

*Collection de notes internes
de la Direction
des Etudes et Recherches*

**MODELISATION DES ECOULEMENTS COMPRESSIBLES EN
MALLAGE NON STRUCTURE PAR EXTENSION DES
METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES AUX
ECOULEMENTS INCOMPRESSIBLES**

***COMPRESSIBLE FLOW MODELLING IN UNSTRUCTURED
MESH TOPOLOGIES USING NUMERICAL METHODS
DEVELOPED FOR INCOMPRESSIBLE FLOWS***

EDF

Electricité
de France

Direction des Etudes et Recherches

EDF

Direction des Etudes et Recherches

Electricité
de France

SERVICE APPLICATIONS DE L'ELECTRICITE ET ENVIRONNEMENT
Département Laboratoire National d'Hydraulique

SERVICE ENSEMBLES DE PRODUCTION
Département Machines



1995

CARUSO A.
MECHITOUA N.
DUPLEX J.

**MODELISATION DES ECOULEMENTS
COMPRESSIBLES EN MAILLAGE NON
STRUCTURE PAR EXTENSION DES METHODES
NUMERIQUES APPLIQUEES AUX
ECOULEMENTS INCOMPRESSIBLES**

***COMPRESSIBLE FLOW MODELLING IN
UNSTRUCTURED MESH TOPOLOGIES USING
NUMERICAL METHODS DEVELOPED FOR
INCOMPRESSIBLE FLOWS***

Pages : 70

96NB00072

Diffusion : J.-M. Lecœuvre
EDF-DER
Service IPN. Département SID
1, avenue du Général-de-Gaulle
92141 Clamart Cedex

© Copyright EDF 1996

ISSN 1161-0611

SYNTHÈSE :

Les logiciels de thermohydraulique de la DER en particulier Mélodie (2D) et ESTET (3D) en différences finies ou N3S (2D et 3D) en éléments finis ont dans un premier temps été développés pour des écoulements turbulents incompressibles, éventuellement dilatables, c'est-à-dire où la masse volumique ne dépend pas de la pression. Par la suite, les codes aux différences finies ont étendu leurs algorithmes de résolutions aux écoulements compressibles subsoniques moyennant des modifications mineures de la structure algorithmique initiale. Ainsi ont pu être réalisées les premières applications tant en écoulements monophasiques qu'en écoulements diphasiques.

Le sujet de ce rapport est de présenter les techniques employées pour l'application de tels algorithmes étendus au traitement d'écoulements compressibles dans un code aux éléments finis du type N3S, qui permettrait de traiter des géométries complexes difficiles à mailler en différences finies.

Depuis la version 3.0 du code N3S, il existe la possibilité de calculer des écoulements dilatables à moindre coût. Dès lors, une version prototype bidimensionnelle de N3S s'appuyant au maximum sur les possibilités de vectorisation du Cray et sur le savoir-faire acquis tant du point de vue physique, numérique qu'informatique dans d'autres logiciels de Mécaniques de Fluides comme Mélodie, ESTET ou TELEMAT a été programmée, testée et validée. Les algorithmes utilisés sont les mêmes que ceux utilisés en différences finies, mais écrits sous une formulation variationnelle.

Dans la première partie sont présentées les équations de base à résoudre, écrites sous forme forte ainsi que la méthode numérique associée. On montre également les modifications apportées au modèle de turbulence k-epsilon étendu au compressible. La deuxième partie présente l'algorithme utilisé en insistant sur les termes supplémentaires induits par la compressibilité du fluide. La troisième partie présente les équations sous forme intégrale et les systèmes matriciels associés. On montre les choix retenus pour le calcul des termes relatifs à l'aspect compressible. Enfin, quelques cas tests et d'applications représentatifs des possibilités offertes sont proposés dans la dernière partie : il s'agit de cas subsoniques, mais également transsoniques et supersoniques, afin de voir le comportement de la méthode numérique en présence de choc. Une annexe présente également la manière retenue pour l'application de conditions aux limites de pression relatives aux écoulements compressibles.

EXECUTIVE SUMMARY :

The R&D D thermal hydraulic codes, notably the finite difference codes *Mélotie* (2D) and *ESTET* (3D) or the 2D and 3D versions of the finite element code *N3S* were initially developed for incompressible, possibly dilatable, turbulent flows, i.e. those where density is not pressure-dependent. Subsequent minor modifications to these finite difference code algorithmics enabled extension of their scope to subsonic compressible flows. The first applications in both single-phase and two-phase flow contexts have now been completed.

This paper presents the techniques used to adapt these algorithms for the processing of compressible flows in an *N3S* type finite element code, whereby complex geometries normally difficult to model in finite difference meshes could be successfully dealt with.

The development of version 3.0 of the *N3S* code led to dilatable flow calculations at lower cost. On this basis, a 2-D prototype version of *N3S* was programmed, tested and validated, drawing maximum benefit from Cray vectorization possibilities and from physical, numerical or data processing experience with other fluid dynamics codes, such as *Mélotie*, *ESTET* or *TELEMAC*. The algorithms are the same as those used in finite difference codes, but their formulation is variational.

The first part of the paper deals with the fundamental equations involved, expressed in basic form, together with the associated digital method. The modifications to the *k-epsilon* turbulence model extended to compressible flows are also described. The second part presents the algorithm used, indicating the additional terms required by the extension. The third part presents the equations in integral form and the associated matrix systems. The solutions adopted for calculation of the compressibility related terms are indicated. Finally, a few representative applications and test cases are discussed. These include subsonic, but also transsonic and supersonic cases, showing the shock responses of the digital method. The application of compressible flow pressure boundary conditions is presented in an appendix.

SOMMAIRE

	INTRODUCTION.....	P. 2
I	EQUATIONS DE BASE ET METHODE NUMERIQUE.....	P. 4
	I-1 EQUATIONS DE BASE.....	P. 4
	I-2 METHODE NUMERIQUE.....	P. 7
II	ALGORITHMME.....	P. 10
III	FORMULATION VARIATIONNELLE.....	P. 13
	III-1 FORMULATION INTEGRALE ET MATRICIELLE.....	P. 13
	III-2 CALCUL DES TERMES LIES A LA COMPRESSIBILITE...	P. 17
IV	APPLICATIONS.....	P. 23
	VI-1 TUYERE PLANE.....	P. 23
	VI-2 EXPERIENCE "CLARINETTE"	P. 26
	VI-3 TUBE A CHOC.....	P. 28
V	PROPOSITIONS D'AMELIORATION DE LA STABILITE.....	P. 55
	ANNEXES.....	P. 59
	CONCLUSION.....	P. 62
	REFERENCES.....	P.63

INTRODUCTION

Les logiciels de thermohydraulique de la DER et du LNH en particulier Mélodie (2D) et ESTET (3D) en différences finies ou N3S (2D et 3D) en éléments finis ont dans un premier temps été développés pour des écoulements turbulents incompressibles, éventuellement dilatables, c'est à dire où la masse volumique ne dépend pas de la pression. Par la suite, les codes aux différences finies ont étendu leurs algorithmes de résolutions aux écoulements compressibles subsoniques moyennant des modifications mineures de la structure algorithmique initiale /1/. Ainsi ont pu être réalisées les premières applications en monophasique avec Mélodie, puis avec Mélodif, version diphasique de Mélodie /2/, ainsi qu'avec le code ESTET /3/.

Le sujet de ce rapport est de présenter les techniques employées pour l'application de tels algorithmes étendus au traitement d'écoulements compressibles dans un code aux éléments finis du type N3S, qui permettrait de traiter des géométries complexes difficiles à mailler en différences finies.

Cependant, l'extension aux écoulements compressibles à partir d'un algorithme initialement écrit pour des écoulements incompressibles nécessite d'avoir une structure informatique et un algorithme initial permettant de calculer des écoulements dilatables, c'est à dire où la masse volumique peut varier en fonction de paramètres tels que la température, concentrations, etc..., mais pas en fonction de la pression. Jusqu'à la version 3.0 du code N3S, cette possibilité n'existait pas : seuls les écoulements à masse volumique constante pouvant être calculés, les légères variations de la densité étant prises en compte par une simple approximation de Boussinesq. L'extension aux écoulements présentant de grandes variations de densité a motivé des études tant théoriques que algorithmique sur la possibilité d'implanter dans N3S des algorithmes de type Double Gradient Conjugué, Axelsson et autres, pouvant traiter des écoulements dilatables /4,5/.

Cependant, quoique pouvant donner de bons résultats, la structure du code N3S associée à ces algorithmes coûteux rendaient le coût CPU du code prohibitif, sans être assuré de la convergence des calculs. C'est pourquoi un prototype bidimensionnel de N3S s'appuyant au maximum sur les possibilités de vectorisation du Cray et le savoir-faire acquis tant du point de vue physique, numérique qu' informatique dans d'autres logiciels de Mécaniques de Fluides comme Mélodie, ESTET ou TELEMAR a été programmé , testé et validé /6/.

Les études réalisées sur ce prototype ont permis de baisser notablement le coût CPU (inférieur à 0,1 s/pdt/1000 nds sur Cray Y-MP) pour un écoulement turbulent dilatable. Ce faible coût a permis de réaliser les premiers calculs d'écoulements réactifs /7/.

Les algorithmes programmés sont les mêmes que ceux utilisés en différences finies, mais écrits sous une formulation variationnelle. Dès lors, une extension aux écoulements compressibles semblait naturelle et rapide à réaliser : c'est ce que se propose de présenter ce rapport.

Dans le premier chapitre, nous présenterons les équations de base à résoudre, écrites sous forme forte ainsi que la méthode numérique associée. On montrera les modifications apportées au modèle de turbulence k-epsilon étendu au compressible. Le chapitre 2 présentera l'algorithme utilisé en insistant sur les termes supplémentaires induits par la compressibilité du fluide. Le troisième chapitre présentera les équations sous forme intégrale et les systèmes matriciels associés. On montrera les choix retenus pour le calcul des termes relatifs à l'aspect compressible. Enfin, quelques cas tests et d'applications représentatifs des possibilités offertes seront présentés au chapitre 4: il s'agit de cas subsoniques, mais également transsoniques et supersoniques, afin de voir le comportement de la méthode numérique en présence de choc.

Une annexe présente également la manière retenue pour l'application de conditions aux limites de pression relatives aux écoulements compressibles, en précisant toutefois qu'il n'y a pas à l'heure actuelle de conditions généralistes satisfaisantes.

I - EQUATIONS DE BASE ET METHODE NUMERIQUE

On rappelle ici les équations à résoudre ainsi que la méthode numérique présentées dans /1/.

I-1 EQUATIONS DE BASE

I-1-1 - Bilan de masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} (\rho \vec{U}) = 0 \quad (\text{I.1})$$

où ρ est la masse volumique en kg/m^3
 \vec{U} est la vitesse de composantes (U_i) en m/s

I-1-2 - Bilan de quantité de mouvement

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \text{grad} (\vec{U}) \right] = - \text{grad} (P) + \text{div} (\tau) \quad (\text{I.2})$$

où P est la pression en pascals (Pa)
 τ est le tenseur des contraintes, qui dans le cas d'un fluide Newtonien a pour composantes :

$$\tau_{ij} = \mu_e \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] + \lambda \frac{\partial U_m}{\partial x_m} \delta_{ij} \quad (\text{I.3})$$

μ_e étant la viscosité efficace et λ la seconde viscosité en kg/m/s ,

on a
$$\mu_e = \mu + \mu_t \quad (\text{I.4})$$

où μ_t est la viscosité turbulente définie plus loin et μ la viscosité moléculaire.

Remarque : de manière pratique, les termes en gradient transposé $\mu_e \left[\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right]$ et de seconde viscosité $\lambda \frac{\partial U_m}{\partial x_m} \delta_{ij}$ ont été négligés. Leur prise en compte explicite, comme dans Mélodie, ne devrait pas poser de problème majeur.

I-1-3 - Bilan d'enthalpie

$$\rho \left[\frac{\partial h}{\partial t} + \vec{U} \text{grad} (h) \right] = \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{U} \text{grad}(P) + D \cdot \tau - \text{div}(Q) \quad (\text{I.5})$$

où h est l'enthalpie en J/kg

D est le tenseur de déformation de composantes d_{ij} :

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{I.6})$$

Q est le flux de chaleur par conduction défini par :

$$Q = - \kappa_e \text{grad} (T) \quad (\text{I.7})$$

T étant la température en kelvin (K),

κ_e étant le coefficient de conductivité thermique efficace en W.m/K.

$$\kappa_e = \kappa + \frac{\mu_t}{\sigma_t} \quad (\text{I.8})$$

S'agissant de fluide compressible, ce système doit être complété par une loi d'état ; on utilisera celle des gaz parfaits :

$$P = \frac{R}{M} \rho T \quad (\text{I.9})$$

où M est la masse molaire en kg/mol,

R est la constante des gaz parfait ($R = 8.31434 \text{ J/mol/K}$)

Enfin, une relation supplémentaire liant l'enthalpie et la température est nécessaire:

$$dh = C_p dT \quad \text{avec} \quad C_p = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{R}{M} \quad (\text{I.10})$$

où C_p est la chaleur spécifique à pression constante en J/kg/K (elle peut dépendre d'autres variables comme la température par exemple).

γ le rapport des chaleurs spécifiques, pour l'air $\gamma = 1.4$

I-1-4 Ecoulement turbulent

Dans le cas d'écoulements turbulents, il faut ajouter les 2 équations du modèle k-epsilon :

$$\rho \left[\frac{\partial k}{\partial t} + \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}}(k) \right] = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \overrightarrow{\text{grad}}(k) \right] + S_k \quad (\text{I.11})$$

$$\rho \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{U} \overrightarrow{\text{grad}}(\epsilon) \right] = \text{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \overrightarrow{\text{grad}}(\epsilon) \right] + S_\epsilon \quad (\text{I.12})$$

où k est l'énergie turbulente (m^2/s^3) et ϵ son taux de dissipation (m^2/s^3), S_k et S_ϵ leurs termes de production définis par :

$$S_k = P + G - \rho \epsilon \quad (\text{I.13})$$

$$S_\epsilon = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} [P + (1 - C_{\epsilon 3}) G] - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (\text{I.14})$$

P étant le taux de production de la turbulence modélisé par :

$$P = 2 \mu_t \text{tr} \left[(\text{grad}(\vec{U}) + \text{grad}(\vec{U}))^2 \right] - \frac{2}{3} \rho k \text{div}(\vec{U}) - \frac{2}{3} \mu_t (\text{div}(\vec{U}))^2 \quad (\text{I.15})$$

et G le terme de flottabilité modélisé par :

$$G = - \frac{\mu_t}{\sigma_t} g \vec{\nabla} \rho \quad \text{si l'écoulement est dilatable} \quad (\text{I.16})$$

et

$$G = - \frac{\mu_t}{\sigma_t \rho} \vec{\nabla} P \vec{\nabla} \rho \quad \text{si l'écoulement est compressible.} \quad (\text{I.17})$$

La viscosité turbulente est donnée en fonction de l'énergie et du taux de dissipation via:

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\epsilon} \quad (\text{I.18})$$

Les constantes du modèle sont celles du modèle standard/8,9/ :

écoulement	σ_t	σ_ϵ	σ_k	C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	$C_{\epsilon 3}$
dilatable	0.7	1.3	1	0.09	1.44	1.92	1 if $G < 0$ 0 if $G > 0$
compressible	0.7	1.3	1	0.09	1.44	1.92	0

Remarque 1 : D'autres modélisations existent pour le modèle k-epsilon appliqué aux écoulements compressibles. Une étude bibliographique suivie de tests numériques sur Mélodie a été réalisée au département ADE /10/. Ils ont pu mettre en évidence des écarts de solutions non négligeables pour des écoulements compressibles où le nombre de Mach est supérieur à 3. Par ailleurs, des calculs de jets libres supersoniques ont été réalisés par le département AMV sur le code ESTET, en adaptant le modèle k-epsilon standard aux écoulements compressibles /11/.

Remarque 2 : La prise en compte du modèle de turbulence k-epsilon avec l'hypothèse de Boussinesq /15/ introduit un terme supplémentaire (ou plutôt son gradient) à droite de l'équation de quantité de mouvement qui est:

$$-\frac{2}{3} \rho k$$

Pour les écoulements incompressibles, ce terme est généralement inclus dans la variable pression, si bien que la pression P calculée traditionnellement contient en réalité la vraie pression statique P_s (où son écart à une pression de référence) augmentée de $\frac{2}{3} \rho k$. Pour des écoulements compressibles, on a généralement besoin de la vraie pression statique P_s (pour le calcul de la masse volumique par la loi d'état par exemple). Le plus simple consiste à traiter ce terme supplémentaire (ou plutôt son gradient) de manière explicite dans l'équation de quantité de mouvement (cf III.2).

I-2 METHODE NUMERIQUE

Toutes les équations de transport précédemment définies sont résolues de la même façon en utilisant un algorithme instationnaire, écrit sous la forme générale suivante:

$$\rho^n \left[\frac{G^{n+1} - G^n}{\delta t} + \vec{U}^n \vec{\nabla} G^n \right] = \text{div} (K_G^n \vec{\nabla} G^{n+1}) + S_G^{n+1} \quad (\text{I.19})$$

où δt représente le pas de temps et G^n , G^{n+1} les valeurs des variables (vitesses, énergie et dissipation turbulente, scalaires) aux pas de temps n et $(n+1)$. La discrétisation en temps des équations scalaires de convection-diffusion-termes sources ainsi que les équations de Navier

Stokes est réalisée à l'aide d'un schéma à pas fractionnaires. L'équation (I.19) peut s'écrire en introduisant une variable intermédiaire \hat{G} :

$$\rho^n \left[\frac{(G^{n+1} - \hat{G}) + (\hat{G} - G^n)}{\delta t} + \vec{U}^n \vec{\nabla} G^n \right] - \text{div} (K_G^n \vec{\nabla} G^{n+1}) - S_G^{n+1} = 0 \quad (\text{I.20})$$

L'équation précédente est séparée en deux étapes :

- une étape de convection

$$\rho \left[\frac{(\hat{G} - G^n)}{\delta t} + \vec{U}^n \vec{\nabla} G^n \right] = 0 \quad (\text{I.21})$$

- une étape de diffusion termes-sources

$$\rho \left[\frac{(G^{n+1} - \hat{G})}{\delta t} \right] - \text{div} (K_G \vec{\nabla} G^{n+1}) - S_G^{n+1} = 0 \quad (\text{I.22})$$

L'étape de convection est résolue par une méthode de caractéristiques explicite inconditionnellement stable, écrite sous forme forte, décrite en /12/ et testée en éléments finis /13/. L'étape de diffusion-termes sources pour les scalaires et les vitesses (2.11) est résolue à l'aide d'un schéma d'Euler implicite. D'ores et déjà, pour simplifier la présentation, on traitera les équations pour le cas laminaire, le cas turbulent n'apportant pas de modifications au niveau de la méthode numérique. Par ailleurs, les tests réalisés ont négligé la contribution du gradient transposé et du terme de seconde viscosité dans l'équation du bilan de quantité de mouvement, mais une prise en compte explicite de ces termes ne devrait poser aucune difficulté majeure.

En résumé, après l'étape de convection, on doit résoudre le système suivant :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} + \text{div} (\rho^n \vec{U}^{n+1}) = 0 \quad (\text{I.23})$$

$$\rho^n \left[\frac{\vec{U}^{n+1} - \hat{U}}{\delta t} \right] = - \text{grad} (P^{n+1}) + \text{div} [\mu \text{grad} (\vec{U}^{n+1})] + \vec{S}_U^{n+1} \quad (\text{I.24})$$

$$\rho^n \left[\frac{h^{n+1} - \hat{h}}{\delta t} \right] = \frac{\delta P}{\delta t} + \vec{U}^n \text{grad}(P^{n+1}) + \text{div} [\kappa \text{grad} (h^{n+1})] + S_h^{n+1} \quad (\text{I.25})$$

$$\rho^n = \frac{P^n M}{R T^n} \quad (\text{I.26})$$

où le symbole δ représente l'incrément entre 2 pas de temps successifs n et $n+1$.

II - ALGORITHME

On présente dans ce qui suit l'algorithme permettant de résoudre le système constitué des équations I.23 à I.26. On signalera les termes spécifiques au compressible en les soulignant en pointillés. On pourra se référer avec profit à /1/ pour plus de détails.

On utilise un schéma à pas fractionnaires permettant de découper un système difficile à résoudre globalement en plusieurs petits systèmes plus faciles à résoudre.

Par la suite, le symbole δ représentera l'incrément par rapport au pas de temps n .

- Bilan explicite

Il s'agit de prendre en compte de manière explicite la contribution de tous les opérateurs dans les équations de transport et de vérifier si l'incrément explicite obtenu tend vers zéro, auquel cas, la convergence serait obtenue.

$$\frac{\rho^n}{\delta t} \delta h^e = S_h^n + \text{div} [\kappa \text{grad} (h^n)] + \frac{\rho^n}{\delta t} \delta \hat{h} + \bar{U}^n \text{grad} (P^n) \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\rho^n}{\delta t} \delta \bar{U}^e = \bar{S}_U^n + \text{div} [\mu \text{grad} (\bar{U}^n)] + \frac{\rho^n}{\delta t} \delta \hat{\bar{U}} - \text{grad} (P^n) \quad (\text{II.2})$$

où le symbole e représente la valeur explicite : $\delta G^e = G^e - G^n$, et le symbole chapeau la valeur convectée : $\delta \hat{G} = \hat{G} - G^n$

- Diffusion implicite :

On calcule sous forme incrémentale la contribution implicite de l'opérateur de diffusion.

$$\frac{\rho^n}{\delta t} \delta h^d = \text{div} [\kappa \text{grad} (\delta h^d)] + \frac{\rho^n}{\delta t} \delta h^e \quad (\text{II.3})$$

$$\frac{\rho^n}{\delta t} \delta \bar{U}^d = \text{div} [\mu \text{grad} (\delta \bar{U}^d)] + \frac{\rho^n}{\delta t} \delta \bar{U}^e \quad (\text{II.4})$$

en retenant toutefois que l'incrément enthalpique réel δh sur un pas de temps est donné par :

$$\rho^n \frac{\delta h}{\delta t} = \rho^n \frac{\delta h^d}{\delta t} + \frac{\delta P}{\delta t} + \theta \vec{U}^n \text{grad} (\delta P) \quad \text{avec } \theta \in [0,1] \quad (\text{II.5})$$

où le symbole d est relatif à la valeur diffusée: $\delta G^d = G^d - G^n$.

