par exemple, sur un triangle P1, on a sur un élément,



où  $\vec{U}_A$  est la vitesse de convection au point A. Le gradient local décentré amont au point A de la variable G est calculé comme étant :

$$\vec{\text{grad}}G = \frac{G_A - G_I}{h} \frac{\vec{IA}}{|\vec{IA}|} \quad (\text{I.16})$$

où  $G_I$  est un combinaison linéaire de  $G_B$  et  $G_C$  et h est la distance entre I et A.

Alors

$$(\vec{\text{grad}}G)_A = \vec{\alpha}_A G_A + \vec{\alpha}_B G_B + \vec{\alpha}_C G_C \quad (\text{I.17})$$

où

$$\vec{\alpha}_A = \frac{\vec{IA}}{h^2} \quad (\text{I.18 a})$$

$$\vec{\alpha}_B = -\vec{\alpha}_A \frac{|IC|}{|BC|} \quad (\text{I.18 b})$$

$$\vec{\alpha}_C = -\vec{\alpha}_A \frac{|IB|}{|BC|} \quad (\text{I.18 c})$$

Sur un élément du type P1-isoP2, le même raisonnement s'applique sur le sous élément amont, qui est un triangle P1. Dans ce cas, on peut exprimer le gradient amont en le décomposant sur les 6 noeuds du triangle, mais en considérant 3 d'entre eux nuls (correspondant aux noeuds qui ne sont pas dans le sous-élément amont). La forme variationnelle de (I.1) s'écrit sur un élément :

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial G^h}{\partial t} + \vec{U} \cdot (\vec{\alpha}_A G_A + \vec{\alpha}_B G_B + \vec{\alpha}_C G_C) \right] \varphi^h d\Omega = 0 \quad (\text{I.19})$$

On peut d'ores et déjà constater que cette méthode sera numériquement plus diffusive, dans la mesure où elle fait intervenir de manière plus prépondérante les grandeurs transversales par rapport au sens de la vitesse (en d'autres termes, on tient moins compte de la ligne de courant comme dans la méthode des caractéristiques par exemple). Une technique pour limiter la diffusion numérique consisterait à considérer une information plus riche en amont et éventuellement en aval dans le calcul du gradient local ; cela peut s'apparenter aux schémas "Quick" bien connus en différence finies, qui permettent de monter en ordre. Cette amélioration n'a pas été réalisée dans le cadre de ce rapport, dans la mesure où l'on recherche justement une méthode diffusive pour les zones "sensibles" (cf couplage SUPG/UPWIND § II.3).

Notons que le schéma spatial proposé respecte le principe des extrémums.

## II. METHODES NUMERIQUES

### II.1. FORMULATION MATRICIELLE

Les éléments finis utilisés dans le code N3S sont des éléments P1-isoP2 à 6 noeuds (introduits pour résoudre le système de Stokes, de façon à respecter la condition inf-sup /8/), les grandeurs transportées étant discrétisées sur les fonctions isoP2, c'est-à-dire de façon linéaire par sous-élément (voir figure C). Soit  $\varphi_i$  les fonctions de base isoP2. Une grandeur scalaire transportée  $G$  de valeurs  $G_i$  aux noeuds peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$G = \sum_i G_i \varphi_i. \quad (\text{II.1})$$

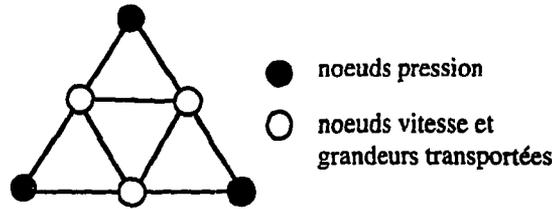


figure C - Triangle P1-isoP2

A partir de la discrétisation de l'espace en éléments finis, la formulation variationnelle (I.10) du chapitre I peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$M \frac{\partial G}{\partial t} + C G = 0, \quad (\text{II.2})$$

où  $M$  et  $C$  sont respectivement les matrices de masse et de convection,  $G$  étant le vecteur des inconnues nodales. Les matrices s'expriment de la façon suivante :

#### a) Méthode SUPG

$$M_{SUPG\ ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, d\Omega = \sum_e \int_{\sigma} \varphi_i \varphi_j \, d\Omega, \quad (\text{II.3})$$

$$C_{SUPG\ ij} = \int_{\Omega} \varphi_i (\vec{U} \cdot \nabla \varphi_j) \, d\Omega = \sum_e \int_{\sigma} \varphi_i (\vec{U} \cdot \nabla \varphi_j) \, d\Omega. \quad (\text{II.4})$$

#### b) Méthode UPWIND

$$M_{UPWIND\ ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \, d\Omega = \sum_e \int_{\sigma} \varphi_i \varphi_j \, d\Omega, \quad (\text{II.3})$$

$$C_{UPWIND\ ij} = \int_{\Omega} \varphi_i(\vec{U} \cdot \vec{\alpha}_j) d\Omega = \sum_e \int_{\Omega^e} \varphi_i(\vec{U} \cdot \vec{\alpha}_j) d\Omega . \quad (\text{II.4})$$

où les  $\vec{\alpha}_j$  sont les vecteurs coefficients introduits au chapitre II (équations I.18 a,b,c).

**Remarque 1 :** on peut montrer que l'application de la technique de mass-lumping sur les deux types de matrices de masse  $M_{SUPG}$  et  $M_{UPWIND}$  donnera la même matrice diagonale  $M_L$ . Cela signifie que dans le cas SUPG, le poids de l'information amont supplémentaire créée par le décentrement de la fonction poids est compensée de manière exacte par la diminution de l'information aval.

**Remarque 2 :** la formulation SUPG prend en compte le décentrement dans le terme de masse contrairement à la formulation UPWIND. La prise en compte de la fonction poids décentrée  $\phi$  uniquement dans le terme de convection a tendance à déphaser la solution /3/. Nous verrons lors du cas test du "cône tournant" que cet aspect est important pour les cas instationnaires.

**Remarque 3 :** la matrice notée  $M_{UPWIND}$  est en fait la matrice de masse obtenue par une formulation de type Galerkin, c'est à dire centrée.

Les conditions aux limites de Dirichlet ne sont pas prises en compte dans les matrices mais à l'intérieur des solveurs itératifs utilisés, via une technique de projection /2/.

On remarque que l'on a pas encore effectué la discrétisation temporelle. C'est l'objet du paragraphe suivant.

## II.2. DISCRETISATION TEMPORELLE ET ALGORITHMES

Nous avons deux types d'algorithmes : un algorithme prédicteur-correcteur proposé par Hughes et un algorithme semi-implicite "classique" avec solveur type "équation normale" ou Jacobi selon les cas. Dans les deux cas, la discrétisation temporelle est semi-implicite d'ordre un mais le schéma ne revêt pas la même forme.

### II.2.1. Algorithme semi-implicite

Dans ce cas, la discrétisation temporelle prend la forme d'un schéma semi-implicite :

$$M \left( \frac{G^{n+1} - G^n}{\Delta t} \right) + \gamma C G^{n+1} + (1 - \gamma) C G^n = 0. \quad (\text{II.5})$$

qu'on peut réécrire sous forme incrémentale :

$$M \left( \frac{\delta G^{n+1}}{\Delta t} \right) + \gamma C \delta G^{n+1} = -C G^n \quad \text{avec} \quad \delta G^{n+1} = G^{n+1} - G^n \quad (\text{II.5 bis})$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps et  $\gamma$  est un coefficient d'implicitation, les indices  $n+1$  et  $n$  désignant la variable respectivement au pas de temps courant et au pas de temps précédent.

Ceci nous conduit au système matriciel suivant :

$$A \delta G^{n+1} = b^n, \quad (\text{II.6})$$

avec les expressions suivantes de la matrice  $A$  et du vecteur  $b^n$  :

$$A = \frac{M}{\Delta t} + \gamma C, \quad (\text{II.7})$$

$$b^n = \gamma C G^n. \quad (\text{II.8})$$

Les matrices  $M$  et  $C$  n'étant pas symétriques, la matrice  $A$  ne l'est évidemment pas non plus. Son conditionnement dépend essentiellement du pas de temps : elle est d'autant mieux conditionnée que le pas de temps est petit. Nous avons utilisé deux solveurs robustes en fonction du type de méthode utilisé (SUPG ou UPWIND) :

- le solveur dit de "l'équation normale". Il s'agit en fait d'un gradient conjugué adapté à un système non symétrique. Pour cela, on multiplie membre à membre l'égalité (II.6) par la transposée  $A^t$  de la matrice  $A$ , ce qui amène à résoudre le système suivant :

$$B \delta G^{n+1} = A^t b^n \quad \text{avec} \quad B = A^t A, \quad (\text{II.9})$$

la matrice  $B$  étant évidemment symétrique. On utilise une méthode de gradient conjugué préconditionné par la diagonale pour résoudre ce système (II.9). Cependant, si la matrice  $A$  est mal conditionnée, alors la matrice  $B$  l'est encore moins (conditionnement au carré). Cette méthode s'est avérée efficace mais toutefois coûteuse car elle double le nombre de produits matrice-vecteur dans le processus itératif. Il existe des méthodes itératives plus économiques pour résoudre les systèmes non symétriques, mais ils ne garantissent pas de manière inconditionnelle la convergence.

Ce schéma est inconditionnellement stable dans le cadre d'une analyse de Fourier monodimensionnelle sur un maillage régulier.

- un solveur de type Jacobi : le système (II.6) est décomposé sous la forme suivante :

$$(DA + XA) G^{n+1} = b^{n+1} \quad (II.10)$$

où  $(DA + XA)$  représente la matrice du système séparée en une partie diagonale  $DA$  et extradiagonale  $XA$ . Le calcul de la solution à l'itération  $k$  se fait de la manière suivante :

$$\delta G_k^{n+1} = -DA^{-1} (XA \delta G_{k-1}^{n+1} - b^n) \quad (II.11)$$

Ce solveur peut être utilisé sans risque si la matrice  $A$  est à diagonale dominante, ce qui est toujours le cas dans le cas du schéma UPWIND ( $M$  et  $C$  sont à diagonale dominante), mais pas systématiquement vrai dans le cas du schéma SUPG ( $M$  et  $C$  peuvent ne pas être à diagonale dominante). Il est en outre plus économique que le précédent.

Dans le cas d'un problème stationnaire, il importe peu la manière dont on traite la matrice de masse  $M$ , ainsi que le type de matrice de convection  $C$  pour la partie implicite. En pratique, afin de réduire les coûts calculs,  $M$  est de ce fait "lumpée". Le tableau ci-dessous donne les différentes options utilisées :

	Matrice de Masse	Matrice de Convection explicite	Matrice de Convection implicite	Solveur
Stationnaire SUPG	$M_L$	$C_{SUPG}$	$C_{UPWIND}$	Jacobi
Instationnaire SUPG	$M_{SUPG}$	$C_{SUPG}$	$C_{SUPG}$	Equation normale
Stationnaire UPWIND	$M_L$	$C_{UPWIND}$	$C_{UPWIND}$	Jacobi
Instationnaire UPWIND	$M_{UPWIND}$ (= $M_{Galerkin}$ )	$C_{UPWIND}$	$C_{UPWIND}$	Jacobi

## II.2.2. Algorithme prédicteur-correcteur

Cet algorithme proposé par Hughes /3, 9/ est du type prédicteur-correcteur. Il comprend trois étapes : prédiction, résolution, correction.

### (1) Prédiction

$$\mathbf{G}_{(0)}^{n+1} = \mathbf{G}^n + \Delta t (1 - \gamma) \dot{\mathbf{G}}^n, \quad (\text{II.12})$$

$$\dot{\mathbf{G}}_{(0)}^{n+1} = 0. \quad (\text{II.13})$$

Faire  $i = 0$ .

### (2) Résolution

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^* \Delta \dot{\mathbf{G}}_{(i)}^{n+1} &= \mathbf{R} \\ \text{avec } \mathbf{R} &= -\mathbf{M} \dot{\mathbf{G}}_{(i)}^{n+1} - \mathbf{C} \mathbf{G}_{(i)}^{n+1}. \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

### (3) Correction

$$\mathbf{G}_{(i+1)}^{n+1} = \mathbf{G}_{(i)}^{n+1} + \gamma \Delta t \dot{\mathbf{G}}_{(i)}^{n+1}, \quad (\text{II.15})$$

$$\dot{\mathbf{G}}_{(i+1)}^{n+1} = \dot{\mathbf{G}}_{(i)}^{n+1} + \Delta \dot{\mathbf{G}}_{(i)}^{n+1}. \quad (\text{II.16})$$

(4) Si une itération supplémentaire est nécessaire, incrémenter  $i$ . Sinon, passer au pas de temps suivant (incrémenter  $n$ ).

Notations : l'indice ( $i$ ) sert de compteur d'itérations, le point désigne la dérivée temporelle et la matrice  $\mathbf{M}^*$  est une matrice de masse "généralisée". La définition de  $\mathbf{M}^*$  détermine quels termes sont traités implicitement ou explicitement dans l'étape de résolution. Plus précisément, les termes inclus dans  $\mathbf{M}^*$  sont traités implicitement, les termes qui n'apparaissent pas dans  $\mathbf{M}^*$  sont traités explicitement. Parmi les choix possibles de  $\mathbf{M}^*$ , on peut citer les deux suivants :

(i)  $\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C}$ , ce qui correspond à un traitement totalement implicite.

(ii)  $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_L$ , où  $\mathbf{M}_L$  désigne la matrice de masse "lumpée", c'est-à-dire la matrice diagonale dont le  $i$ -ème élément est la somme de tous les éléments de la  $i$ -ème ligne de  $\mathbf{M}$ . Ainsi la résolution du système est triviale.

Dans l'algorithme,  $R$  apparaît comme un résidu et tend vers zéro si on fait suffisamment d'itérations. Ceci permet de retrouver le même résultat à convergence quel que soit le choix pour la matrice  $M^*$  [3], notamment dans le cas purement explicite où  $M^* = M_L$ .

Cet algorithme, dans sa version explicite, est stable pour un nombre de Courant inférieur ou égal à 1, toujours dans le cadre d'une analyse monodimensionnelle sur un maillage régulier [3].

Dans les deux algorithmes présentés ci-dessus, le paramètre  $\gamma$  est pris égal à 1/2 de façon à assurer une précision d'ordre deux en temps.

### II.3. SCHÉMA COUPLE SUPG + UPWIND

#### II.3.1 Principe

Si la méthode SUPG permet de stabiliser la solution du problème hyperbolique correspondant à l'équation (I.1) avec une remarquable conservation (cf chapitre III cas test du cône tournant), elle a toutefois l'inconvénient de générer des comportements oscillatoires au voisinage des zones à forts gradients, pour peu que les lignes de maillage ne suivent pas les lignes de courant ; localement, la solution peut devenir physiquement inacceptable. Par contre, la méthode UPWIND proposée allie stabilité et respect des extremums mais est moins conservative et numériquement plus diffusive. L'idée est de combiner ces deux méthodes de la façon suivante : le schéma de convection de base est le schéma SUPG ; moyennant un test de pentes permettant de localiser de manière explicite les points du maillage à solution non physique, on remplace les coefficients de la matrice SUPG relatifs à ces points par ceux de la matrice UPWIND. Par exemple, pour une matrice 3 x 3 élémentaire, si on a :

$$M_{SUPG} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{UPWIND} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{II.17})$$

et que le point  $(i,j) = (2,2)$  corresponde à un point où le test de pente est positif, alors on aura :

$$M_{SUPG + UPWIND} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{II.18})$$

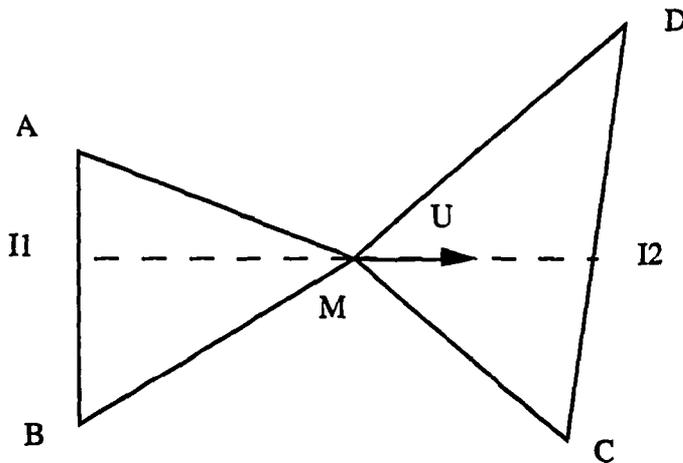
Remarque : toutes les opérations supplémentaires (recherche des éléments pour les tests de pentes, substitution des coefficients) sont faites sous forme non assemblée des matrices. Elles engendrent certes un léger surcoût calcul mais sont vectorisables sur CRAY.

### II.3.2 Test de pentes

C'est un point délicat de la démarche proposée. Le test en question consiste à localiser les points du maillage sur lesquels la solution tendrait à devenir non physique si on la laissait se développer. Il s'agit de regarder le comportement de la solution de part et d'autre d'un point par rapport à une direction donnée, en l'occurrence fixée par le vecteur gradient de la grandeur transportée en ce point. Deux tests de pentes ont été testés

- test du changement de signe de la pente
- test de la parabole

#### II.3.2 a test du changement de signe de la pente



Si (MAB) représente le sous-triangle amont par rapport au point M suivant le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}}(G)$  et (MCD) le sous-triangle aval, on peut calculer les pentes amont  $P_{\text{amont}}$  et aval  $P_{\text{aval}}$  de la variable G en écrivant :

$$P_{\text{amont}} = \frac{G_M - G_{I1}}{|M I1|} \quad \text{et} \quad P_{\text{aval}} = \frac{G_{I2} - G_M}{|I2 M|} \quad (\text{II.19})$$

Les valeurs de G aux points I1 et I2 sont interpolées linéairement à partir des valeurs des noeuds sommet.

Le test est considéré positif si  $P_{\text{amont}} \times P_{\text{aval}} < 0$ .

### II.3.2 b *test de la parabole*

Il s'agit de calculer l'équation de la parabole de la grandeur  $G$  passant par les 3 points  $I1$ ,  $M$  et  $I2$ , et calculer l'extrémum de cette parabole. Si cet extrémum est compris dans le segment  $I1$ - $I2$  et que sa valeur est supérieure au maximum de  $G$  aux points  $(I1, M, I2)$  ou inférieure au minimum de  $G$  en ces mêmes points, alors le test est positif.

