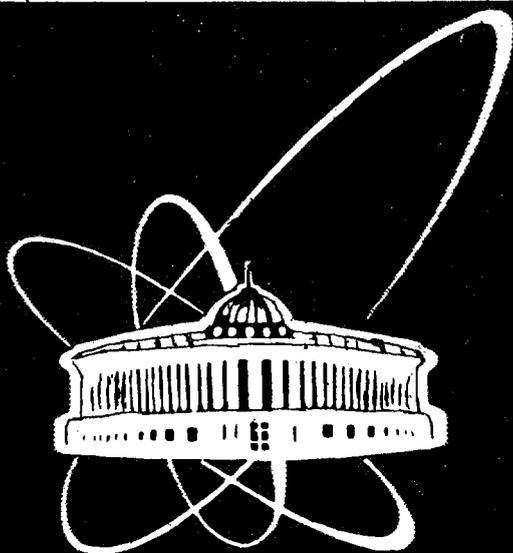




XJ9700256



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2-97-134

Д.В.Парамонов*, Н.Н.Черникова*, Н.С.Шавохина

ПРИВЕДЕНИЕ УРАВНЕНИЯ
ДИРАКА — ФОКА — ИВАНЕНКО
В МИРЕ ЛОБАЧЕВСКОГО
К СПЕЦИАЛЬНОМУ ВИДУ

*Московский государственный университет

29 - 10 ①

1997

Теория спинорного поля в общем случае четырёхмерного риманова мира изложена в обзоре [1]. Если в мире выбраны какие-либо ортогональные координаты ξ, η, ζ, τ и, следовательно, его метрика $d s^2$ записана в виде

$$d s^2 = h_1^2 d \xi^2 + h_2^2 d \eta^2 + h_3^2 d \zeta^2 - h_0^2 d \tau^2, \quad (1)$$

то в базисе Ламе

$$f^0 = h_0 d \tau, \quad f^1 = h_1 d \xi, \quad f^2 = h_2 d \eta, \quad f^3 = h_3 d \zeta \quad (2)$$

уравнение Дирака-Фока-Иваненко для спинорного поля ψ записывается в следующем виде (см. [1, с. 1481]):

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{H^\mu}{\sqrt{h} h_\mu} \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \left(\sqrt{\frac{h}{h_\mu}} \psi \right) = \frac{i m c}{\hbar} K \psi, \quad (3)$$

где $h = h_0 h_1 h_2 h_3$; $\xi^0 = \tau, \xi^1 = \xi, \xi^2 = \eta, \xi^3 = \zeta$; H^μ и K - матрицы

$$H^0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad H^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad H^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$H^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad K = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Эти матрицы выбраны в соответствии с книгой [2, с. 195] Э.Картана, кто "является творцом общей теории спиноров, основы которой он опубликовал в 1913 г. в своем классическом исследовании по теории представлений простых групп [3]." (Цитировано по предисловию к русскому переводу книги [2], написанному казанским геометром П.Широковым, рекомендовавшим книгу [2] не только начинающим математикам, но и физикам-теоретикам, желающим углубить свои знания в области теории спиноров).

Частным случаем риманова мира является мир Лобачевского с метрикой

$$d s^2 = d l^2 - c^2 d t^2, \quad (5)$$

Здесь $d l^2$ – метрика Лобачевского, c – скорость света, t – время. Например, в сферических координатах

$$d l^2 = d \rho^2 + r^2 d \theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d \varphi^2, \quad (6)$$

где

$$r = k \operatorname{sh} \frac{\rho}{k}, \quad (7)$$

k – константа Лобачевского. Выбирая базис Ламе

$$f^0 = c d t, \quad f^1 = d \rho, \quad f^2 = r d \theta, \quad f^3 = r \sin \theta d \varphi, \quad (8)$$

запишем уравнение Дирака–Фока–Иваненко для спинорного поля ψ в пространстве Лобачевского в следующем виде:

$$\frac{\hbar^0}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\hbar^1}{r} \frac{\partial}{\partial \rho} (r \psi) + \frac{\hbar^2}{r \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sqrt{\sin \theta} \psi) + \frac{\hbar^3}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = \frac{i m c}{\hbar} \kappa \psi. \quad (9)$$

Приведём это уравнение к специальному виду, подобному тому, который установил Дирак в 1935 году [4]. В работе [5] на примере сферического мира де Ситтера разработана процедура такого приведения. Она сводится к переходу от базиса f к базису dx .

