

NC



FR9701042

Institut  
de Physique  
Nucléaire  
de Lyon

Université Claude Bernard

IN2P3 - CNRS

Gestion INIS  
Doc. enreg. le : 18/10/96  
N° TRN : FR.9701042  
Destination : I,I+D,D

LYCEN 9616  
Juillet 1996

**Polarisations longitudinale et transverse dans les  
réactions inélastiques profondes**

Cours donné par X. Artru pour le "Troisième cycle de la  
physique en Suisse Romande"

Avril - Mai 1995

Notes par A. Bressan

29 - 16

# Table des Matières

Introduction.....	i
Le spin relativiste.....	1
1.1 Comparaison spin relativiste/spin non-relativiste.....	1
1.2 Spin des fermions relativistes .....	3
1.2.1 Équation d'onde .....	3
1.2.2 Onde plane d'hélicité $\lambda=\pm 1/2$ .....	4
1.2.3 États de transversité .....	5
1.2.4 État d'impulsion et de spin d'orientations quelconques .....	6
1.2.5 Analogie avec états de polarisations circulaires et linéaires du photon.....	8
1.3 Matrice densité de spin relativiste. Spin 1/2.....	10
1.3.2 Généralisation relativiste (formulation non covariante) .....	10
1.3.5 Cas d'une masse non nulle .....	12
1.3.6 Cas ultra relativiste ( $m/E \rightarrow 0$ ).....	14
1.4 Arbitraire “de jauge” du quadrivecteur transversité ( $m=0$ ) .....	14
1.5 Polarisation du spin 1 massif .....	16
1.5.1 Cas non relativiste .....	16
1.5.2 Généralisation relativiste .....	18
1.6 Polarisation du spin 1 sans masse.....	20
1.6.1 Cas du photon, considéré comme cas limite $m \rightarrow 0$ .....	20
1.6.2 Opérateur densité des photons .....	20
1.6.3 Décomposition de Stokes de la matrice densité .....	21
1.6.4 Matrice densité “minkovskienne” du photon. ....	22
Asymétries de spin dans les collisions $2 \rightarrow 2$ .....	23
2.1 Terminologie.....	23

2.1.1	Asymétries ‘à 1 spin’ ou ‘pouvoir d'analyse’ .....	24
2.1.2	Asymétries ‘à 2 spins’ .....	24
2.2	Conséquences de l'invariance chirale .....	25
2.3	Notation de la “différentiation par rapport au spin” .....	30
	Asymétries de spin dans les collisions inélastiques.....	33
3.1	Totalement polarisé, totalement exclusif .....	33
3.2	Généralisation .....	34
3.2.1	Cas totalement exclusif mais partiellement polarisé .....	34
3.2.2	Cas partiellement ou totalement inclusif .....	34
3.2.3	Lien avec les $\sigma$ et $\delta\sigma$ .....	36
3.3	Matrices intervenant dans les asymétries de spin .....	36
3.4	Analyse “dans les voies t” .....	37
3.4.1	Croisement $s \rightarrow t$ des diagrammes d'unitarité .....	37
3.4.2	Application aux asymétries de spin transverse des sous processus durs .....	39
	Collision dures inélastiques .....	41
4.1	Distributions partoniques dans les hadrons .....	41
4.1.1	Composantes de Fock de la fonction d'onde du hadron .....	41
4.1.2	Densité partoniques (à hélicités données) .....	42
4.1.3	Limite “ $\bar{p} \rightarrow \infty$ ” .....	42
4.1.4	Formulation sur le plan nul (ou “cône de lumière”) .....	43
4.2	Dépendance en spin des densités partoniques .....	44
4.2.1	Choix d'une description .....	44
4.2.2	Les différentiations par rapport au spin .....	45
4.2.3	La matrice densité.....	46
4.2.4	Voie t .....	47
4.3	Positivité, inégalité de Soffer.....	48

4.4	Modèle-jouet pour $q(x)$ , $\Delta_L q(x)$ et $\Delta_T q(x)$ .....	49
4.5	Fonctions de fragmentation .....	51
	Collision dures inélastiques .....	53
5.1	Factorisation .....	53
5.1.1	Premier exemple: production inclusive à grand $\bar{p}_T$ , $A + B \rightarrow C + X$ .....	54
5.1.2	Autres types de réaction inélastiques à grand transfert .....	56
5.2	Asymétries à 1 spin .....	58
5.3	Asymétries de spin longitudinal doubles .....	60
5.4	Asymétries de spin transverse .....	60
5.4.1	Drell-Yan polarisé transverse .....	61
5.4.2	Généralisation à des polarisations quelconques .....	62
5.4.3	Point de vue expérimental .....	63
5.4.4	Electroproduction semi-inclusive polarisée transverse .....	64
	Polarimétrie des quarks.....	67
6.1	Mesure de l'hélicité .....	67
6.2	Mesure de la transversité .....	68
	Appendice A .....	71
A.1	Convention de phase des états d'hélicité.....	71
A.2	Opération parité .....	71
A.3	Renversement du temps .....	72
A.4	Invariance par rotation (autour de $\hat{z}$ ) de la matrice de transition .....	72
A.5	Propriétés de symétrie de la matrice $\Sigma$ .....	72
A.6	Permutation de particules identiques .....	74
	Bibliographie .....	75