En pratique, le test b donnent plus de points positifs que le test a. Néanmoins, sur les applications réalisées, les 2 tests donnent sensiblement les mêmes solutions.

## II.4. PROGRAMMATION

Dans ce paragraphe, nous abordons quelques points particuliers concernant les méthodes de programmation mises en oeuvre pour implanter SUPG.

### II.3.1. *Calcul des matrices*

Les matrices élémentaires ont été calculées à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique. L'intégration sur les éléments n'est donc pas calculée avec des formules de quadrature de Gauss. Ceci permet de gagner du temps CPU car le calcul est plus facilement vectorisable /10/ (tous les calculs ont été réalisés sur le Cray C90 du centre de calcul de Clamart). De plus, on évite les stockages nécessaires pour chaque point de Gauss (coordonnées, jacobien, ...).

Prenons l'exemple de la matrice de masse SUPG. Nous avons à calculer sur chaque élément des intégrales du type suivant :

$$\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega. \quad (II.20)$$

On se ramène à une intégrale sur un élément de référence par l'intermédiaire d'une transformation isoparamétrique  $T$ . Considérons un triangle  $P1$  pour simplifier ; la transformation peut se schématiser de la façon suivante :

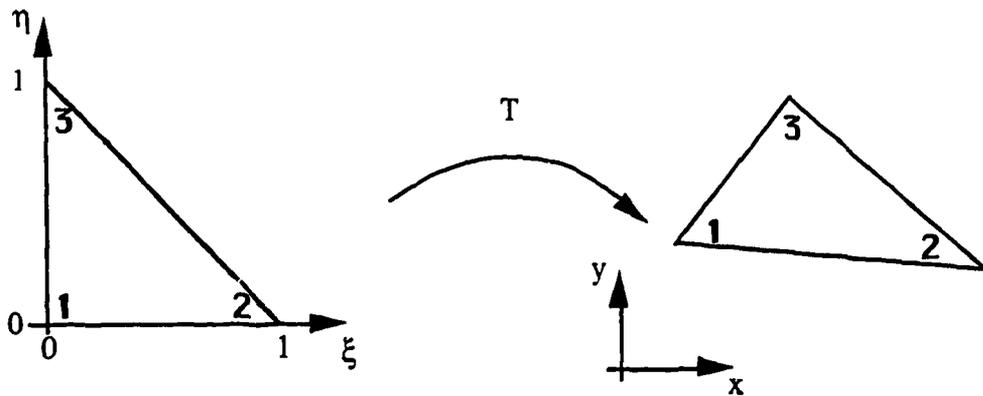


figure C - transformation isoparamétrique

T est bilinéaire et a donc la forme suivante :

$$T \begin{cases} x(\xi, \eta) = t_1 + t_2\xi + t_3\eta \\ y(\xi, \eta) = t'_1 + t'_2\xi + t'_3\eta \end{cases} \quad (\text{II.21})$$

Un polynôme  $\tilde{P}_i$  ou  $P_j$  s'écrit de la façon suivante dans le repère de référence :

$$P(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta. \quad (\text{II.22})$$

Les coefficients  $a, b, c$  de  $P$  et les coefficients  $t_i, t'_j$  de  $T$  sont déterminés par identification, en fonction des coordonnées globales des sommets. On remarque que  $t_1$  et  $t'_1$  n'interviendront pas dans les calculs car l'intégrale ne dépend pas du repère. L'intégrale s'exprime de la façon suivante :

$$\int_{\Omega^e} \tilde{\varphi}_i \varphi_j dx dy = \int_{\eta=0}^1 \int_{\xi=0}^{1-\eta} \tilde{P}_i P_j |J| d\xi d\eta \quad (\text{II.23})$$

où  $\tilde{P}_i$  et  $P_j$  sont les restrictions à  $\Omega^e$  de  $\tilde{\varphi}_i$  et  $\varphi_j$ , exprimées dans le repère local, et  $J$  le jacobien de  $T$ .

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (\text{II.24})$$

On remarque que  $J$  est constant :  $J = t_2 t'_3 - t_3 t'_2$ .

On dispose alors de toutes les expressions qui permettent de réaliser l'intégration analytique. On peut choisir de faire les calculs à la main (à condition d'être courageux, d'avoir du temps et d'être sûr de ne pas se tromper ...) ou bien, comme nous l'avons fait, utiliser un logiciel de calcul symbolique (REDUCE /11/). On procède de même pour la matrice de convection ; les expressions sont plus volumineuses pour la matrice de convection que pour la matrice de masse mais cela dépend surtout de la manière dont on discrétise le champ convecteur (voir ci-dessous).

En ce qui concerne l'assemblage : comme dans le reste du code, seules les diagonales sont assemblées, les termes extradiagonaux des matrices élémentaires sont stockés par éléments.

### II.3.2. *Discrétisation du champ convecteur*

Le champ convecteur  $\vec{U}$  apparaît à deux endroits dans le calcul des matrices : dans le terme de convection et dans le terme de décentrement des fonctions SUPG.

Dans le terme de convection  $\vec{U} \cdot \vec{\nabla} \varphi_j$ , nous avons testé deux manières de discrétiser  $\vec{U}$  : en prenant la valeur au sommet correspondant à la fonction de base et en discrétisant  $\vec{U}$  sur tout l'élément. Les résultats n'ont pas montré de différences notables entre les deux méthodes ; nous avons retenu la première méthode ( $\vec{U}$  "local") car elle demande moins de calculs.

Dans le terme de décentrement  $p = \tau \vec{U} \cdot \vec{\nabla} \varphi_i$ , nous avons pris un champ convecteur "local", afin de rester cohérent avec la définition de  $\tau$  retenue (ceci permet d'ailleurs d'alléger les expressions et donc d'économiser du temps de calcul). Ainsi, ce terme s'écrit en fait de façon purement locale :  $p_i = \tau_i \vec{U}_i \cdot \vec{\nabla} \varphi_i$ .

### II.3.3. *Calcul du paramètre de décentrement*

Le calcul du paramètre de décentrement nécessite la détermination des éléments amonts pour chacun des noeuds du maillage. Ceci demande une boucle sur les éléments et un certain nombre de tests. Cependant, ces tests peuvent être écrits de façon vectorisée pour le Cray C90, ce qui permet de réduire le temps de calcul consacré à cette étape préliminaire.

*Cas particulier des points de paroi*

Le long des parois solides imperméables, la vitesse  $\vec{U}$  d'un fluide doit vérifier la condition  $\vec{U} \cdot \vec{n} = 0$  (condition d'imperméabilité),  $\vec{n}$  étant la normale à la paroi. Dans le code de calcul utilisé, une normale discrète  $\vec{N}_h$  dite normale compatible [2] est définie en tout point de la frontière discrète  $\Gamma_h$ . Dans le cas de parois planes ou convexes, ceci ne pose pas de problème pour le calcul du paramètre de décentrement ; dans le cas d'une paroi concave, il n'existe pas d'élément amont pour les points de bord, il faut définir le paramètre de décentrement de façon particulière. Nous avons choisi de prendre comme distance de décentrement la longueur du côté de bord du sous-élément P1 correspondant à l'amont de l'écoulement, comme le montre la figure D (pour simplifier le schéma, nous avons pris l'exemple d'éléments P1).

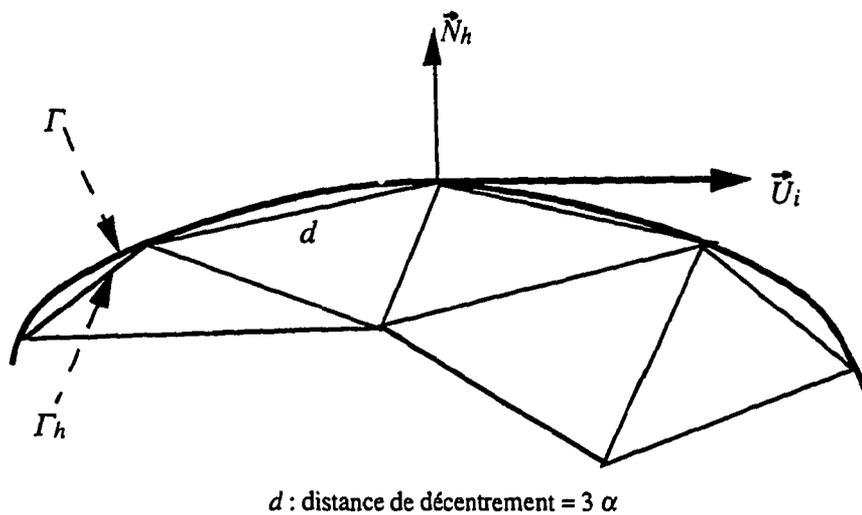


figure D - Distance de décentrement dans le cas d'une paroi concave

## III. VALIDATION

### III.1 TRANSPORT D'UN SCALAIRE "PASSIF"

Pour tester la méthode SUPG telle qu'elle a été implantée, nous avons choisi quelques cas tests couramment utilisés pour tester les schémas numériques sur l'équation de convection pure, en régime instationnaire ou bien stationnaire. Ces cas tests permettent d'évaluer la précision de la méthode de façon "expérimentale" et de comparer les résultats obtenus par d'autres méthodes, en particulier par la méthode des caractéristiques telle qu'elle est formulée dans le code N3S /2/.

#### III.1.1. *Cas test instationnaire : le cône tournant*

Le problème du cône tournant est un cas relativement standard pour tester les algorithmes de convection. Il met en évidence à la fois la diffusion numérique du schéma et les erreurs de phase éventuelles. Le problème est décrit figure 1. Il s'agit du transport d'un "cône" d'une grandeur scalaire dans un champ de vitesse circulaire. Le cône est en fait une gaussienne bidimensionnelle très raide. La solution exacte consiste en une rotation rigide du cône autour de l'origine. Aucune condition à la limite n'est nécessaire. Le maillage est une grille régulière de 800 triangles isoP2 (soit 1681 noeuds, voir figure 11). Nous avons effectué des calculs avec différentes valeurs du pas de temps, donc du nombre de Courant.

Les résultats obtenus sont présentés figures 1 à 4. Nous avons obtenu le meilleur résultat avec un nombre de Courant de 0.1 au centre du cône, ce qui correspond à environ 600 pas de temps pour faire un tour complet (figure 1). Sur ce cas, on remarque que l'étalement du cône après un tour est très faible ce qui montre que le schéma est peu diffusif ; cependant, le cône n'a conservé que 66 % de sa hauteur initiale. D'autre part, on constate un "shoot" négatif en amont et en aval engendré par les forts gradients de la base du cône lorsqu'ils sont alignés avec la ligne de courant.

Les résultats obtenus avec des nombres de Courant plus grands (figure 2) montrent une certaine dégradation ; cependant, avec un nombre de Courant de 1 (1 tour en 130 pas de temps), on conserve encore 47 % de la hauteur initiale du cône. On constate un léger "retard" du cône ; on pense que ceci est dû au "shoot" relativement important qui apparaît en aval. On retrouve d'ailleurs ce comportement avec les caractéristiques (interpolation quadratique sans min-max).

La comparaison avec les résultats obtenus par la méthode des caractéristiques (avec interpolation quadratique au pied de la caractéristique) est relativement favorable pour SUPG (figures 2,3,4); en effet, le cône convecté par les caractéristiques ne conserve que 33 % de sa hauteur initiale -à nombre de Courant faible (0.1)- et il est très étalé après un tour. On ne constate pas de "shoot" car une règle dite de "min-max" est appliquée lors de l'interpolation : si la valeur interpolée est supérieure ou inférieure respectivement au maximum ou au minimum des valeurs aux sommets de l'élément considéré, on force la valeur à ce maximum ou à ce minimum. Ceci se paye en terme de conservativité : cette méthode crée du scalaire (+ 11 % sur ce cas, en intégrale), alors que SUPG est quasi-conservatif, quel que soit le nombre de Courant (figure 4). Remarquons d'ailleurs que sans min-max, on a une meilleure conservativité du scalaire par les caractéristiques. De plus, on observe un déphasage et une déformation du cône par la méthode des caractéristiques, ce qui semble dû à la qualité de la remontée de la caractéristique (intégration d'une ligne de courant par une méthode de Runge-Kutta d'ordre un). Ce déphasage est également observé lorsque qu'on utilise une méthode SUPG inconsistante (non décentrement du terme instationnaire). Cependant, pour un nombre de Courant de 1, on retrouve à peu près le même niveau de cône avec les caractéristiques et SUPG ; ceci est principalement dû au fait que la solution par les caractéristiques se dégrade à nombre de Courant petit car alors le nombre d'interpolations est plus important.

En ce qui concerne la résolution temporelle de SUPG, il est à noter que les résultats obtenus avec les deux algorithmes présentés au chapitre précédent sont pratiquement identiques.

*Remarque 1*

Le traitement du terme de masse de manière cohérente avec le terme de convection (i.e. en appliquant les fonctions poids SUPG au terme de masse) est nécessaire pour éviter les erreurs de phase et donc une dégradation notable des résultats, *dans les cas instationnaires*.

*Remarque 2*

Des résultats analogues ont été obtenus avec un maillage polarisé.

### III.1.2. Cas tests stationnaires

En ce qui concerne les problèmes stationnaires, le schéma en temps importe peu pourvu que l'on converge vers l'état stationnaire. On peut alors prendre une matrice de masse "lumpée" de façon à accélérer les calculs.

Pour tous les cas test de ce paragraphe, les calculs ont été faits avec un nombre de Courant égal à 1.

### III.1.2.a. échelon transversal

Ce cas (figure 5) met essentiellement en évidence la diffusion numérique des schémas. Il s'agit du transport d'un échelon de scalaire appliqué sur un bord du domaine par un champ de vitesse uniforme faisant un certain angle avec les lignes du maillage (maillage : grille de 800 triangles P1-isoP2, figure 11).

Les résultats (figures 5 et 6) montrent un très bon comportement au point de vue *dissipation* numérique : l'échelon est très peu étalé. Cependant, on observe des "shoots" de chaque côté de l'échelon, ce qui témoigne des effets *dispersifs* du schéma : le traitement SUPG permet d'obtenir un schéma stable mais il n'évite pas les erreurs de dispersion que l'on observe dans les schémas où l'erreur de troncature est d'ordre pair. Pour remédier à ce problème, une solution consiste à passer à un schéma d'ordre un dans les zones à fort gradient. Nous avons testé une méthode "SUPG/upwind" définie de la façon suivante :

- schéma de base : SUPG,
- on fait un test de pente en chaque noeud du maillage suivant le gradient de la fonction transportée ;
- si ce test s'avère positif, c'est-à-dire si la variable admet au point considéré un maximum ou un minimum local dans la direction du test, on applique en ce point un schéma upwind (décentré amont) directement inspiré des différences finies (cf chapitre II).

Nous avons appliqué cette méthode au cas de l'échelon transversal. Les résultats sont satisfaisants (figure ? et ??) : les "shoots" ont pratiquement disparu et la précision dans la zone à fort gradient n'est que peu dégradée.

#### *Remarque :*

Dans le cas où le champ de vitesse fait un angle nul avec les lignes du maillage, la solution obtenue avec SUPG est la solution exacte aux noeuds.

### III.1.2.b. *cosinus tournant*

Ce cas est défini figure 8. Le champ de vitesse consiste en une rotation rigide autour de l'origine. On prescrit une condition à la limite de Dirichlet sur le segment OA de forme sinusoïdale. La solution exacte consiste en la rotation de ce profil autour de l'origine.

Le maillage employé est encore une grille régulière de 800 triangles isoP2 (figure 11). Une condition de Dirichlet ( $G = 0$ ) est appliquée au bord du domaine.

Le résultat obtenu avec SUPG est très bon (figure 8) : pratiquement pas de diffusion. Les résultats obtenus par la méthode des caractéristiques montrent quand à eux un décalage vers l'intérieur dû à la façon dont est remontée de la ligne de courant (Runge-Kutta ordre 1) et/ou à une interpolation insuffisamment précise au pied de la caractéristique. Ce phénomène est accentué dans le cas d'une interpolation linéaire où la diffusion est alors très importante.

### III.1.2.c. *cas test de Smith et Hutton*

Ce cas, proposé par Smith et Hutton /13/, est du même type que le précédent mais diffère par le profil convecté et le champ de vitesse : le profil prescrit comme condition de Dirichlet est ici en forme de tangente hyperbolique relativement raide (et donc fortement non linéaire) et le champ de vitesse est lui aussi non linéaire (quadratique) (figure 9). Le maillage employé est une grille de 400 triangles isoP2 (moitié du maillage de 800 triangles de la figure 11).

Les résultats obtenus sont là encore bons comparés à la solution exacte et aux résultats obtenus avec la méthode des caractéristiques. On retrouve cependant de petits "shoots", comportement que l'on observe systématiquement au voisinage des régions de forts gradients. Le schéma SUPG/upwind défini précédemment a permis d'éliminer les "shoots" sans toutefois trop dégrader la solution (figure 9).

### III.1.3. *Estimation expérimentale de l'ordre de la méthode*

Pour évaluer expérimentalement l'ordre de SUPG et surtout pour vérifier son bon comportement en convergence de manière qualitative, nous l'avons testé sur une même configuration avec trois maillages différents :

maillage n°1 : 288 triangles isoP2 (625 noeuds),

maillage n°2 : 800 triangles isoP2 (1681 noeuds),

maillage n°3 : 5000 triangles isoP2 (10201 noeuds).