Следуя этой процедуре, положим

$$\begin{aligned} x &= R \operatorname{sh} \frac{\rho}{k} \sin \theta \cos \varphi, & z &= R \operatorname{sh} \frac{\rho}{k} \cos \theta, \\ y &= R \operatorname{sh} \frac{\rho}{k} \sin \theta \sin \varphi, & u &= R \operatorname{ch} \frac{\rho}{k}. \end{aligned} \quad (10)$$

Так как

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2 = \left(\frac{R}{k}\right)^2 dl^2 - dR^2, \quad (11)$$

то в четырёхмерном псевдоевклидовом пространстве с декартовыми координатами

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = u \quad (12)$$

внутренняя геометрия трёхмерной поверхности, задаваемой уравнениями (10) при $R = k$, совпадает с геометрией Лобачевского.

Наряду с дифференциальными формами (8) введём форму $f^4 = dR$. Согласно (11) на поверхности $R = k$

$$\eta_{ab} dx^a dx^b = \eta_{ab} f^a f^b. \quad (13)$$

Здесь по индексам a и b подразумевается суммирование от 1 до 4. Числа η_{ab} равны 0, если $a \neq b$, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{44} = -1$. Они составляют метрический тензор четырёхмерного псевдоевклидова пространства в базисе dx . Ввиду равенства (13) переход от базиса f к базису dx достигается преобразованием Лоренца вида

$$f^a = L_b^a dx^b.$$

Дифференцируя функции (10), мы можем конструктивно получить обратное преобразование

$$dx^a = \tilde{L}_b^a f^b.$$

Взаимобратные матрицы L и \tilde{L} связаны условием ортогональности

$$\eta_{as} \tilde{L}_b^s = \eta_{bs} L_a^s. \quad (14)$$

Далее удобно ввести матрицы

$$H_1 = H^1, \quad H_2 = H^2, \quad H_3 = H^3, \quad H_4 = -iK, \quad H^4 = iK. \quad (15)$$

Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$H_a = \eta_{ab} H^b, \quad (16)$$

$$H_a H_b + H_b H_a = 2 \eta_{ab}. \quad (17)$$

К тому же,

$$H_a H^0 + H^0 H_a = 0, \quad H^0 H^0 = -1. \quad (18)$$

Можно подобрать такую матрицу S , что будут выполняться равенства

$$\begin{aligned} S H^a S^{-1} &= L_b^a H^b, & S^{-1} H^a S &= \tilde{L}_b^a H^b, \\ S^{-1} H_a S &= L_a^b H_b, & S H_a S^{-1} &= \tilde{L}_a^b H_b. \end{aligned} \quad (19)$$

Если обозначить

$$dX = H_a dx^a, \quad F = H_a f^a, \quad (20)$$

то получится, что

$$dX = S F S^{-1}, \quad F = S^{-1} dX S. \quad (21)$$

Спинор ψ при переходе от базиса f к базису dx преобразуется подстановкой

$$\Xi = S \psi, \quad (22)$$

так что

$$dX \Xi = S F \psi. \quad (23)$$

Дифференцируя (10), получаем преобразование $dx^a = \tilde{L}_b^a f^b$:

$$\begin{aligned} dx &= ch \frac{\rho}{k} \sin\theta \cos\varphi f^1 + \cos\theta \cos\varphi f^2 - \sin\varphi f^3 + \frac{x}{k} f^4, \\ dy &= ch \frac{\rho}{k} \sin\theta \sin\varphi f^1 + \cos\theta \sin\varphi f^2 + \cos\varphi f^3 + \frac{y}{k} f^4, \\ dz &= ch \frac{\rho}{k} \cos\theta f^1 - \sin\theta f^2 + \frac{z}{k} f^4, \\ du &= sh \frac{\rho}{k} f^1 + \frac{u}{k} f^4. \end{aligned} \quad (24)$$