- Etape de pression-continuité

Il s'agit de prendre en compte la contribution implicite de l'opérateur gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement ainsi que l'équation de continuité. Pour cela, on linéarise la variation de masse volumique sur un pas de temps par rapport aux variations de pression et d'enthalpie sur ce même pas de temps :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h^n \frac{\delta P}{\delta t} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_P^n \frac{\delta h}{\delta t} \quad (\text{II.6})$$

Remarque: Si la masse volumique dépendait d'autres variables comme les fractions massiques d'espèces, dans le cas d'un mélange de plusieurs gaz par exemple, il faudrait également la linéariser suivant ces grandeurs.

Compte tenu de la relation (II.5), on a :

$$\frac{\delta \rho}{\delta t} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{\delta t} \delta P + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_P^n \left[\frac{\delta h^d}{\delta t} + \theta \frac{\vec{U}^n}{\rho^n} \text{grad} (\delta P) \right] \quad (\text{II.7})$$

où c est la célérité définie par :

$$\frac{1}{c^2} = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_h^n + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_P^n \right] \quad (\text{II.8})$$

Dans un premier temps (étape de prédiction), on prendra $\theta = 0$. dans ce qui suit.

Il reste alors le système :

$$\frac{\rho^n}{\delta t} \delta \vec{U} + \text{grad} (\delta P) = \frac{\rho^n}{\delta t} \delta \vec{U}^d \quad (\text{II.9})$$

$$\frac{1}{\delta t c^2} \delta P + \text{div} (\rho^n \vec{U}^{n+1}) = f_h \quad (\text{II.10})$$

où

$$f_h = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p \frac{\delta h^d}{\delta t} \quad (II.11)$$

En combinant les équations (II.9) et (II.10) et en considérant la quantité de mouvement:

$$\bar{Q}^{n+1} = \rho^n \bar{U}^{n+1}, \quad \bar{Q}^n = \rho^n \bar{U}^n, \quad \bar{Q}^d = \rho^n \bar{U}^d \quad (II.12)$$

on obtient le système en pression suivant :

$$\frac{1}{\delta t} \frac{1}{c^2} \delta P - \delta t \operatorname{div} (\operatorname{grad} (\delta P)) = f_h - \operatorname{div} (\bar{Q}^d) \quad (II.13)$$

- Etape de réactualisation

L'incrément de pression δP sur un pas de temps étant connu, on réactualise les vitesses et l'enthalpie à partir des relations (II.9) et (II.5) avec cette fois $\theta = 1$.

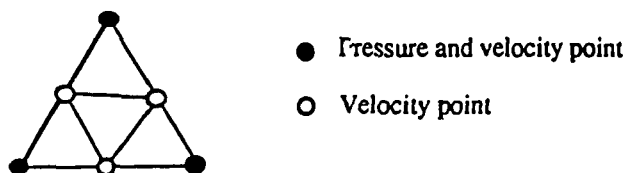
$$\delta \bar{U} = \delta \bar{U}^d - \frac{\delta t}{\rho^n} \operatorname{grad} (\delta P) \quad (II.14)$$

$$\delta h = \delta h^d + \frac{\delta P}{\rho^n} + \delta t \frac{\bar{U}^n}{\rho^n} \operatorname{grad} (\delta P) \quad (II.15)$$

A convergence vers un état stationnaire, tous les incréments tendent vers zéro.

III - FORMULATION VARIATIONNELLE

La formulation variationnelle porte sur les équations (I.23), (I.24) et (I.25). Le maillage utilisé pour la discrétisation en espace est constitué de triangles mixtes P1-isoP2 à 6 noeuds. La pression varie linéairement entre les sommets de l'élément, tandis que la vitesse varie linéairement dans les sous-triangles.



Cet élément respecte la condition inf-sup qui garantit l'unicité de la solution en pression (élimination des modes parasites sur le champ de pression) pour des écoulements incompressibles. Ce même choix pour traiter des écoulements compressibles tient au fait que l'algorithme décrit au chapitre 2 peut prédire des écoulements où peuvent coexister des zones de compressibilité et des zones d'incompressibilité, sans engendrer de problème numérique (en tout cas pour des nombre de Mach pas "trop forts" (< 2), contrairement aux méthodes spécifiques aux écoulements compressible (MUSCL, etc) qui dégénèrent mal vers l'incompressible. Par ailleurs, cet élément autorise les techniques d'agglomération des matrices de masse ("mass-lumping"), très utiles pour implémenter et coupler facilement des termes sources raides, ou pour inverser ces matrices de masse [6]. La formulation variationnelle et les résolutions des systèmes induits utiliseront de manière systématique cette technique (dans la mesure du possible évidemment).

III-1 FORMULATIONS INTEGRALE ET MATRICIELLE

En prenant en compte l'équation (II.7) où $\theta = 0$, en multipliant classiquement l'équation (I.23) par les fonctions de base pression ψ et les équations (I.24) et (I.25) par les fonctions de base vitesses φ , en intégrant sur le volume et en intégrant par partie l'opérateur de diffusion et l'opérateur de gradient sur la pression [6], on a les équations intégrales suivantes :

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\delta P}{c^2 \delta t} + \text{div} (\rho^n \bar{U}^{n+1}) \right] \psi_k d\Omega = \int_{\Omega} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_P^n \left(\frac{\delta h^d}{\delta t} \right) \psi_k d\Omega \quad (\text{III.1})$$

$$\int_{\Omega} \frac{\rho^n}{\delta t} \bar{U}^{n+1} \varphi_j d\Omega + \int_{\Omega} \mu \text{grad} (\bar{U}^{n+1}) \text{grad} \varphi_j d\Omega - \int_{\Omega} P^{n+1} \text{grad} \varphi_j d\Omega =$$

(III.2)

$$\int_{\Omega} (\bar{S}_U^{n+1} + \frac{\rho^n}{\delta t} \hat{U}) \varphi_j d\Omega - \int_r (P^{n+1} - \mu \text{grad}(\bar{U}^{n+1})) \varphi_j d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} \frac{\rho^n}{\delta t} h^{n+1} \varphi_j d\Omega + \int_{\Omega} \kappa \text{grad}(h^{n+1}) \text{grad} \varphi_j d\Omega =$$

(III.3)

$$\int_{\Omega} \frac{\delta P}{\delta t} \varphi_j d\Omega + \int_{\Omega} \bar{U}^n \text{grad}(P^{n+1}) \varphi_j d\Omega + \int_r \kappa \text{grad}(h^{n+1}) \vec{n} \varphi_j d\Omega + \int_{\Omega} (\frac{\rho^n}{\delta t} \hat{h} + S_h^{n+1}) \varphi_j d\Omega$$

On décomposant la pression P sur la base des fonctions pression ψ et les vitesses et l'enthalpie sur la base des fonctions vitesse φ et on introduit les matrices et vecteurs suivants :

- Matrice de masse de type vitesse

$$M_{\alpha ij}^v = \int_{\Omega} \alpha \varphi_i \varphi_j d\Omega \quad (III.4)$$

- Matrice de masse de type pression

$$M_{\beta ij}^p = \int_{\Omega} \beta \psi_i \psi_j d\Omega \quad (III.5)$$

- Matrice de diffusion (où x représente les vitesses U ou l'enthalpie h)

$$D_{ij}^x = \int_{\Omega} \mu_x \text{grad}\varphi_i \text{grad}\varphi_j d\Omega \quad (III.6)$$

- Matrice de "gradient"

$$B_{jk}^i = - \int_{\Omega} \text{grad}\varphi_j \psi_k d\Omega \quad (III.7)$$

- Matrice divergence

$$B_{jk}^i = - \int_{\Omega} \text{grad}(\rho \varphi_j) \psi_k d\Omega \quad (III.8)$$

en introduisant la notion de quantité de mouvement, cette matrice peut se mettre sous la forme:

$$B' = B.R \quad (III.9)$$

où R est une matrice diagonale dimensionnée au nombre de points vitesse dont les coefficients sont les valeurs de la masse volumique en chaque point vitesse du maillage.

- F_h le vecteur dimensionné au nombre de points vitesse de coefficient

$$F_{h,k} = \int_{\Omega} - \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p^n \left(\frac{\delta h^d}{\delta t} \right) \psi_k d\Omega \quad (III.10)$$

Tous les coefficient (a,b,...) intervenant dans les formes intégrales précédentes sont considérés comme connus localement en chaque noeuds vitesse.

Les équations (I.23), (I.24) et (I.25) précédemment écrites sous forme forte au chapitre I s'écrivent alors sous forme matricielle :

- Bilan de masse

$$M_{\frac{1}{c^2 \delta t}}^p \delta P^{n+1} - B R \bar{U}^{n+1} = F_h^{n+1} \quad (III.11)$$

- Bilan de quantité de mouvement

$$M_{\frac{\rho}{\alpha}}^y \bar{U}^{n+1} + D^u \bar{U}^{n+1} + B^t P^{n+1} = \bar{\phi}_u^{n+1} \quad (III.12)$$

$$\text{où } \bar{\phi}_u^{n+1} = M_1^y \bar{S}_U^{n+1} + M_{\frac{\rho}{\delta t}}^y \widehat{U} + \text{Termes de bord} \quad (III.13)$$

- Bilan d'enthalpie

$$M_{\frac{\rho}{\alpha}}^y H^{n+1} + D^h H^{n+1} = M_{\frac{\rho}{\alpha}}^y \delta P + M_1^y F_p^{n+1} + \phi_H^{n+1} \quad (III.14)$$

$$\text{où } F_p^{n+1} = \bar{U}^n \text{ grad } P^{n+1} \quad (III.15)$$

$$\text{et } \phi_H^{n+1} = M_1^y S_H^{n+1} + M_{\frac{\rho}{\delta t}}^y \widehat{H} + \text{Termes de bord} \quad (III.16)$$

L'algorithme présenté au chapitre II peut être maintenant présenté sous la forme matricielle suivante :

- Bilan explicite

$$\frac{M_p^v}{\delta t} \delta H^e = \phi_h^{n+1} - D^h H^n - M_1^v F_p^n \quad (III.17)$$

$$\frac{M_p^v}{\delta t} \delta \bar{U}^e = \phi_u^{n+1} - D^v \bar{U}^n - B^t P^n \quad (III.18)$$

Il s'agit d'un point de vue numérique et informatique de ne réaliser que des produits matrice-vecteur.

- Diffusion implicite

$$\frac{M_p^v}{\delta t} \delta H^d + D^h H^d = \frac{M_p^v}{\delta t} \delta H^e \quad (III.19)$$

$$\frac{M_p^v}{\delta t} \delta \bar{U}^d + D^v \bar{U}^d = \frac{M_p^v}{\delta t} \delta \bar{U}^e \quad (III.20)$$

Cette étape est facile et économique à résoudre en utilisant comme solveur un gradient conjugué préconditionné par la diagonale.

- Pression-continuité

$$\frac{M_p^v}{\delta t} \delta \bar{U}^{n+1} + B^t \delta P^{n+1} = \frac{M_p^v}{\delta t} \delta \bar{U}^d \quad (III.21)$$

$$\frac{M_1^p}{c^2 \delta t} \delta P^{n+1} - B R \bar{U}^{n+1} = F_h^{n+1} \quad (III.22)$$

En considérant les vecteurs quantités de mouvements Q^n, Q^{n+1} et Q^d respectivement aux pas de temps $n, n+1$ et après d'étape de diffusion définies par :

$$\bar{Q}^n = \rho^n \bar{U}^n, \quad \bar{Q}^{n+1} = \rho^n \bar{U}^{n+1}, \quad \bar{Q}^d = \rho^n \bar{U}^d \quad (III.23)$$

ce système peut s'écrire de la façon suivante :

$$M_{\perp}^v \frac{\delta \bar{Q}^{n+1}}{\delta t} + B^t \delta P^{n+1} = M_{\perp}^v \delta \bar{U}^d \quad (\text{III.24})$$

$$M_{\perp}^p \frac{\delta P^{n+1}}{c^2 \delta t} - B \bar{Q}^{n+1} = F_h^{n+1} \quad (\text{III.25})$$

en combinant

$$\left[B \left(M_{\perp}^v \right)^{-1} B^t + M_{\perp}^p \right] \delta P^{n+1} = F_h^{n+1} + B Q^d \quad (\text{III.26})$$

Remarque: l'intérêt de la décomposition de la matrice B' suivant l'équation III.9 (et donc de faire apparaître la quantité de mouvement) est d'obtenir un système symétrique en pression facile à inverser par une méthode itérative de type gradient conjugué où seule la notion de produit matrice-vecteur est nécessaire.

- Réactualisation des vitesses et de l'enthalpie

L'incrément de pression étant connu, on réactualise les vitesses sous forme matricielle :

$$\delta \bar{U}^{n+1} = \delta \bar{U}^d - \left(M_{\perp}^v R \right)^{-1} B^t \delta P^{n+1} \quad (\text{III.27})$$

Par contre, l'enthalpie peut être réactualisée sous forme forte, en ayant préalablement calculé localement le gradient de δP en chaque point selon la relation (II.14). δP étant connu aux noeuds pression uniquement, sa valeur aux noeuds milieux des éléments est calculée linéairement, de manière à réactualiser également l'enthalpie en ces noeuds (l'enthalpie étant définies aux noeuds vitesse). Le calcul local de grad (δP) est décrit dans le paragraphe suivant.

III-2 CALCUL DES TERMES LIÉS A LA COMPRESSIBILITE

Il s'agit de montrer de quelle façon on peut calculer les termes supplémentaires intervenant dans les équations précédentes, liés au phénomène de compressibilité du fluide. On rappelle que ces termes ont été soulignés en pointillés.

III-2-1 Bilan explicite enthalpique

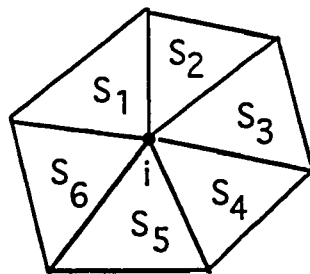
Dans le bilan explicite de l'enthalpie (III.17) apparait le terme $M_1^y F_p^n$ où F_p^n est un vecteur de coefficient générique :

$$F_{p,i}^n = (U)_i (\text{grad } P)_i \quad (\text{III.28})$$

l'indice i correspondant à un point vitesse du maillage. Le problème ici est d'évaluer le gradient de pression local sur tous les noeuds vitesse. En effet, la pression est ici une variable P_1 , c'est à dire linéaire sur un élément.; son gradient sera donc P_0 , c'est à dire constant par élément. L'information devant être nécessairement sur le maillage vitesse, il faut projeter le gradient de pression. Pour cela 3 méthodes ont été testées.

a - Première méthode

Calcul du gradient de pression sur chaque élément (calcul analytique facilement vectorisable sur Cray), puis calcul nodal par pondération de la surface de chaque élément auquel appartient le noeud.



$$(\vec{\nabla} P)_i = \frac{\sum_j S_j (\vec{\nabla} P)_j}{\sum_j S_j} \quad (\text{III.29})$$

L'avantage de cette technique est son faible coût CPU car elle ne nécessite pas d'inversion de système comme les 2 méthodes suivantes.

b - Deuxième méthode

Projection sur la maillage pression P_1 , puis moyenne linéaire pour la valeur aux noeuds milieu. En considérant le gradient de pression comme une variable \vec{X} et en la décomposant sur la base des fonctions pression ψ_k :

$$\vec{X} = \vec{\nabla}P = \sum_k (\vec{\nabla}P)_k \psi_k = \sum_k (\vec{X})_k \psi_k \quad (\text{III.30})$$

en pondérant par les fonctions de base pression et en intégrant sur le domaine, on obtient le système dimensionné au nombre de point pression :

$$M_1^p \vec{X} = \vec{S}_p \quad (\text{III.31})$$

où M_1^p est la matrice de masse pression topologique de terme générique :

$$(M_1^p)_{kj} = \int_{\Omega} \psi_k \psi_j d\Omega \quad (\text{III.32})$$

et \vec{S}_p le vecteur second membre de coefficient :

$$(\vec{S}_p)_j = \sum_k \int_{\Omega} P_k \vec{\nabla} \psi_k \psi_j \quad (\text{III.33})$$

On a ici un système facilement inversible par une méthode de gradient conjugué préconditionné par la diagonale car la matrice de masse pression est symétrique, définie positive à diagonale dominante.

c - Troisième méthode

C'est la même démarche que la précédente sauf que l'on projette directement sur le maillage vitesse. On a alors en décomposant sur la base des fonctions vitesses :

$$\vec{X} = \vec{\nabla}P = \sum_i (\vec{\nabla}P)_i \varphi_i = \sum_i (\vec{X})_i \varphi_i \quad (\text{III.34})$$

En pondérant par les fonctions de base vitesse et en intégrant sur le domaine, on obtient le système dimensionné au nombre de point vitesse :

$$M_1^v \vec{X} = \vec{S}_v \quad (\text{III.35})$$

où M_1^v est la matrice de masse vitesse topologique de terme générique :

$$(M_1^v)_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega \quad (\text{III.36})$$

et \vec{S}_v le vecteur second membre de coefficient :

$$(\vec{S}_v)_j = \sum_i \int_{\Omega} P_i \vec{\nabla} \varphi_i \varphi_j \quad (\text{III.37})$$

Comme précédemment, on a un système à inverser, facilement inversible par une méthode de gradient conjugué préconditionné par la diagonale car la matrice de masse vitesse est symétrique, définie positive à diagonale dominante.

Les 3 méthodes ont été testées lors des applications. Il n'est pas apparu de différences sensibles des résultats, si ce n'est que les méthodes 2 et 3 semblent diffuser légèrement le gradient de pression.

C'est pourquoi la première, c'est à dire la plus simple a été retenue.

Remarque : En fait, le terme générique du vecteur $M_1^v F_p^n$ de l'équation (III.14) est :

$$\int_{\Omega} (\vec{U} \text{ grad } P)_i \varphi_j \, d\Omega \quad (\text{III.38})$$

et pourrait être directement calculé sans introduire de produit matrice-vecteur donc de calcul local de grad P. Cependant la cohérence qui vise à traiter les termes de type masse de part et d'autre de l'équation ne serait pas respectée, du fait que l'on utilise le mass-lumping pour les termes instationnaires (matrice $\frac{M_p^v}{\delta t}$). Un traitement analogue à ce vecteur impose une

décomposition en un produit matrice de masse vitesse masslumpée-vecteur (de coefficients générique $(\vec{U} \text{ grad } P)_i$, i étant un noeuds vitesse). Par ailleurs, la mise à jour sous forme forte de l'enthalpie selon l'équation (II.14) impose le calcul local de grad δP .

III-2-2 Calcul des coefficients

Tous les coefficients faisant intervenir la masse volumique comme :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_p^n, \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h^n \quad \text{ou la célérité } c$$

sont calculés sous forme forte de manière explicite sans aucune formulation variationnelle, par la loi d'état. Ainsi pour un gaz parfait :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_p^n = -\frac{\rho^n}{R T^n} \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_h^n = \frac{\rho^n}{P^n} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{\gamma R T^n} \quad (\text{III.39})$$

Ces coefficients sont toujours calculés sur les noeuds vitesse.

III-2-3 Etape de pression-continuité

L'étape de pression continuité fait apparaître un terme supplémentaire de propagation en terme de matrice de type masse pression $M_{\frac{1}{c^2 \delta t}}^P$ (équation III.26) de terme générique :

$$\left(\frac{M_{\frac{1}{c^2 \delta t}}^P\right)_{kj} = \int_{\Omega} \frac{1}{c^2 \delta t} \psi_k \psi_j d\Omega = \int_{\Omega} \left(\sum_i \left(\frac{1}{c^2 \delta t_i}\right) \varphi_i\right) \psi_k \psi_j d\Omega \quad (\text{III.40})$$

Cette matrice n'offre aucune particularité numérique si ce n'est sa présence. En pratique elle peut être mass-lumpée. Le coefficient $1/(c^2 \delta t)$ est considéré comme discrétisé sur les noeuds vitesse Ici, on n'utilise pas la technique "matrice de masse pression topologique x vecteur" du fait que le vecteur en question est ici constitué par les coefficients $\left(\frac{1}{c^2 \delta t_i}\right)$ définis aux noeuds vitesse, alors que la matrice est dimensionnée aux nombre de noeuds pression.

Remarque : d'un point de vue numérique et informatique, la présence de cette matrice, qui plus est mass-lumpée, renforce la diagonale du système en pression à résoudre. Le conditionnement de la matrice globale à inverser est donc meilleur que par rapport à un écoulement incompressible, ce qui a pour conséquence une diminution du nombre d'itérations dans le solveur, donc un coût CPU moindre. Ceci est d'autant plus vrai que le pas de temps est petit. Toutefois, dans l'état actuel de l'algorithme, il semblerait qu'un pas de temps "trop petit" conduise à des instabilités numériques, surtout en présence de forts gradients (voir le cas de la tuyère dans le chapitre VI).

Le second terme lié à l'aspect compressible dans cette étape est le vecteur F_h^{n+1} de terme générique :

$$F_h^{n+1}{}_k = \int_{\Omega} -\left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_p^n \frac{\delta h^d}{\delta t} \psi_k d\Omega \quad (\text{III.41})$$

En toute rigueur, ce terme devrait être calculé sous la forme d'un produit matrice de masse pression masslumpée-vecteur pour la même raison que précédemment, où apparaîtrait le

vecteur de coefficient $-\left(\frac{\partial \rho}{\partial h}\right)_P^n \frac{\delta h^d}{\delta t}$ dimensionné au nombre de point pression. Or ce coefficient est connu sur chaque point vitesse. Une solution consisterait à projeter ce coefficient sur le maillage pression. Toutefois, on a préféré opter pour la simplicité et calculer directement le vecteur. Ce choix semble justifié compte tenu de la faible influence de ce terme, du moins pour les applications réalisées à ce jour et pour un gaz parfait. Par contre, dans les cas où c'est la dilatation thermique qui induit l'écoulement, comme dans les disjoncteurs par exemple, ce terme peut être prépondérant ; Il serait alors intéressant de voir l'influence du mode de calcul de cette expression.