Le cas consiste en la convection d'un profil en tangente hyperbolique par un champ de vitesse uniforme faisant un certain angle avec les lignes du maillage. Nous avons réalisé plusieurs calculs en faisant varier cet angle pour obtenir un résultat plus fiable. Pour chaque calcul, on a calculé la norme  $L_2$  de l'erreur de manière discrète que nous noterons  $|e|_{L_2}^d$ . Si on suppose que cette erreur est d'ordre  $x$ , on peut écrire :

$$|e|_{L_2}^d = K h^x + \text{termes d'ordre supérieur}, \quad (\text{III.1})$$

où  $h$  est la taille de la maille et  $K$  une constante. En négligeant les termes d'ordre supérieur et en prenant le logarithme de cette expression, on obtient :

$$\ln(|e|_{L_2}^d) = x \ln h + \ln K. \quad (\text{III.2})$$

En traçant  $\ln(|e|_{L_2}^d)$  en fonction de  $\ln h$ , on doit donc trouver une droite de pente  $x$ . Les résultats obtenus pour différents angles sont présentés figure 10. On remarque tout d'abord qu'on obtient à peu près des droites parallèles ce qui témoigne d'une bonne convergence du schéma. Au point de vue quantitatif, on constate que la pente moyenne se situe entre 1.5 et 2, ce qui semble confirmer les résultats théoriques (cf. page 7).

## III.2 VALIDATION EN DYNAMIQUE DES FLUIDES

### III.2.1. Application de SUPG aux équations de Navier-Stokes

#### III.2.1.a. Les équations de Navier-Stokes

Dans le code de calcul utilisé, les équations de Navier-Stokes sont résolues par un algorithme à pas fractionnaire qui permet de séparer la résolution en plusieurs étapes correspondant aux différents opérateurs (algorithme inspiré par Chorin /14/). Nous allons en présenter l'essentiel, seule l'étape de convection ayant été modifiée. Rappelons brièvement les équations de Navier-Stokes dans le cas incompressible.

*conservation de la quantité de mouvement*

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} = - \nabla P + \text{div} [(\mu + \mu_t) \nabla \vec{U}], \quad (\text{III.2})$$

*conservation de la masse*

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0. \quad (\text{III.3})$$

A ces deux équations, il faut adjoindre des conditions aux limites sur la vitesse et les contraintes.

Dans le cas d'un régime turbulent, les grandeurs sont moyennées dans le temps (moyenne de Reynolds) et la turbulence est prise en compte par l'intermédiaire d'une viscosité turbulente  $\mu_t$ , obtenue grâce au couplage avec un modèle k- $\epsilon$  que nous ne détaillons pas ici. De façon générale, les équations supplémentaires qui peuvent apparaître sont des équations de convection-diffusion avec des termes sources.

### III.2.1.b. Algorithme de résolution

Nous présentons maintenant l'algorithme à pas fractionnaire utilisé dans le code pour résoudre les équations de transport de la forme :

$$\rho \left[ \frac{\partial G}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla G \right] = \operatorname{div} [K_G \nabla G] + S_G, \quad (\text{III.4})$$

où  $G$  est une grandeur transportée quelconque,  $K_G$  un coefficient de diffusion et  $S_G$  un terme source.

#### 1- étape de convection

On fait intervenir la variable intermédiaire  $\tilde{G}$  qui vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\tilde{G} - G^n}{\Delta t} + \vec{U}^n \cdot \nabla G = 0, \quad (\text{III.5})$$

et c'est cette équation que nous résolvons par la méthode SUPG exposée précédemment. Traditionnellement, au LNH, cette étape est résolue par la méthode des caractéristiques.

#### 2- étape de diffusion

Dans cette étape, on résoud l'équation suivante :

$$\rho \frac{G^{n+1} - \tilde{G}}{\Delta t} = \operatorname{div} [K_G \nabla G^n] + S_G. \quad (\text{III.6})$$

Nous ne détaillons ni les méthodes de résolution de l'étape de diffusion, ni le traitement de l'équation de continuité (voir /15, 16/). Précisons toutefois que la matrice de masse doit obligatoirement être "lumpée" pour rester cohérent avec le reste de l'algorithme. Ceci n'a cependant pas d'influence sur les cas stationnaires.

Nous avons conservé la structure de l'algorithme, nous n'avons appliqué la méthode SUPG qu'à l'étape de convection. Dans cette étape, le champ de vitesse est considéré comme figé (explicite) et toutes les variables obéissant à des équations de transport sont convectées par la méthode SUPG telle que nous l'avons présentée aux chapitres I et II, avec cependant une matrice de masse "lumpée".

### **III.2.2. Cas test "convectifs" en mécanique des fluides**

Les configurations d'écoulement sur lesquelles nous avons testé SUPG et UPWIND sont des cas où la convection joue un rôle prépondérant par rapport à la diffusion.

#### **III.2.2.a. cavité entraînée en régime laminaire**

Il s'agit de l'écoulement en régime laminaire d'un fluide quelconque à l'intérieur d'une cavité carrée dont une paroi est entraînée à une vitesse constante (voir figure 8). Le nombre de Reynolds construit à partir de la vitesse d'entraînement et de la longueur de la cavité vaut 400. Cette configuration est largement répandue dans la littérature et permet de comparer les résultats SUPG avec des courbes limites obtenues par comparaisons de calculs effectués sur ce cas test par un certain nombre de codes différents sur des maillages de plus en plus raffinés /17/.

Les conditions de calcul sont les suivantes :

- condition d'adhérence en paroi,
- vitesse de défilement de la plaque : 1 m/s,
- pas de temps :  $10^{-2}$  s (nombre de Courant maximum :  $\approx 0.7$ ),
- maillage (figure 12) : 882 triangles P1-isoP2 (1849 noeuds).

Les résultats sur le profil de vitesse horizontale sont bons (figure 13); le résultat SUPG est toujours compris entre les deux courbes limites. Les caractéristiques donnent exactement le même résultat. Des calculs effectués sur des maillages plus grossiers ont

présentés une même dégradation des résultats que ceux obtenus par la méthode des caractéristiques.

### III.2.2.b. marche d'escalier en régime turbulent

Il s'agit de l'écoulement dans un canal avec un élargissement brusque vers le bas (cas de validation du code N3S /18/). Le régime est turbulent ( $Re \approx 95\ 250$ ) et le modèle de turbulence utilisé est un k- $\epsilon$  standard. En aval de la marche, il apparaît une zone de recirculation dont la longueur est généralement sous-estimée dans les résultats numériques, essentiellement à cause du modèle k- $\epsilon$  et des conditions aux limites de paroi appliquées. Cette longueur  $L$ , c'est-à-dire la distance entre le bas de la marche et le point de la paroi où la vitesse s'annule, s'exprime empiriquement en fonction de la hauteur  $h$  de la marche :  $L \approx 7.2 h$ .

Précisons les conditions de calcul :

- profil d'entrée uniforme pour la vitesse ( $U = 18$  m/s), ainsi que pour  $k$  et  $\epsilon$ ,
- modèle de lois de frottement en paroi (loi logarithmique),
- pas de temps :  $10^{-4}$  s (nombre de Courant maximum :  $\approx 0.6$ ),

Nous avons représenté (figure 14) le maillage utilisé, le champ de vecteurs en aval de la marche et les profils de vitesse longitudinale obtenus avec SUPG et avec les caractéristiques (figure 15). Les résultats SUPG s'avèrent au moins aussi bons que ceux obtenus par la méthode des caractéristiques : la zone de recirculation est à peine plus longue, les forts gradients semblent moins diffusés. Ceci dit, la différence n'est pas criante ; remarquons toutefois que le maillage est relativement fin.

#### *Remarque 1:*

Il existe dans cette configuration des zones à fort gradient (aussi bien pour les composantes de la vitesse que pour l'énergie turbulente et la dissipation) qui auraient pu poser des problèmes avec la méthode SUPG seule. Cependant, ce ne fut pas le cas et il n'a pas été nécessaire de recourir au schéma SUPG/UPWIND.

#### *Remarque 2*

Le modèle de turbulence utilisé est un k- $\epsilon$  standard avec des lois de paroi à une échelle de vitesse. On aurait pu utiliser le modèle à deux échelles de vitesse (C.L. de type flux nul sur  $k$ ) censé mieux représenter les zones d'impact.

### III.2.2.c Calcul compressible : soupape CLAPET 2D

Une tentative pour réaliser des calculs compressibles basé sur l'algorithme et les méthodes numériques décrits en /16/ en utilisant la méthode SUPG a été réalisée. Cela s'est avéré par un échec, en ce sens que les oscillations produites par la méthode dans les zones de forts gradients tendent à faire diverger la solution. Un couplage SUPG/UPWIND n'a pas résolu le problème, peut-être dû à la correction explicite du couplage (on dégénère vers l'UPWIND à partir de tests portant sur les grandeurs du pas de temps précédent).

Cependant, des calculs ont pu être menés avec la méthode purement UPWIND avec des résultats relativement intéressants.

Le calcul proposé est la modélisation de l'expérience "CLAPET 2D", qui jusqu'à présent n'a pu donner de bons résultats pour un taux de détente supérieur à 2, avec la version standard de N3S.

La géométrie et le maillage utilisé sont présentés figure 16. Les conditions de calculs sont les suivantes :

- pression d'arrêt imposé en entrée :  $P = 1$  bar,
- pression statique imposée en sortie (fonction du taux de détente 2, 4 ou 6)
- calcul turbulent (modèle k- $\epsilon$ )

Les figures 17 à 20 montrent les champs de nombre de Mach, de vitesse et des comparaisons avec des relevés de pression pariétale dans la zone du col respectivement pour les taux de détente de 2, 4 et 6. Des comparaisons avec des vues strioscopiques présentées dans /20/ montrent une bonne représentation des chocs. De plus, les comparaisons avec les données expérimentales montrent une bonne prédiction de la pression pariétale.

La question que l'on peut se poser est la suivante : pourquoi la méthode UPWIND, censée être diffusive donne-t-elle de bons résultats ? Justement parce qu'elle diffusive : elle permet de lisser suffisamment les zones de fortes non linéarités comme les chocs. De plus, le maillage utilisé semble suffisamment fins pour que la diffusion soit réduite partout dans le domaine. Néanmoins, il serait souhaitable de pouvoir utiliser une méthode d'ordre supérieur (SUPG, caractéristiques avec amélioration de l'interpolation au pied, voire de la remontée de la trajectoire en faisant du Runge-Kutta d'ordre 2 ou autre) qui puissent efficacement être couplée à une méthode d'ordre un (UPWIND d'ordre 1, ou caractéristiques avec interpolation linéaire), ceci dans le but de ne pas être obligé de mailler trop finement tout le domaine.

### III.3 COUT DE LA METHODE

On trouvera dans le tableau suivant les coûts calculs de l'étape de convection correspondant à certains des cas tests évoqués ci-dessus. Rappelons que les calculs ont été réalisés sur le Cray C90 du centre de calcul de Clamart.

cas test	nombre de variables convectées	maillage	coût calcul (en secondes CPU /pas de temps/1000 noeuds)	
			SUPG	caractéristiques*
cône	1	1681 noeuds	5.5 10 <sup>-2</sup> (ég. normale) 6.2 10 <sup>-3</sup> (préd.-correc.)	1.7 10 <sup>-2</sup>
échelon transversal	1	1681 noeuds	1.3 10 <sup>-2</sup> (ég. normale) 7.0 10 <sup>-3</sup> (préd.-correc.)	2.4 10 <sup>-2</sup>
cavité entraînée	2	1849 noeuds	1.6 10 <sup>-2</sup> (ég. normale)	1.5 10 <sup>-2</sup>
marche descendante	4	2905 noeuds	2.2 10 <sup>-2</sup> (ég. normale)	1.7 10 <sup>-2</sup>

\* : interpolation quadratique.

Ces coûts sont donnés à titre indicatif : la programmation peut encore être optimisée, tant pour SUPG que pour les caractéristiques. Cependant, on constate que la méthode SUPG telle qu'elle est implantée à l'heure actuelle est compétitive, même avec le solveur "équation normale". Le solveur prédicteur-correcteur de Hughes -que nous n'avons utilisé que pour les cas tests élémentaires- permet un gain d'environ 50 % sur l'équation normale, ce qui est trois fois moins coûteux que les caractéristiques.

*Remarque :*

Dans la méthode des caractéristiques, une fois la ligne de courant intégrée, on obtient toutes les variables en même temps au pied de la caractéristique ; avec un schéma numérique comme SUPG, il faut appeler le solveur de systèmes linéaires une fois pour chaque variable convectée.

## CONCLUSION

L'objectif de ce travail était de mettre en oeuvre la méthode SUPG ainsi qu'une méthode UPWIND dans le module de convection d'une version de recherche 2D du code aux éléments finis N3S et de les tester en premier lieu sur des cas élémentaires puis sur des cas de dynamique des fluides. Ceci nous a permis de comparer les deux types d'approche -SUPG et UPWIND d'une part et caractéristiques d'autres part- en maillages non structuré, sur des aspects fins du point de vue numérique : stabilité, diffusion numérique, sensibilité au nombre de Courant, ...

Les résultats obtenus avec SUPG sont bons sur les cas tests élémentaires, aussi bien en stationnaire qu'en instationnaire. Sur les cas instationnaires et à petit nombre de Courant ( $\leq 1$ ), SUPG -avec le terme de masse programmé de manière cohérente- s'est avéré meilleur que les caractéristiques type N3S 3.1, la différence s'estompant quand le nombre de Courant croît vers 1. En dynamique des fluides stationnaire, les résultats sont également satisfaisant et la méthode est relativement performante car le terme instationnaire peut alors être simplifié sous forme de matrice de masse "lumpée" comme dans le reste de l'algorithme. Précisons une fois encore que la méthode n'a été appliquée qu'au terme de convection des équations de transport et de Navier-Stokes. Cependant, il demeure le problème des "shoots" qui apparaissent dans les zones à forts gradients ; ces shoots sont propres à la méthode qui est intrinsèquement non monotone, et le seul moyen de les éliminer est un passage à l'ordre un dans ces zones. La méthode de couplage SUPG/UPWIND n'a pas donné entièrement satisfaction dans les cas Navier-Stokes, en particulier pour les écoulements compressibles. Certains auteurs /20/ proposent la prise en compte supplémentaire de termes de "capture de chocs" permettant le passage à l'ordre un. Cependant, outre la lourdeur supplémentaire qu'ils entraînent, ils ont l'inconvénient d'avoir un paramètre de réglage, sans répondre parfaitement au critère de monotonie.

Par ailleurs, il serait plus judicieux, dans le cadre du schéma à pas fractionnaire utilisé, de traiter simultanément la convection et la diffusion dans un seul et même pas étant donné que les deux termes sont traités cette fois sous une forme variationnelle.

La méthode UPWIND donne des résultats moins bons dans tous les cas, du fait d'une trop grande diffusion numérique engendrée. Néanmoins pour des écoulements raides comme les écoulements fortement compressibles avec chocs, elle peut permettre de réaliser des calculs qui ne marchent pas avec la méthode des caractéristiques telle qu'utilisée dans N3S.

Par ailleurs, une approche de type SUPG généralisée consisterait à appliquer cette technique à tous les termes des équations, par exemple *via* un traitement implicite d'un incrément de convection-diffusion corrigé par un incrément de pression (pour Navier-Stokes), ou bien par l'intermédiaire d'un bilan explicite cohérent prenant en compte SUPG et d'un incrément simplifié facilitant les inversions de système. Cette technique permettrait en outre de s'affranchir de la condition "inf-sup", et de discrétiser toutes les grandeurs sur le même maillage (colocalisation). Toutefois, il est primordial de d'abord résoudre le problème des shoots (non monotonie) précédemment cité, en établissant un critère efficace pour le passage à une méthode d'ordre un dans les zones à très fort gradient de façon à éviter leur apparition (en vue d'une application à des écoulements compressibles par exemple).

Précisons que tous les développements réalisés sont généralisables en 3D.

Il serait également souhaitable d'explorer l'aspect "solveur" des systèmes de façon plus approfondie, de manière à réduire le coût CPU (GMRES ?)

Cela étant, la méthode des caractéristiques telle qu'implantée dans N3S est probablement améliorable sur deux points :

- qualité de la remontée : le fait de se limiter à une méthode de Runge-Kutta à l'ordre 1 est préjudiciable dans les zones fortement courbées (déviation de la caractéristique) ; un ordre supérieur serait plus adapté.

- qualité de l'interpolation au pied et du champ convecteur à chaque sous-pas: dans les zones à forts gradients, une interpolation quadratique avec min-max au pied et sans min-max pour le champ convecteur à chaque sous-pas est très dangereuse, qui plus est si on se contente d'interpoler en ne tenant compte que de l'information sur l'élément qui contient le pied.

Si ces deux points sont techniquement améliorables, moyennant toutefois une mise en oeuvre plus lourde, ils risquent d'engendrer un surcoût non négligeable au niveau des temps calculs.

## REFERENCES

- /1/ MATTEI J.-D., SIMONIN O.,** "Manuel théorique du code ESTET - version 3.1", *Rapport EDF HE-44/92.38 B.*
- /2/ CHABARD J.P.,** "Projet N3S de mécanique des fluides - manuel théorique de la version 3", *Rapport EDF HE-41/91.30 B.*
- /3/ BROOKS A.N., HUGHES T.J.R.,** "Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 32 (1982) 199-259.
- /4/ JOHNSON C., NÄVERT U., PITKÄRANTA J.,** "Finite element methods for linear hyperbolic problem", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 45 (1984) 285-312.
- /5/ MIZUKAMI A.,** "An implementation of the streamline-upwind/Petrov-Galerkin method for linear triangular elements", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 49 (1985) 357-364.
- /6/ JOHNSON C.,** "Streamline diffusion methods for problems in fluid mechanics" in : *Finite Elements in Fluids*, Vol. VI (Wiley, London, 1985).
- /7/ NÄVERT U.,** "A finite element method for convection-diffusion problems", Ph.D. Thesis, Department of Computer Science, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1982.
- /8/ GLOWINSKI R.,** "Numerical methods for non linear variational problems", *Springer series in computational physics*, Springer-Verlag, 1984.
- /9/ HUGHES T.J.R.,** "The finite element method - Linear static and dynamic finite element analysis", Prentice-Hall, 1987.
- /10/ HERVOUET J.-M.,** "Remarques sur les méthodes numériques du code TELEMAT", *Rapport EDF HE-43/89-30.*

**/11/ RAYNA G.**, "REDUCE, Software for algebraic computation", Springer-Verlag, 1987.

**/12/ HERVOUET J.M., MOULIN C.**, "Nouveaux schémas de convection dans TELEMAC-2D v2.3 - Apport de la méthode SUPG", *Rapport EDF HE-43/93.27*

**/13/ SMITH R.M., HUTTON A.G.**, "The numerical treatment of advection : A performance comparison of current methods", *Numer. Heat Transfer* 5 (1982) 439-461.