Отсюда находим

$$k \tilde{L}_4^a = x^a, \quad (25)$$

а значит, в соответствии с последней из формул (19), получаем

$$k S H_4 S^{-1} = X, \quad (26)$$

где

$$X = H_a x^a, \quad (27)$$

то есть, в развёрнутом виде,

$$S(-iK)S^{-1} = sh \frac{\rho}{k} [\sin \theta (H^1 \cos \varphi + H^2 \sin \varphi) + H^3 \cos \theta] - iKch \frac{\rho}{k}. \quad (28)$$

В данном случае матрица

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_1^1 & \tilde{L}_2^1 & \tilde{L}_3^1 & \tilde{L}_4^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tilde{L}_1^4 & \tilde{L}_2^4 & \tilde{L}_3^4 & \tilde{L}_4^4 \end{pmatrix} \quad (29)$$

разлагается в произведение $\tilde{L} = \tilde{L}_1 \tilde{L}_2 \tilde{L}_3 \tilde{L}_4$ четырёх матриц

$$\tilde{L}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ch \rho/k & sh \rho/k \\ 0 & 0 & sh \rho/k & ch \rho/k \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Соответственно и матрицы S и S^{-1} разлагаются в произведения

$$S = S_1 S_2 S_3 S_4, \quad S^{-1} = S_4^{-1} S_3^{-1} S_2^{-1} S_1^{-1}, \quad (31)$$

где

$$S_1 = \cos \frac{\varphi}{2} + H_2 H_1 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad S_1^{-1} = \cos \frac{\varphi}{2} + H_1 H_2 \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$S_2 = \cos \frac{\theta}{2} + H_1 H_3 \sin \frac{\theta}{2}, \quad S_2^{-1} = \cos \frac{\theta}{2} + H_3 H_1 \sin \frac{\theta}{2},$$

$$S_3 = ch \frac{\rho}{2k} + H_4 H_3 sh \frac{\rho}{2k}, \quad S_3^{-1} = ch \frac{\rho}{2k} + H_3 H_4 sh \frac{\rho}{2k},$$

$$S_4 = \frac{1}{2} (H_1 - H_3) (H_2 - H_3), \quad S_4^{-1} = \frac{1}{2} (H_2 - H_3) (H_1 - H_3). \quad (32)$$

Составляем следующую таблицу:

$S_1^{-1} H^1 S_1 = H^1 \cos \varphi - H^2 \sin \varphi ,$	$S_2^{-1} H^1 S_2 = H^1 \cos \theta + H^3 \sin \theta ,$
$S_1^{-1} H^2 S_1 = H^1 \sin \varphi + H^2 \cos \varphi ,$	$S_2^{-1} H^2 S_2 = H^2 ,$
$S_1^{-1} H^3 S_1 = H^3 ,$	$S_2^{-1} H^3 S_2 = - H^1 \sin \theta + H^3 \cos \theta ,$
$S_1^{-1} H^4 S_1 = H^4 .$	$S_2^{-1} H^4 S_2 = H^4 .$
$S_3^{-1} H^1 S_3 = H^1 ,$	$S_4^{-1} H^1 S_4 = H^2 ,$
$S_3^{-1} H^2 S_3 = H^2 ,$	$S_4^{-1} H^2 S_4 = H^3 ,$
$S_3^{-1} H^3 S_3 = H^3 \operatorname{ch} \frac{\rho}{K} + H^4 \operatorname{sh} \frac{\rho}{K} ,$	$S_4^{-1} H^3 S_4 = H^1 ,$
$S_3^{-1} H^4 S_3 = H^3 \operatorname{sh} \frac{\rho}{K} + H^4 \operatorname{ch} \frac{\rho}{K} .$	$S_4^{-1} H^4 S_4 = H^4 .$