III-2-4 Bilan explicite

On a vu en I-1-4 que dans le cas d'écoulements turbulents, apparaît un terme supplémentaire en $\frac{2}{3} \rho k$ qui était ajouté à la pression statique :

$$P^n = P_s^n + \left(\frac{2}{3} \rho k\right)^n \quad (\text{III.42})$$

Dans le cas d'écoulements compressibles, il est préférable de dissocier ces 2 quantités, la notion de pression réelle en tant que telle étant importante. Le plus simple consiste à traiter de manière explicite ce terme dans le bilan explicite écrit en (III.18) en écrivant :

$$B^l P^n = B^l P_s^n + B_v^l \left(\frac{2}{3} \rho k\right)^n \quad (\text{III.43})$$

où les matrices B^l et B_v^l ont pour terme générique :

$$B_{jk}^l = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \varphi_j \psi_k \, d\Omega \quad \text{et} \quad B_{jl_v}^l = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \varphi_j \varphi_l \, d\Omega \quad (\text{III.44})$$

La distinction de ces 2 matrices vient du fait que la pression et la grandeur $\frac{2}{3} \rho k$ n'ont pas la même discrétisation, P étant défini sur le maillage pression, ρ et k sur le maillage vitesse; leur gradient ne se calcule donc pas de la même façon. On peut même préférer calculer directement le vecteur

$$\int_{\Omega} \sum_j \left[\left(\frac{2}{3} \rho k\right)_j \vec{\nabla} \varphi_j \right] \varphi_l \, d\Omega \quad (\text{III.45})$$

plutôt que de passer par un produit matrice-vecteur.

IV- APPLICATIONS

IV-1 TUYERE PLANE

Il s'agit de calculer l'écoulement transsonique dans une tuyère plane, pour laquelle une solution analytique monodimensionnelle stationnaire existe sur l'axe de symétrie. Ce cas a fait l'objet de précédents calculs avec un code Euler de l'ONERA par le département Machines /14/, puis avec le logiciel aux différences finies Mélodie /1/.

La géométrie et le maillage sont donnés par la figure 1. Le maillage est constitué de 1785 éléments, de 3804 points vitesse et 1010 noeuds pression. Notons que l'on a fait en sorte qu'il n'y ait pas de maille distordue qui pourrait poser des problèmes numériques dans l'étape de pression-continuité. Les solutions numériques et analytiques sont comparées au niveau de l'axe de symétrie.

Pour la description du comportement théorique de la tuyère, on pourra se référer à /1/.

3 cas ont été passés: deux cas avec taux de détente imposé entre l'entrée et la sortie et présence de choc et un cas avec sortie libre, où l'écoulement est transsonique sans choc.

Premier cas: Taux de détente de 0.858

Les conditions du calcul sont les suivantes :

- état initial uniforme (vitesse nulle, pression uniforme = P_s , température uniforme de 20 °C)
- gaz constitué d'air supposé parfait
- calcul laminaire
- conditions aux limites sur la vitesse :
glissement en paroi
- conditions aux limites sur la température :
flux nul en paroi et en sortie
température d'arrêt imposée en entrée ($T_a = 20$ °C)
- conditions aux limites sur la pression

pression d'arrêt imposée en entrée : $P_a = 1$ bar
pression statique imposée en sortie : $P_s = 0.858$ bar

La pression statique et la température absolue s'expriment analytiquement en fonction du nombre de Mach local M :

$$P = P_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}} \quad T = T_a \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1}$$

Le pas de temps retenu est de 5.10^{-6} s ; des valeurs plus petites du pas de temps ont conduit à des instabilités sur la pression qui faisaient diverger le calcul.

On a établi un choc droit étalé sur deux mailles en amont de la solution analytique. L'accord entre les 2 solutions semble correct avec toutefois un écart plus important en aval du choc probablement dû à un problème de conservativité du schéma de convection (méthode des caractéristiques).

Les figures 2 et 3 montrent la comparaison entre la solution analytique et les résultats numériques concernant le Nombre de Mach, la pression statique, la température, le débit, l'impulsion et la pression d'arrêt. La figure 4 montre les champs de Pression, de Température et de nombre de Mach.

Indépendamment de la qualité des résultats, il est intéressant de constater que l'on retrouve les mêmes comportements que ceux obtenus avec le code Mélodie (notamment au niveau du choc) mais avec des contraintes de maillages moins sévères du fait de l'utilisation des éléments finis (notamment près des parois).

Deuxième cas: Taux de détente de 0.75

Les conditions de calculs sont les mêmes que précédemment sauf que la pression de sortie est cette fois de 0.75 bar.

Des résultats analogues au premier calcul, du moins qualitativement sont obtenus. Toutefois, il a fallu dans ce cas augmenter le pas de temps pour ne pas avoir d'instabilité. On a pris ici $7.5 \cdot 10^{-6}$.

Les figures 5 et 6 montrent la comparaison entre la solution analytique et les résultats numériques concernant le Nombre de Mach, la pression statique, la température, le débit, l'impulsion et la pression d'arrêt. La figure 7 montre les champs de Pression, de Température et de Nombre de Mach.

Troisième cas: sortie libre

Les conditions du calcul sont toujours les mêmes que précédemment (notamment les conditions initiales) sauf que la sortie est considérée comme étant libre (pression constante le long d'une caractéristique sortante) :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

Dans ce cas la solution analytique stationnaire correspond à un écoulement transsonique sans choc, la sortie étant supersonique.

Le calcul instationnaire se comporte bien tant que l'onde de choc se développe puis se propage dans la tuyère jusqu' à la sortie, mais finit par devenir instable et donner des valeurs de pression négatives lorsque l'onde veut sortir. Visiblement la condition de sortie libre retenue ou la manière dont on l'applique ne suffit pas à évacuer l'onde. Par contre un calcul avec des conditions initiales différentes ne permettant pas la création du choc (par exemple variation linéaire de la pression entre l'entrée et la sortie) tend de manière correcte vers la solution stationnaire, la condition de sortie retenue s'avérant cette fois satisfaisante pour maintenir la solution stationnaire avec vitesse supersonique en sortie.

Les figures 8 et 9 montrent la comparaison entre la solution analytique et les résultats numériques concernant le Nombre de Mach, la pression statique, la température, le débit, l'impulsion et la pression d'arrêt. La figure 10 montre les champs de Pression, de Température, et de Nombre de Mach.

Remarque : Il est intéressant de noter que la condition à la limite retenue pour la sortie libre donne un bon comportement en différences finies, (en ce sens qu'elle permet d'évacuer l'onde de choc), mais pas en éléments finis. Ceci peut être dû à deux raisons qui se conjuguent : d'abord, l'écoulement est quasiment monodimensionnel en sortie, puis, l'application explicite de la condition écrite sous la forme:

$$p^{n+1} = p^n - \delta t c^n \frac{dp^n}{dn}$$

au point i pour un maillage structuré donne un niveau de pression "cohérent" sur tous les noeuds de sortie, en ce sens que le terme $\frac{dp^n}{dn}$ est calculé sur une épaisseur de maille constante

Ainsi, les forts gradients de pression "arrivant" sur la dernière maille peuvent être absorbés en même temps du fait de l'unidimensionalité de l'écoulement. Ceci n'est pas le cas en non structuré, compte tenu de l'irrégularité possible des mailles. Un test intéressant en différences finies serait d'appliquer cette condition dans le cas d'une sortie réellement bidimensionnelle (avec onde de choc sortant de manière oblique par exemple).

IV-2 EXPERIENCE CLARINETTE (Canal avec un rétrécissement)

L'expérience CLARINETTE a été mise en oeuvre au département AMV. Il s'agit d'un écoulement d'air dans une conduite rectangulaire avec un rétrécissement. L'écoulement est turbulent et subsonique avec des nombres de Mach maximum de 0.5 environ au rétrécissement.

La géométrie est donnée par la figure suivante:

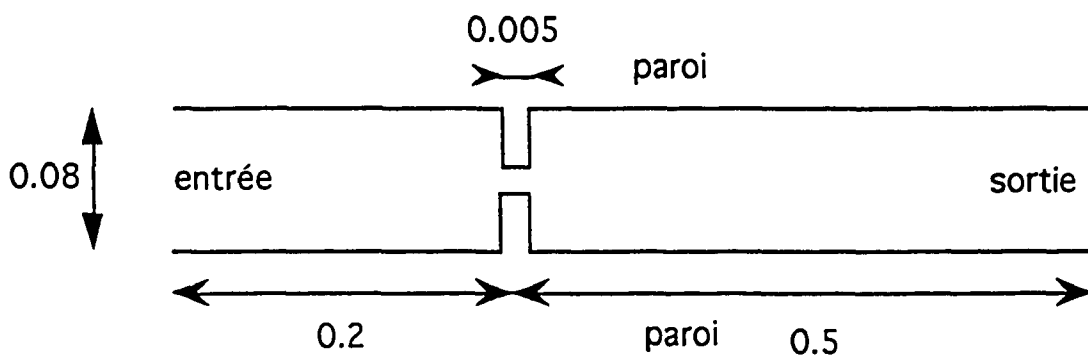


Figure 11 : Description de la géométrie (données exprimées en mètres)

Les conditions du calcul sont les suivantes:

- état initial uniforme (vitesse nulle, pression uniforme égale à 1 bar, température uniforme de 20 °C)

- gaz constitué d'air supposé parfait

- calcul turbulent

- conditions aux limites sur la vitesse :

vitesse imposée en entrée : $V_e = 28\text{m/s}$

frottement en paroi (loi logarithmique) avec conditions de Gosman

- conditions aux limites sur la température :
 - flux nul en paroi et en sortie
 - température imposée en entrée ($T_a = 20 \text{ °C}$)

- conditions aux limites sur la pression
 - pression statique imposée en sortie : $P_s = 1 \text{ bar}$
 - ou gradient tangentiel du gradient normal nul soit

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right) = 0$$

- pas de temps local

Pour ce calcul, les 2 types de conditions en pression conduisent à des résultats analogues.

La figure 12 montre le maillage retenu : il est constitué de 2128 éléments, 4469 noeuds vitesse et 1171 noeuds pression

Les figures 13 à 15 montrent les comparaisons entre la solution numérique et les mesures expérimentales concernant les composantes longitudinales et axiale de la vitesse, ainsi que les niveaux de l'énergie turbulente pour différents profils.

On retrouve le comportement dissymétrique caractéristique de ce type d'écoulement.

On peut constater que l'on a globalement un bon accord en ce qui concerne les vitesses. Pour l'énergie turbulente, quoique honorables, les résultats sont moins bons, essentiellement dû au modèle de turbulence k-epsilon. La zone de recirculation supérieure est notamment plus courte que celle mesurée lors de l'expérience, le modèle de turbulence ayant tendance à trop diffuser.

La figure 16 montre le champ de vitesse dans le domaine et un détail près du rétrécissement. La figure 17 montrent des champs de grandeurs liées à la compressibilité du fluide tels que Nombre de Mach, Température et Pression, tandis que la figure 18 montrent des champs de grandeurs liées à la turbulence tels que Viscosité, Energie et Taux de dissipation turbulents.

IV-3 TUBE A CHOC

On suppose qu'il est possible de maintenir une différence de pression de part et d'autre d'une membrane placée au centre d'un tube de section constante. A $t=0$, on supprime cette membrane, une onde de détente se développe vers l'aval (vers les faibles pressions), une onde de raréfaction se développe vers l'amont (vers les fortes pressions).

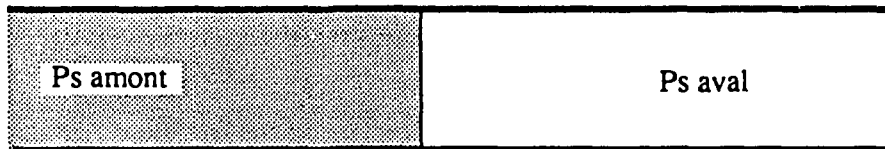


Figure 16 : Tube à Choc état initial

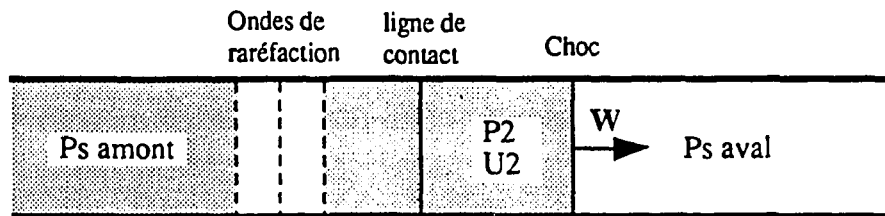


Figure 17 : Tube à Choc pendant la propagation

Ce cas test est 1D, instationnaire et possède une solution analytique /16/ en fluide parfait qui prend la forme suivante suivant les variables :

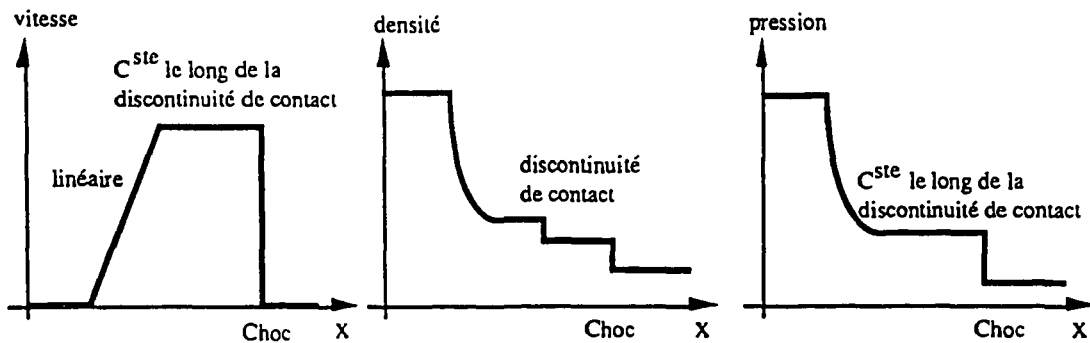


Figure 18 : Tube à choc : solution analytique

Les niveaux des plateaux sont fonction des valeurs de pression aval et amont.

Les conditions de calculs sont les suivantes :

- La longueur du domaine est de 1.8 mètres. On a pris une largeur artificielle de 0.1 mètre. Le maillage est fondé sur des briques de $0.01 \times 0.01 \text{ m}^2$ redécoupées alternativement par leur diagonale. Un détail du maillage est donné sur la figure 19.

- conditions aux limites sur la vitesse : glissement sur les bords.

- conditions aux limites sur la pression : pression statique imposée en sortie : P_s amont (P_i) = 10 ou 100 bars ; P_s aval = 1 bar.

- vitesse initiale uniforme égale à 0. m/s.

- Température initiale uniforme de 20 °C.

- pression initiale uniforme de part et d'autre de l'abscisse $X=0.9$ mètre et valant la pression statique imposée en sortie P_s aval ou P_s amont. On remarquera qu'il est impératif pour ce type d'initialisation d'initialiser également les valeurs de la pression aux nœuds milieux des triangles à la demi somme des valeurs aux nœuds sommet et ce afin de respecter le caractère linéaire de la pression sur un élément et donc d'évaluer correctement la masse volumique.

- gaz constitué d'air supposé parfait.

- calcul laminaire.

- pas de temps constant de $0.125 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ à $2.5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ suivant le taux de détente.

Les résultats du cas test sont présentés sur les figures 20 à 24 pour deux taux de détente : 10 et 100 et pour trois variables qui sont la pression statique relative (pression de référence égale à 1 bar), la masse volumique et la vitesse.

Plusieurs pas de temps ont été imposés afin de mesurer l'influence de ce paramètre sur la qualité des résultats. Les résultats de calculs (courbes en rouge) sont comparées avec les résultats analytiques (courbes pointillées en bleu ou valeurs entre parenthèse).

Qualitativement, que ce soit pour un taux de détente de 10 (écoulement subsonique, figure 20) ou de 100 (écoulement transsonique, figure 21), le code permet de retrouver l'allure des courbes attendues : onde choc, discontinuités de contact observables sur la masse volumique et onde de raréfaction. On constate que le choc reste droit et n'a pas trop tendance à

se diffuser (pour un taux de détente de 10, le choc est étalé sur un maximum de deux ou trois éléments, soit trois ou quatre nœuds pression (figures 20 et 24). On peut cependant remarquer des oscillations importantes (over-shoot) sur la vitesse au droit du choc. Ces oscillations ont tendance à se réduire lorsque le pas de temps est plus fin. De telles oscillations ne sont pas forcément une "erreur de calcul" mais peuvent être tout simplement la réponse naturelle d'un filtre quelconque à une fonction en créneau. Ces oscillations peuvent donc traduire le caractère peu diffusif du schéma aux caractéristiques.

Influence du pas de temps :

L'influence du pas de temps peut être appréciée par comparaison sur les figure 20 et 22 et sur le tableau suivant pour un temps réel de 0,00125 s et un taux de détente de 10 :

pas de temps (s)	Nbre de Courant max.	Δ % d'erreur sur la vitesse	Δ % d'erreur sur la pression statique.	Δ % d'erreur sur la densité
$2.5 \cdot 10^{-5}$	0.8	1 - 8	3	2 - 5
$0.625 \cdot 10^{-5}$	0.18	1	0	1
$0.125 \cdot 10^{-5}$	0.02	4	7	3 - 6

Influence du pas de temps

Si l'on observe la précision en temps du schéma, les meilleurs résultats sont obtenus pour un pas de temps correspondant à un nombre de courant proche de 1 ($dt = 2.5 \cdot 10^{-5}s$). Par contre si l'on ne tient compte que de l'allure des courbes et des valeurs maximales aux différents paliers, on constate que les meilleurs résultats sont obtenus pour un pas de temps de $0.625 \cdot 10^{-5}$ s ce qui correspond à un nombre de courant relativement faible (0.18). Si l'on reprend les calculs avec un pas de temps encore plus fin ($0.125 \cdot 10^{-5}$ s), les résultats s'éloignent de nouveau de la solution théorique que ce soit en temps ou en espace.

En effet les calculs avec un pas de temps de $2.5 \cdot 10^{-5}$ s semblent engendrer une diffusion plus importante des discontinuités mais surtout font apparaître une discontinuité artificielle sur la vitesse au droit de la ligne de contact, cette discontinuité se répercutant alors sur la masse volumique. Ce dernier phénomène avait déjà pu être observé lors des tests effectués sur ESTET. Deux types de solutions avaient pu être apportées : d'une part l'amélioration de l'interpolation en pied de caractéristique et d'autre part l'utilisation d'un schéma prédicteur-correcteur grâce à la technique des sous pas.

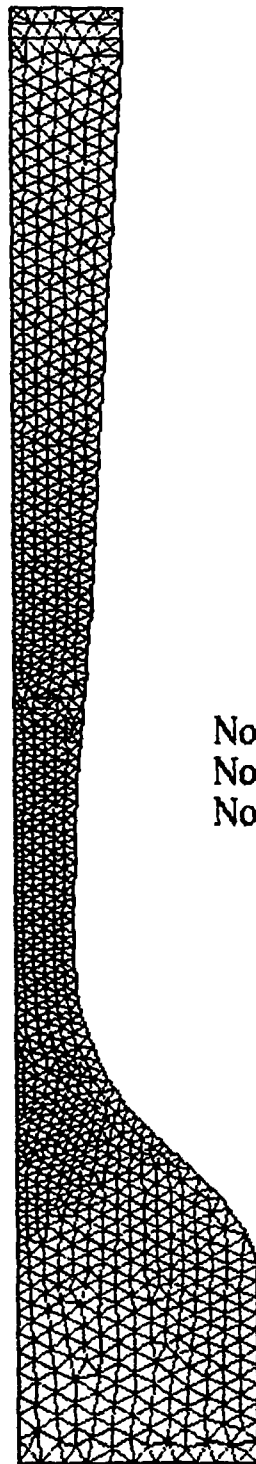
Pour le taux de détente de 100, la comparaison avec les valeurs théoriques est assez médiocre : erreurs de 20 % sur la pression ; 11 % sur la vitesse, 2 à 30 % sur la masse volumique. Par ailleurs la précision en temps du schéma est assez mauvaise. On peut trouver une première explication dans le pas de temps utilisé ($0.125 \cdot 10^{-5}$ s) qui conduit à des valeurs du nombre de courant relativement faibles (0.07). Malheureusement, sans autre amélioration du schéma (mass-lumping de la matrice masse-pression du système en pression de l'équation III.26, prédiction de la masse volumique suivant l'équation de continuité (cf chapitre V)), c'est le pas de temps minimal qui permettait aux calculs de converger.

On retiendra donc de cette étude de sensibilité que la précision en temps du schéma se dégrade quand le Nombre de Courant s'éloigne trop de 1, par contre pour de tel pas de temps une amélioration de l'interpolation en pied de caractéristique ou l'utilisation de sous-pas devrait améliorer les résultats.

Influence des modifications de l'algorithme :

On a cherché à mesurer l'effet de certaines modifications algorithmiques proposées au § V sur les figures 23 et 24. Cette étude de sensibilité a été menée pour le taux de détente de 10 et avec un pas de temps de $0.625 \cdot 10^{-5}$ s. D'une manière générale les deux modifications (mass-lumping de la matrice masse-pression, prédiction de la masse volumique) vont entraîner une certaine diffusion du choc : sur le calcul de référence (figure 24, en haut) le choc est étalé sur 3 nœuds pression alors qu'avec les deux autres méthodes il est étalé sur 4 ou 5 nœuds pression.

On peut constater que le mass-lumping de la matrice masse-pression entraîne une certaine modification de la précision en temps (paradoxalement l'erreur sur le calcul de la vitesse induit une meilleure estimation de la position du choc, par contre la position de la discontinuité de contact, visible sur la masse volumique, est moins bien estimée). Par ailleurs il apparaît une accentuation de l'over-shoot au droit du choc alors qu'avec la "prédiction" de masse volumique, celui-ci est au contraire diminué (figure 23).