**/14/ CHORIN A.J.**, "Numerical solutions of the Navier-Stokes equations", *Math. Comp.* , 22, 745, 1968.

**/15/ CARUSO A., MECHITOUA N.**, "Résolution par la méthode des éléments finis des équations de Navier-Stokes à masse volumique variable avec prise en compte de la turbulence", *Rapport EDF HE-44/92.03*.

**/16/ CARUSO A., MECHITOUA N., DUPLEX J.**, "Modélisation des écoulements compressibles en maillage non structuré par extension des méthodes numériques appliquées aux écoulements incompressibles", *Rapport EDF HE-44/93.02 , HE 43/93.03* .

**/17/ TUANN S.Y., OLSON M.D.**, "Review of computing methods for recirculating flows", *Journal of computational physics*, vol. 29, 1-19 (1978).

**/18/ POT G., RAZAFINDRAKOTO E.**, "Projet N3S de mécanique des fluides - note de validation de la version 3.1 (tome 1 : validation 2D)", fiche de validation N3S/TU/2D/05, *Rapport EDF HE-41/93.23 B*.

**/19/ DEJEAN J.M.**, "Modélisation de l'écoulement dans la maquette "ECLAT-2D" à l'aide du logiciel NSTC3D", *Rapport EDF HP-43/94.009*

**/20/ HUGHES T.J.R., MALLET M, MIZUKAMI A.**, "A new Finite Formulation for Computational Fluid Dynamics : II. Beyond SUPG", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, 54 (1986) 341-355.

# CAS TEST DU CONE TOURNANT

Equation du cone initial :  $z = \exp[ ((x-6.5)**2 + y**2)/2 ]$

Champ de vitesse :  $U = -y$   
 $V = x$

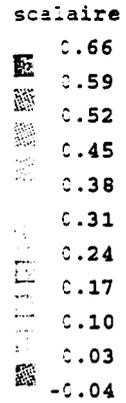
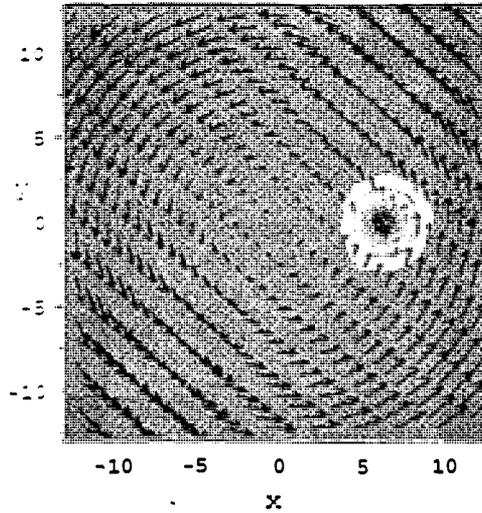
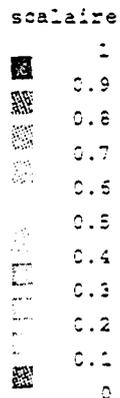
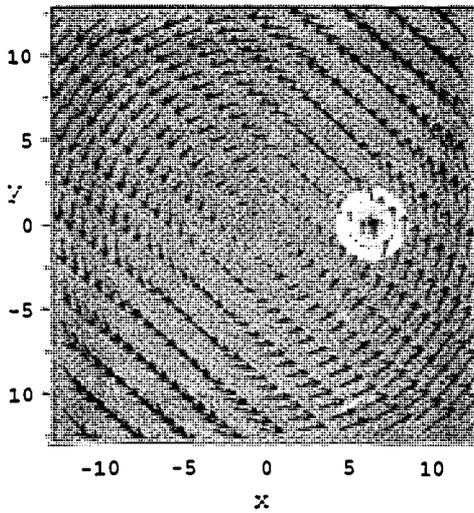
SURFACES ISOSCALAIRES et CHAMP DE VITESSE

nombre de Courant NC = 0.1

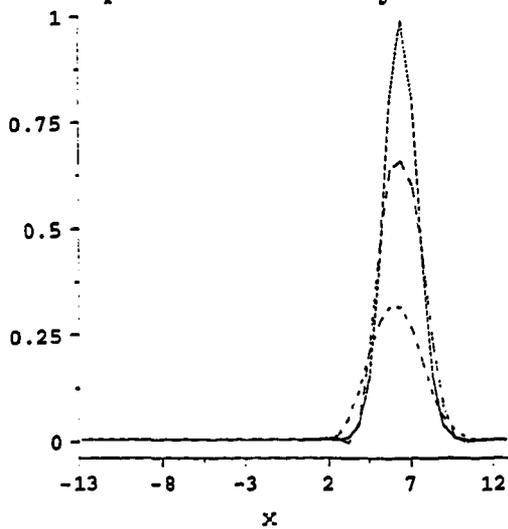
état initial

vitesse  
 — 10

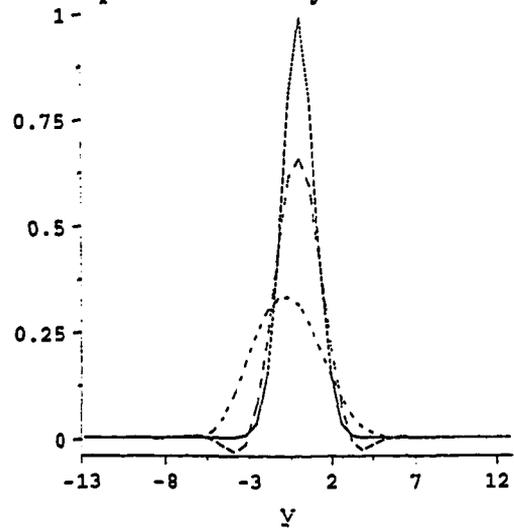
état après un tour



profils suivant x en y=0



profils suivant y en x=6.5



— solution exacte  
 - - - SUPG

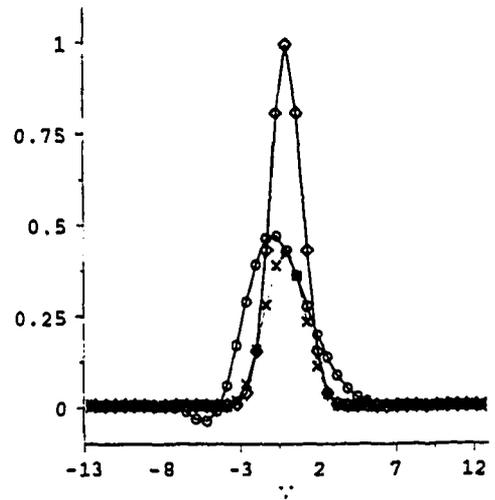
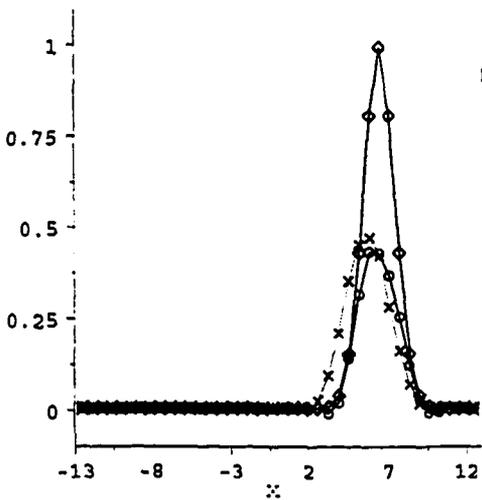
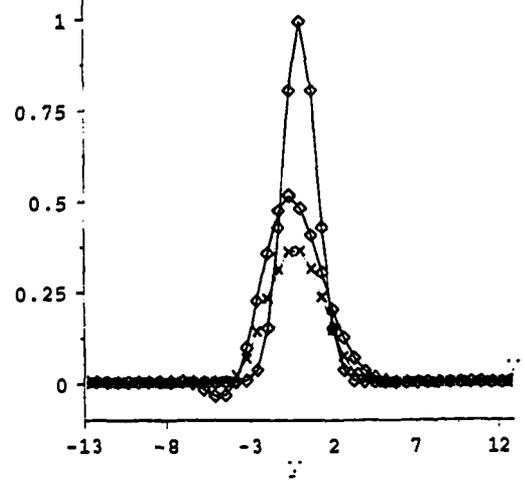
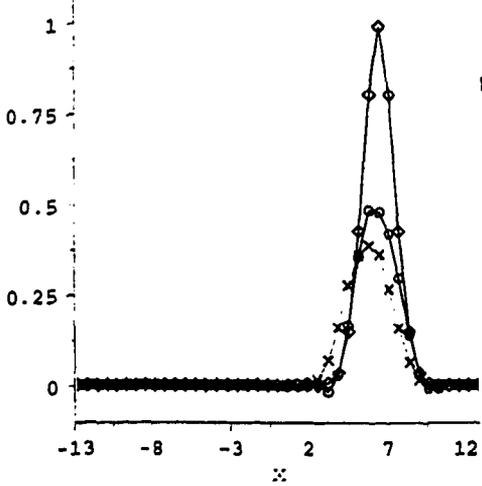
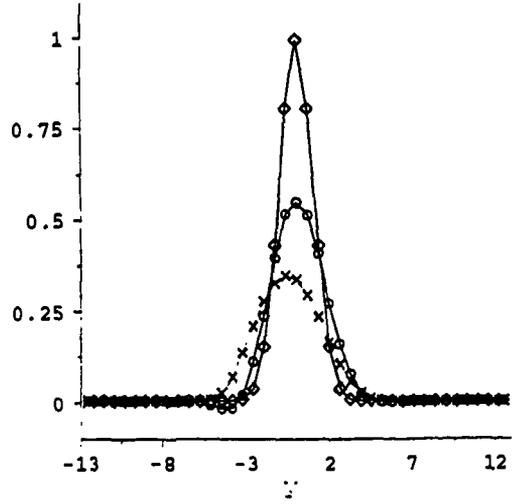
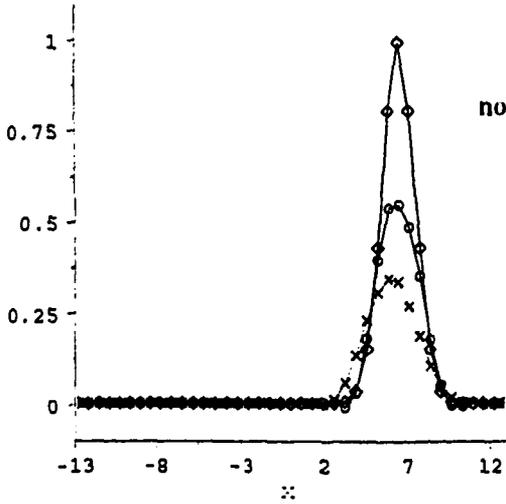
..... Caractéristiques  
 interpolation quadratique

### CAS TEST DU CONE TOURNANT sensibilité au nombre de Courant

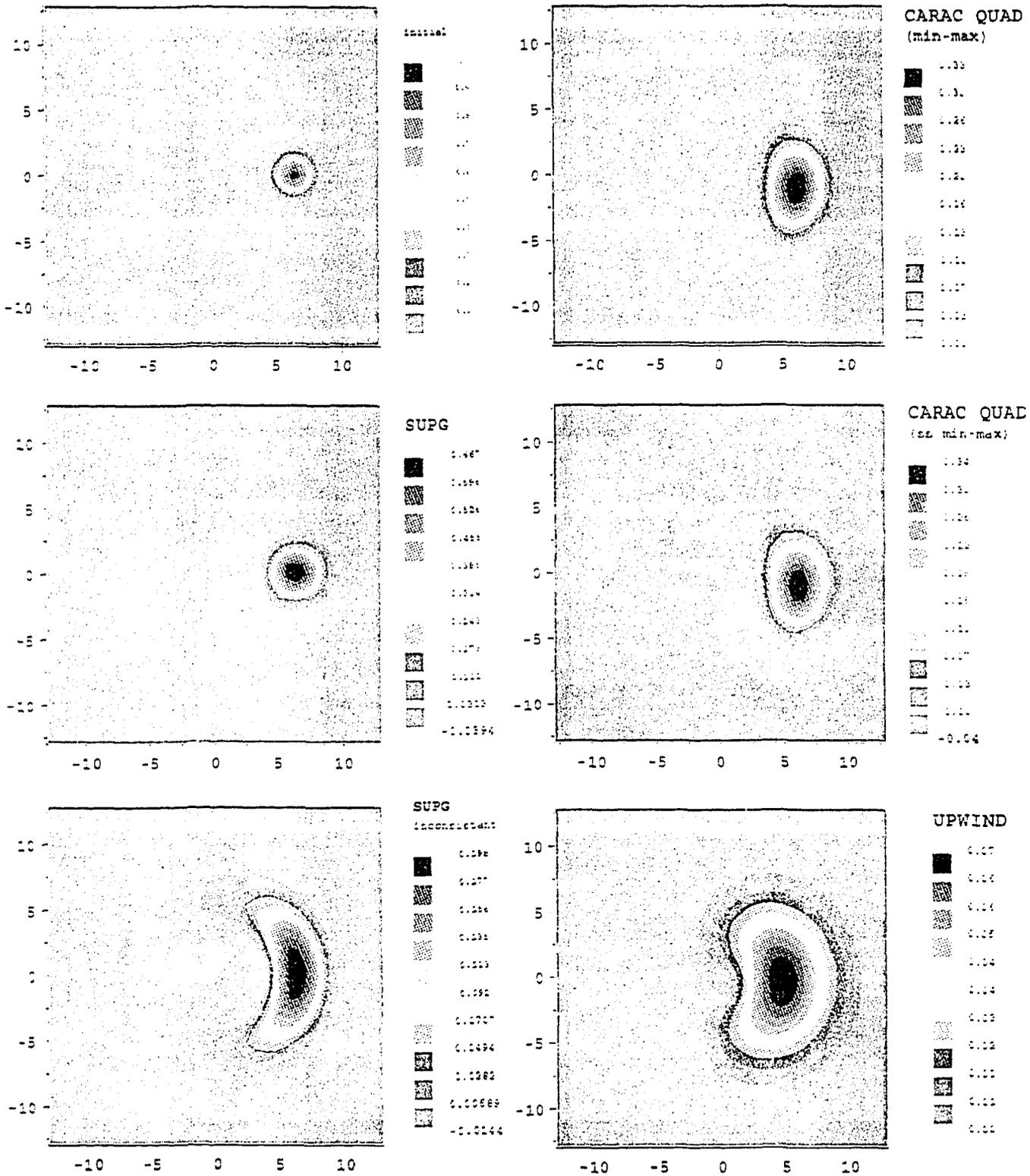
profils de scalaire  
suivant x en y = 0  
après un tour

- ◊—◊ solution exacte
- ◊—◊ SUPG
- x—x caractéristiques

profils de scalaire  
suivant y en x = 6.5  
après un tour

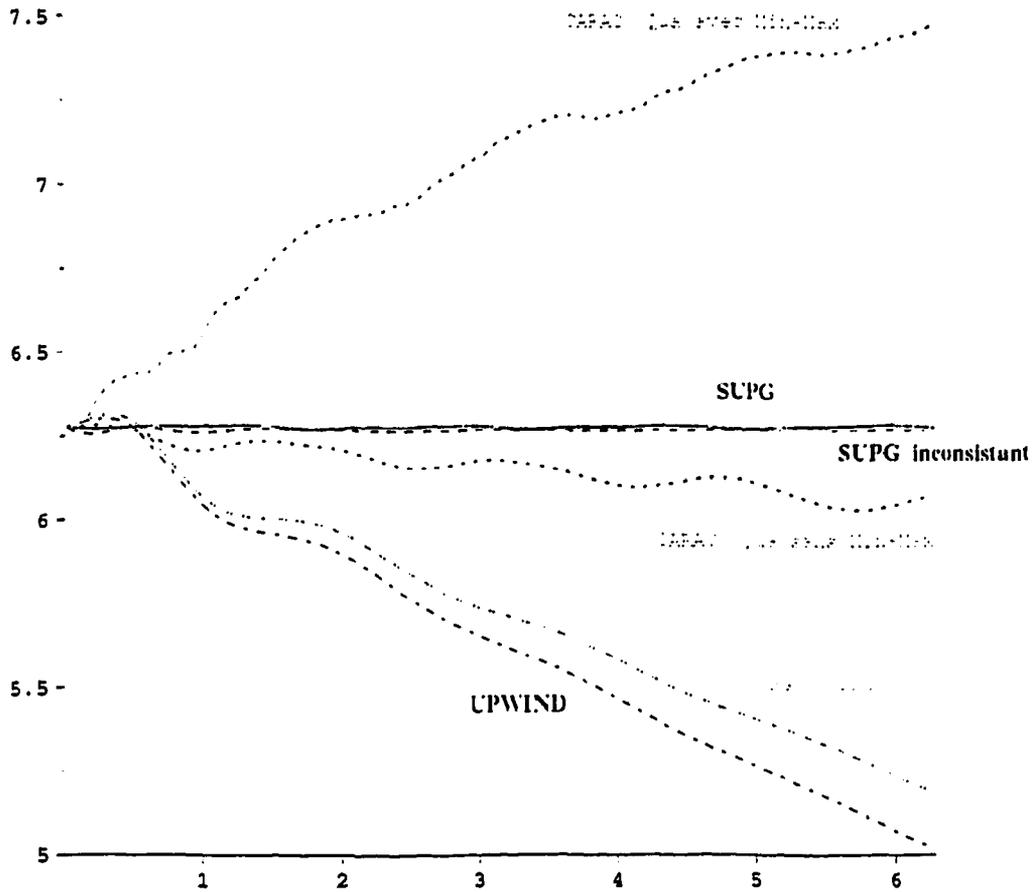


# CAS TEST DU CONE TOURNANT



Champ de scalaire apres un tour :  
comparaison de methodes

## CAS TEST DU CONE TOURNANT



..... CARACTERISTIQUES  
(interpolation quadratique  
avec min-max)

----- CARACTERISTIQUES  
(interpolation lineaire)

———— SUPG

----- SUPG inconsistent

..... CARACTERISTIQUES  
(interpolation quadratique  
sans min-max)