## Introduction

Les réactions inélastiques profondes permettent d'une part de déterminer les couplages fondamentaux entre constituants élémentaires (quarks, leptons, bosons de jauge), d'autre part de comprendre l'interface hadron-parton. L'observation de la dépendance en spin, quand elle est techniquement réalisable, apporte des informations nouvelles extrêmement précieuses.

La polarisation d'une particule de spin 1/2 possède trois composantes: une longitudinale (hélicité) et deux transverses (bi-vecteur transversité). Jusqu'à présent, pratiquement seule la distribution d'hélicité des quarks dans le nucléon,  $g_1(x)$ , a été mesurée dans la diffusion inélastique profonde de leptons sur le nucléon (à l'exception d'une mesure récente de  $g_2(x)$ ). La mesure de la distribution de transversité  $h_1(x)$  devrait apporter une information non redondante sur la structure du nucléon. Ainsi la "charge tenseur"

$$\langle \bar{\psi}_q | \sigma^{\mu\nu} | \psi_q \rangle = \int_0^1 h_1(x) dx$$

nous donnerait la contribution du moment magnétique des quarks-courant au moment magnétique du nucléon.

Ce cours est une introduction aux effets dominants de spin longitudinal et transverse dans les réactions inélastiques profondes. Seuls les effets présent au "leading twist" seront abordés. Les masses et les impulsions transverses intrinsèques des partons seront négligées. Nous nous placerons dans le cadre du modèle naïf des partons et ne parlerons ni de l'évolution avec  $Q^2$  des distributions partoniques, ni de l'anomalie axiale concernant  $g_1(x)$ , ni de la fonction de structure  $g_2(x)$ . Nous nous attacherons surtout à faire ressortir les spécificités respectives des polarisations longitudinales et transverses. Aucune spécialisation dans la physique des spin n'est exigée du lecteur au départ.

L'auteur tient à remercier les chercheurs du Département de Physique Nucléaire et Corpusculaire de l'Université de Genève qui ont permis la réalisation de ce cours ainsi que les personnes qui ont pris part à sa difficile mise en page.

# Chapitre 1

## Le spin relativiste

Ce chapitre traite de la description du spin d'une particule isolée du spin  $\frac{1}{2}$  ou 1. Les points abordés seront:

- différence relativiste / non relativiste
- spin  $\frac{1}{2}$  (approche de Weyl), états d'hélicité
- états de transversité
- matrice densité (spin  $\frac{1}{2}$ ), limite  $m \rightarrow 0$
- états et matrice densité de spin 1 (cas massif). Polarisation vectorielle et tensorielle
- limite  $m \rightarrow 0$  pour le spin 1

### 1.1 Comparaison spin relativiste/spin non-relativiste

Dans le cas non relativiste, nous avons les propriétés suivantes

- 1) Le spin  $\vec{S}$  commute avec un boost galiléen (idem pour les variables relatives:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \\ \vec{k} = \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{k} \end{cases}$$

d'un état lié)

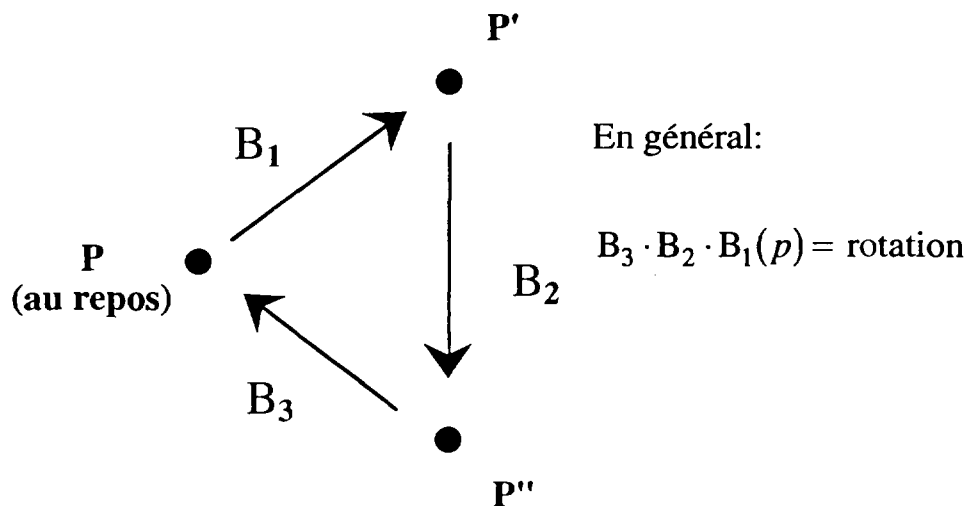
$$\text{boost galiléen} \left\{ \begin{array}{l} \vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{v}_B t \\ \vec{p} \rightarrow \vec{p} + m\vec{v}_B \\ \psi(\vec{x}) \rightarrow \psi(\vec{x}) \exp(im\vec{v}_B \cdot \vec{x}) \end{array} \right.$$