Nombre d'éléments : 1785
Nombre de points vitesse : 3804
Nombre de points pression: 1010

Figure 1: Calcul de l'écoulement dans une tuyère plane:
Maillage de triangles P1-isoP2

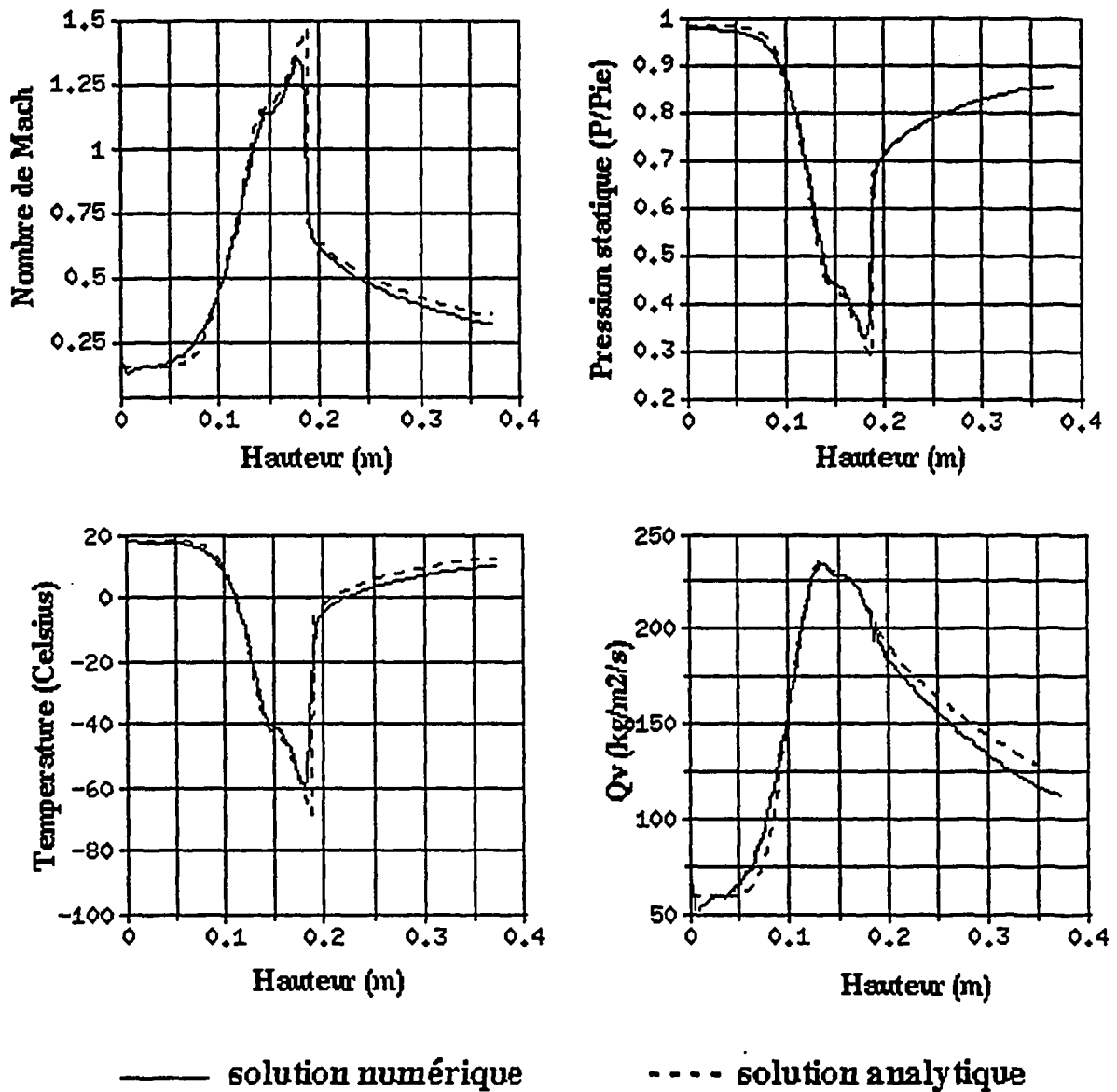
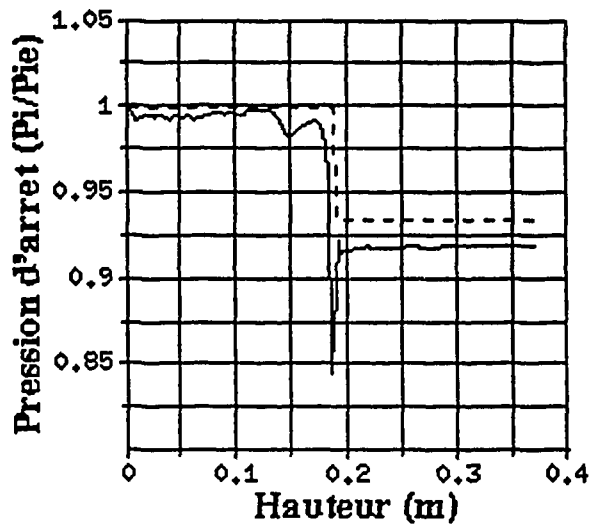
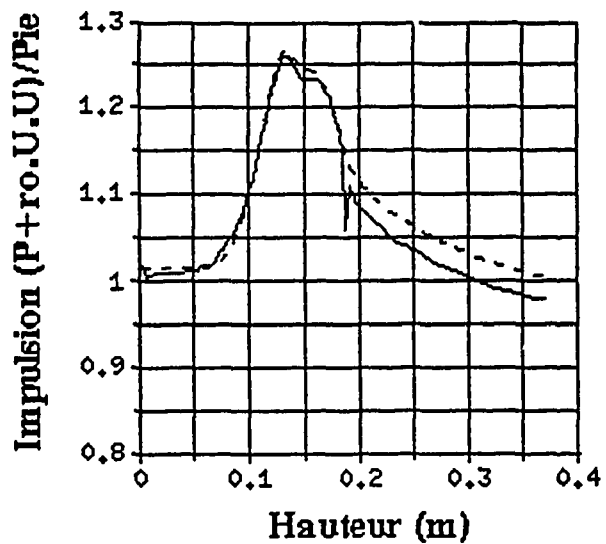


Figure 2: Calcul de l'écoulement dans une tuyère plane ($P_s/P_{ie} = 0.858$):
 profils axiaux du Nombre de Mach, de la Pression,
 de la Température et de la Quantité de mouvement



— solution numérique - - - solution analytique

Figure 3: Calcul de l'écoulement dans une tuyère plane ($P_s/P_{ie} = 0.858$):
Profils axiaux de l'Impulsion et de la Pression d'arrêt

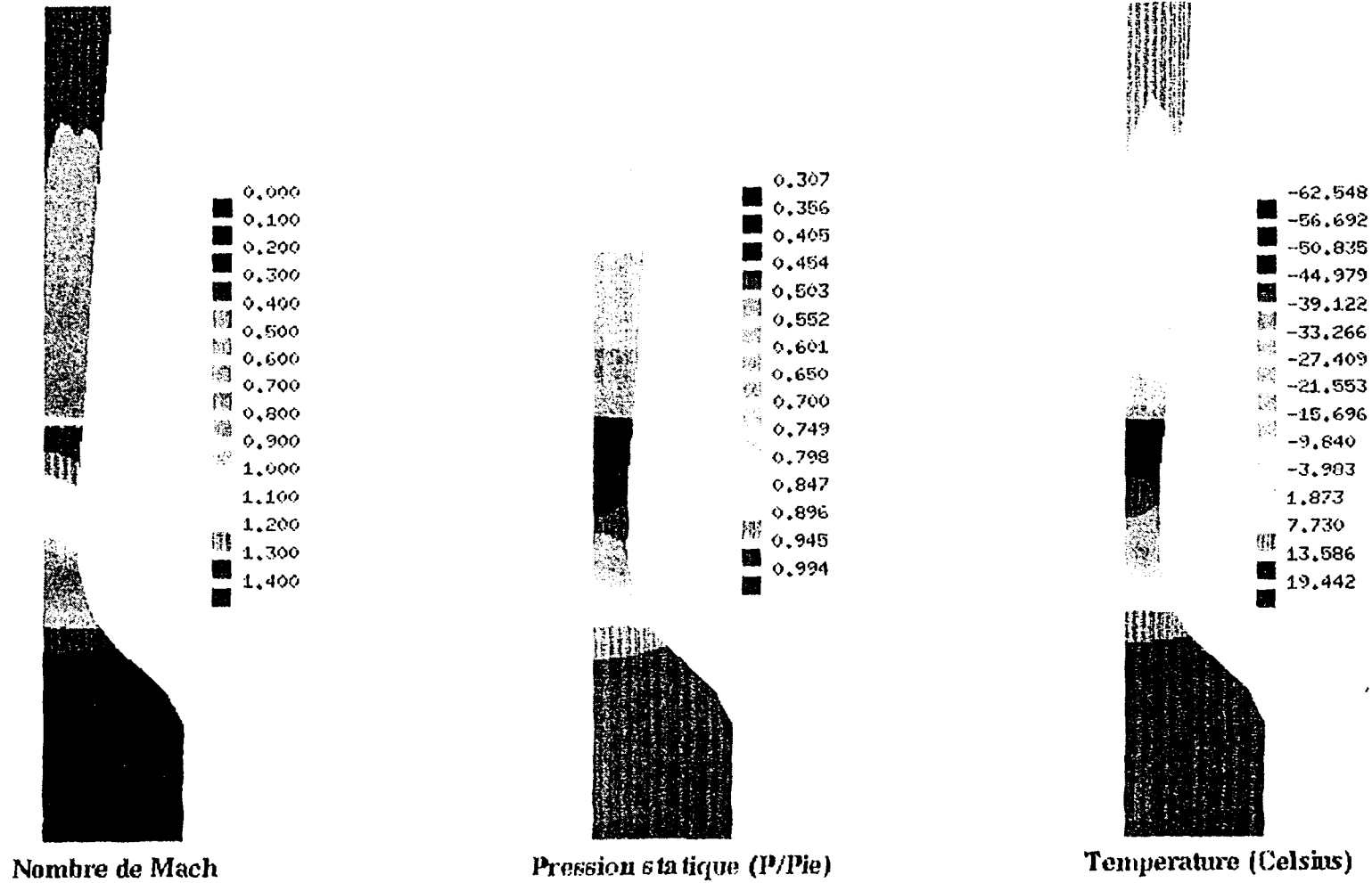
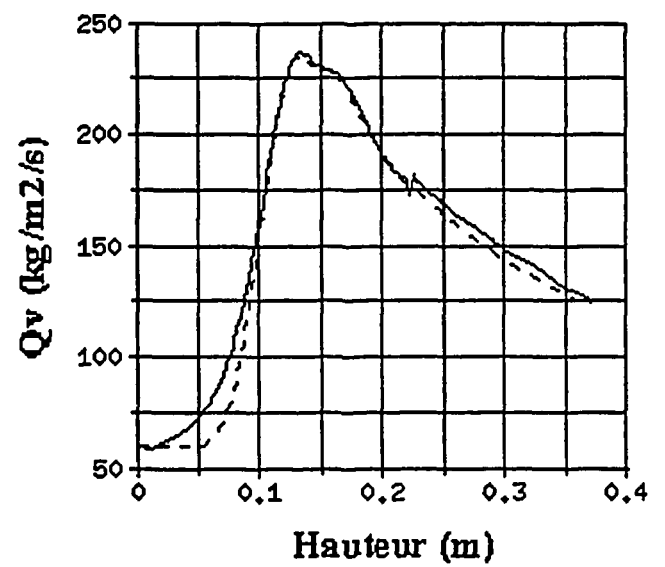
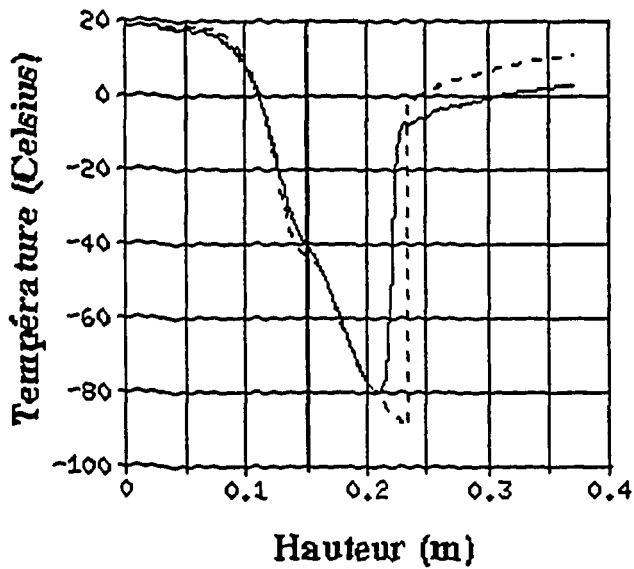
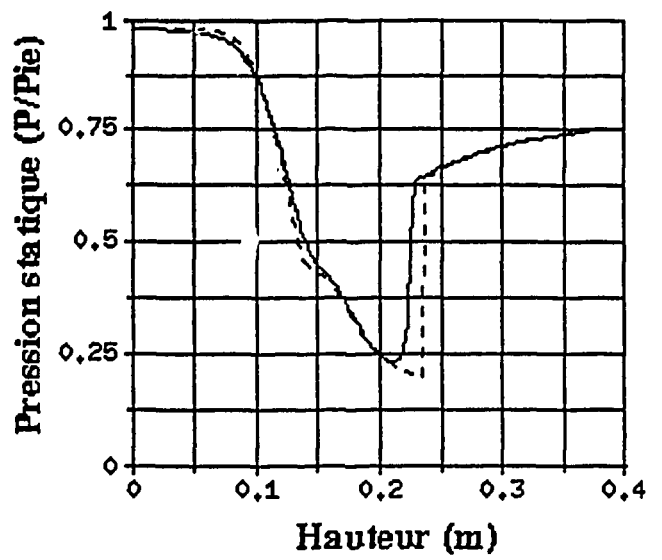
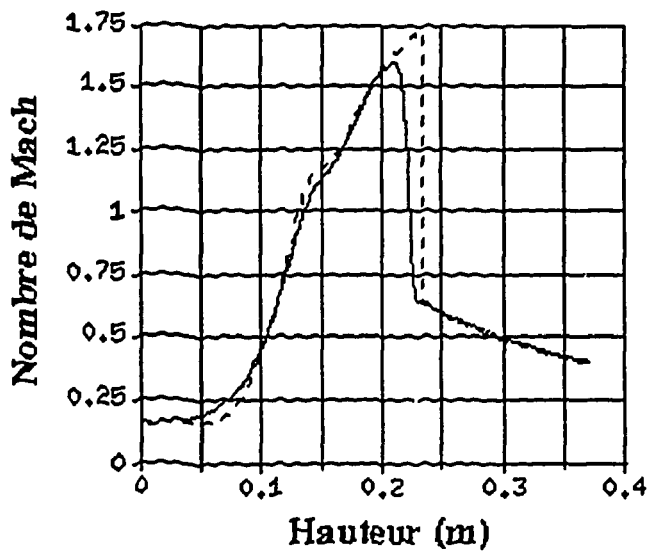
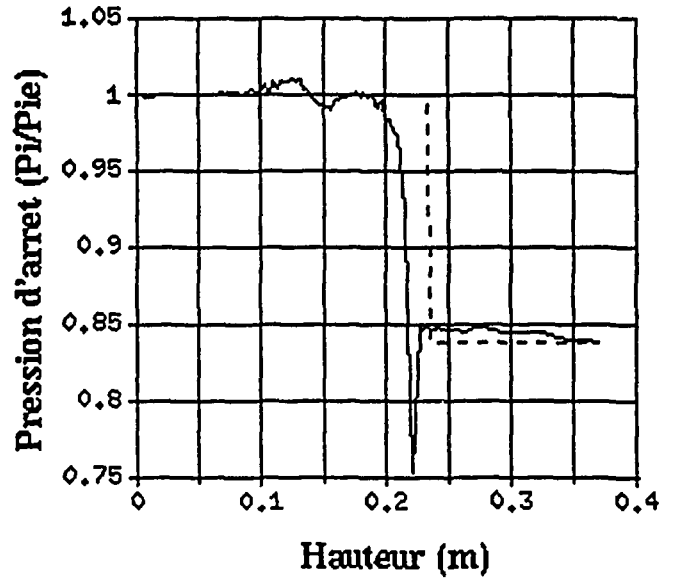
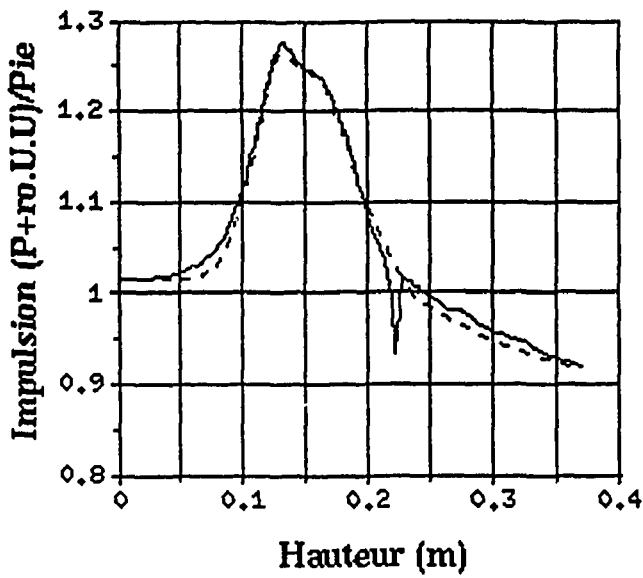


Figure 4: Calcul de l'écoulement dans une tuyère plane ($P_s/P_{ie} = 0.858$) : Champs de Nombre de Mach, de Pression statique et de Température



—— solution numérique - - - - solution analytique

Figure 5: Calcul de l'écoulement dans une tuyère plane ($P_s/P_{ie} = 0.75$)
 profils sur l'axe du Nombre de Mach, de la Pression,
 de la Température et de la Quantité de mouvement



—— solution numérique - - - - solution analytique

Figure 6: Calcul de l'écoulement dans une tuyère plane ($P_s/P_{ie} = 0.75$) :
 ——— Profils axiaux de l'Impulsion et de la Pression d'arrêt