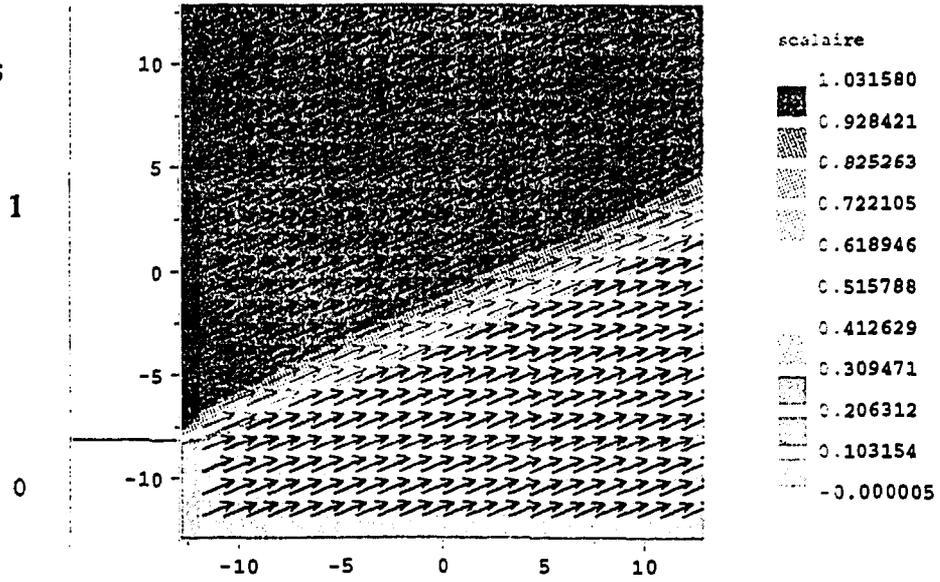
..... UPWIND

**Conservativité du scalaire après un tour :  
comparaison des méthodes**

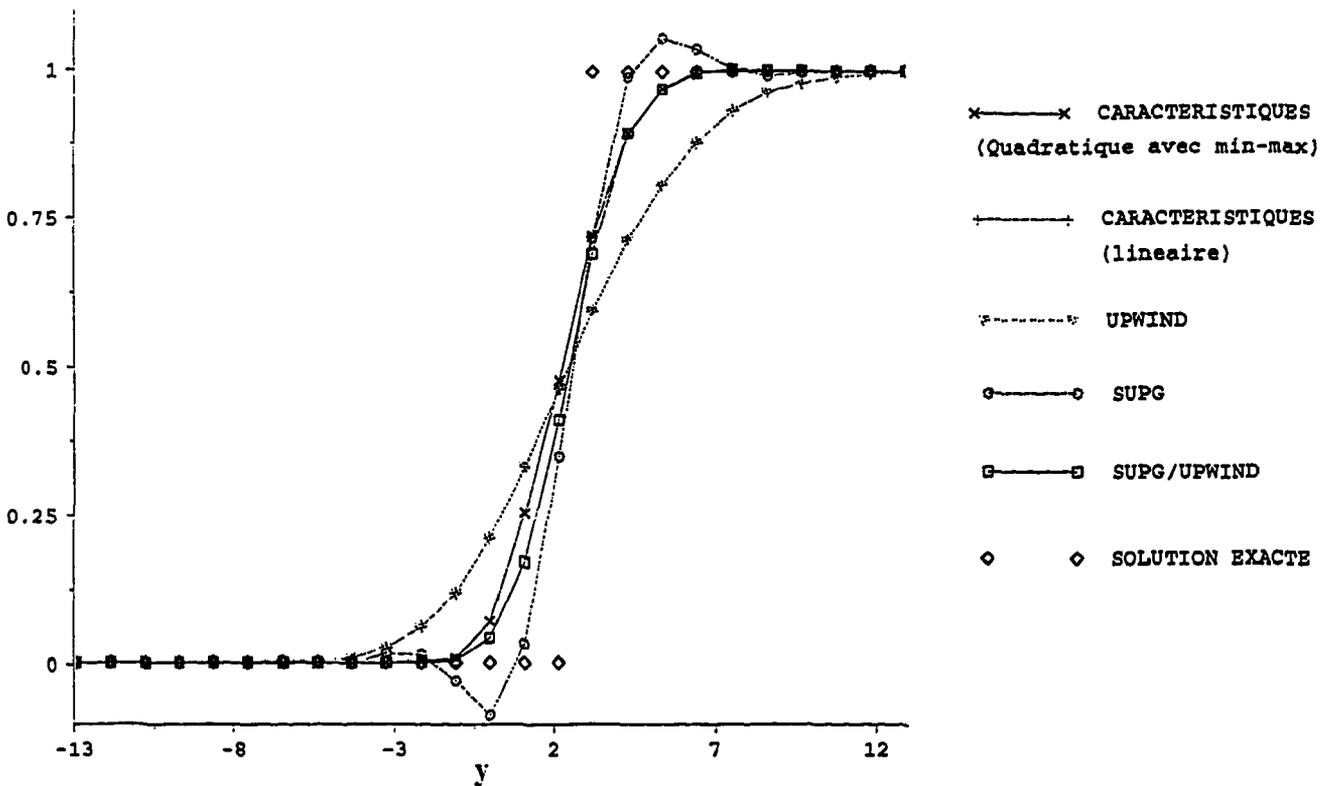
## CAS TEST DE L'ECHELON TRANSVERSAL

Champ de vitesse  
et surfaces isoscalaires  
(SUPG/UPWIND)

Angle du champ  
de vitesse :  $\pi/8$



### COMPARAISONS DES PROFILS DE SCALAIRE EN SORTIE profils en $x = 13$

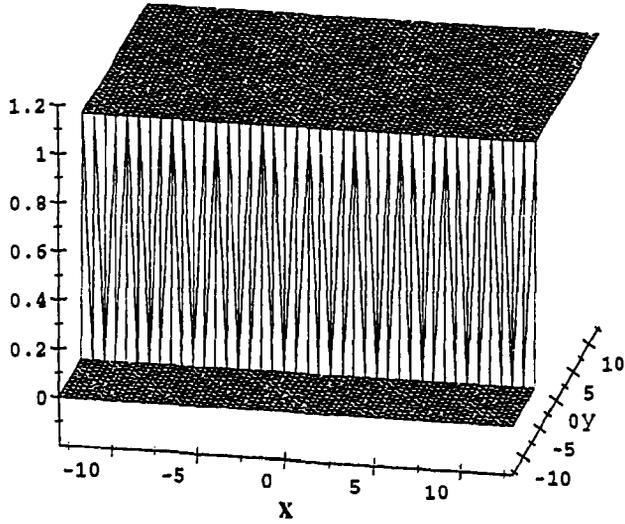


# CAS TEST DE L'ECHELON TRANSVERSAL

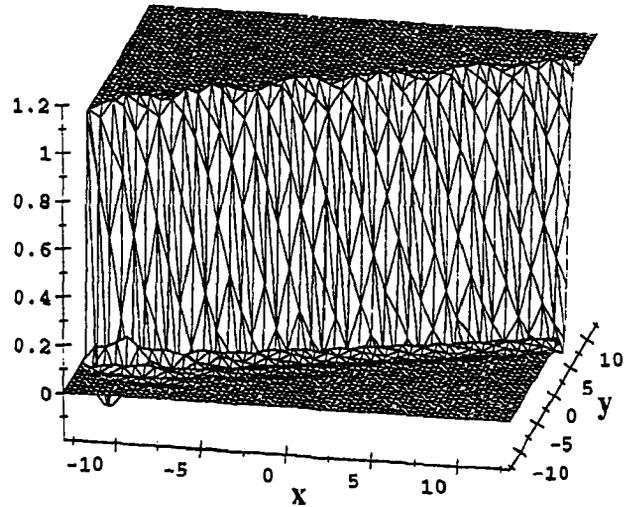
comparaisons des résultats obtenus pour différentes inclinaisons du vecteur vitesse

SUPG

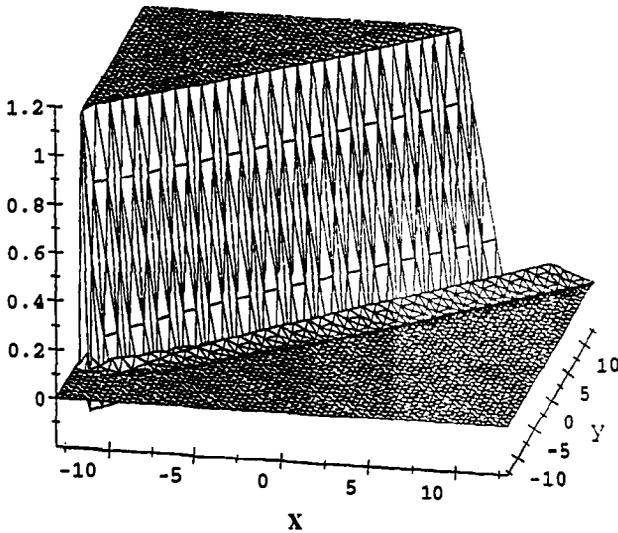
$\theta = 0 \text{ rad}$



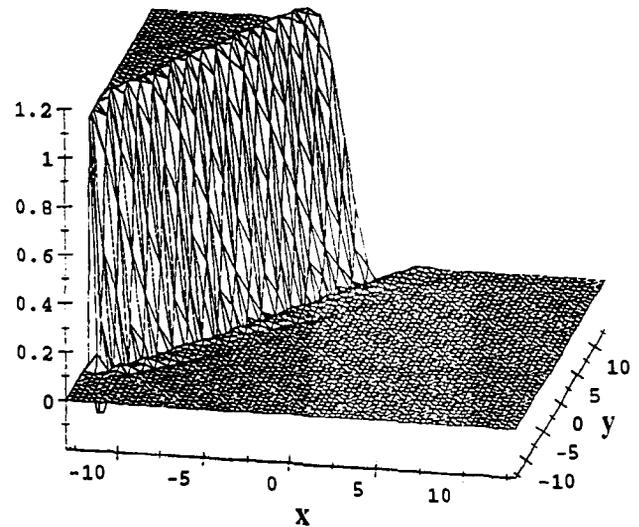
$\theta = \pi/8 \text{ rad}$



$\theta = \pi/4 \text{ rad}$



$\theta = \pi/3 \text{ rad}$

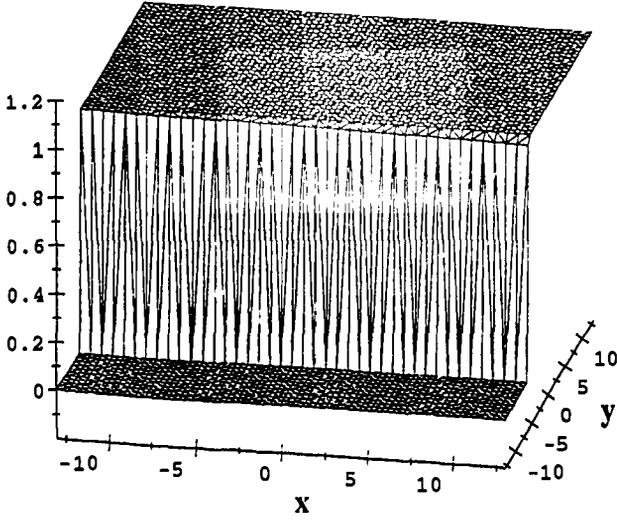


# CAS TEST DE L'ECHELON TRANSVERSAL

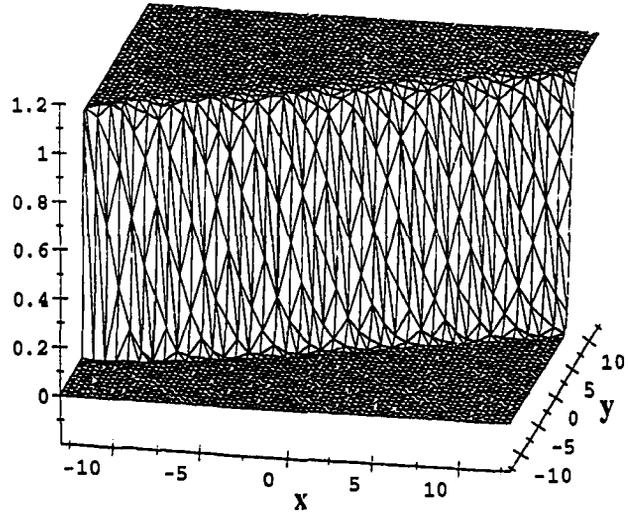
comparaisons des résultats obtenus pour différentes inclinaisons du vecteur vitesse

## SUPG/UPWIND

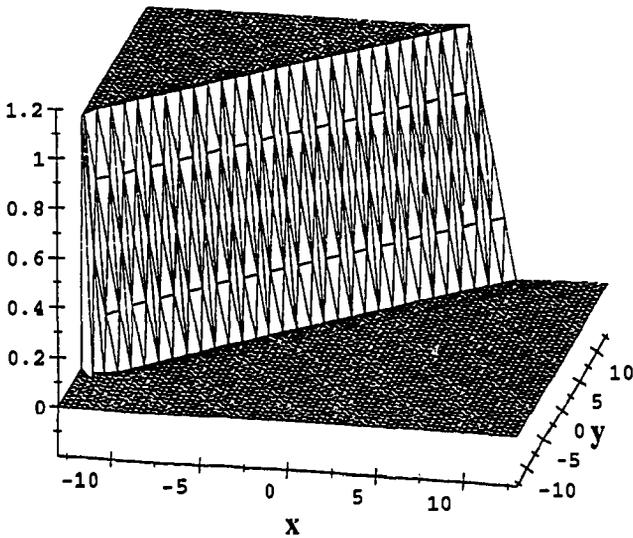
$\theta = 0 \text{ rad}$



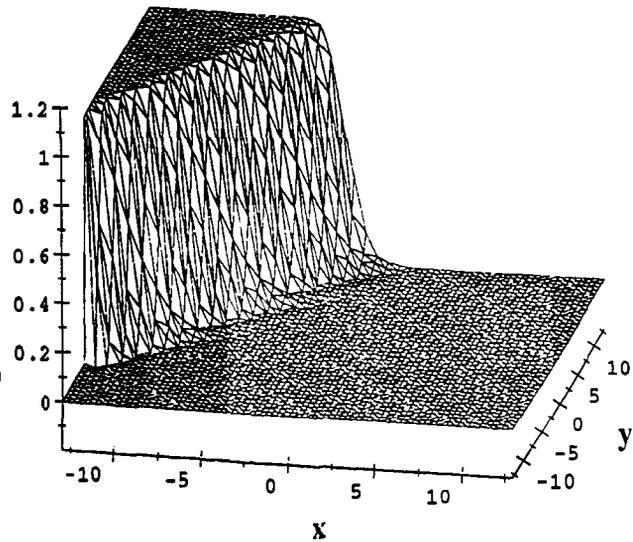
$\theta = \pi/8 \text{ rad}$



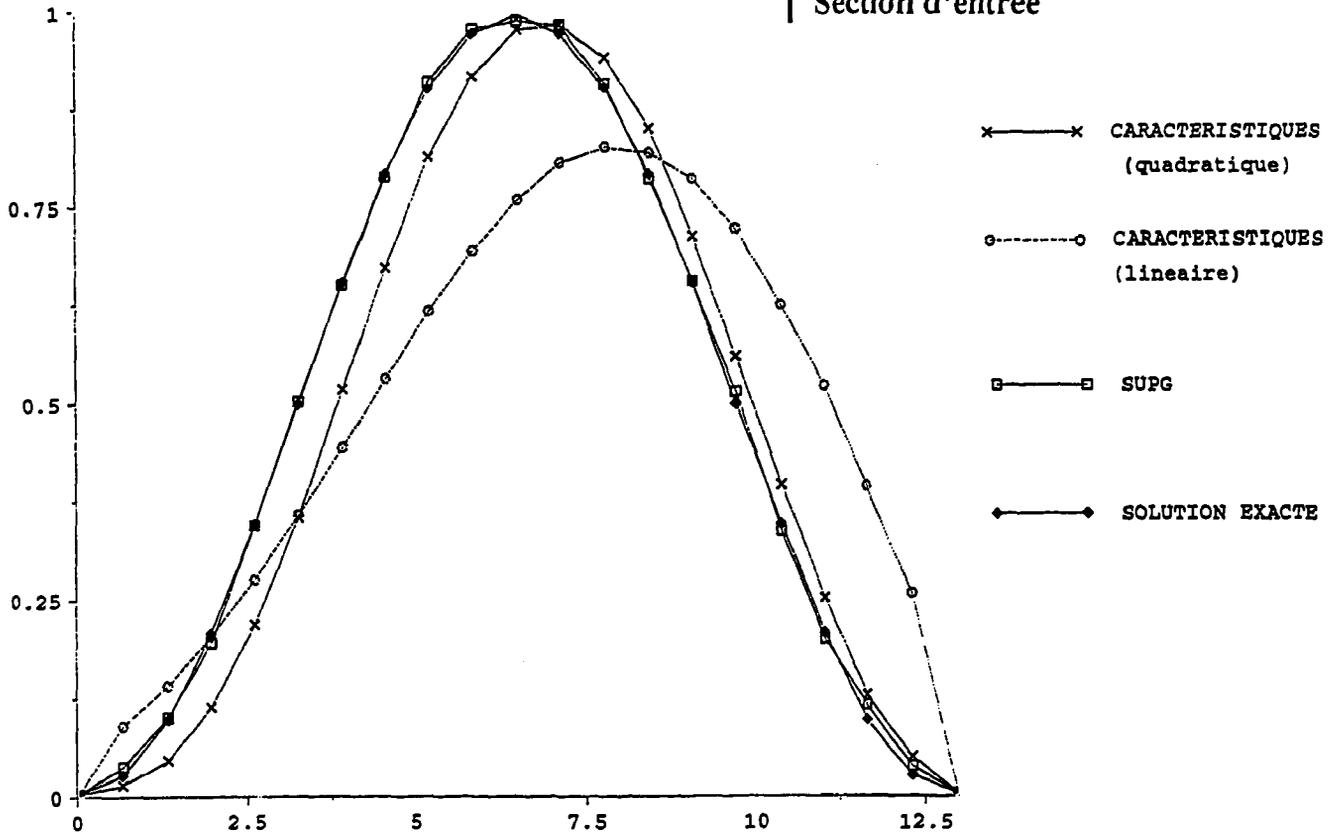
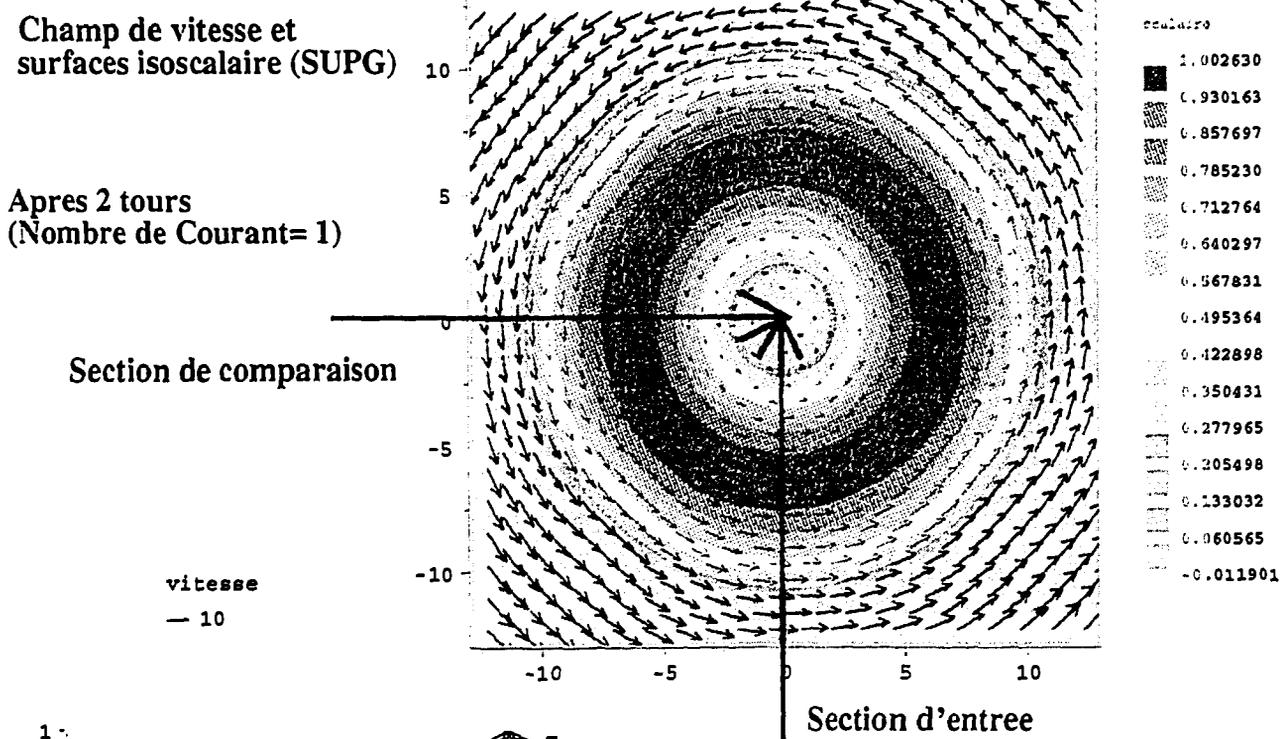
$\theta = \pi/4 \text{ rad}$