- 2) Tous les  $2s+1$  états propres de l'hélicité  $\lambda \equiv \frac{\vec{p} \cdot \vec{S}}{|\vec{p}|}$  sont permis
- 3) l'hélicité est invariante par rotation mais **non par boost**
- 4) La polarisation d'un constituant est colinéaire (et proportionnelle) à celle de la particule composite (conséquence du théorème de Wigner-Eckart):  
 $\langle \vec{S}_{e^-} \rangle = \text{const.} \times \langle \vec{S}_{\text{atome}} \rangle$

Dans le cas relativiste, les propriétés 1)–4) sont à revoir:

1') –  $\vec{r}$  peut changer d'orientation par boost (contraction de Lorentz).  
 Idem pour  $\vec{k}$  et  $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{k}$ .

- un produit de boost peut être équivalent à une rotation pure.  
 Considérons une particule au repos de quadri-impulsion  $p^\mu$  ( $\vec{p} = 0, p^0 = m$ ) et 3 boost  $B_1, B_2, B_3$  tels que l'action successive de  $B_1, B_2, B_3$  ramène la particule au repos:  
 $B_3 \cdot B_2 \cdot B_1(p) = p$



- 2') – le photon n'a que 2 hélicités permises :  $\pm 1$   
 – le neutrino n'a peut-être qu'une hélicité permise
- 3') – un boost laisse invariante l'hélicité d'une particule de masse nulle.
- 4') – Dans un nucléon de haute énergie,

$$\frac{\bar{P}_L^q}{P_L^N} \neq \frac{\bar{P}_T^q}{P_T^N}$$

## 1.2 Spin des fermions relativistes

### 1.2.1 Équation d'onde

Il existe 3 principales représentations de la fonction d'onde relativiste de spin 1/2:

- Weyl: recommandée pour  $m = 0$ , une seule hélicité
- Dirac: recommandée pour particule massive non relativiste
- Majorana: recommandée pour champ réel (particule auto-conjuguée de charge)

Le modèle standard prend comme champs de base des champs de Weyl,

d'équation  $E\varphi = (\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi$  champ droit (hélicité +1/2)

ou  $E\varphi = -(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \varphi$  champ gauche (hélicité -1/2)

**L'antiparticule a l'hélicité opposée de la particule.**

Exercice: soit  $\varphi(x)$  un champ de spineur à 2 composantes droit

- quelle équation différentielle vérifie-t-il?
- montrer que le 4-courant

$$J^\mu = (\varphi^\dagger \varphi, \varphi^\dagger \vec{\sigma} \varphi)$$

est conservé.



La **masse** est une “perturbation” qui couple un champ droit  $\varphi_R$  et un champ gauche  $\varphi_L$

$$\Psi = \varphi_R \oplus \varphi_L$$

$$H\Psi = E \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & m \\ m & -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_L \end{pmatrix}$$

Equation de Dirac en représentation spinorielle,

ce qui s'écrit  $H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m$ , avec

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} = \text{hélicité} \times \text{nombre fermionique (m = 0)} \\ = \text{chiralité (m quelconque)} \end{cases}$$

### 1.2.2 Onde plane d'hélicité $\lambda = \pm 1/2$

Elle est de la forme

$$\psi(\mathbf{x}) = u(\vec{p}, \lambda) e^{-ip \cdot x},$$

avec

$$u(\vec{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{E + 2\lambda|\vec{p}|} \xi(\vec{p}, \lambda) \\ \sqrt{E - 2\lambda|\vec{p}|} \xi(\vec{p}, \lambda) \end{pmatrix}$$

(en représentation spinorielle), où  $\xi(\vec{p}, \lambda)$  est un spineur à deux composantes vérifiant

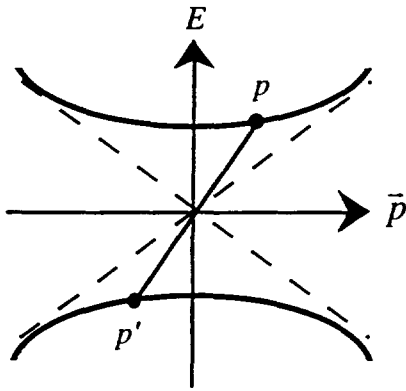
$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \xi(\vec{p}, \lambda) = 2\lambda \xi(\vec{p}, \lambda)$$