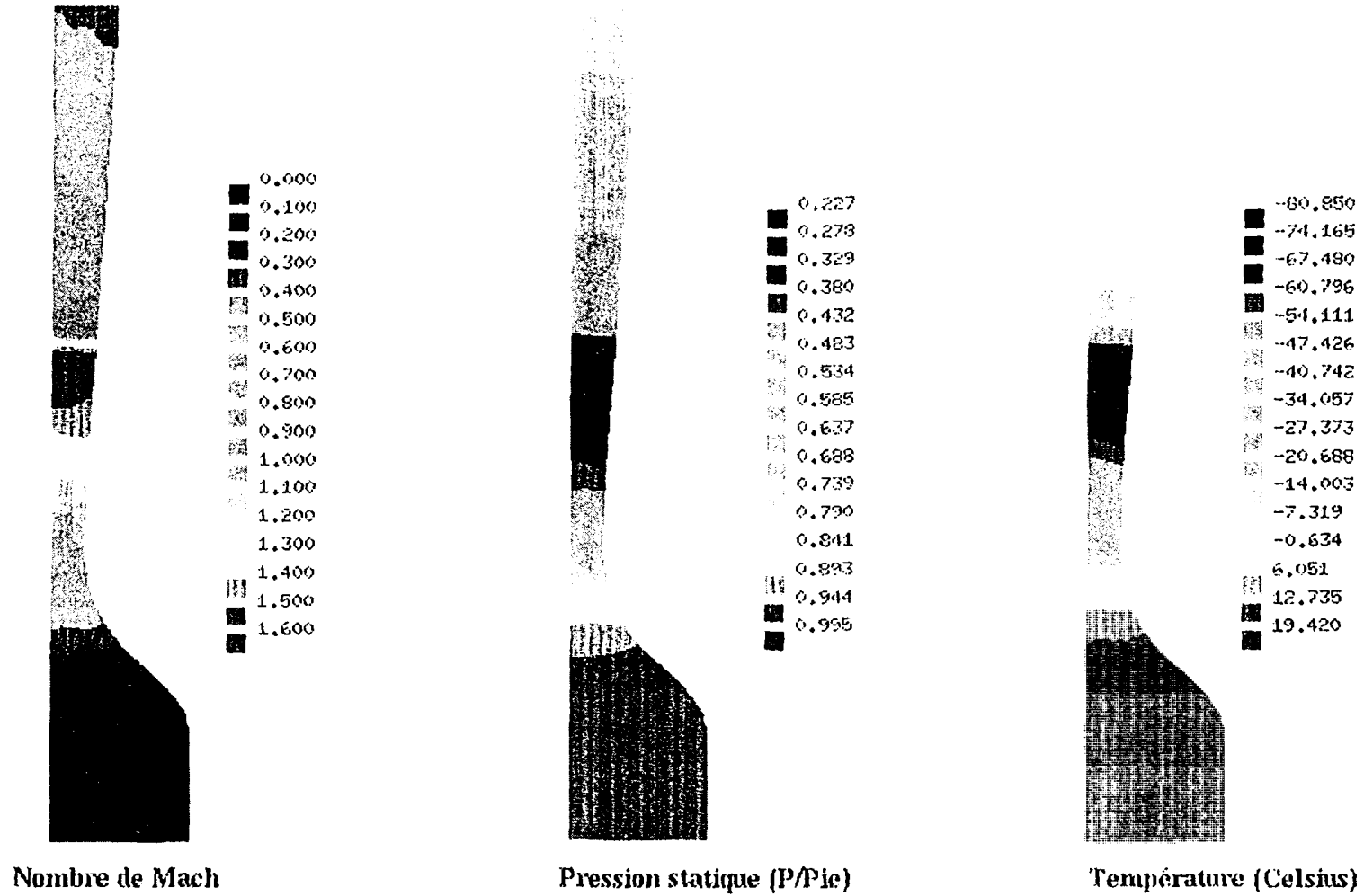
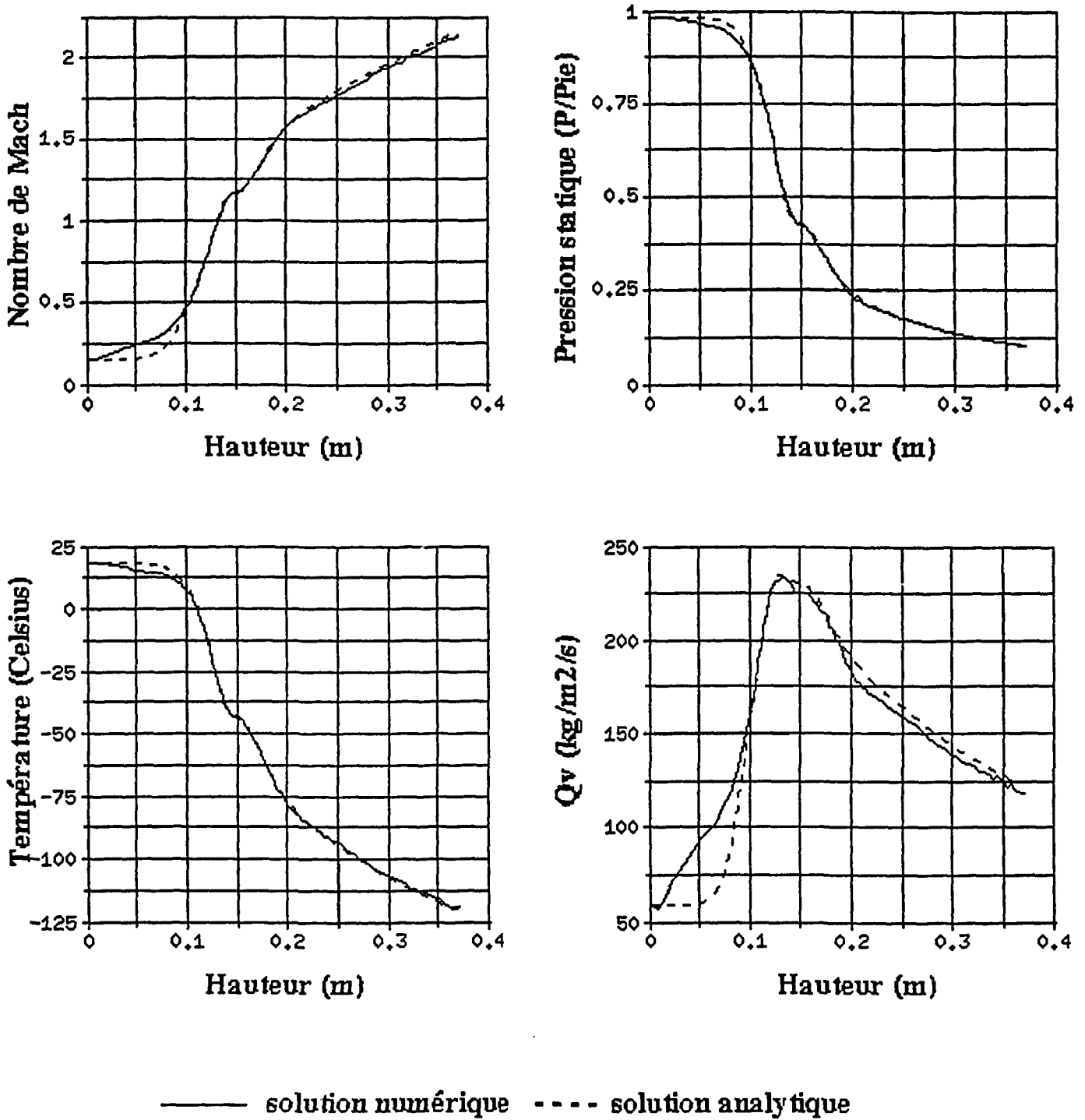
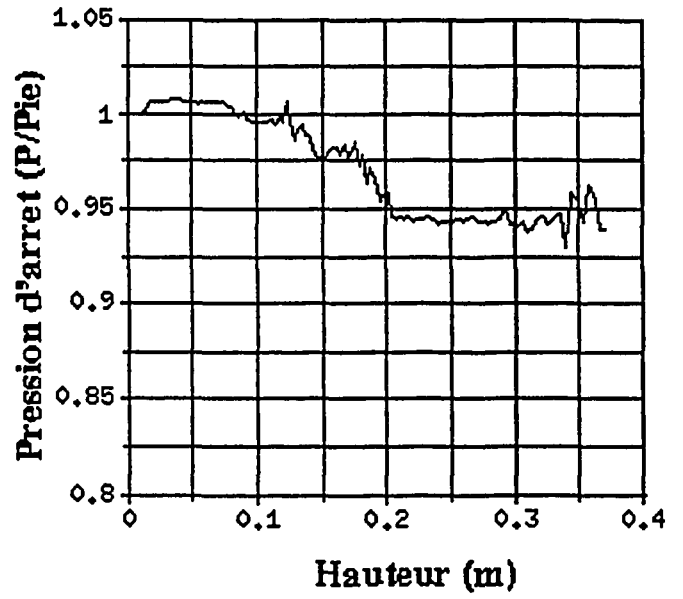
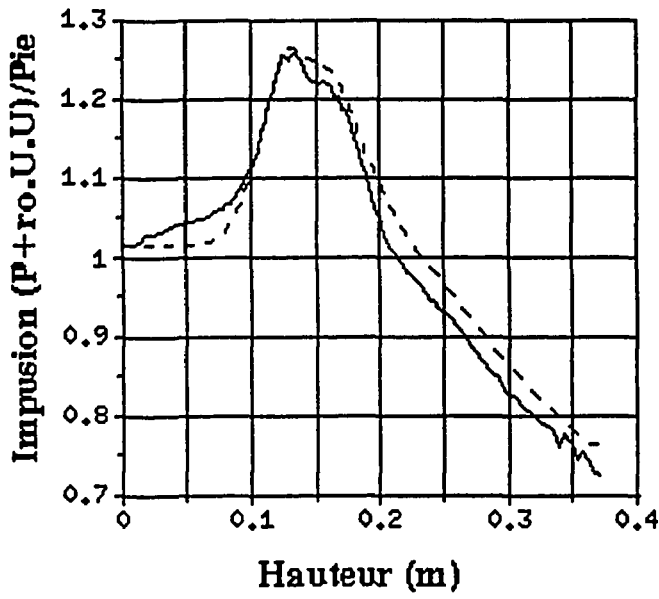


Figure 7: Calcul de l'écoulement dans une tuyère plane ($P_s/P_{ie} = 0.75$) :
 Champs de Nombre de Mach, de Pression et de Température



**Figure 8: Calcul de l'écoulement dans une tuyère plane (sortie libre):
 ——— profils axiaux du Nombre de Mach, de la Pression,
 de la Température et de la Quantité de mouvement**



—— solution numérique - - - - solution analytique

Figure 9: Calcul de l'écoulement dans une tuyère plane (sortie libre):
 ——— profils axiaux de l'Impulsion et de la Pression d'arrêt

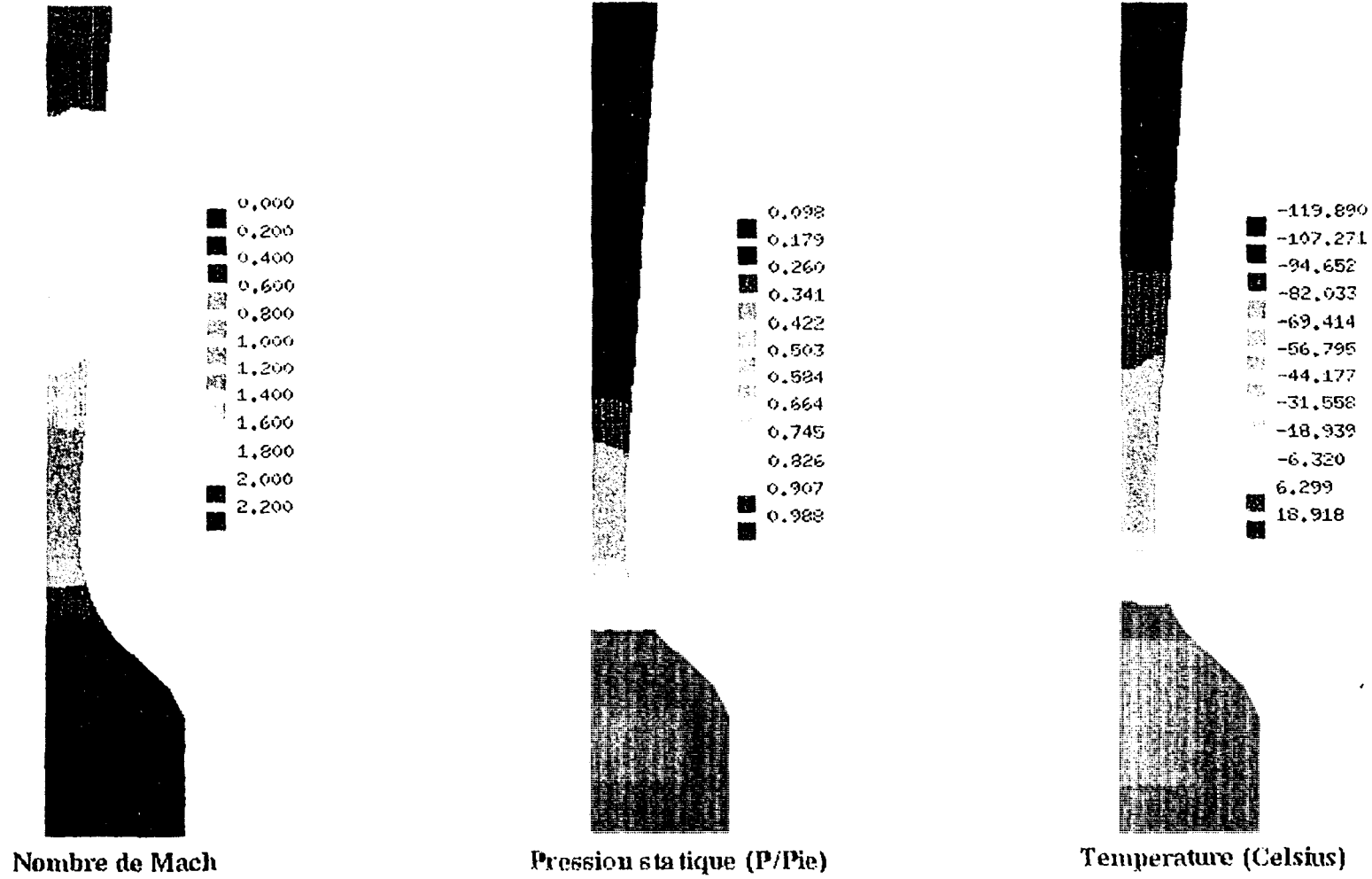
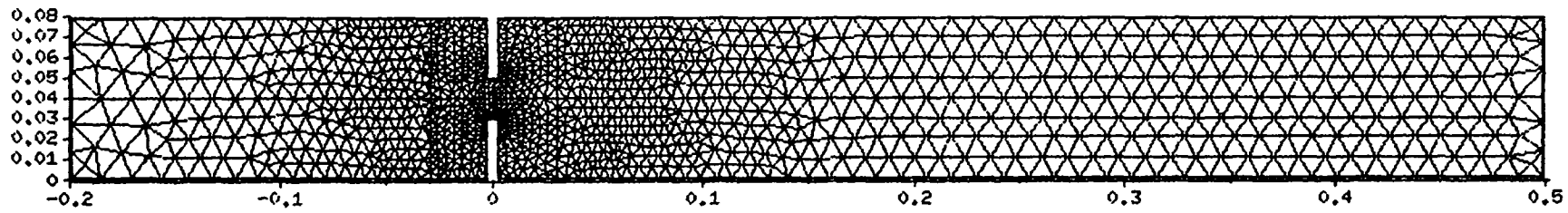
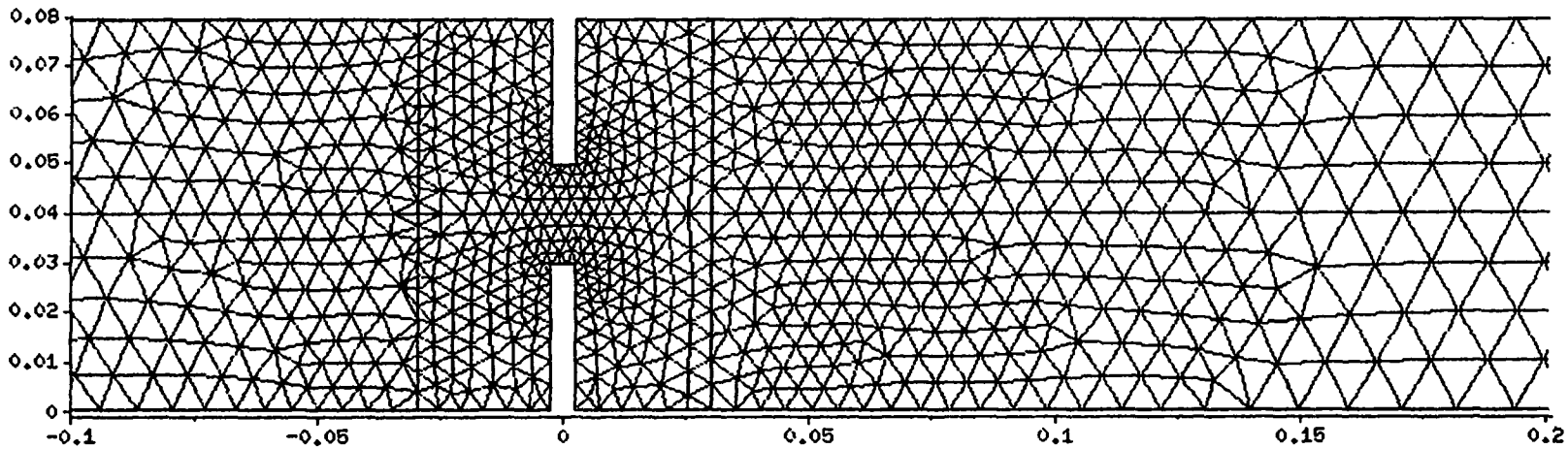


Figure 10 : Calcul de l'écoulement dans une tuyère plane (sortie libre): Champs de Nombre de Mach, de Pression statique et de Température



(a)

42



(b)

Figure 12: Expérience Clarinette: Maillage de triangles P1-isoP2
 ——— (a) Maillage global, (b) Détail au rétrécissement

COMPOSANTE LONGITUDINALE DE LA VITESSE (m/s)

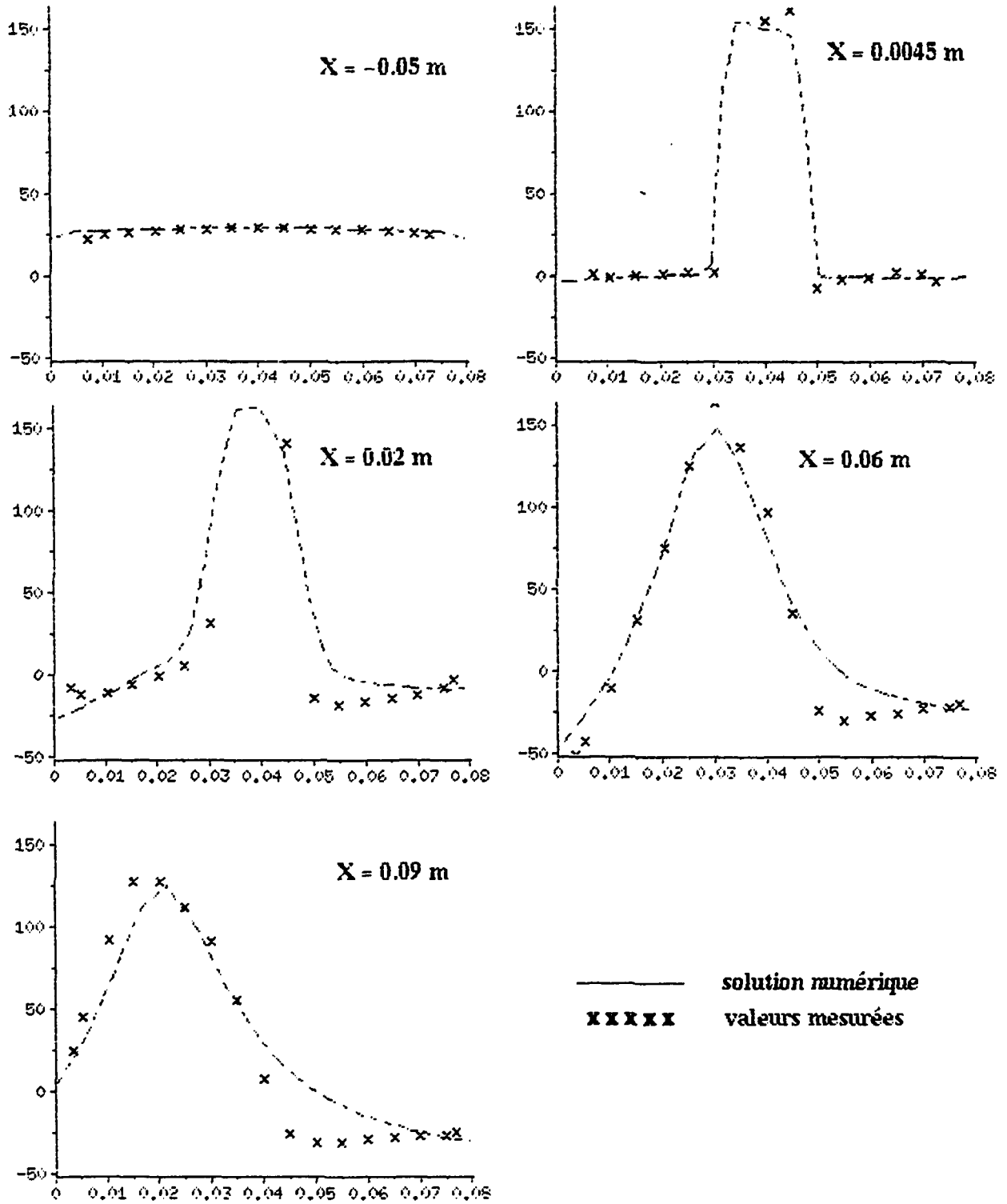


Figure13 a: Expérience Clarinette: comparaison de valeurs calculées et valeurs mesurées de la composante longitudinale de la vitesse: profils verticaux à différentes distances X du rétrécissement

COMPOSANTE LONGITUDINALE DE LA VITESSE (m/s)

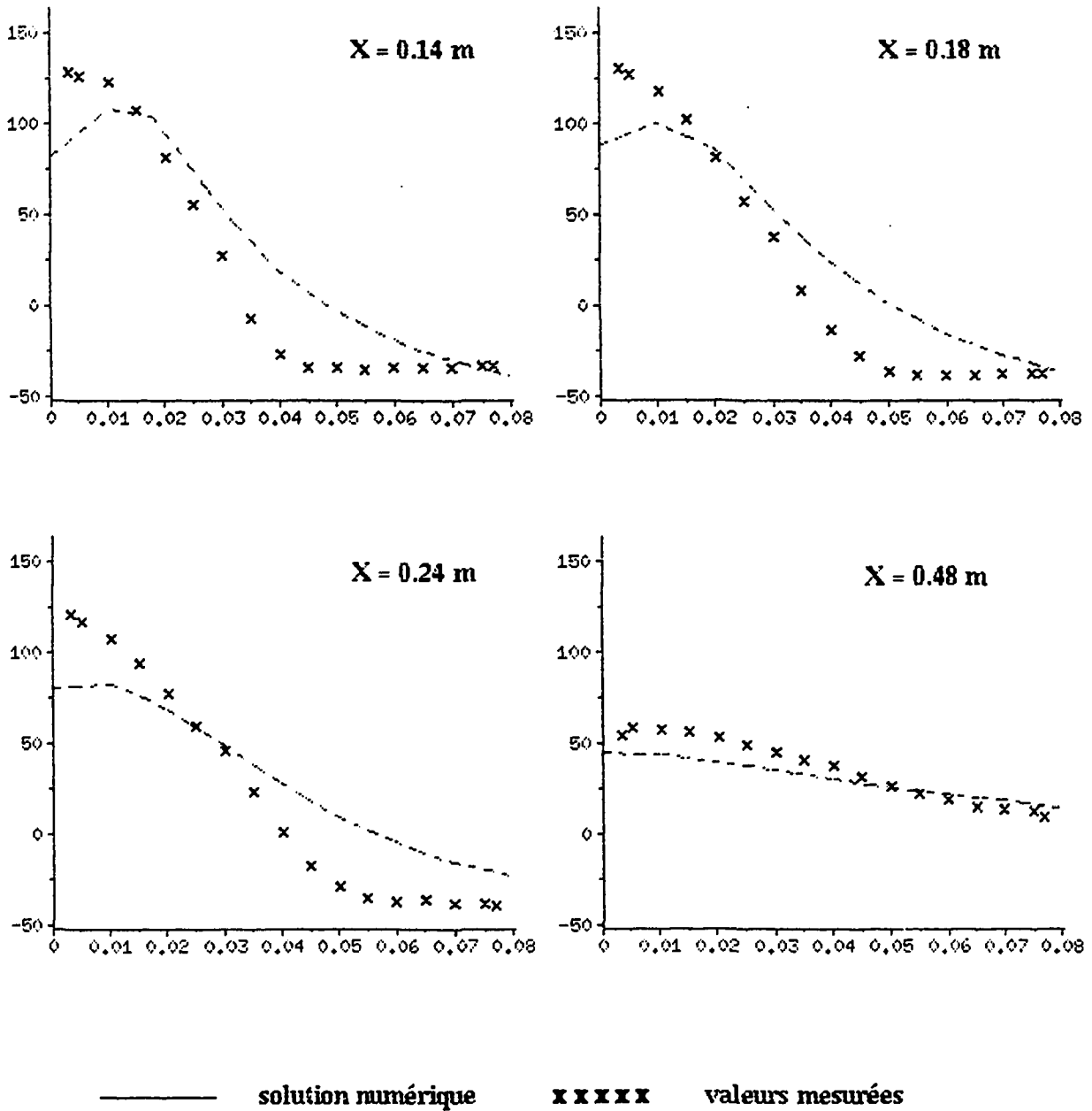


Figure 13 b: Expérience Clarinette: comparaison de valeurs calculées et valeurs mesurées de la composante longitudinale de la vitesse: profils verticaux à différentes distances X du rétrécissement