$\theta = \pi/3 \text{ rad}$

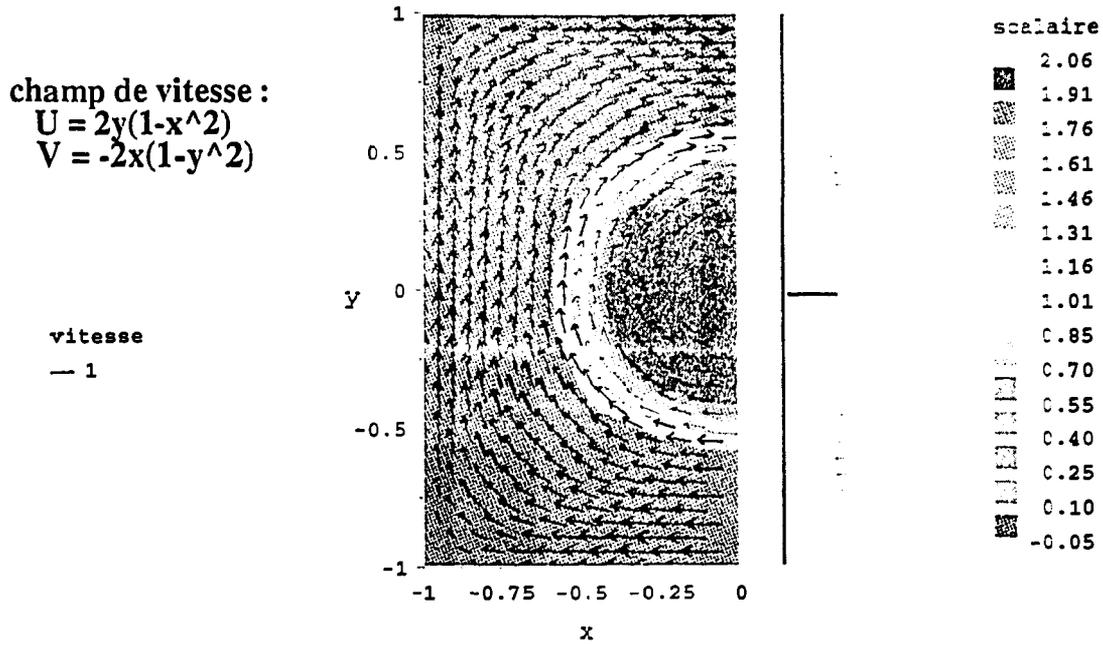


# CAS TEST DU COSINUS TOURNANT ("DONUT")

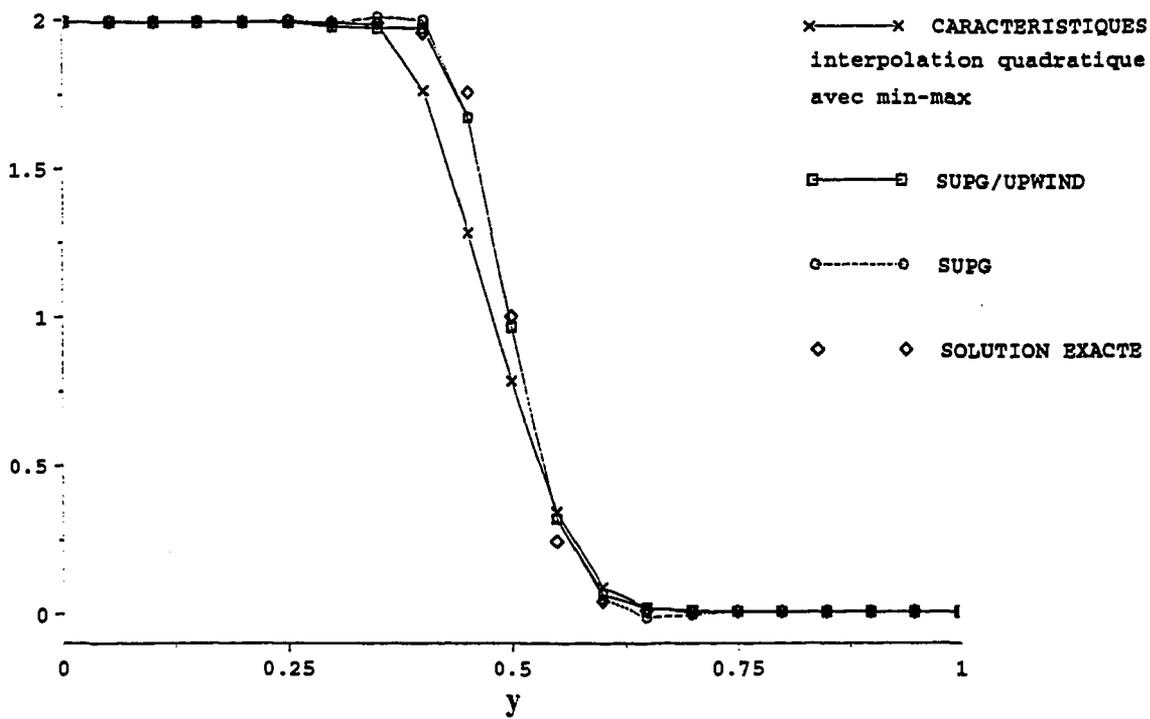


## CAS TEST DE SMITH ET HUTTON

scalaire (SUPG/UPWIND) et champ de vitesse

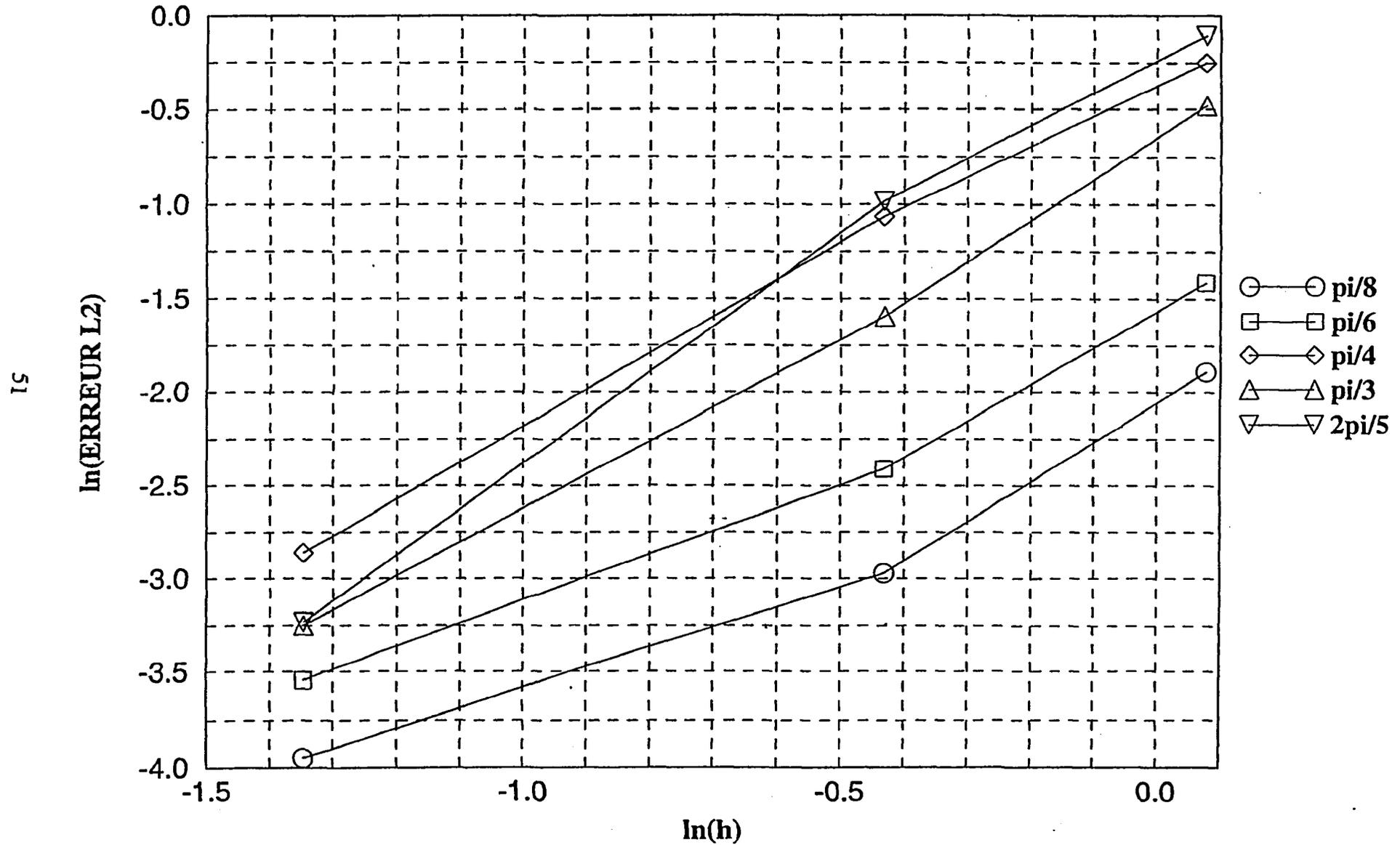


## COMPARAISON DES PROFILS DE SCALAIRE EN SORTIE



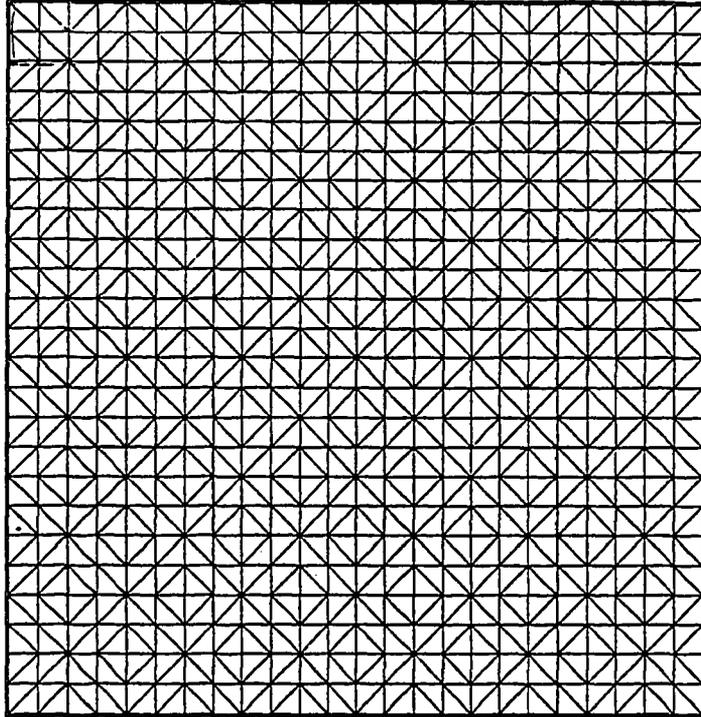
# CONVERGENCE EN FONCTION DU MAILLAGE

diagramme log-log

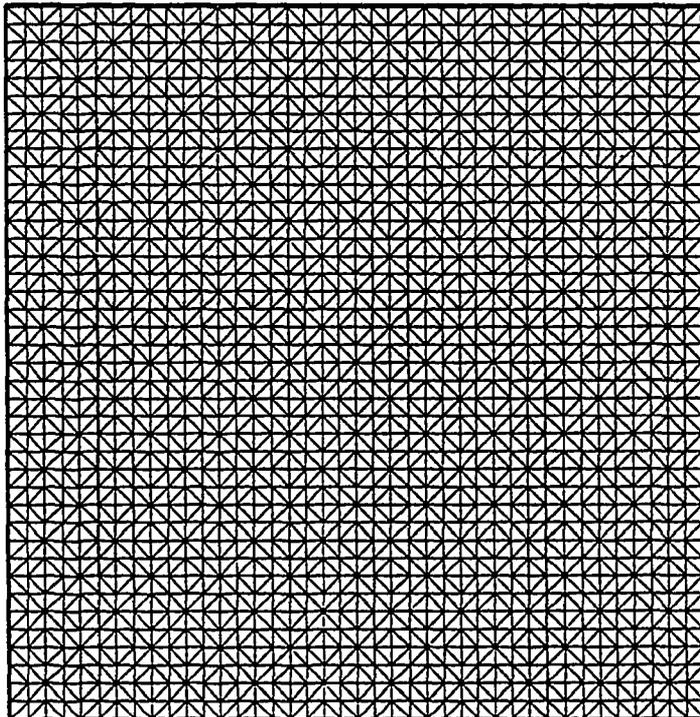


## MAILLAGES

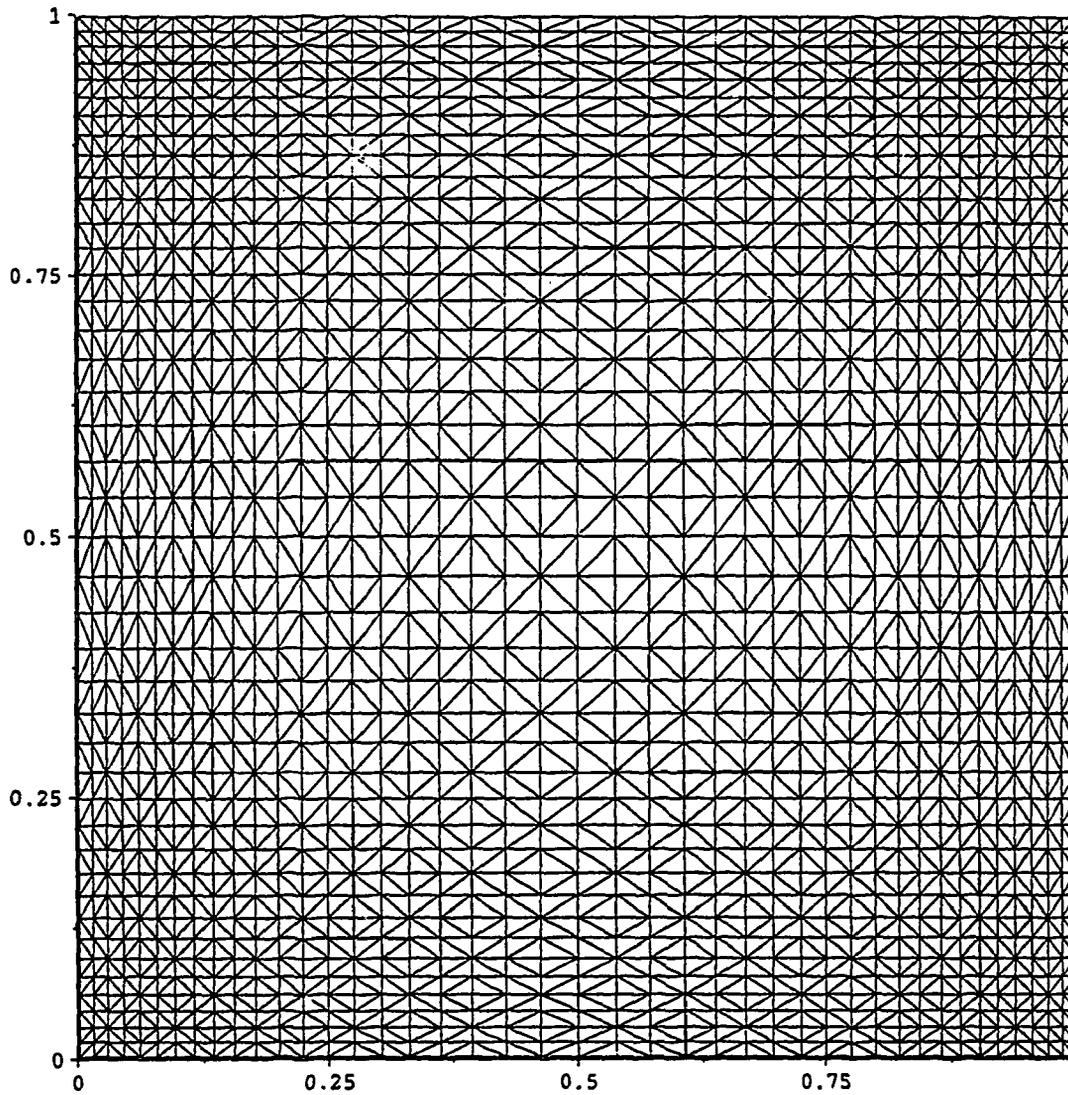
**maillage 288 triangles P1-isoP2  
( 625 noeuds)**