Nous avons pris pour  $u$  et  $\psi$  la normalisation covariante:

$$\langle \bar{p}, \lambda | \bar{p}', \lambda' \rangle = (2\pi)^3 \delta(\bar{p} - \bar{p}') 2E \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$u^\dagger(\bar{p}, \lambda) u(\bar{p}, \lambda) = 2E$$

Antiparticule = “trou” dans la mer des états d'énergie négative. Considérons une fonction d'onde plane



– d'énergie négative  $E' = -E$  ( $E > 0$ )

– d'impulsion  $\bar{p}' = -\bar{p}$

– de spin selon  $\bar{p}$ :  $\frac{\vec{S} \cdot \bar{p}}{|\bar{p}|} = -\lambda$

Elle s'écrit  $\psi(x) = e^{ip \cdot X} v(\bar{p}, \lambda)$ , avec

$$v(\bar{p}, \lambda) = \begin{pmatrix} \sqrt{E - 2\lambda|\bar{p}|} & \xi(\bar{p}, -\lambda) \\ -\sqrt{E + 2\lambda|\bar{p}|} & \xi(\bar{p}, -\lambda) \end{pmatrix}$$

(en représentation spinorielle). L'état correspondant inoccupé  $\equiv$  antiparticule d'énergie  $E$ , impulsion  $\bar{p}$  et hélicité  $\lambda$ .

Les  $\xi(\bar{p}, \lambda)$ , donc les états d'hélicité, sont définis à une phase près. L'appendice A donne la convention de phase de Jacob et Wick ainsi que l'action des opérateurs parité et renversement du temps sur les états d'hélicité.

### 1.2.3 États de transversité

Nous n'avons pas le droit de faire tourner le spineur  $\xi$  sans faire en même temps tourner  $\bar{p}$ : l'équation de Dirac ne serait plus vérifiée (contrairement au cas N.R.). Cependant, pour une particule au repos, avec le choix standard des spineurs de Pauli, nous pouvons écrire:

$$|\hat{x}\rangle = \frac{|\hat{z}\rangle + |-\hat{z}\rangle}{\sqrt{2}}$$

Plus généralement, pour un azimut quelconque  $\hat{n}_\varphi = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$

$$|\hat{n}_\varphi\rangle = \frac{|\hat{z}\rangle + e^{i\varphi} |-\hat{z}\rangle}{\sqrt{2}}$$

[définitions:  $|\hat{n}_\varphi\rangle$  est un vecteur propre de  $\vec{\sigma} \cdot \hat{n}_\varphi$ ; le symbole “^” signifie vecteur unitaire]

Par analogie, nous **définissons** les états de transversité pour une particule d'impulsion  $\vec{p}$  dirigée selon  $+\hat{z}$ :

$$|\vec{p}, \hat{x}\rangle = \frac{|\vec{p}, \lambda = +\frac{1}{2}\rangle + |\vec{p}, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle}{\sqrt{2}}$$

Pour un azimut quelconque,

$$|\vec{p}, \hat{n}_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |\vec{p}, \lambda = +\frac{1}{2}\rangle + e^{i\varphi} |\vec{p}, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle \right\}$$

[Pour le cas où  $\vec{p}$  n'est pas parallèle à  $\hat{z}$ , cf. paragraphe suivant]

### 1.2.4 État d'impulsion et de spin d'orientations quelconques

Supposons d'abord l'impulsion dirigée selon  $\hat{z}$ , mais la direction du spin quelconque. Les deux états d'hélicités sont  $|+\hat{z}\rangle$  et  $|-\hat{z}\rangle$ . Dans le cas non relativiste, nous avons:

$$\hat{n} = \text{vecteur unitaire de direction } (\theta_n, \varphi_n) \quad \theta_n \in [0, \pi]$$

$$|\hat{n}\rangle = R(\text{axe} = \hat{z} \times \hat{n}, \text{angle} = \theta_n) |\hat{z}\rangle$$

$$= R_z(\varphi_n) R_y(\theta_n) R_z(-\varphi_n) |\hat{z}\rangle$$

où les rotations  $R$  ne portent que sur le spin, non sur l'impulsion, (ce ne sont pas des vraies rotations, au sens physique), soit

$$|\hat{n}\rangle = \cos\frac{\theta_n}{2}|\hat{z}\rangle + \sin\frac{\theta_n}{2}e^{i\varphi_n}|-\hat{z}\rangle$$

Dans le cas relativiste, nous prenons ceci comme définissant l'état de polarisation  $\hat{n}$  (avec  $\vec{p}$  dirigé selon  $\hat{z}$ ).