COMPOSANTE RADIALE DE LA VITESSE (m/s)

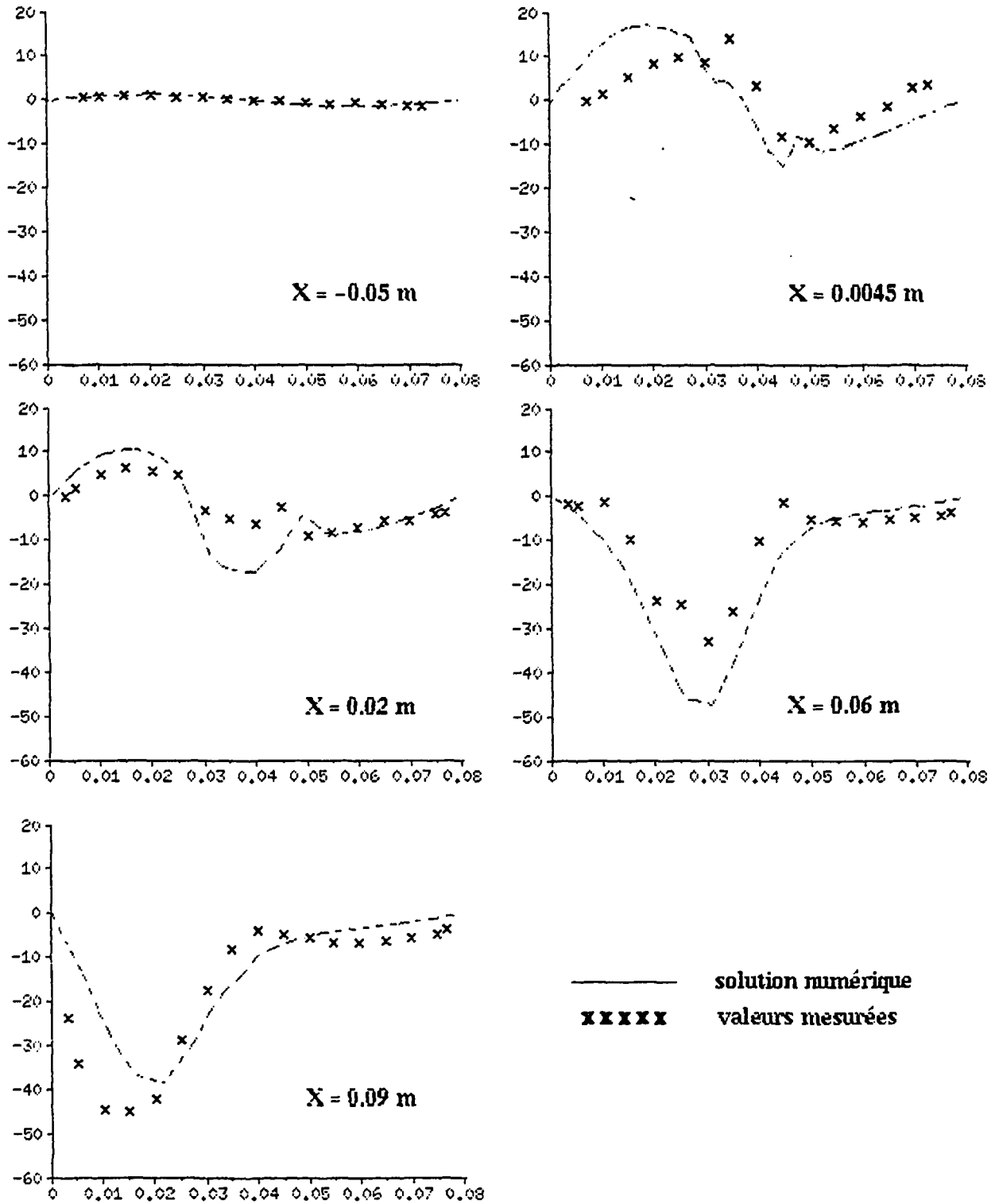


Figure 14 a: Expérience Clarinette: comparaison de valeurs calculées et valeurs mesurées de la composant radiale de la vitesse: profils verticaux à différentes distances X du rétrécissement

COMPOSANTE RADIALE DE LA VITESSE (m/s)

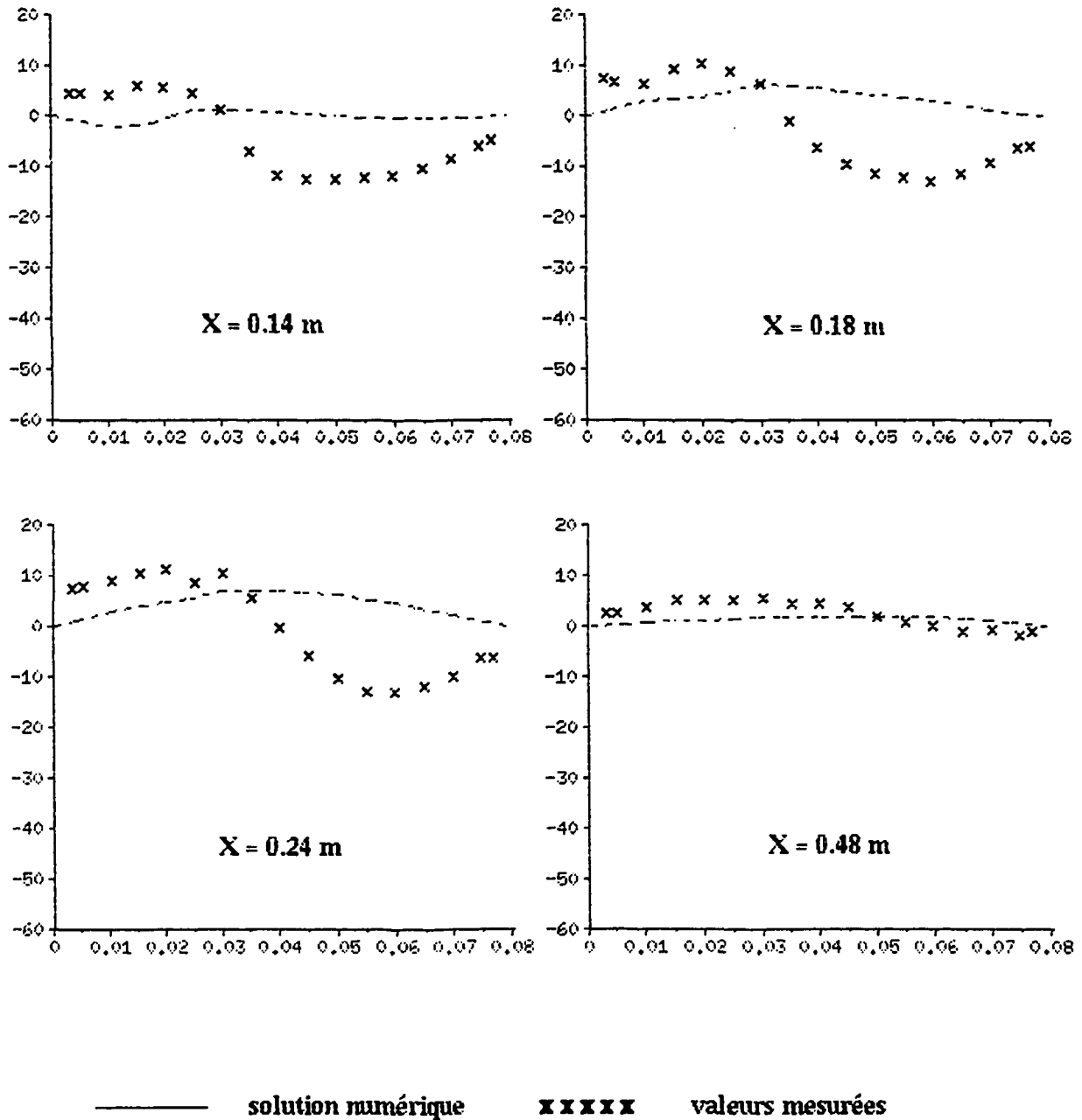


Figure 14 b: Expérience Clarinette: comparaison de valeurs calculées et valeurs mesurées de la composante radiale de la vitesse: profils verticaux à différentes distances X du rétrécissement

ENERGIE TURBULENTE (m²/s²)

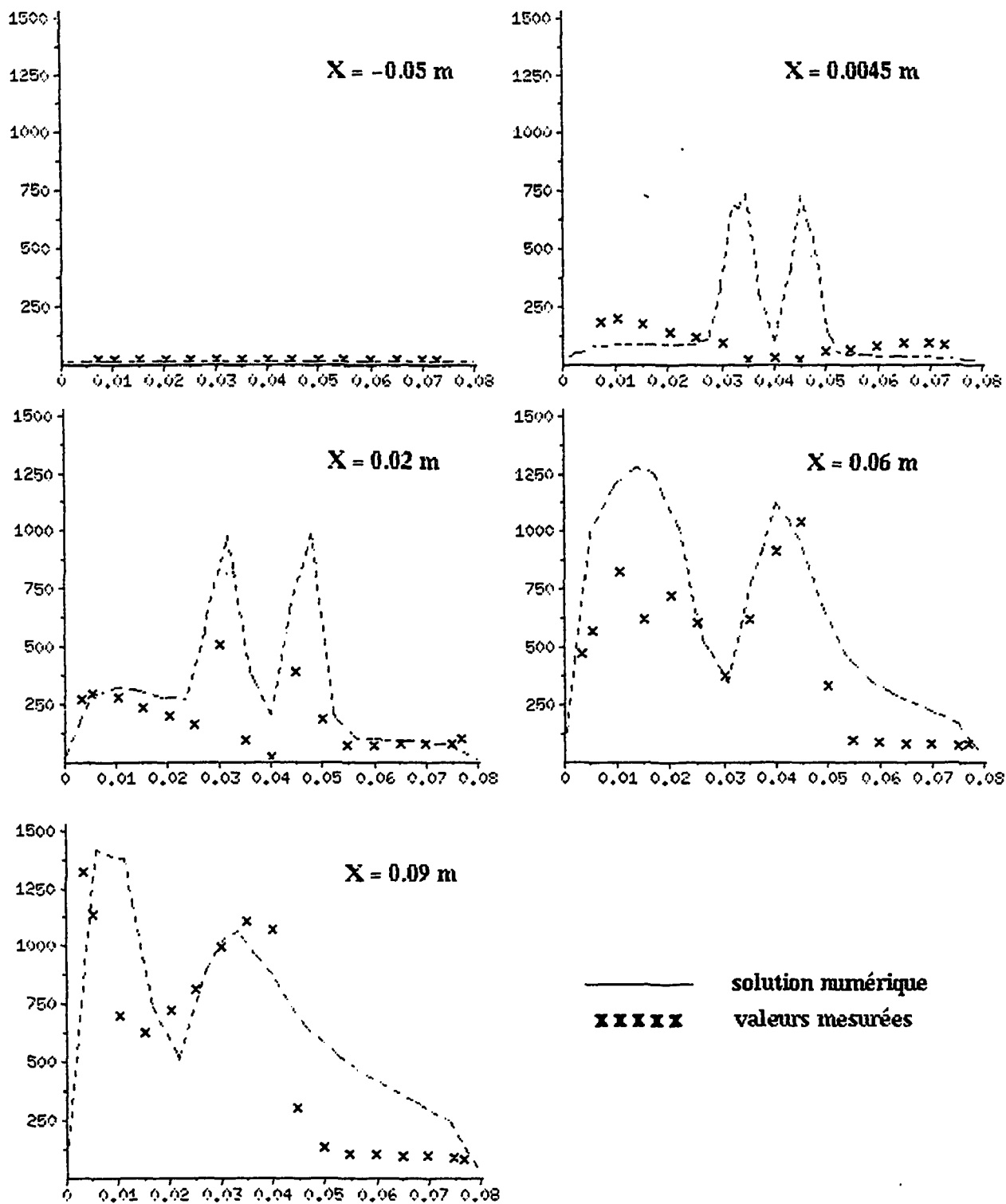


Figure 15 a: Expérience Clarinette: comparaison de valeurs calculées et valeurs mesurées de l'énergie turbulente: profils verticaux à différentes distances X du rétrécissement

ENERGIE TURBULENTE (m²/s²)

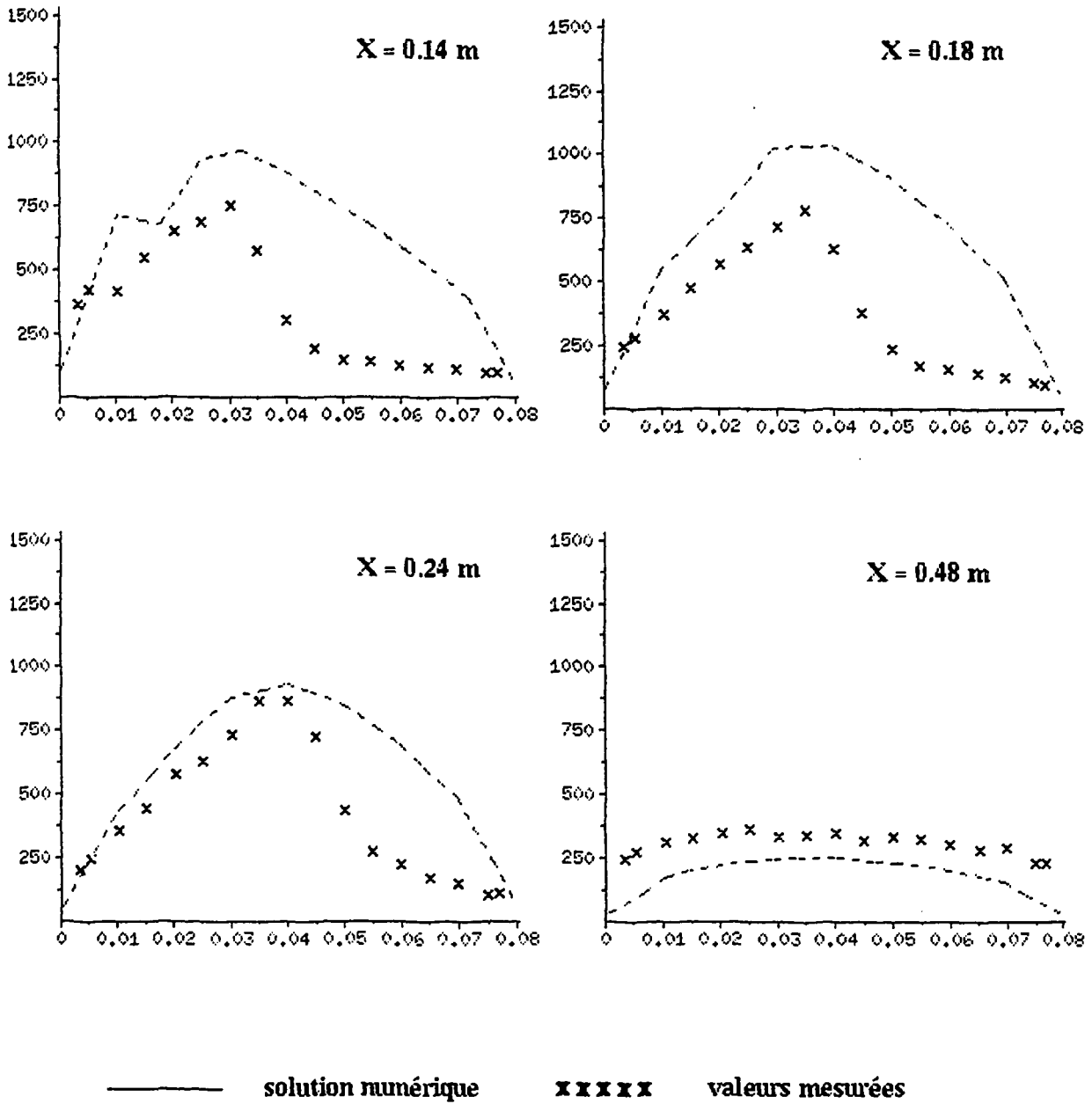
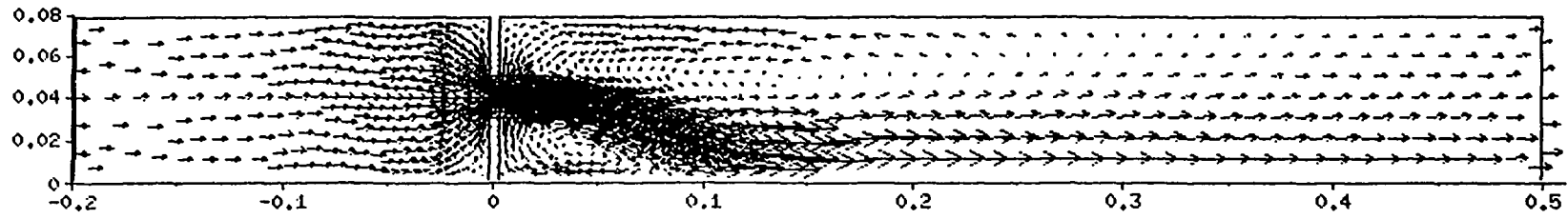
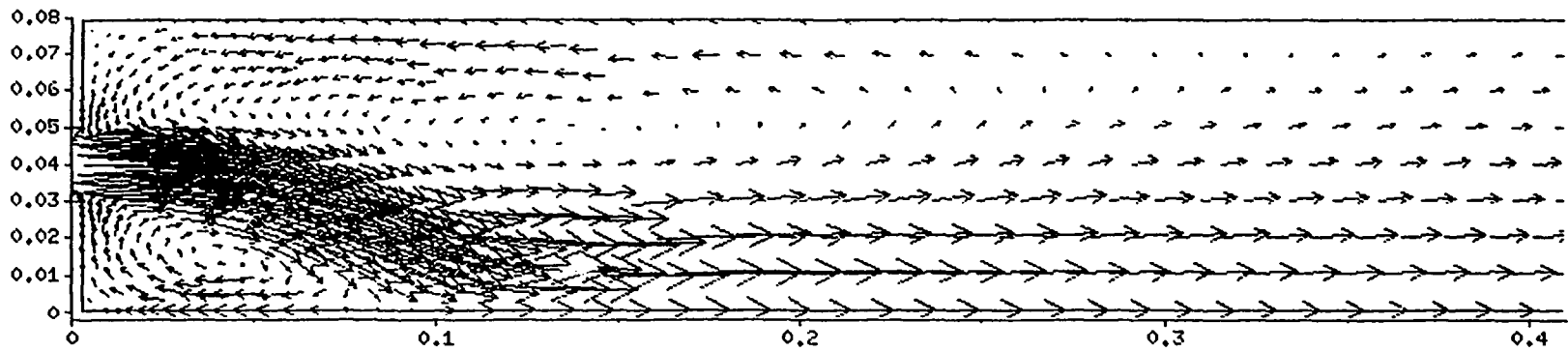


Figure 15 b: Expérience Clarinette: comparaison de valeurs calculées et valeurs mesurées de l'énergie turbulente: profils verticaux à différentes distances X du rétrécissement

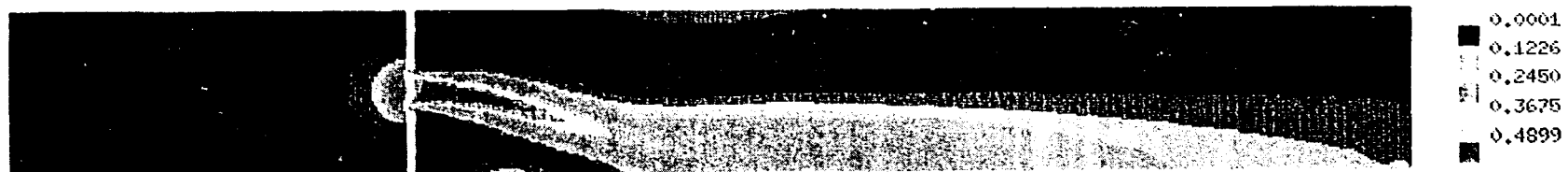


(a)



(b)

**Figure 16 : Champs de vitesse (a) sur tout le domaine
(b) détail près du rétrécissement**



(a)

(° Celsius)

- 6.01
- 9.57
- 13.13
- 16.70
- 20.26

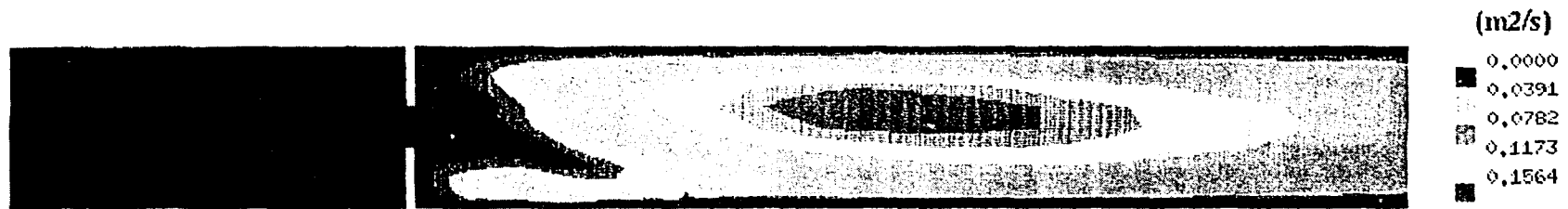


(b)



(c)

Figure 17 : Expérience Clarinette : Champs de Nombre de Mach (a), de Temperature (b) et de Pression Statique (c).