**maillage 800 triangles P1-isoP2  
( 1681 noeuds)**



## MAILLAGE POUR LA CAVITE ENTRAINEE



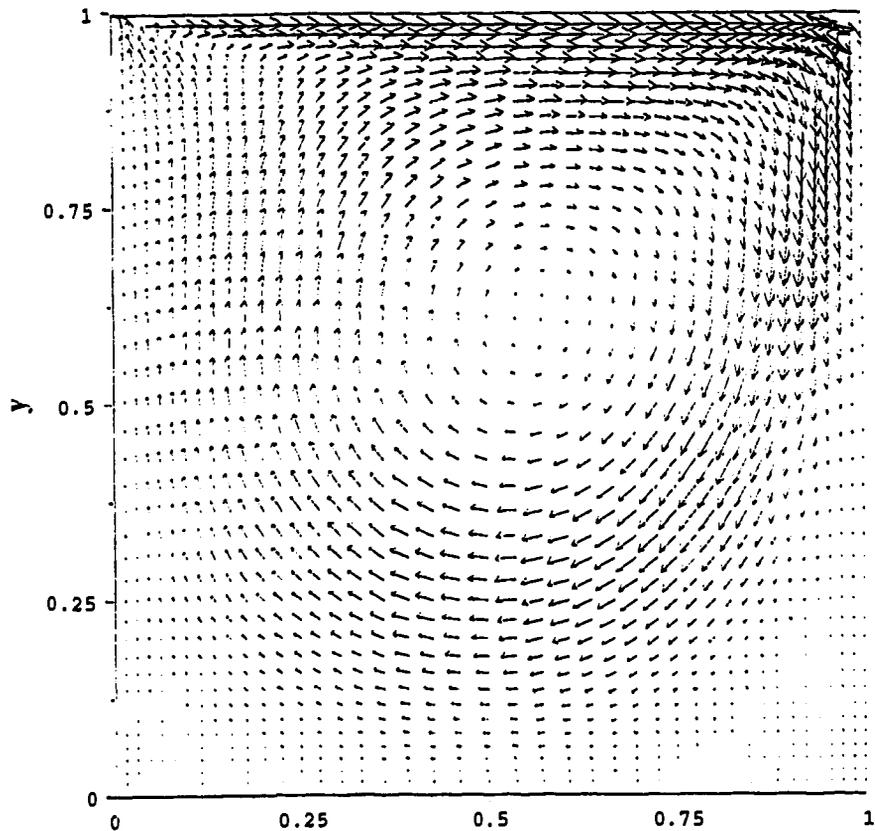
**882 triangles P1-isoP2  
(1849 noeuds)**

CAVITE ENTRAINEE PAR UNE PAROI MOBILE  
 REGIME LAMINAIRE  $Re = 400$

paroi mobile  $U = 1 \rightarrow$

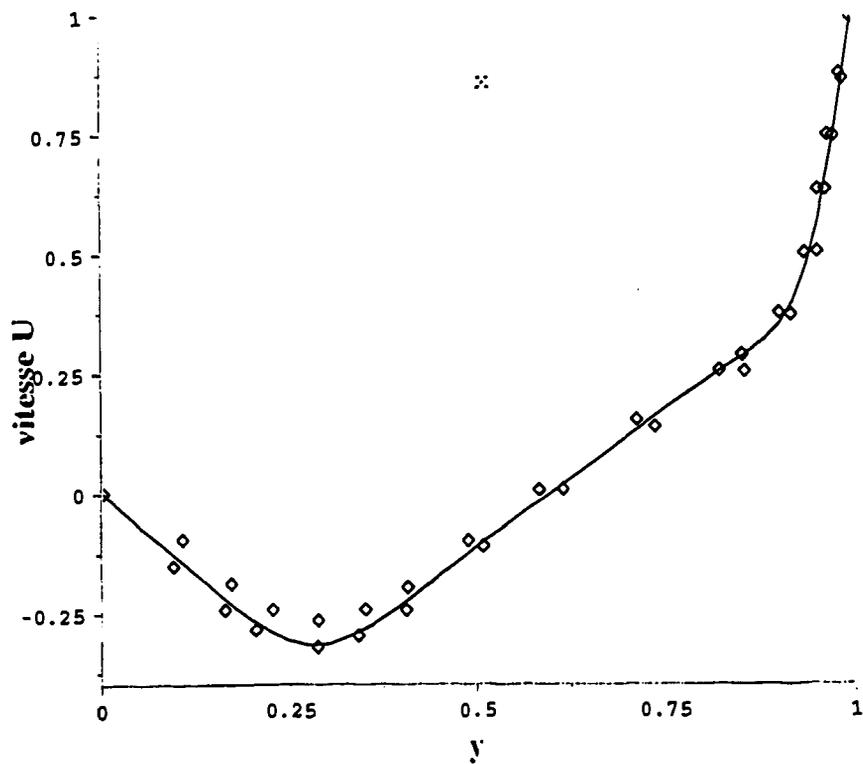
Champ de vitesse

vitesse  
 $\rightarrow 1$



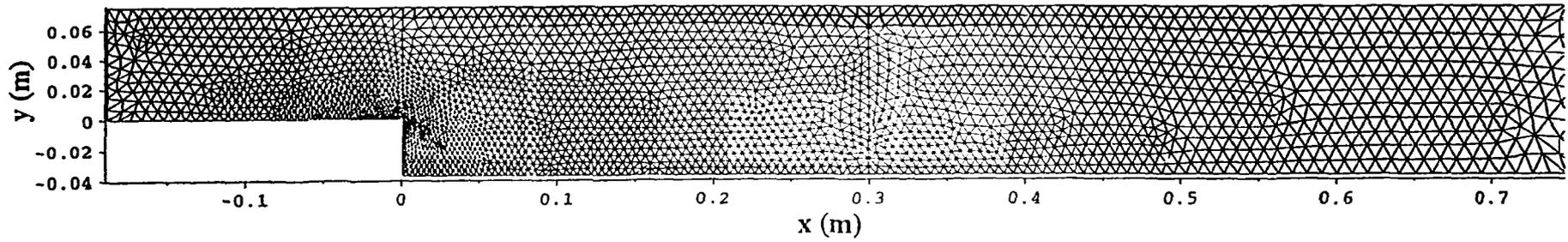
Comparaison  
 avec des mesures :  
 profil de U en  $x=0.5$

— Calcul SUPG  
 — Caracteristiques  
 ◇ courbes limites  
 d'OLSON

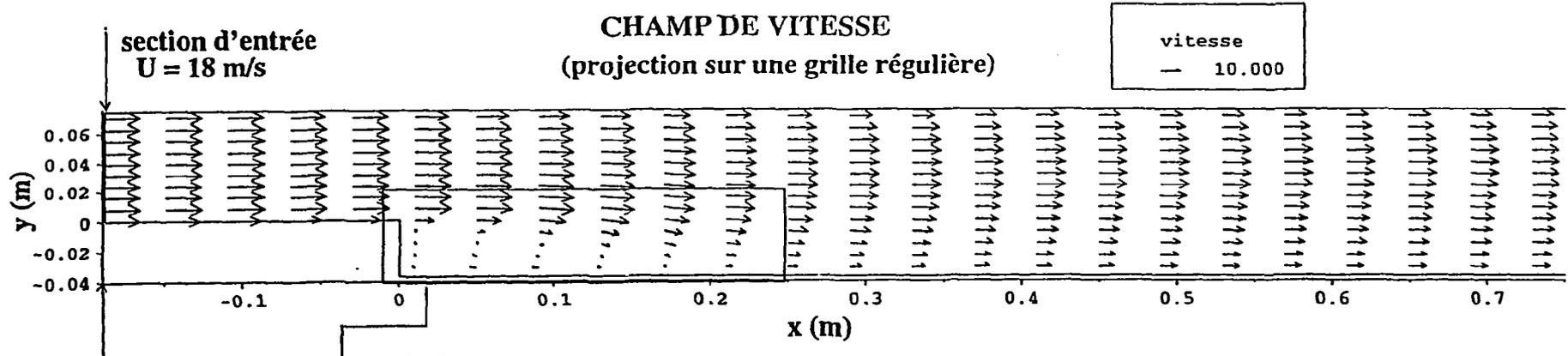


# CAS TEST DE LA MARCHÉ DESCENDANTE

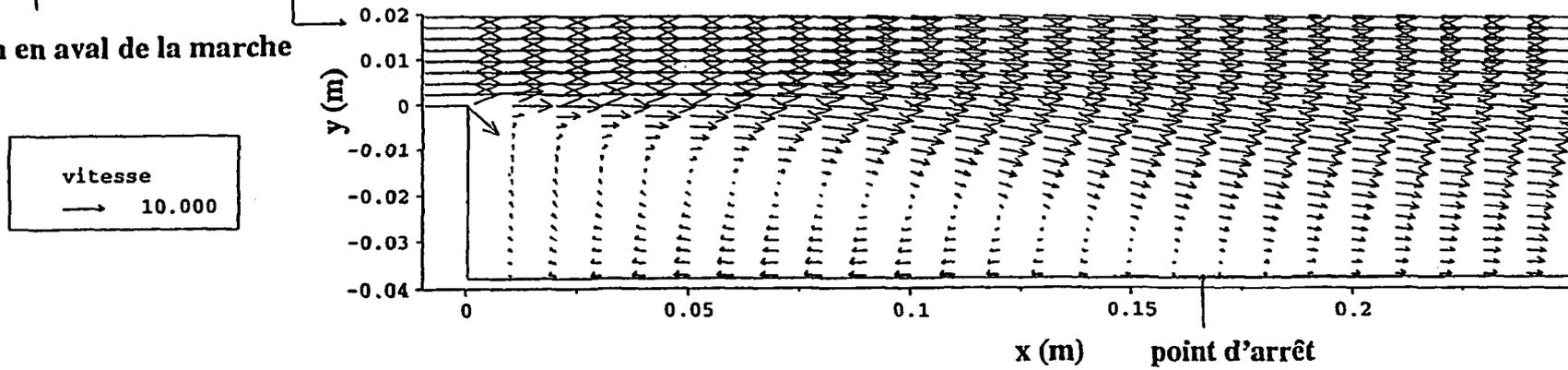
**MAILLAGE**  
(1372 triangles P1-isoP2, 2905 noeuds)



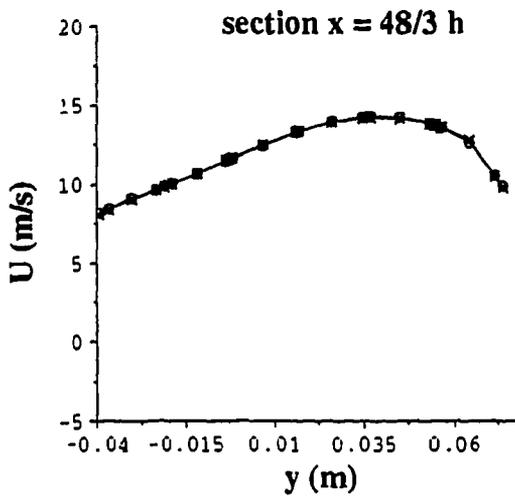
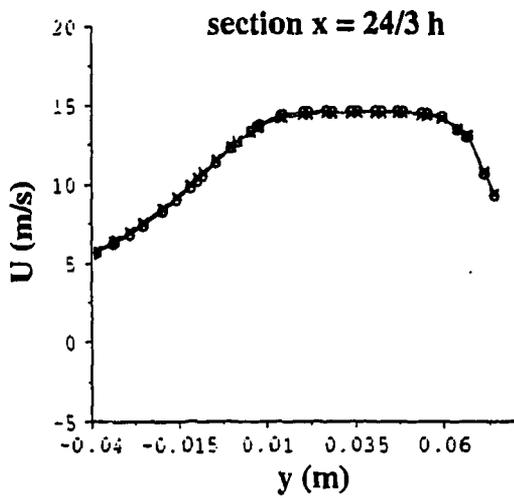
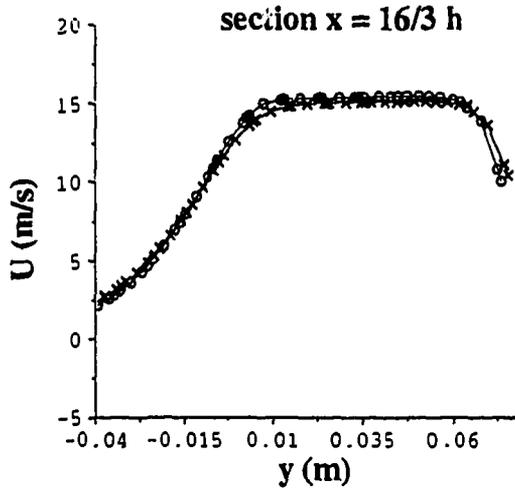
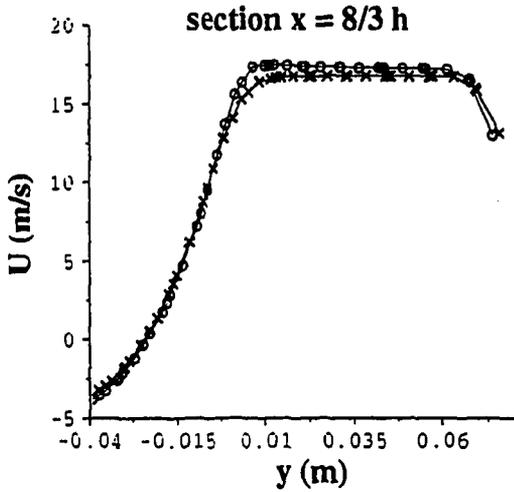
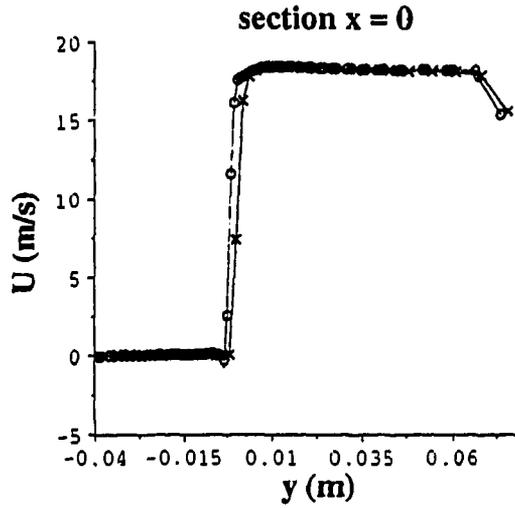
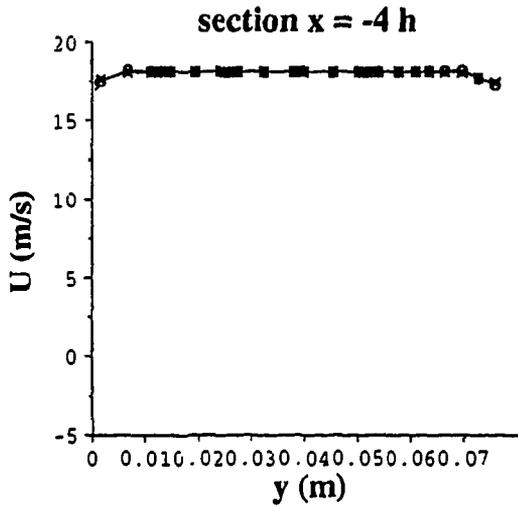
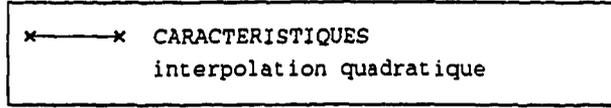
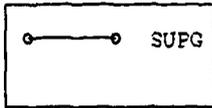
55