(33)

С помощью этой таблицы находим следующее представление преобразования (24):

$$\begin{aligned}
 S^{-1} H^1 S &= \operatorname{ch} \frac{\rho}{K} \sin \theta \cos \varphi H^1 + \cos \theta \cos \varphi H^2 - \sin \varphi H^3 + \frac{X}{K} H^4, \\
 S^{-1} H^2 S &= \operatorname{ch} \frac{\rho}{K} \sin \theta \sin \varphi H^1 + \cos \theta \sin \varphi H^2 + \cos \varphi H^3 + \frac{Y}{K} H^4, \\
 S^{-1} H^3 S &= \operatorname{ch} \frac{\rho}{K} \cos \theta H^1 - \sin \theta H^2 + \frac{Z}{K} H^4, \\
 S^{-1} H^4 S &= \operatorname{sh} \frac{\rho}{K} H^1 + \frac{U}{K} H^4.
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Умножив последние равенства слева на S и справа на S^{-1} , из получающейся в результате этого системы линейных уравнений найдём

$$\begin{aligned}
 S H^1 S^{-1} &= [(H^1 \cos \varphi + H^2 \sin \varphi) \sin \theta + H^3 \cos \theta] \operatorname{ch} \frac{\rho}{K} - H^4 \operatorname{sh} \frac{\rho}{K}, \\
 S H^2 S^{-1} &= (H^1 \cos \varphi + H^2 \sin \varphi) \cos \theta - H^3 \sin \theta, \\
 S H^3 S^{-1} &= - H^1 \sin \varphi + H^2 \cos \varphi, \\
 S H^4 S^{-1} &= - \frac{X}{K}.
 \end{aligned}
 \tag{35}$$

Теперь введём следующие три оператора - три векторных поля в пространстве Лобачевского:

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial \rho} , \quad e_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} , \quad e_3 = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} . \quad (36)$$

С помощью таблицы (33) нетрудно доказать, что

$$S^{-1} e_1 S = e_1 + \frac{1}{2k} H_1 H^4 ,$$

$$S^{-1} e_2 S = e_2 + \frac{1}{2k} H_2 H^4 + \frac{1}{2k} H_2 H^1 \operatorname{cth} \frac{\rho}{k} , \quad (37)$$

$$S^{-1} e_3 S = e_3 + \frac{1}{2k} H_3 H^4 + \frac{1}{2k} H_3 H^1 \operatorname{cth} \frac{\rho}{k} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{2r} H_3 H^2 ,$$

а значит,

$$\sum_{\nu=1}^3 H^\nu S^{-1} e_\nu S = \sum_{\nu=1}^3 H^\nu e_\nu + \frac{H^1}{r} \frac{dr}{d\rho} + \frac{H^2}{r\sqrt{\sin \theta}} \frac{d\sqrt{\sin \theta}}{d\theta} + \frac{3H^4}{2k} . \quad (38)$$

Умножая это равенство справа на ψ и учитывая подстановку (22), получаем

$$\frac{H^1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial \rho} + \frac{H^2}{r\sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial(\sqrt{\sin \theta} \psi)}{\partial \theta} + \frac{H^3}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^3 H^\nu S^{-1} e_\nu \psi + \frac{3}{2k} H^4 S^{-1} \psi . \quad (39)$$

Подставляя это равенство в уравнение ДФИ (9), полученный результат умножая слева на $k S$, и затем учитывая (26), преобразуем (9) к виду

$$H^0 \frac{k}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{\nu=1}^3 k S H^\nu S^{-1} e_\nu \psi + \left(\mathfrak{R} + \frac{3}{2} \right) \frac{\chi}{k} \psi = 0 , \quad (40)$$

