ASPECTOS TEORICOS DEL MODELO FRACTAL DE SEMKOW EN LA EMANACIÓN DE RADÓN EN SÓLIDOS.

Cruz Galindo H. Simón
ININ
Centro Nuclear "Dr. Nabor Carrillo"
Km. 36.5 Carretera México -Toluca
Salazar Estado de México

RESUMEN.

Se desarrollan los elementos básicos de la Teoría de Fractales. Se describen someramente las bases físicas de la emisión de radón en sólidos. Se obtiene que el poder de emanación $\mathbf{E_R}$ de granos de mineral se escala como $\mathbf{r_0}^{D-3}$ ($\mathbf{r_0}$: radio del grano). De una gráfica logarítmica de $\mathbf{E_R}$ vs. tamaño de grano se deduce la dimensión fractal de la superficie de emanación. Los datos experimentales de diferentes materiales dan un intervalo en la dimensión fractal **D** entre 2.1 a 2.8.

BASES FÍSICAS PARA LA EMANACIÓN Y MIGRACIÓN DE RADÓN EN SÓLIDOS

Antes de que un átomo de un isótopo de radón pueda migrar, debe escapar del sitio de su precursor el radio 226. Bajo condiciones de estado estable, la fracción de átomos de radón formados en un sólido y que escapan del mismo está definida como el poder de emanación $\mathbf{E_R}$ del sólido para el isótopo del radón en cuestión.

El fenómeno básico que permite al radón escapar es el reculamiento bajo el efecto de decaimiento radiactivo del átomo de radio. La mayor parte de la energía la tiene la partícula alfa pero la que resta es usada por el átomo de radón producido por el reculamiento en la dirección contraria con respecto a la trayectoria de las partículas alfa.

Dentro de un grano de mineral promedio el intervalo del reculamiento del radón es del orden de 20 a 70 nm. Por lo que solo los átomos de radio deben estar localizados a una distancia menor de la frontera del grano para que el átomo de radón producido tenga oportunidad de escapar del grano. Adicionalmente el papel del agua en la emanación del radón es extremadamente importante ya que superficies hidratadas tienen una mayor tendencia a exhibir más poder de emanación que las superficies no hidratadas.

La absorción y el tamaño de grano también juegan un papel que puede ser grande o pequeño dependiendo de la naturaleza del material y su medio ambiente físico o químico.

INTRODUCCIÓN DE LA GEOMETRÍA FRACTAL EN LA EMANACIÓN DE RADÓN.

Se han hecho intentos para relacionar el poder de emanación E_R con la razón superficie a volumen $\frac{S}{V}$ o bien con el área de superficie especifica **A**, suponiendo distribución uniforme de radio-226 en el sólido, por métodos de Geometría Euclidiana, dando como resultado la relación :

$$E_R = \frac{1}{4} R \frac{S}{V} = \frac{1}{4} R \rho_0 A \quad , \qquad r_0 >> R \qquad \text{------- (1)}$$

donde **R**:Alcance extrapolado del radón en el sólido

r_0: Radio del grano emanante

ρ_0: Densidad del material.

Esta aproximación puede mejorarse usando un modelo fractal de emanación de radón basado en la Geometría Fractal de Mandelbrot.

Un Fractal es un subconjunto R^n que es auto similar y cuya dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica.

Para una noción efectiva de fractal es importante definir lo que es dimensión fractal. Si suponemos que un conjunto **S** puede estar subdividido en **k** pedazos congruentes y cada uno de los cuales puede ser amplificado por un factor **M** para obtener nuevamente el conjunto completo **S**.

Entonces la dimensión fractal **D** de **S** es:

$$D = \frac{\log(k)}{\log(M)} \qquad \text{--------- (2)}$$

Se demuestra que ***La autosimilaridad sigue una ley de potencias.*** Si para un conjunto de puntos en d-dimensiones el numero de d-esferas de diámetro r necesarias para cubrir el conjunto es **N(r)**, se define : $N(r) \propto r^D$ **para** $r \to 0$ **-------- (3a)**.

donde **D** es la dimensión fractal del conjunto.