(a)



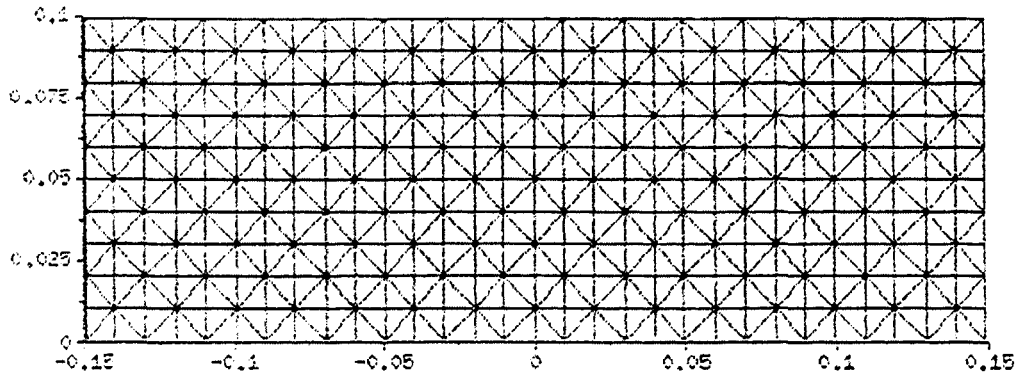
(b)



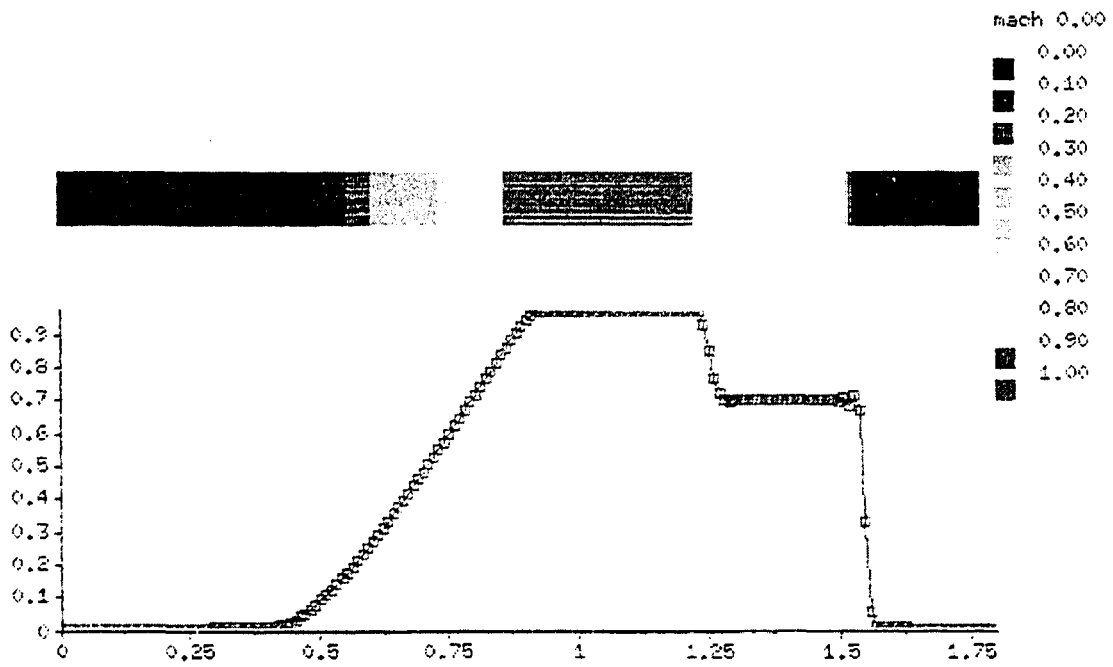
(c)

Figure 18 : Expérience Clarinette : Champs de Viscosité turbulente (a), d'Énergie turbulente (b) et de son Taux de dissipation (c).

TUBE A CHOC



détail du maillage

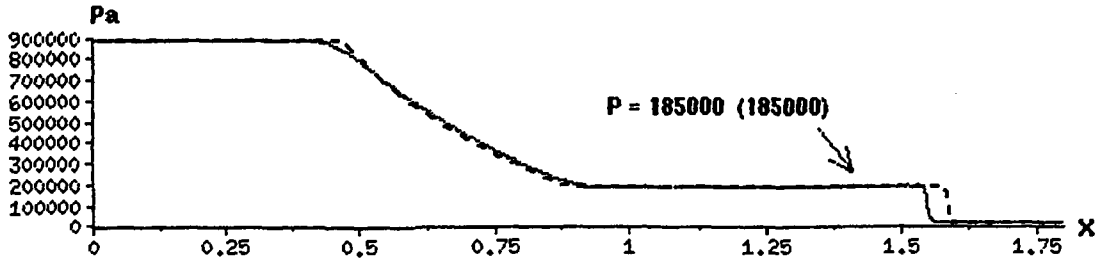


Nombre de Mach : vue en coupe et vue de dessus
($P_s/P_i = 10$)

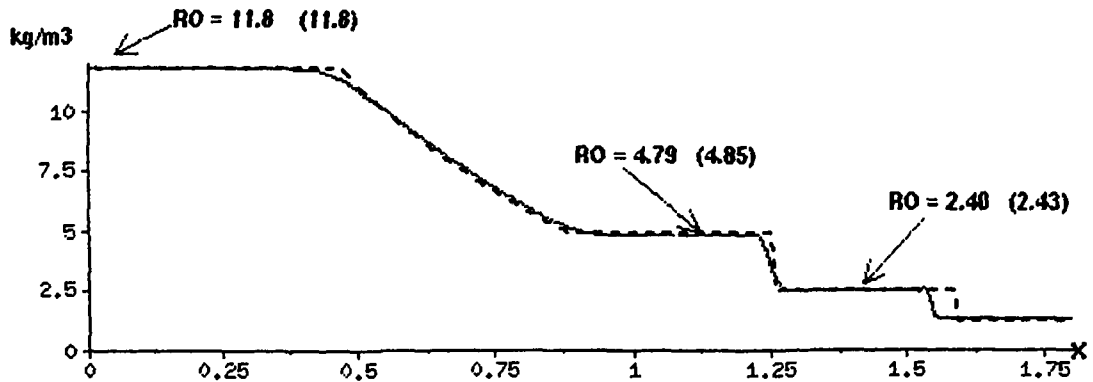
Figure 19 : Détail de maillage (haut), comportement qualitatif du nombre de Mach (bas)

TUBE A CHOC : $P_s/P_i = 10$
 $pdt = 0.625E-05$

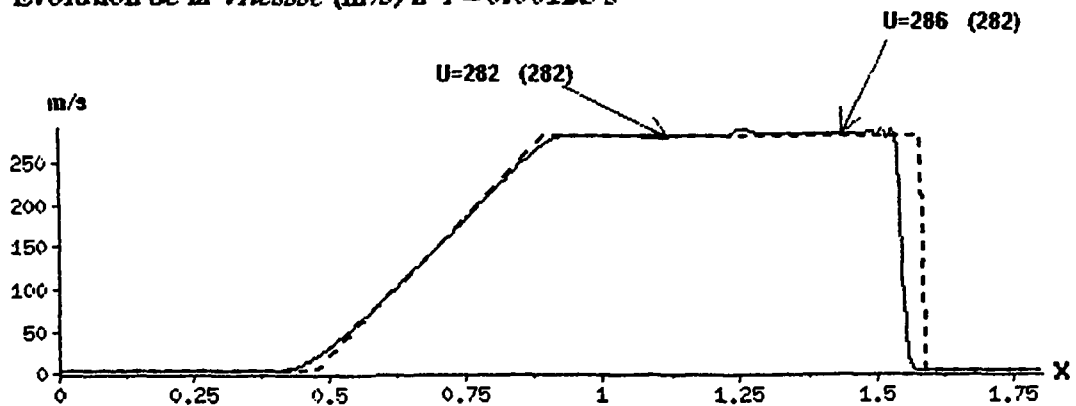
Evolution de la pression (Pa) à $T = 0.00125$ s



Evolution de la masse volumique (kg/m³) à $T = 0.00125$ s



Evolution de la vitesse (m/s) à $T = 0.00125$ s

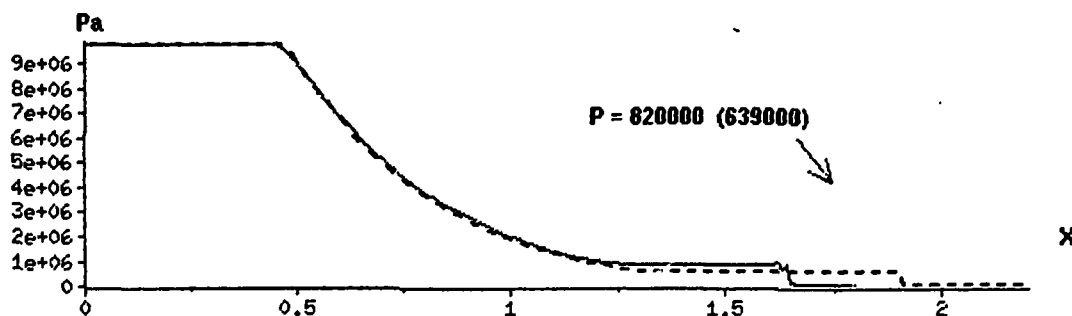


----- valeurs théoriques ————— valeurs calculées

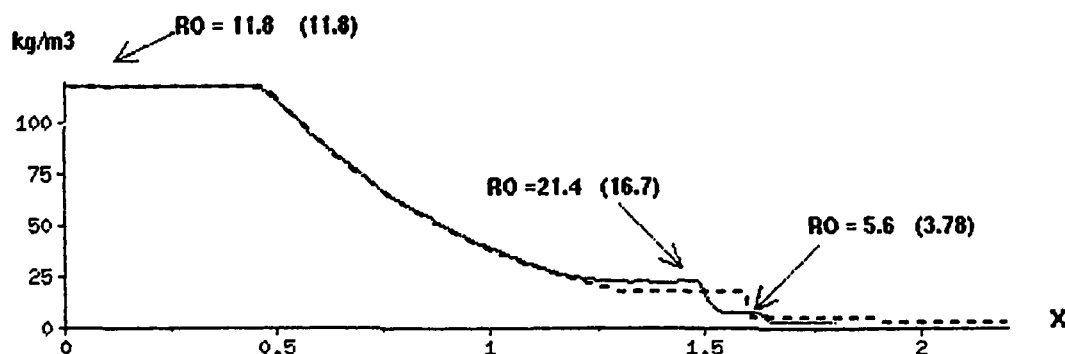
Figure 20 : Taux de détente de 10: Profils le long du tube de la pression statique, de la masse volumique et de la vitesse

TUBE A CHOC : $P_s/P_i = 100$
 $pdt = 1.25E-06$

Evolution de la pression (Pa) à $T = 0.00125$ s



Evolution de la masse volumique (kg/m^3) à $T = 0.00125$ s



Evolution de la vitesse (m/s) à $T = 0.00125$ s

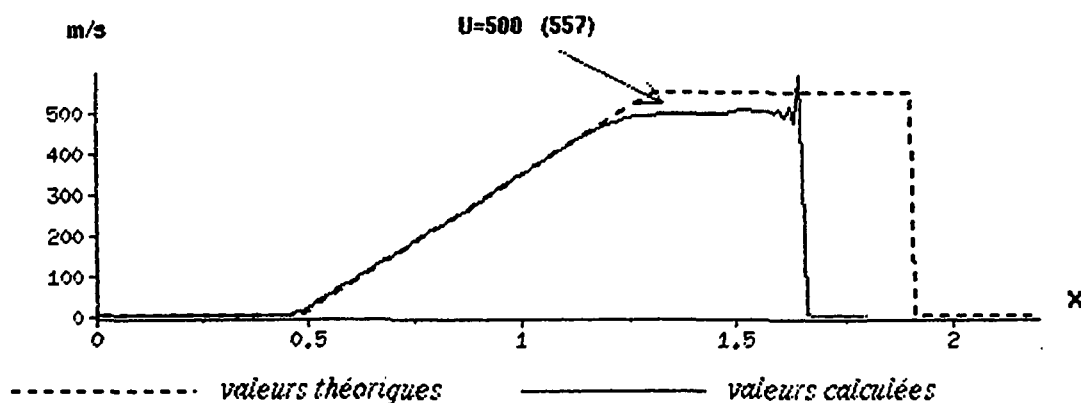
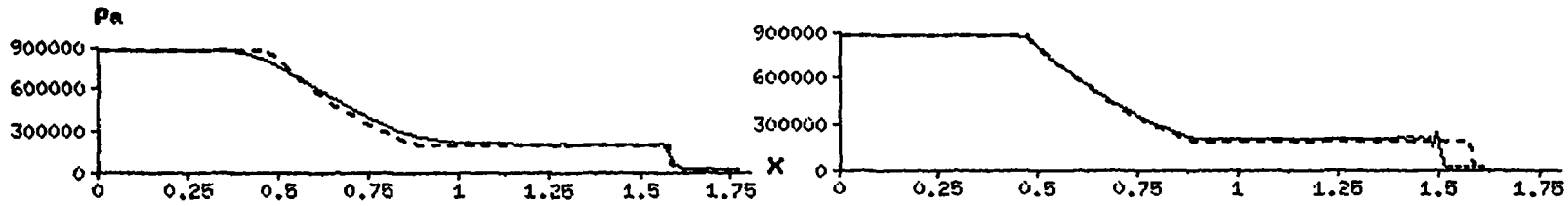


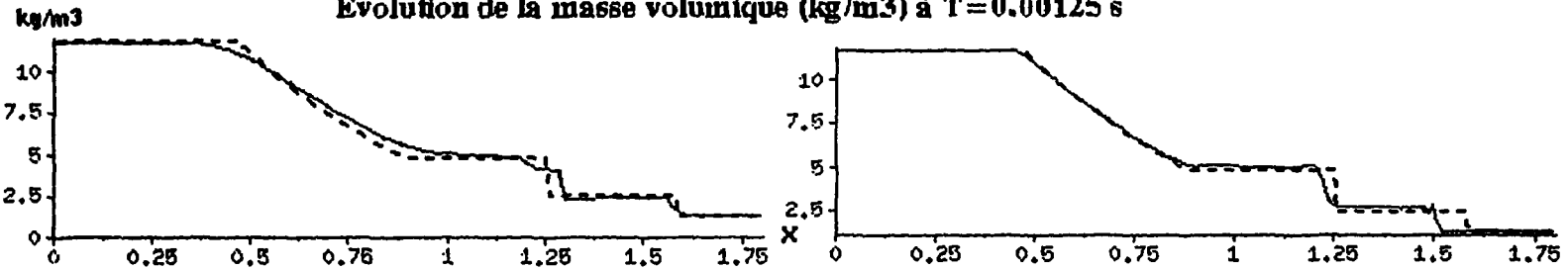
Figure 21 : Taux de détente de 100: Profils le long du tube de la pression statique, de la masse volumique et de la vitesse

TUBE A CHOC : $P_s/P_i = 10$
 A gauche : pas de temps = $2.5E-05$ - A droite pas de temps = $0.125E-05$

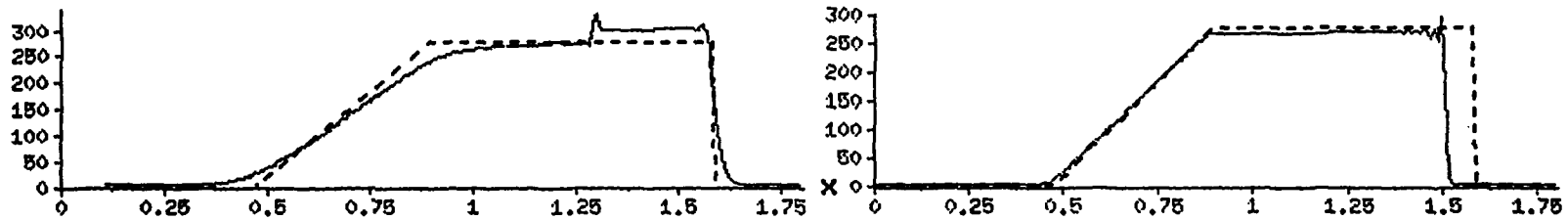
Evolution de la pression (Pa) à $T=0.00125$ s



Evolution de la masse volumique (kg/m³) à $T=0.00125$ s



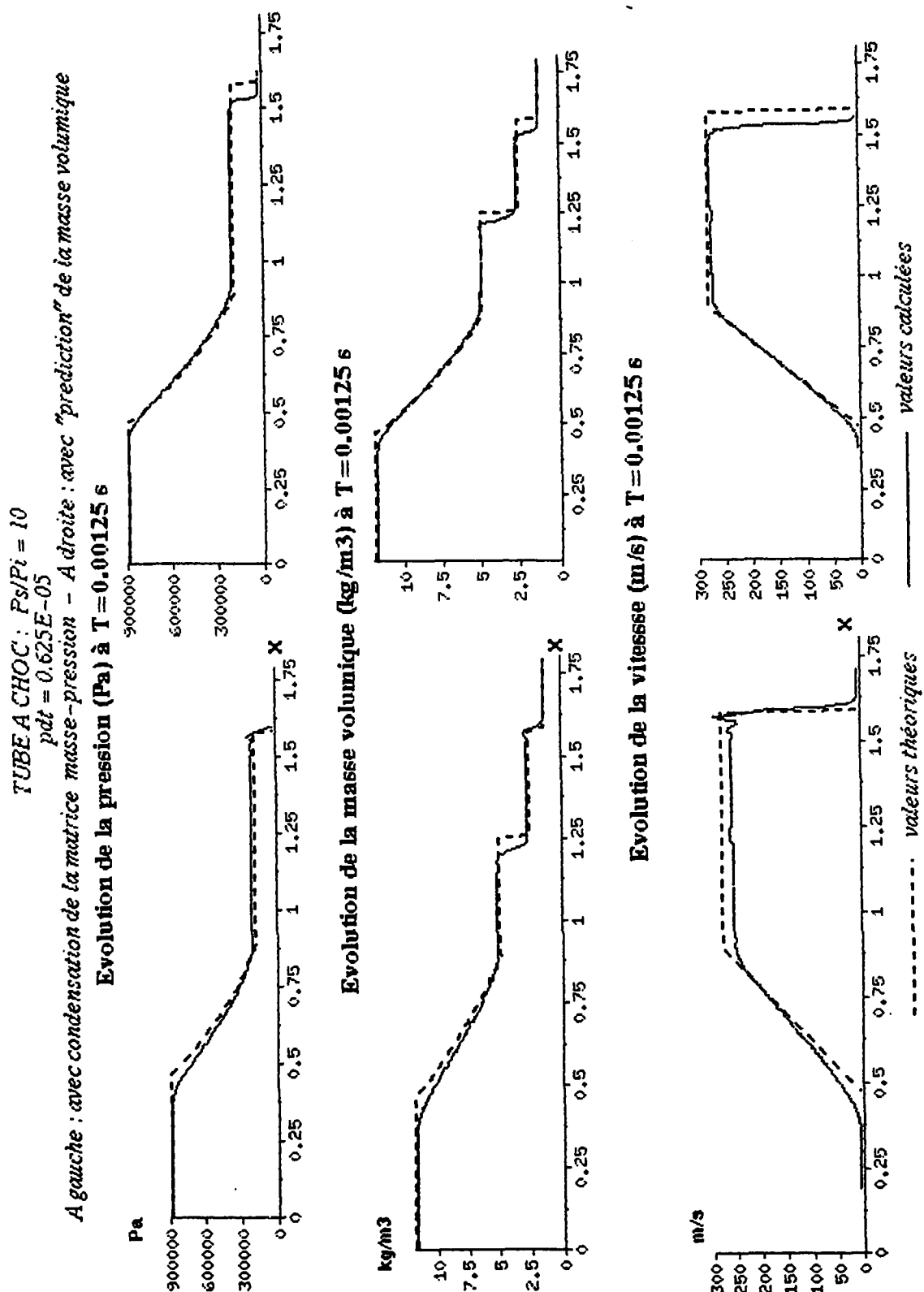
Evolution de la vitesse (m/s) à $T=0.00125$ s



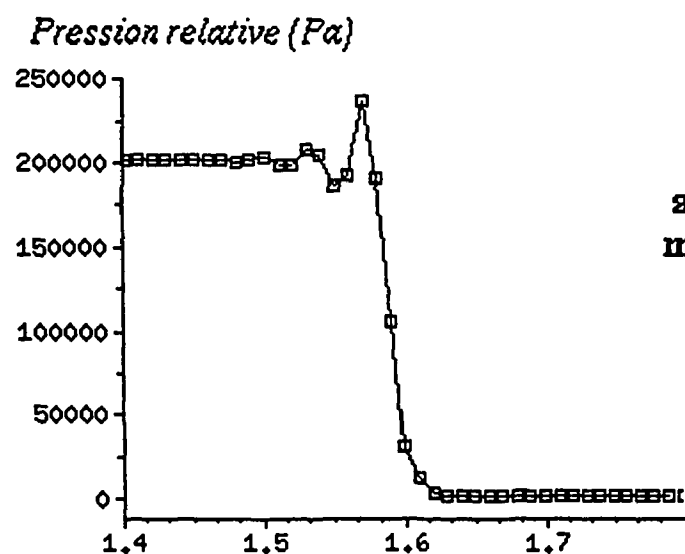
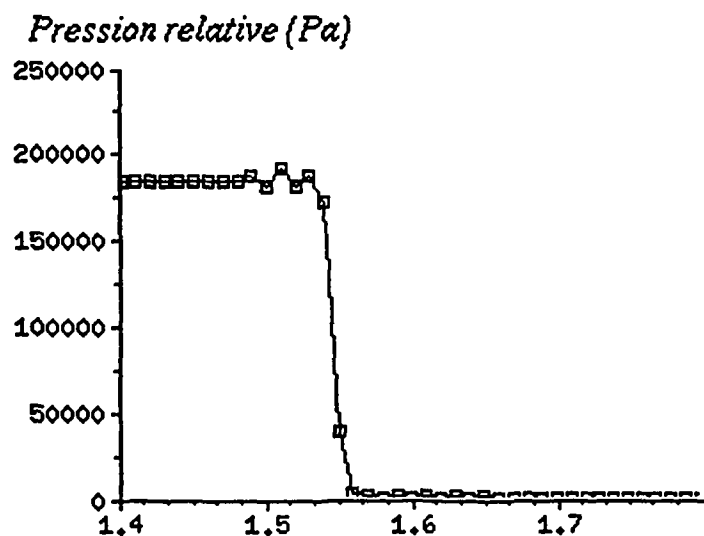
----- valeurs théoriques ————— valeurs calculées