где

$$\mathfrak{R} = \frac{mck}{\hbar} . \quad (41)$$

Чтобы подсчитать входящую в (40) сумму \sum , наряду с векторными полями (36) введём векторные поля $\partial/\partial x^a$, взятые при $R = k$, и поле

$$e_4 = \partial/\partial R = k^{-1} x^b \partial/\partial x^b . \quad (42)$$

Так как $L_b^a e_a = \partial/\partial x^b$ и $k S H^4 S^{-1} = -x_a H^a$ (см. (35)), то

$$\sum_{\nu=1}^3 k S H^{\nu} S^{-1} e_{\nu} = k S H^a S^{-1} e_a - k S H^4 S^{-1} e_4 = H^a m_a, \quad (43)$$

где

$$m_1 = k \partial/\partial x + x \partial/\partial R, \quad m_2 = k \partial/\partial y + y \partial/\partial R, \quad m_3 = k \partial/\partial z + z \partial/\partial R, \\ m_4 = k \partial/\partial u - u \partial/\partial R \quad (44)$$

суть генераторы конформных преобразований (иначе – конформные поля Киллинга) пространства Лобачевского. В результате преобразуем уравнение (40) к следующему специальному виду:

$$H^0 \frac{k}{c} \frac{\partial \Xi}{\partial t} + H^a m_a \Xi + \left(\mathfrak{M} + \frac{3}{2} \right) \frac{\chi}{K} \Xi = 0. \quad (45)$$

К этому добавим, что согласно (35) в сферических координатах

$$m_1 = ch \frac{\rho}{K} \sin \theta \cos \varphi k e_1 + \cos \theta \cos \varphi k e_2 - \sin \varphi k e_3, \\ m_2 = ch \frac{\rho}{K} \sin \theta \sin \varphi k e_1 + \cos \theta \sin \varphi k e_2 + \cos \varphi k e_3, \quad (46) \\ m_3 = ch \frac{\rho}{K} \cos \theta k e_1 - \sin \theta k e_2, \quad m_4 = -sh \frac{\rho}{K} k e_1.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шавохина Н.С. – ЭЧАЯ, 1996, т. 27, вып. 5, с. 1472.
2. Картан Э. – Теория спиноров. (Перевод с французского под редакцией профессора Л.А.Широкова). М.: ИЛ, 1947.
3. Cartan E. – Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane. Bull. Soc. Math. de France, 41, 1913, с. 53–96.
4. Dirac P.A.M. – Ann. of Mathematics, 1935, vol. 36, No. 3, p. 657.
5. Шавохина Н.С. – ТМФ, 1972, т. 10, № 3, с. 412.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 апреля 1997 года.

Парамонов Д.В., Черникова Н.Н., Шавохина Н.С.
Приведение уравнения Дирака — Фока — Иваненко
в мире Лобачевского к специальному виду .

P2-97-134

Пространство Лобачевского рассматривается как полость гиперболоида в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Приведение уравнения Дирака — Фока — Иваненко к специальному виду сводится к переходу от базиса Ламе в пространстве Лобачевского к декартову базису объемлющего псевдоевклидова пространства.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод авторов

Paramonov D.V., Chernikova N.N., Shavokhina N.S.
The Reduction of the Dirac — Fock — Ivanenko Equation
to a Special Form in the Lobachevsky Space-Time

P2-97-134

The Lobachevsky space is considered as a hyperboloid's sheet in the four-dimensional pseudo-Euclidean space. The Dirac — Fock — Ivanenko equation is reduced to a special form by passing from Lamé basis in the Lobachevsky space to the Cartesian basis of the enveloping pseudo-Euclidean space.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 23.04.97

Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд.листов 0,8

Тираж 460. Заказ 49911. Цена 960 р.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области