Se ha mostrado (Pfeifer *et al*) que la distribución tamaño de poro se escala como Br^{-D-1}. ---- **(3b)** donde **r** es el radio del poro, y **B** es constante de proporcionalidad.

DESARROLLO MATEMÁTICO DE SEMKOW PARA EL CALCULO DE PODER DE EMANACIÓN INCORPORANDO LA TEORÍA FRACTAL.

Para el estudio de la emanación del radón en sólidos consideramos un decaimiento isotrópico alfa de Ra-226. La energías de reculamiento E_n son de 103 y 86 KeV para Rn -220 y Rn -222, respectivamente. Los átomos de radón pierden su energía en condiciones elásticas con átomos del sólido (frenamiento nuclear).

Suponemos un intervalo Gaussiano del alcance y despreciamos el efecto túnel cuántico, la probabilidad normalizada de encontrar el átomo de radón en el sólido a una distancia r del punto de decaimiento esta dada por :

$$W(r) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m}\frac{e^{-\frac{(r-Rm)^2}{2\sigma_m{}^2}}}{erf(\frac{Rm}{\sqrt{2\sigma m}})} \qquad \text{--------- (4)}$$

donde :

σ_m : desviación estándar del alcance.

R_m : alcance medio proyectado.

erf( ): función error.

Consideramos la emanación de una placa infinita de espesor medio **r_0**.

El poder de emanación **E_R** es calculado integrando **(4)** sobre un segmento esférico que envuelve al sólido en estudio y promediando sobre el volumen de la placa.

Para **r_0** < 2 **R_{em}** hemos incluido la emanación de ambos lados de la placa, el resultado es:

$$E_R = \frac{1}{4x} \quad ; \quad x \geq 1 \qquad \text{----------- (5)}$$

$$E_R = \frac{1}{2}(1-x)+\frac{1}{8x}-\frac{(1-2x)^2 erf[b(1-2x)]}{8x erf[b]}-\frac{e^{-b^2(1-2x)^2}-e^{-b^2}}{8\sqrt{\pi}bx erf(b)}+$$
$$+\frac{x}{2\sqrt{\pi}b erf(b)}\sum_{n=0}^{\infty} b^{-n}\left[\gamma\left[\frac{n}{2}+1,b^2\right]-\gamma\left[\frac{n}{2}+1,b^2(1-2x)^2\right]\right], x<1 \qquad \text{----------(6)}$$

donde :

$$x = \frac{r_0}{R_m} \quad , \quad b = \frac{R_m}{\sqrt{2}\sigma_m} \quad \text{y} \quad \gamma(s,t) \text{ funcion gamma incompleta.}$$

si usamos los primeros términos de estos resultados, obtenemos.

$$E_R = \frac{1}{4x} \;, \; x \geq 0.5 \text{ o bien para } r_0 \geq \frac{R_m}{2} \qquad \text{-------- (7)}$$

$$E_R = 1-x, \; x < 0.5 \text{ o bien para } r_0 < \frac{R_m}{2} \qquad \text{-------- (8)}$$

las diferencias **(7)** y **(8)** con **(5)** y **(6)** son menores del 8% por lo que se consideran una buena aproximación y son mas fáciles de manejar.

Para calcular la probabilidad de escape **P** del radón integramos sobre la placa y usamos las ecuaciones **(7)** y **(8)** de lo que se obtiene :

$$P = \frac{KB}{(3-D)(D-2)} \frac{2^{D-3}}{4-D} R_m^{\ 3-D} \qquad \text{---------}(9)$$

en este calculo hemos despreciado los efectos de borde y utilizado la ecuación **(3b)** debido a que una porosidad considerable esta asociada con la superficie fractal.

Usando el volumen de una monocapa $V(a) = \frac{KB}{(3-D)(D-2)} a^{3-D}$ la probabilidad de escape toma la forma :

$$P = \frac{2^{D-3}}{4-D} V(R_m) \qquad \text{---------}(10)$$

$V(R_m)$ es el contenido tridimensional de Mandelbrot.

El poder de emanación es la razón de **P** al volumen del estado sólido, ya que se supuso una distribución de radio homogénea.