[On aurait pu omettre le  $R_z(-\varphi_n)$ , ce qui est un autre choix de phase. L'avantage de la définition ci-dessus est que ce spineur est une fonction continue et analytique de  $\theta$  et  $\varphi$  sauf en un point ( $\theta = \pi$ )]

- cette définition coïncide avec les états de polarisation  $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2}\hat{n}$  dans le cas non-relativiste;
- dans le cas relativiste, avec  $m \neq 0$ , c'est l'état obtenu par boost de long de  $\hat{z}$  à partir de l'état  $|\vec{p} = 0; \hat{n}\rangle$ ;
- dans le cas  $m = 0$ , c'est plutôt une pure définition: il n'y a pas d'état au repos pour servir de point de départ;
- ambiguïté: si  $m = 0$  et si l'invariance chirale est exacte, il n'y a pas moyen de définir de façon non-arbitraire la phase relative d'un spineur de Weyl droit et d'un spineur de Weyl gauche  $\Rightarrow$  l'azimut de  $\hat{n}$  devient totalement ambigu. On ne peut pas parler de "spin transverse" puisqu'on ignore sa direction!

**Exemple:** si  $\vec{p} // \hat{z}$ ,  $m \cong 0$

$$u(\vec{p}, \hat{x}) \approx \sqrt{E} \begin{pmatrix} \xi(\hat{z}) \\ \xi(-\hat{z}) \end{pmatrix} \quad (\text{en représentation spinorielle}).$$

Dans un problème de collision, les particules finales ont, en général, leur impulsion non colinéaire à  $\hat{z}$ . Il faut donc, en premier lieu, définir les états d'hélicité pure  $|\vec{p}, +\rangle = |\vec{p}, \hat{n} = \hat{p}\rangle$  et  $|\vec{p}, -\rangle = |\vec{p}, \hat{n} = -\hat{p}\rangle$  pour une orientation quelconque de  $\vec{p}$ . Nous adopteront la convention de Jacob et Wick (cf. Appendice A<sub>1</sub>), à savoir:

$$\begin{aligned} |\vec{p}, \lambda\rangle &= R(\text{axe} = \hat{z} \times \hat{p}, \text{angle} = \theta_p) |\vec{p}' = \hat{z}|\vec{p}|; \lambda\rangle \\ &= R_z(\varphi_p) R_y(\theta_p) R_z(-\varphi_p) |\vec{p}' = \hat{z}|\vec{p}|; \lambda\rangle \end{aligned}$$

où les  $R$  sont, cette fois ci, des vraies rotations.

Utilisant  $R_{\hat{a}}(\theta) = \exp\{-i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{a}\} = \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{a}$ , nous avons, en représentation spinorielle, pour  $m=0$ , pour exemple:

$$u(p,+) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_p}{2} \\ e^{i\varphi_p} \sin\frac{\theta_p}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u(p,-) = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-i\varphi_p} \sin\frac{\theta_p}{2} \\ \cos\frac{\theta_p}{2} \end{pmatrix}$$

Il faut ensuite définir la direction  $\hat{x}_p$  servant d'origine pour mesurer  $\varphi_n$ , en fait un système d'axe  $\{\hat{x}_p, \hat{y}_p, \hat{z}_p\}$ . En accord avec la définition ci-dessus de  $|\vec{p}, \lambda\rangle$ , nous devons prendre:

$$\{\hat{x}_p, \hat{y}_p, \hat{z}_p\} = R(\text{axe} = \hat{z} \times \hat{p}, \text{angle} = \theta_p)\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$$

Retenir en tout cas: pour une impulsion donnée  $\vec{p}$ , à une base d'hélicité  $\{|\vec{p}, +\rangle, |\vec{p}, -\rangle\}$  (c'est-à-dire un choix bien défini de phases pour  $|\vec{p}, +\rangle$  et  $|\vec{p}, -\rangle$ ) est associée un trièdre  $\{\hat{x}_p, \hat{y}_p, \hat{z}_p = \hat{p}\}$  telles que les états de transversité soient donnés par les formules du § 1.2.3.

### Exercice 2.

Calculer  $u(\vec{p}, \hat{y})$  dans le cas où  $\vec{p} // \hat{x}$ .

(\*)

### 1.2.5 Analogie avec états de polarisations circulaires et linéaires du photon

Considérons un photon d'impulsion  $\vec{k}$  dirigée selon  $+\hat{z}$  et de polarisation  $\vec{\epsilon}$  (dans la jauge de radiation  $A^0 = \vec{k} \cdot \vec{A} = 0$ ). Sa fonction d'onde est  $\vec{A}(X) = e^{-ik \cdot X} \vec{\epsilon}$ . La polarisation peut être:

- linéaire:  $\vec{\epsilon} = \hat{x}$  ou  $\hat{y}$ , plus généralement  $\vec{\epsilon} = \hat{n}_\varphi \equiv \cos\varphi \hat{x} + \sin\varphi \hat{y}$
- circulaire:

$$\vec{\epsilon}_+ = \frac{-\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}} \quad \text{hélicité} \quad \lambda = +1$$

(\*) Réponse: les composantes sont proportionnelles à 1, 1, -i et +i.