zoom en aval de la marche

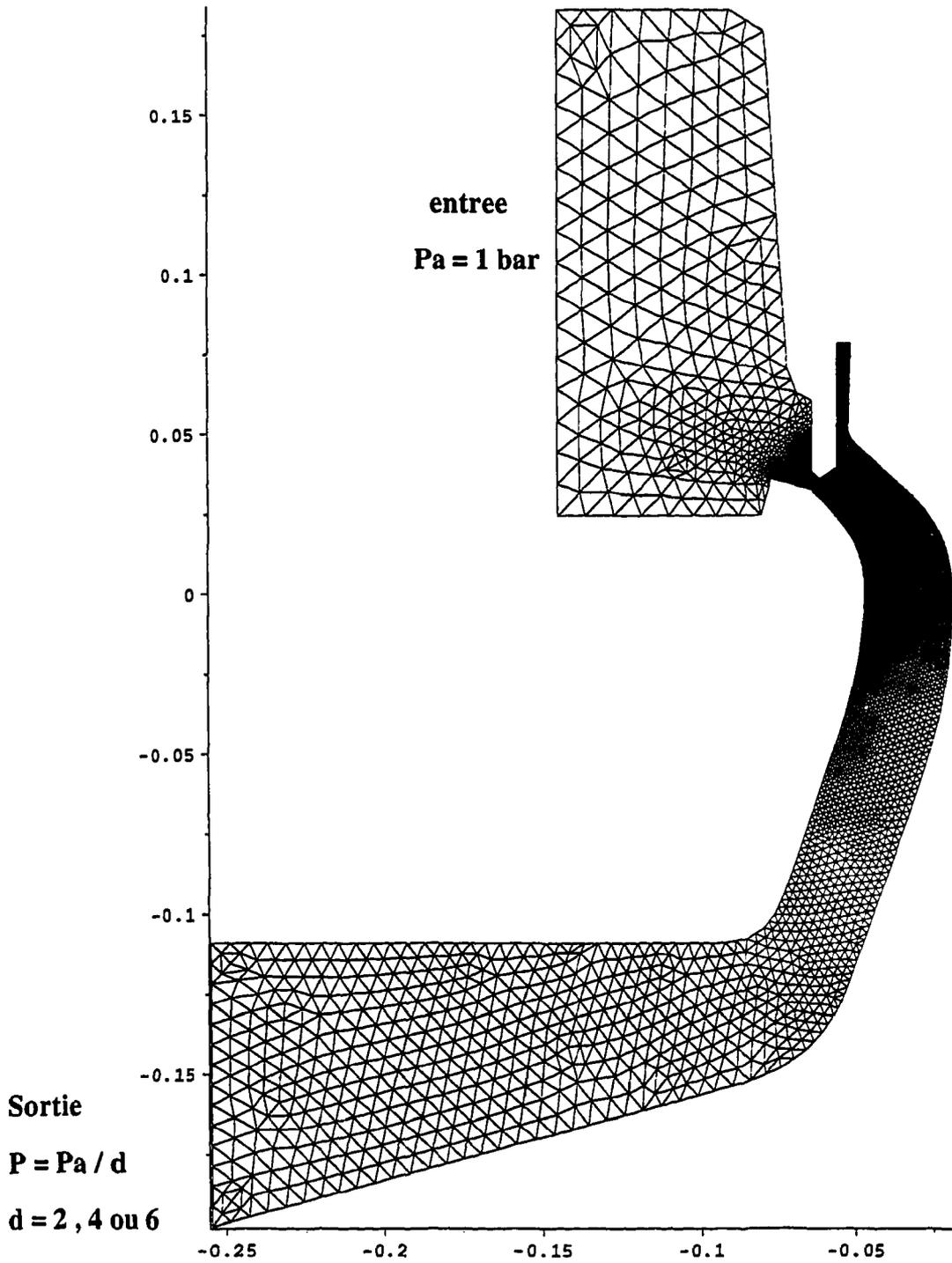


**CAS TEST DE LA MARCHÉ DESCENDANTE**  
**PROFILS DE VITESSE LONGITUDINALE**  
**COMPARAISON SUPG et CARACTERISTIQUES**



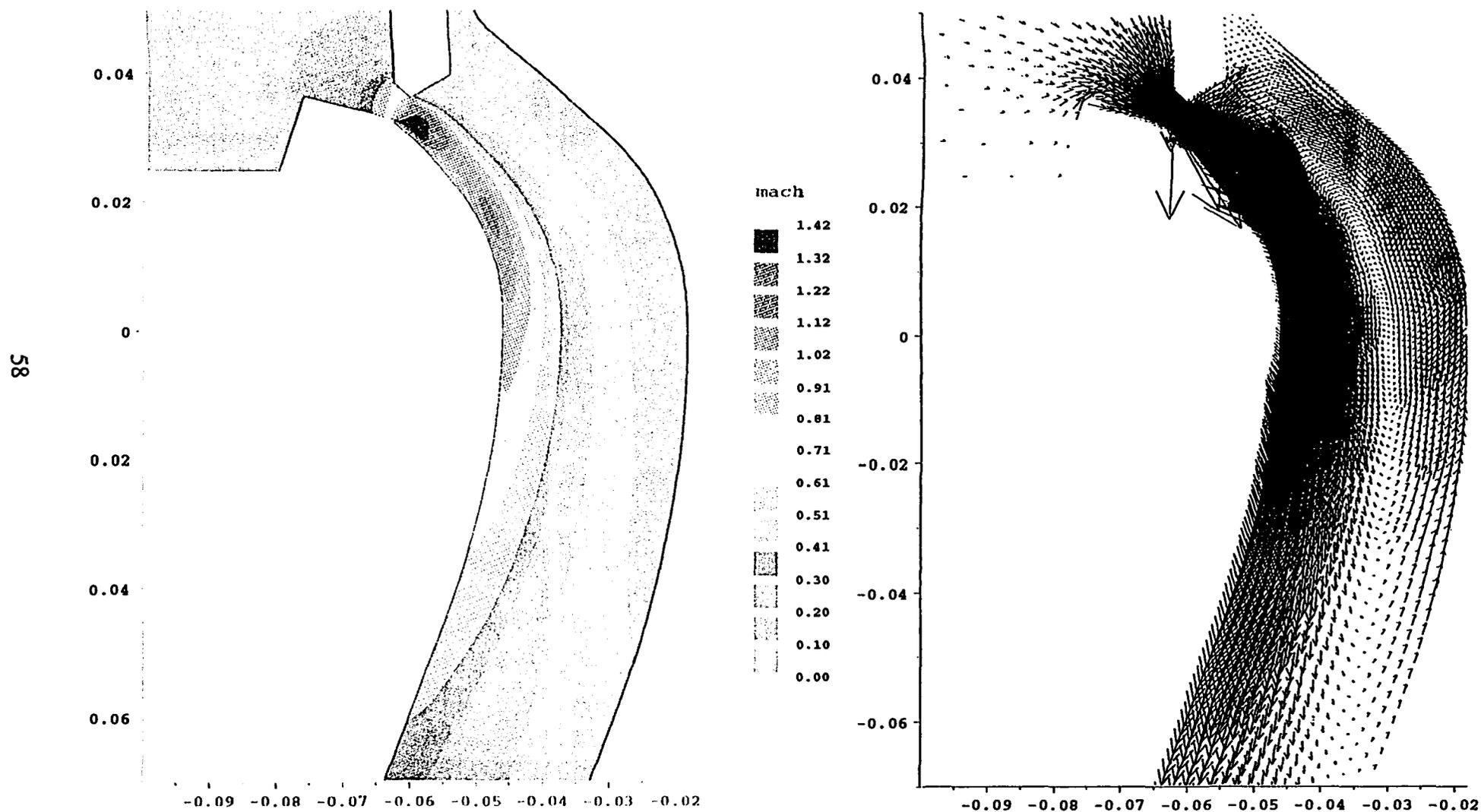
# SOUPAPE CLAPET 2D

Convection "Upwind"



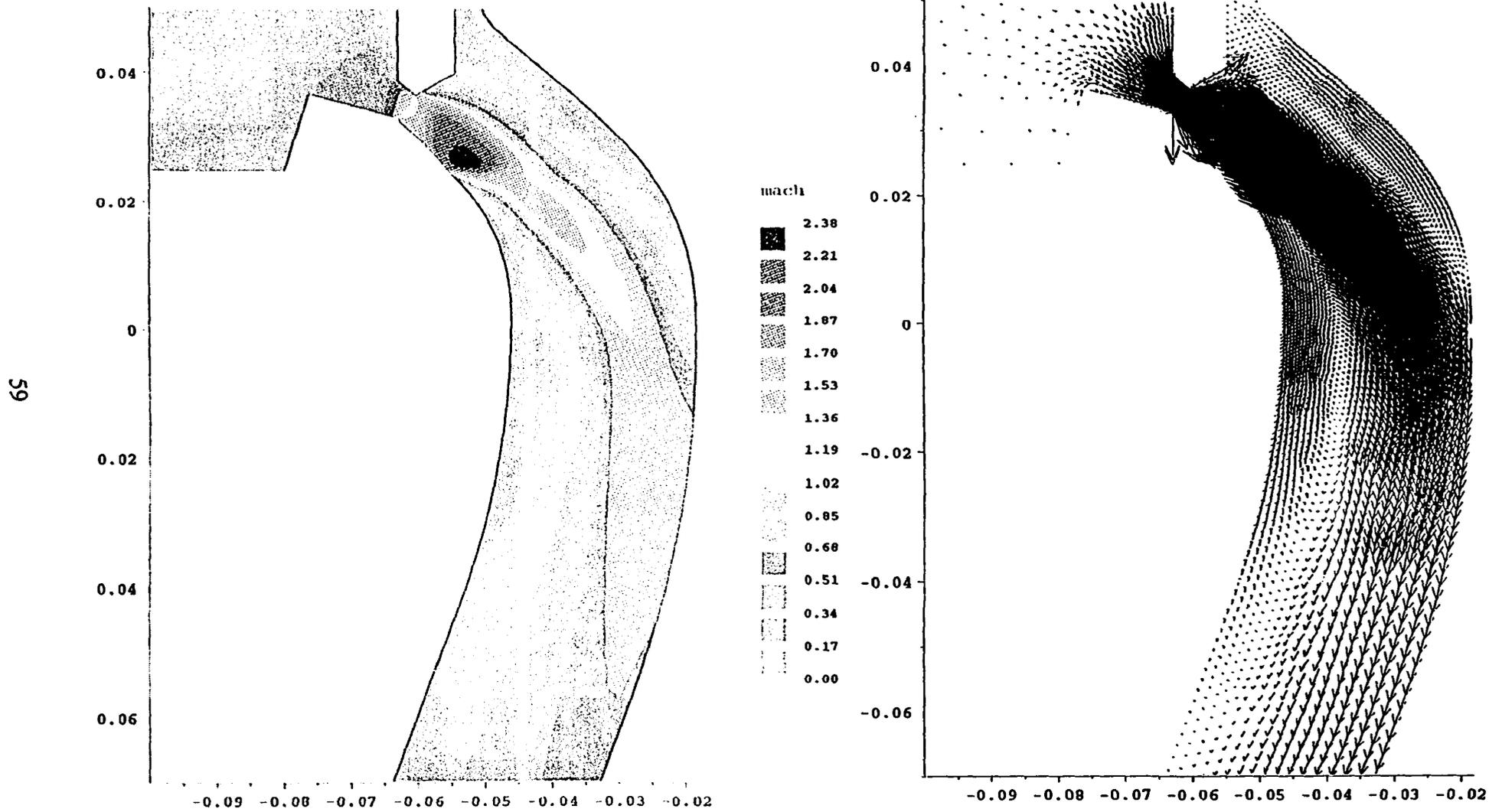
Maillage : 7399 noeuds, 3540 elements

# SOUPAPE CLAPET 2D



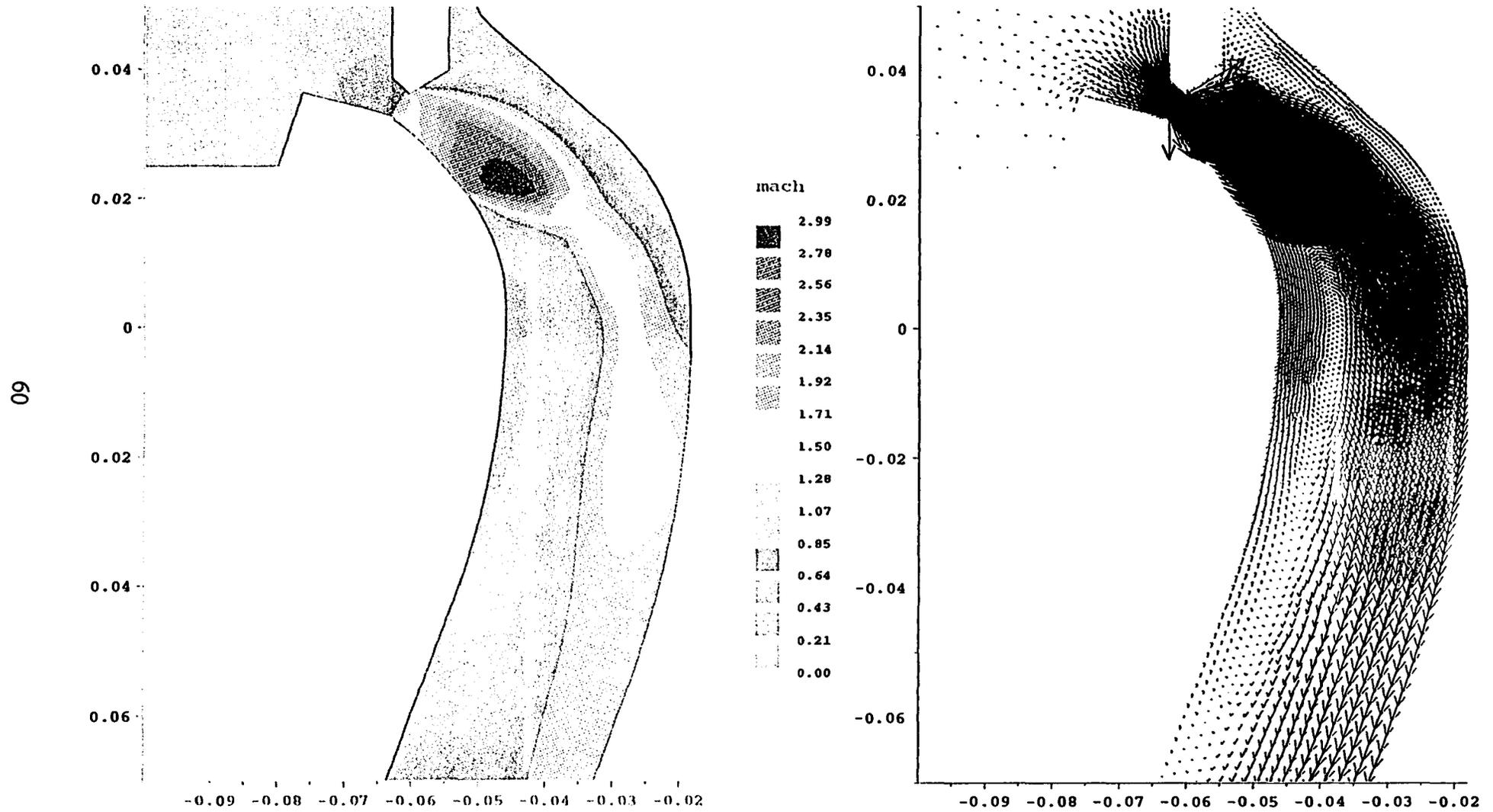
Taux de detente 2 : Nombre de Mach et champ de vitesse

# SOUPAPE CLAPET 2D



Taux de détente 4 : Nombre de Mach et champ de vitesse

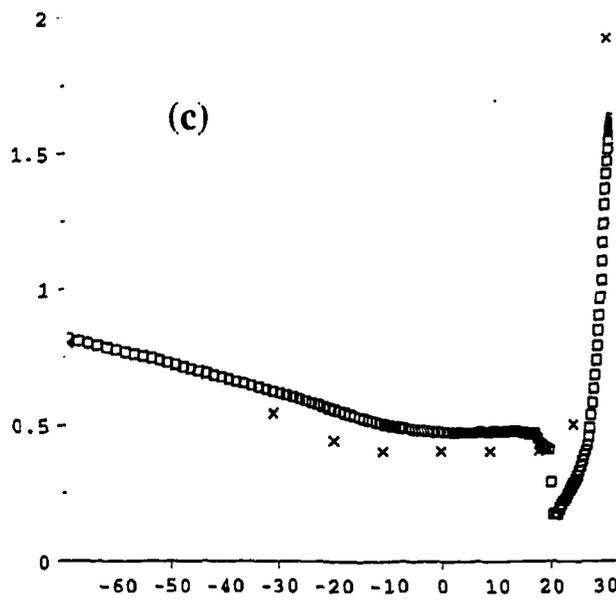
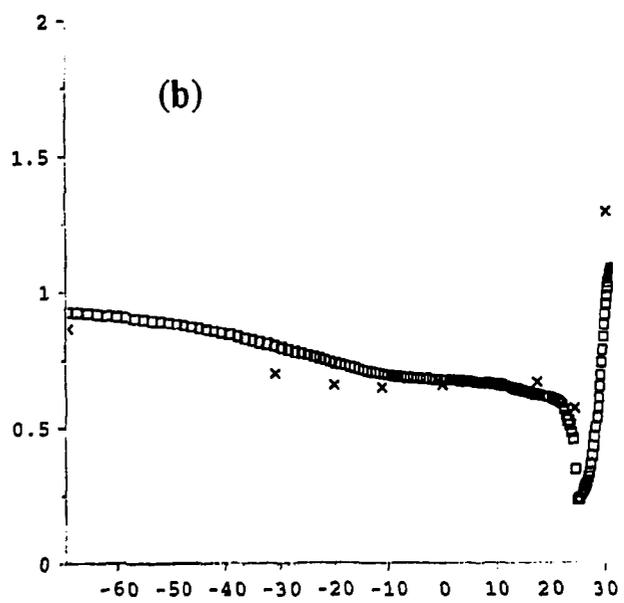
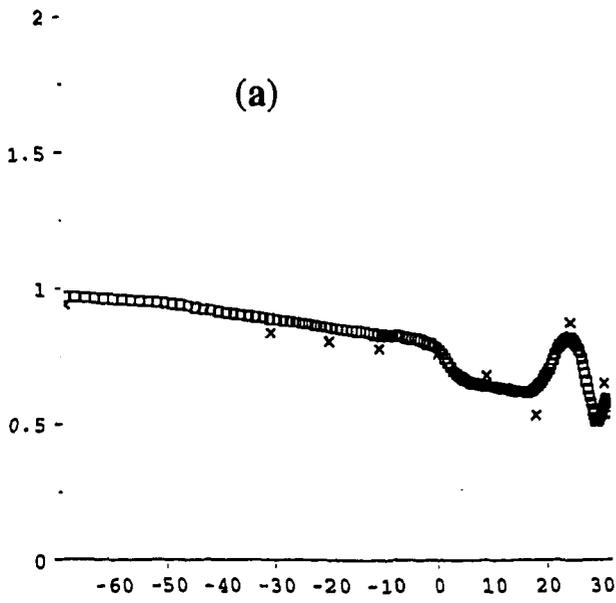
# SOUPAPE CLAPET 2D



Taux de detente 6 : Nombre de Mach et champ de vitesse

# SOUPAPE CLAPET 2D

## Convection "Upwind"



x x experience

□ □ calcul

(a) Taux de detente 2

(b) Taux de detente 4

(c) Taux de detente 6

Profils de pression parietale : comparaison avec les mesures