Usando **V(a)=aS**, donde **S** es el valor BET del área de la superficie, encontramos que el poder de emanación **E_R** es:

$$E_R = \frac{C}{4-D}\left(\frac{R_m}{2r_0}\right)^{3-D}, \ 2r_0 \geq R_m \qquad \text{----------------}(11)$$

donde **C** es un coeficiente de forma (C=1 para una placa). Como se esperaba si **D** = 2 obtenemos la ecuación **(5)**, para **D** = 3 tenemos emanación completa y la superficie esta formalmente compuesta de una capa unimolecular del sólido que llena el espacio. Superficies reales con **D** cercano a 3 no llenan el espacio.

APLICACIÓN DE LA RELACIONES DE SEMKOW EN EL CALCULO DE DIMENSIONES FRACTALES.

La ecuación **(11)** muestra que el poder de emanación se debe escalar como r_0^{D-3} , por lo que de una gráfica logarítmica de E_R vs.el tamaño de grano debemos ser capaces de deducir la dimensión fractal de la superficie emanante.

En la tabla I tenemos valores de tamaño de grano y poder de emanación así como sus dimensiones Fractales de diversos materiales. Los datos fueron tomados de [3].

Petchblenda		
Tamaño(μm)	E_R	Dimensión Fractal
200	.014	2.79
410	.012	
780	.0098	
1500	.009	

Biotita		
Tamaño(μm)	E_R	Dimensión Fractal
150	.012	2.73
280	.0091	
520	.0085	

Zirconio		
Tamaño(μm)	E_R	Dimensión Fractal
180	.0055	2.41
300	.0042	
450	.003	
790	.0025	
3100	.001	

Glauconita		
Tamaño(μm)	E_R	Dimensión Fractal
150	.005	2.39
240	.0038	
690	.002	
3000	.0008	

CONCLUSIONES

Del articulo de Semkow [5] los valores para cristales volcánicos y para Petchblenda son **D** = 2.17 y **D** = 2.83 respectivamente, por lo que podemos concluir que la vecindad de valores de E_R entre 10^{-2} y 10^{-3} son característicos de una distribución homogénea de **Ra**-226; los datos encontrados en la literatura también caen en ese intervalo, queda aun por investigar los efectos de borde de las placas y utilizar otros términos de la ecuación **(6)** para tener una precisión mayor, además convendría graficar la estructura fractal de los valores obtenidos en términos de la definición de **D**.

REFERENCIAS.

[1] B.B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, (Freeman, Neyork, 1983).

[2] P.Pfeifer, Y.J. Wu, M.W. Cole, and J. Krim, Phys. Rev. lett. **62**, 1997(1989)

[3] A.B. Tanner, Radon Migration in the Ground: A Supplemntary Review, CONF-780422 (Vol. 1) Technical Information Center, U.S. Departament of Energy. 1980.

[4] K.Falconer, Fractal Geometry, John Wiley and Sons, 1990.

[5] T.M. Semkow, Fractal Model of Radon Emanation from solids, Phys, Rev. Lett. **66** (1991).

ABSTRACT

The objective of this work is to introduce the Fractal Geometry concept to the study of gaseous emanations in solids, specially with reference to radon emission in mineral grains.

The basic elements of fractals theory are developed. A fractal is defined as an autosimilar subassemby, wich the fractal dimension is greater than the topological dimension. Starting from this, and making a brief description of the physicals basis of radon emission in solids, a model between emanation power (E_R) and the ratio **s/v** (surface to volume), is founded.

A Gaussian model is assumed for extent of recoil form alpha decay of **Ra**-226. Using the results of Pfeifer et al (1989), it is of obtained that distribution of pore size is scaled like Br^{-D-1}, where **D**: fractal dimension, **B:** constant and **r**: pore radius.

After an adequate mathematics expansion, it its founded that the expresions for emanation power is scaled like r_0^{D-3} (r_0 grain radius). We may concluded that if we have a logarithmic graph of E_R vs size of grain we can deduce the fractal dimension of the emanation surface.

The experimental data of different materials provides an interval into fractal dimension **D** , between 2.1 to 2.86.