$$\vec{\varepsilon}_- = \frac{+\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}} \quad \lambda = -1$$

- Polarisation linéaire = superposition d'états d'hélicités opposées:

$$|\vec{k}, \hat{x}\rangle = \frac{-|\vec{k}, +\rangle + |\vec{k}, -\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\vec{k}, \hat{n}_\varphi\rangle = \frac{-e^{-i\varphi}|\vec{k}, +\rangle + e^{i\varphi}|\vec{k}, -\rangle}{\sqrt{2}}$$

- S'il n'y avait pas le couplage du photon aux particules chargées électriquement, on ne pourrait pas définir l'azimut de la polarisation linéaire. On ne pourrait pas distinguer champs électrique et magnétique. On aurait l'invariance chirale du photon  
 $\vec{E} \rightarrow \vec{E} \cos \alpha - \vec{B} \sin \alpha, \vec{B} \rightarrow \vec{E} \sin \alpha + \vec{B} \cos \alpha$

**Différences entre  $|\hat{n}_\varphi\rangle$  pour un fermion et  $|\hat{n}_\varphi\rangle$  pour un photon:**

- fermion:  $|\hat{x}\rangle$  est orthogonal à  $|- \hat{x}\rangle$   
 $\langle \hat{y} | \hat{x} \rangle \neq 0$
- photon:  $|\hat{x}\rangle$  et  $|- \hat{x}\rangle$  représentent le même état  
 $|\hat{x}\rangle$  est orthogonal à  $|\hat{y}\rangle$
- La phase relative entre la composante  $|+\rangle$  et la composante  $|-\rangle$  de  $|\hat{n}_\varphi\rangle$  varie comme  $\varphi$  pour le fermion, comme  $2\varphi$  pour le photon.
- La transversité est un **pseudo-vecteur**, la polarisation linéaire est un **vecteur**.

Dans le cas massif non-relativiste:

- fermion:  $|\hat{n}_\varphi\rangle$  est l'état propre de  $\vec{S} \cdot \hat{n}_\varphi = +\frac{1}{2}$ ,
- méson vecteur:  $|\hat{n}_\varphi\rangle$  est l'état propre de  $\vec{S} \cdot \hat{n}_\varphi = 0$ ; d'ailleurs il vérifie  $\langle \vec{S} \rangle = 0$  pour les 3 composantes de  $\vec{S}$ . L'état est polarisé, mais c'est une polarisation **tensorielle** (cf. 1.5.1).

### 1.3 Matrice densité de spin relativiste. Spin 1/2.

La matrice densité est l'outil de base pour décrire les effets observables du spin.

#### 1.3.1 Rappel non-relativiste

- 1) “Cas pur” : nous avons une particule dans une fonction d'onde de spin  $\xi$  totalement connue (à une phase près)

$$\langle \vec{\sigma} \rangle = \xi^\dagger \vec{\sigma} \xi = \vec{P} \text{ vecteur polarisation avec } |\vec{P}| = 1 \text{ (polarisation complète)}$$

matrice densité:  $\xi \xi^\dagger = \text{projecteur} = \frac{1 + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}}{2}$

- 2) “mélange” : la fonction d'onde est imparfaitement connue. On hésite entre plusieurs  $\xi_i$ , avec des coefficients de vraisemblance  $w_i$

$$\vec{P} = \langle \vec{\sigma} \rangle = \sum_i w_i \xi_i^\dagger \vec{\sigma} \xi_i$$

$$|\vec{P}| < 1 \text{ polarisation incomplète}$$

$$\text{matrice densité } \rho = \sum_i w_i \xi_i \xi_i^\dagger = \frac{1 + \vec{P} \cdot \vec{\sigma}}{2}$$

Propriétés.

$$\text{trace } \rho = 1 \quad \rho = \rho^\dagger \quad \xi^\dagger \rho \xi \geq 0, \quad \forall \xi$$

$$\text{trace } \rho^2 \leq 1 \text{ (égalité pour un cas pur)}$$

#### 1.3.2 Généralisation relativiste (formulation non covariante)

- On définit la base des états d'hélicité ainsi que les 3 axes de coordonnées  $\{\hat{x}_p, \hat{y}_p, \hat{z}_p\}$  ( $\hat{z}_p \equiv \hat{p}$ ) associés (cf. §1.2.4). Dans ce qui suit, nous omettrons les indices  $p$  de  $\hat{x}_p$ ,  $\hat{y}_p$  et  $\hat{z}_p$ .
- On écrit la matrice densité  $\rho_{\lambda\lambda'}^{(h)}$  dans cette base.
- On exprime  $\rho$  en fonctions des matrices de Pauli, comme pour le spin non-relativiste:

$$\rho^{(\text{hél})} = \frac{1 + P_x \sigma_x + P_y \sigma_y + P_z \sigma_z}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_z & P_x - iP_y \\ P_x + iP_y & 1 - P_z \end{pmatrix}$$