Figure 22 : Taux de détente de 10: Influence du pas de temps

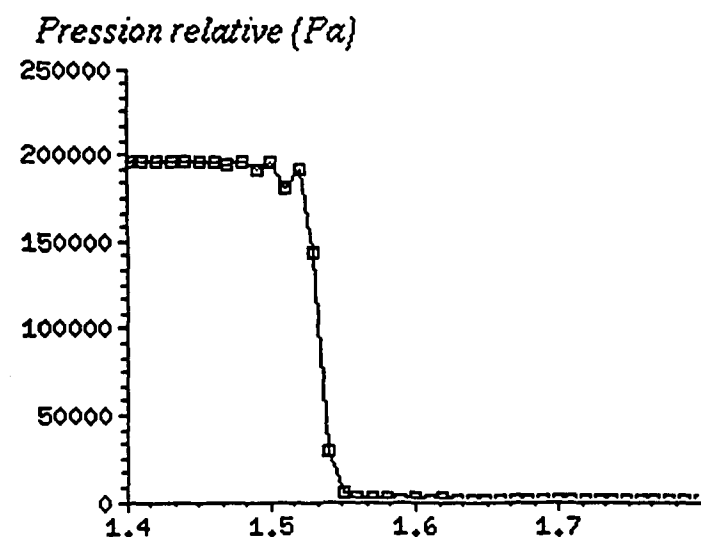
Figure 23 : Taux de détente de 10: Influence du mass-lumping et de la prédiction de la masse volumique pour un pas de temps donné sur le comportement global du tube



TUBE A CHOC : $P_s/P_i = 10$ - $T = 0.00125$ s - $pdt = 0.625E-05$
 description du choc



avec condensation de la
matrice "masse-pression"



avec "prediction" de la
masse volumique

Figure 24 : Taux de détente de 10: influence du mass-lumping et de la prédiction de la masse volumique pour un pas de temps donné au voisinage du choc

V- PROPOSITIONS D'AMELIORATION DE LA STABILITE

On a vu, dans le cas de la tuyère par exemple, que des instabilités se produisent pour un taux de détente sévère et lorsque le pas de temps devient "trop petit", conduisant à des oscillations légèrement en amont du choc qui s'amplifient et font diverger le calcul par apparition de valeurs négatives de la pression statique. D'autres cas sévères comme l'élargissement brusque, la maquette CLAPET ou l'expérience PLUVIOSE posent également des problèmes de stabilité avec des symptômes analogues. En fait, on se rend compte que les calculs se passent "plutôt bien" tant que les conditions initiales et/ou limites n'engendrent pas de trop forts gradients dans l'écoulement. Les cas testés jusqu'à présent ont permis de calculer correctement des écoulements où le nombre de Mach maximum est inférieur à 2 environ. Néanmoins, il faut garder en mémoire que ce n'est pas la valeur du nombre de Mach qui compte mais les gradients (de pression, de vitesse, de masse volumique, de température) qui peuvent être engendrés dans l'écoulement tant dans la phase transitoire qu'à l'état stationnaire.

Des analyses plus détaillées du comportement des oscillations perturbatrices, ainsi que la comparaison avec les calculs réalisés par des codes aux différences finies comme Mélodie ou ESTET qui sur les mêmes cas n'ont pas ce comportement font apparaître deux explications possibles :

- influence de la méthode des caractéristiques dans l'étape de convection,
- influence du couplage Pression-Masse volumique-Quantité de mouvement.

V-1 Influence de la méthode des caractéristiques dans l'étape de convection.

La différence essentielle entre Différences Finis et Eléments Finis en dehors de l'aspect structuré et non structuré du maillage réside dans le mode d'interpolation au pied de la caractéristique qui en différences finies bénéficie d'une information plus riche car facile à chercher autour du pied ; ce n'est pas le cas en éléments finis où l'on se contente de l'information contenue dans l'élément dans lequel se trouve le pied. Ainsi, au voisinage de forts gradients, il se peut que la faiblesse de l'interpolation soit la cause de phénomènes d'undershoot ou d'overshoot qui serait à l'origine des oscillations. Cependant, l'influence du décentrement est réduite avec la valeur du pas de temps. Or on a vu que des instabilités pouvaient apparaître pour un très petit pas de temps qui permettrait de raidir les gradients (exemple de la tuyère).

On peut également réfléchir quant à l'emploi d'autres méthodes pour le traitement des termes non linéaires comme les méthodes volumes finies, SUPG,...

V-2 Influence du couplage Pression-Masse volumique-Quantité de mouvement.

On peut se demander l'influence que peut avoir le mode de calcul de la masse volumique discrétisée isoP2 (noeuds sommets des triangles + noeuds milieux des facettes) à partir de la grandeur pression qui est une quantité discrétisée P1 (sommets des triangles) mais qui sert également à définir la quantité de mouvement à partir de la grandeur vitesse discrétisée isoP2. En effet, prenons le cas d'un choc étalé sur une maille avec un pic au voisinage du noeud milieu : peut-on raisonnablement supposer la pression et la masse volumique comme étant linéaires sur la maille et la vitesse linéaire par sous-élément ? Le noeud milieu semble supporter une incohérence. Si tel est le cas, deux propositions peuvent être avancées :

(a) - soit on calcule de meilleure façon la masse volumique (discrétisée isoP2) à partir de la pression (pour avoir une valeur plus cohérente au noeud milieu) en utilisant des projections d'une discrétisation à l'autre,

(b) - soit on discrétise la pression et la vitesse de la même façon: en d'autres termes avoir les variables colocalisées ! Cela permettrait d'avoir une richesse d'information sur la pression équivalente à celle sur la vitesse. Notons que c'est le cas des vrais codes Euler.

Pour argumenter, des tests détaillés sur le cas quasi-monodimensionnel qu'est la tuyère pendant la phase transitoire ont permis de se rendre compte que les oscillations susceptibles de faire diverger le calcul prenaient naissance sur un noeud milieu de l'élément qui contenait le choc, puis se propageaient sur les noeuds voisins.

Si on compare avec ce qui se fait en différences finies, et qui donne en général de meilleurs comportements, on voit que ces deux propositions coexistent presque ; presque car les maillages pression et vitesse sont décalés. Peut être que le décalage n'est pas un grand inconvénient, encore que cela demande à être vérifié, mais un degré de discrétisation analogue pour la pression et la vitesse doit sûrement contribuer à une meilleure stabilité au voisinage de forts gradients (on a le même nombre de noeuds en vitesse et en pression).

V-3 Influence d'une prédiction de la masse volumique

Parallèlement, il a été testé l'influence que peut avoir une meilleure implication de la masse volumique sur la phase transitoire d'un calcul. Dans l'algorithme standart présenté au chapitre II, la masse volumique se calcul de manière explicite en fonction

de la pression et de la température en début de chaque pas de temps. Pour un gaz parfait :

$$\rho^n = \frac{P^n M}{R T^n} \quad (V.1)$$

Une méthode pour impliciter un peu mieux cette quantité est de faire des sous-itérations /1/ pour chaque pas de temps. Elle peut être efficace, mais multiplie le coût du calcul par le nombre de sous-itérations. S'agissant d'écoulement compressible, une prédiction "semi-implicite" a été tentée via l'équation de continuité: une fois connu ρ^n , on prédit une valeur intermédiaire $\rho^{n+1/2}$ défini par:

$$\frac{\rho^{n+1/2} - \rho^n}{\delta t} + \text{div} (\rho^n \mathbf{U}^n) = 0 \quad \text{soit} \quad \rho^{n+1/2} = \rho^n - \delta t \text{div} (\rho^n \mathbf{U}^n) \quad (V.2)$$

le terme $\text{div} (\rho^n \mathbf{U}^n)$ peut se calculer de deux façons : soit de manière classique centrée, soit en utilisant la décomposition $\text{div} (\rho^n \mathbf{U}^n) = \rho^n \text{div} (\mathbf{U}^n) + \mathbf{U}^n \text{grad} (\rho^n)$, ce qui donne

$$\frac{\rho^{n+1/2} - \rho^n}{\delta t} + \rho^n \text{div} (\mathbf{U}^n) + \mathbf{U}^n \text{grad} (\rho^n) = 0 \quad (V.3)$$

résolue en deux étapes:

$$\text{a) } \frac{\hat{\rho} - \rho^n}{\delta t} + \mathbf{U}^n \text{grad} (\rho^n) = 0 \quad \text{en utilisant la méthode des caractéristiques} \quad (V.4)$$

puis

$$\text{b) } \frac{\rho^{n+1/2} - \hat{\rho}}{\delta t} + \rho^n \text{div} (\mathbf{U}^n) = 0 \quad (V.6)$$

L'intérêt de cette décomposition étant de décentrer la valeur de la masse volumique de manière à avoir un décentrement plus ou moins cohérent avec celui de la vitesse.

Malheureusement, en pratique les 2 techniques n'ont donné aucune différence de résultats notables. Par contre, la prédiction de la masse volumique par l'équation (V.2) a donné des résultats encourageants. Ainsi, le calcul de la tuyère qui était instable pour un taux de détente de 0.75 et pour un petit pas de temps a pu être réalisé sans problème et ceci aussi petit que soit le pas de temps. D'autres cas comme la soupape CLAPET ont également fait l'objet de cette technique : un taux de détente de 2.5 qui auparavant faisait diverger le calcul a pu être cette fois être appliqué. pour d'excellents résultats. Mais des taux de détente encore plus forts finissaient par faire diverger le calcul. En fait, en y regardant de plus près, on peut se demander si cette prédiction de la masse

volumique ne correspond pas un décentrement de la pression (ou de son gradient) via la loi d'état, mais qui serait "mal contrôlé", en ce sens qu'il n'est pas cohérent avec celui réalisé dans l'étape de convection pour les vitesses.

En d'autres termes, ne faudrait-il pas traiter de la même façon d'un point de vue numérique le terme non linéaire de convection et le terme de gradient de pression dans l'équation de quantité de mouvement comme c'est le cas dans les codes compressibles écrits en volume finis ?

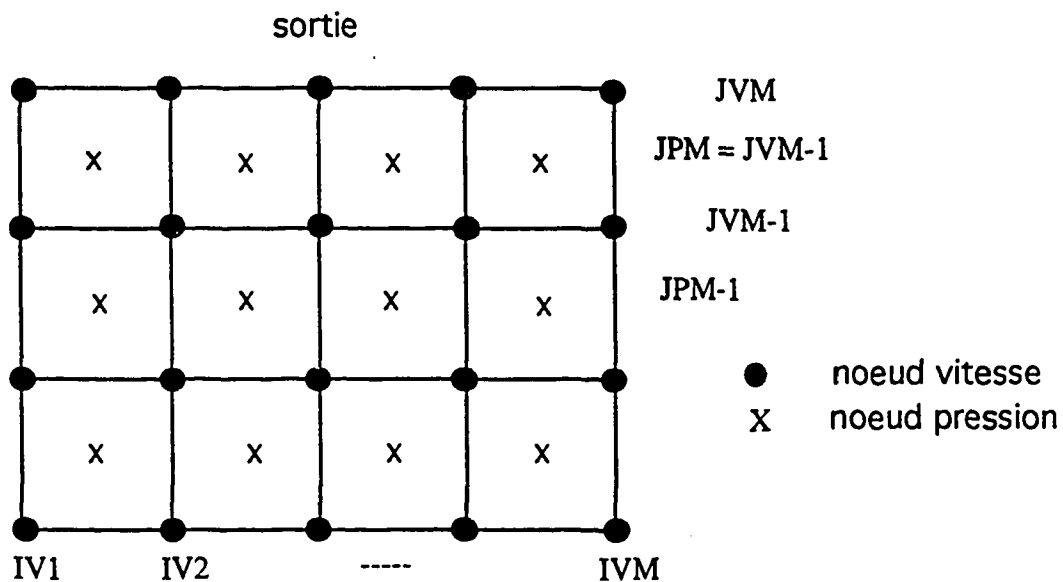
ANNEXE 1

MISE EN OEUVRE DE LA CONDITION DE SORTIE $\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right) = 0$ EN ELEMENTS FINIS

Une formulation variationnelle de cette condition s'avère très difficile à mettre en oeuvre, dans la mesure où il faudrait intégrer par partie. En effet, la pression étant linéaire sur un élément, un double gradient appliqué sur cette variable conduit à une valeur nulle.

On a préféré opter pour une technique directement inspirée de celle utilisée en différences finies. Rappelons en quoi cela consiste :

En différence finies, on a un maillage structuré du type :



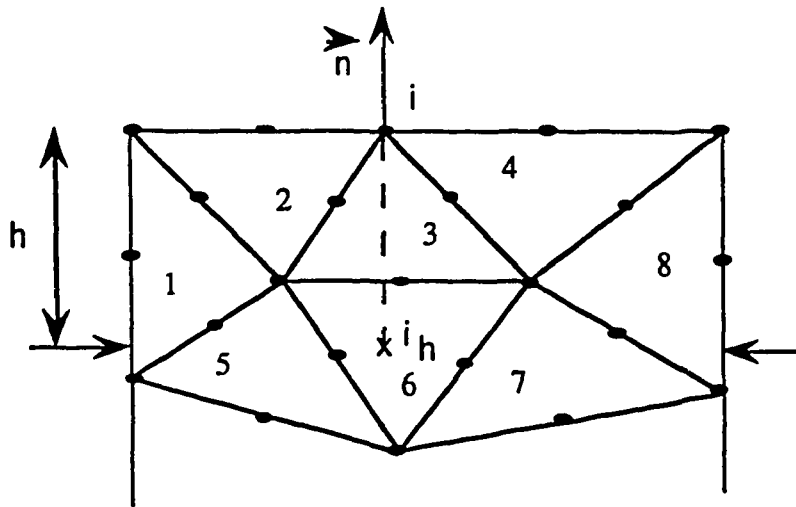
En pratique, la condition à la limite consiste à recopier au pas de temps $n+1$ le profil de pression des points pression en $JPM-1$ du pas de temps n et à le fixer sur les points de pression JPM , moyennant toutefois un recalage par rapport à un point de référence en sortie IS:

$$P^{n+1}(IP, JPM) = P^n(IP, JPM-1) + \text{constante} \quad 1 < IP < IPM$$

où

$$\text{constante} = P^n(IS, JPM) - P^n(IS, JPM-1)$$

En éléments finis, on a un maillage non structuré du type :



On se donne une taille de maille h en sortie et on va chercher l'information pour tous les points de sortie à une distance h vers l'intérieur du domaine suivant la normale de sortie \vec{n} en ce point. Par exemple, on calcule les coordonnées du point i_h situé à une distance h du point de sortie i suivant la normale \vec{n} . On détermine l'élément qui contient ce point (ici l'élément 6) puis on calcule la valeur de la pression en ce point en interpolant linéairement dans cet élément en fonction des valeurs de pression connues aux noeuds sommets:

$$P_i^{n+1} = P_{i_h}^n$$

Enfin on recalcule par rapport à un point de référence donné.

On voit bien que le profil obtenu est dépendant du maillage en sortie. En effet des mailles distordues ou irrégulières peuvent engendrer des profils de pression "cahotant" avec des sauts de pression pouvant être importants d'un point de sortie à son voisin. Il faut donc prévoir un maillage en sortie qui soit "régulier".

Un autre inconvénient quant à l'application de cette méthode est qu'elle oblige à avoir une sortie à faces parallèles.

ANNEXE 2

MISE EN OEUVRE DE LA CONDITION DE SORTIE LIBRE

$$\frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

EN ELEMENTS FINIS

Cette condition est appliquée de manière explicite en écrivant:

$$\frac{P^{n+1} - P^n}{\delta t} + c \frac{\partial P^n}{\partial n} = 0 \quad \text{soit} \quad P^{n+1} = P^n - \delta t c \frac{\partial P^n}{\partial n}$$

Il s'agit donc pour l'essentiel de calculer le gradient normal de pression. Pour cela 2 méthodes:

Première méthode: sous forme forte

En se donnant une épaisseur de maille h en sortie, et en calculant la pression à une distance h du point i de sortie (voir annexe 1): on écrit:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n} \right)_i^n = \frac{P_i^n - P_{i_h}^n}{h}$$

Deuxième méthode: sous forme faible

On calcule grad P suivant une des 3 techniques décrites en III-2-1

CONCLUSION

Le propos de ce rapport était de présenter les méthodes numériques employées, et les tests réalisés, dans le but de modéliser les écoulements compressibles dans un contexte éléments finis. Précédemment, les codes aux différences finies comme Mélodie ou ESTET initialement écrits pour traiter des écoulements incompressibles mais dilatables, ont pu étendre leurs algorithmes au traitement d'écoulements compressibles sans modifier substantiellement la structure informatique ni les méthodes numériques utilisées. La même démarche a été suivie pour un code aux éléments finis du type N3S. Le code prototype 2D ainsi réalisé a permis de vérifier la faisabilité de l'extension et de prévoir le traitement particulier à accorder à certains termes nouveaux. Des tests sur les conditions aux limites et la manière de les appliquer ont également été menés.

Dans l'état actuel des choses, il est certain que les méthodes proposées sont fiables pour des écoulements "pas trop sévères", c'est à dire où les gradients ne sont pas trop forts : c'est le cas notamment des écoulements compressibles entièrement subsoniques. Concernant les écoulements transsoniques et plus particulièrement avec présence de chocs, les tests réalisés ne peuvent pas conclure à une fiabilité certaine des méthodes. D'autres applications plus sévères que celles présentées dans ce rapport ont été réalisées, comme l'élargissement brusque, la maquette CLAPET ou l'expérience PLUVIOSE. En gros, on a pu constater que l'algorithme diverge en présence de choc lorsque le nombre de Mach local au choc est supérieur à 2 environ (il faudrait en fait parler de "gradients trop forts"), alors qu'on semble avoir obtenu un état presque stationnaire.

D'un point de vue algorithmique, des réflexions doivent être poursuivies notamment sur un meilleur couplage pression-masse volumique-quantité de mouvement qui peut être à l'origine des instabilités rencontrées (variables non colocalisées ?), ainsi que sur une meilleure prise en compte des phénomènes de convection (caractéristiques traversant un choc ?).

Par ailleurs, le problème des conditions aux limites en compressible, notamment les conditions de sortie, est encore l'objet de recherches. En pratique, c'est surtout l'expérience du mécanicien des fluides et quelques artifices plus ou moins empiriques qui permettent d'avoir des conditions à peu près satisfaisantes selon les cas.

Concernant le code N3S, une version périphérique dite "compressible" (subsonique dans un premier temps) pourra être développée à partir de la version 3.1 dilatable, en utilisant les techniques décrites dans ce rapport et surtout vérifier leurs applications aux cas 3D.

REFERENCES

1 - SIMONIN O., BECHART J. 1989

Modélisation des écoulements compressibles: calcul de l'écoulement dans une tuyère plane avec le code Mélodie adapté aux écoulements compressibles.

Rapport EDF HE-44/89.12

2 - SIMONIN O., VIOLLET P.L. 1989

Prediction of an oxygen droplet pulverization in a compressible subsonic coflowing hydrogen flow, *Numerical Methods for Multiphase flow*, ASME FED, Vol 91 pp 73-82

Rapport EDF HE-44/89.35

3 - MARTY G., MATTEI J.D. et col 1992

Recueil de fiche de validation d'ESTET 3.1

Rapport EDF HE-44/92.35B

4 - CARUSO A., GUYON C., METIVET B. THOMAS, B. 1990

Navier Stokes Equations with varying density : Finite Element implementation, *Proceeding of the second World Congress on Computational Mechanics*, Stuttgart 1990.

Rapport EDF HE-44/90.26 ou HI-72/70.78

5 - BERNARDI C. LAVAL F., METIVET B. THOMAS, B. 1990

Projet N3S de mécanique des fluides :

Approximation par éléments finis de fluides visqueux avec masse volumique variable.

Rapport EDF HI-72/66.90

6 - CARUSO A., MECHITOUA N. 1992

Résolution par la méthode des éléments finis des équations de Naviers-Stokes à masse volumique variable avec prise en compte de la turbulence

Rapport EDF HE-44/92.03

7 - CARUSO A., MECHITOUA N. 1992

Finite Element Computation of Turbulent Diffusion Flame: *Second International Conference On Advanced Computational Methods in Heat Transfer*, Milan, 7-10 July, 1992

Rapport EDF HE-44/92.20

8 - LAUNDER B.E., SPALING D.B., 1974

Numerical computation of turbulent flows. *Computer Methods in applied Mechanics and Engineering*, 3, 1974.

9 - LAUNDER B.E., 1980

Turbulence transport models for numerical computation of complex turbulent flows. *Von Karman Institute for fluid dynamics, lecture series 3*, 1980.

10 - TIBA M., BOUVIER A., 1992

Modélisation des écoulements dans des torches à plasma: étude d'amélioration de la prise en compte de la compressibilité dans les équations.

Rapport EDF HE 26 W 62

11 - BAILLY C., LAFON P., 1992

Application du code ESTET aux jets libres supersoniques. Adaptation du modèle k-epsilon pour les écoulements compressibles

Rapport EDF HP-63/92.125

12 - ESPOSITO P., 1981

Résolution bidimensionnelle des équations de transport par la méthode des caractéristiques.

Rapport EDF HE-41/81.16

13 - HERVOUET J.M. 1986

CARAC, module de convection en éléments finis par la méthode des caractéristiques.

Rapport EDF HE-41/86.21

14 - COMBES J.F. 1989

Calcul de l'écoulement dans une tuyère avec le code Euler de l'ONERA,

document de travail EDF DT.P-41/89.02

15 - FAVRE A. et al. 1976

"La turbulence en mécanique des fluides", Gauthier-Villars, 1976

16 - RAVIAR, SMOLLER

Cours de DEA Université Paris VII