$$P_z \equiv P_L = \langle \text{hélicité} \rangle$$

$$\vec{P}_T = (P_x, P_y) = \langle \text{transversité} \rangle$$

- Le tri-vecteur polarisation  $\vec{P}$  n'est pas la partie spatiale d'un quadrivecteur de Lorentz.
- $\vec{P}_T = 0$  ,  $P_z = 2\lambda = \pm 1$ : état d'hélicité pure.
- Pour l'état pur  $|\hat{n}\rangle$  défini en (1.2.4),  $\vec{P} = \hat{n}$
- $\vec{P}_z = 0$ ,  $\vec{P}_T = \hat{n}_\varphi$ : état de transversité pure.
- $P_z^2 + \vec{P}_T^2 \begin{cases} = 1 \text{ "cas pur"} \\ < 1 \text{ "mélange"} \end{cases}$

### 1.3.3 Opérateur densité

$$\rho_{\text{op.}} = \sum_{\lambda\lambda'} |\vec{p}, \lambda\rangle \rho_{\lambda\lambda'}^{(\text{hél})} \langle \vec{p}, \lambda'|$$

Il agit sur l'espace des états physiques (kets). Il ne dépend pas de la base (hélicité ou transversité) choisie.

### 1.3.4 Matrice densité covariante. Définition.

Nous écrivons d'abord la matrice densité dans la base des spineurs à 4 composantes;

$$\rho^{\text{Rel.}} = \sum_{\lambda\lambda'} u(\vec{p}, \lambda) \rho_{\lambda\lambda'}^{(\text{hél})} u^\dagger(\vec{p}, \lambda')$$

normalisée à

$$\text{trace } \rho^{\text{Rel}} \equiv u^\dagger u = 2E$$

Pour faire les calculs dans un formalisme "manifestement covariant", on introduit la matrice



$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \sum_{\lambda\lambda'} u(\vec{p}, \alpha) \rho_{\lambda\lambda'}^{(\text{hél})} \bar{u}(\vec{p}, \lambda') \\ &= \rho^{\text{Rel.}} \beta\end{aligned}$$

normalisée à trace  $\hat{\rho} = 2m$  ( $-2m$  pour spineurs d'énergie négative 'v', au lieu de 'u').

Ce n'est pas à proprement parler une matrice densité mais on l'appelle ainsi.

### 1.3.5 Cas d'une masse non nulle

Nous établirons la forme de  $\rho^{\text{Rel.}}$  (ou  $\hat{\rho}$ ) pour un cas pur. Le cas d'un mélange s'en déduira facilement.

Au repos, le spineur de Dirac vérifie

$$(\beta - 1) u = 0 \quad (\text{énergie positive} = +m)$$

$$(\beta + 1) v = 0 \quad (\text{énergie négative} = -m)$$

Si la polarisation est  $\vec{P}$ , on a

$$\vec{\Sigma} \cdot \vec{P} u \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{P} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{P} \end{pmatrix} u = u$$

(je traite d'abord le cas d'énergie positive, c'est-à-dire pour une particule)

Si  $u$  est normalisé à 1,

$$\rho^{\text{Rel}} \equiv uu^\dagger = \text{projecteur sur le spineur } u$$

$$= \frac{1 + \vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{2} \quad \times \quad \frac{1 + \beta}{2}$$

*projecteur de spin*      *projecteur sur énergie positive*

Généralisation à  $\vec{p} \neq 0$

- on normalise  $u$  à  $u^\dagger u = 2E$  [on multiplie  $\rho(\vec{p} = 0)$  par  $2m$ ]

- on considère  $\hat{\rho}$  plutôt que  $\rho^{\text{Rel.}}$  (on multiplie à droite par  $\beta$ )
- utilisant  $\bar{\Sigma} = \gamma_s \bar{\alpha}$ , on écrit:

$$\hat{\rho}_{(\bar{p}=0)} = \frac{1 + \bar{\Sigma} \cdot \bar{P}}{2} \frac{1 + \beta}{2} 2m\beta = \frac{1 - \gamma_s \bar{\gamma} \cdot \bar{P}}{2} (\gamma^0 m + m)$$

que l'on réécrit de façon explicitement covariante sous la forme

$$\hat{\rho} = u\bar{u} = \frac{1 + \gamma^5 \gamma \cdot s}{2} (\gamma \cdot p + m)$$

$s$  est le quadrivecteur polarisation de Pauli-Lubanski (à un facteur près). Pour un mélange,

$$-1 \leq s \cdot s \leq 0$$

[ $s \cdot s = -1$  pour le cas pur. Le  $s^\mu$  de Pauli Lubanski est normalisé à  $s \cdot s = -m^2 S(S+1) = -\frac{3}{4} m^2$ ]

$$s \cdot p = 0$$

En utilisant le boost à partir de l'état au repos, on peut écrire le 4-vecteur  $s$  en fonction du 3-vecteur non covariant  $\bar{P}$

$$s \equiv (s^0, \bar{s}) = (0, \bar{P}_T) + P_L \frac{1}{m} (|\bar{p}|, E\hat{p})$$

*transversité*      *hélicité*

Traitons maintenant le cas d'un état d'énergie négative (c'est-à-dire la matrice densité pour une antiparticule):

- au repos, avec  $v$  normalisé à 1:

$$\rho^{\text{Rel}} = v v^\dagger = \frac{1 - \bar{\Sigma} \cdot \bar{P}}{2} \frac{1 - \beta}{2}$$

Pourquoi le signe ‘-’ devant  $\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}$ ? Je veux que l'état ait un moment angulaire  $-\frac{1}{2}\vec{P}$  afin que la non-occupation de cet état corresponde physiquement à une antiparticule de moment angulaire  $+\frac{1}{2}\vec{P}$ .

- en mouvement, avec la normalisation covariante:

$$\hat{\rho} = \sqrt{v} = \frac{1 + \gamma^5 \gamma \cdot s}{2} (\gamma \cdot p - m)$$

### 1.3.6 Cas ultra relativiste ( $m/E \rightarrow 0$ )

- inconvénient du quadrivecteur  $s$ : sa partie longitudinale tend vers l'infini

$$s = s_T + P_L \frac{1}{m} p - \underbrace{P_L \frac{m}{E + |\vec{p}|}}_{\text{(négligeable)}} (1, -\hat{p})$$

on montre (Landau & Lifchitz) que  $\hat{\rho}$  reste fini:

$$\hat{\rho} \equiv \frac{1 + \gamma_5 \gamma \cdot s_T \pm P_L \gamma_5}{2} \gamma \cdot p$$

+ pour une particule

- pour une antiparticule

$$s_T = (0, \vec{P}_T)$$

- Ceci exprime  $\hat{\rho}$  en fonction de quantités finies à  $m=0$
- L'hélicité et la transversité ont des rôles très différents; il y a une matrice  $\gamma$  supplémentaire pour la transversité.
- la covariance semble perdue: pour le  $s_T$  défini ci-dessus  $s_T^0 = 0$

## 1.4 Arbitraire “de jauge” du quadrivecteur transversité ( $m=0$ )

Supposons  $P_L \equiv 0$ , soit  $P_L = 0 \pm \Delta P_L$ , avec  $\Delta P_L$  (= incertitude sur  $P_L$ )  $\ll 1$ . Supposons de même  $m \ll E$  et faisons tendre simultanément  $m$  et  $\Delta P_L$  vers zéro en gardant le rapport  $m^{-1} \Delta P_L$  fixe: Il en résulte une incertitude finie pour  $s^\mu$ :

$$s^\mu = (0, \vec{P}_T) \pm \frac{\Delta P_L}{m} p^\mu$$

A la limite  $m=0$ ,  $\Delta P_L = 0$ ,  $s^\mu$  reste fini mais défini à une “**transformation de jauge**” près:

$$s^\mu \rightarrow s^\mu + \text{constante} \times p^\mu$$

quand à l'état physique  $|\vec{p}, s^\mu\rangle$ , (ou la matrice densité, dans le cas d'un état mélange) il est polarisé de façon purement transverse ( $P_L = 0$ ). Inversement, toute matrice densité

$$\hat{\rho} = \frac{1 + \gamma_5 \gamma \cdot s}{2} \gamma \cdot p,$$

où  $s^\mu$  est fini et vérifie  $-1 \leq s \cdot s \leq 0$ ,  $s \cdot p = 0$ , représente un état de polarisation seulement transverse, même si  $\vec{s}$  n'est pas orthogonal à  $\vec{p}$  (on a alors  $\vec{s} \cdot \hat{p} = s^0$ ). La “jauge”  $s^\mu = (0, \vec{P}_T)$  est l'analogie de la jauge de radiation du photon.

Pour un état de polarisation mixte ( $P_L \neq 0$ ,  $\vec{P}_T \neq 0$ ) nous introduisons le *quadrivecteur transversité*  $s_T^\mu$ , défini à une transformation de jauge près

$$s_T^\mu = (0, \vec{P}_T) + \text{constante} p^\mu$$

$s_T^\mu$  est la “partie finie” de  $s^\mu$  obtenue en retranchant  $m^{-1} P_L p^\mu$  ( $\infty - \infty =$  terme fini arbitraire). Notez que  $\vec{s}_T$  n'est pas nécessairement perpendiculaire à  $\vec{p}$ . Vérifiez que:

- $\hat{\rho}$  donné en 1.3.6 est invariant de jauge
- un changement de jauge conserve les relations

$$\begin{cases} s \cdot p & = & 0 \\ s_T \cdot s_T & = & -\vec{P}_T^2 \geq P_L^2 - 1 \end{cases}$$

### Utilité:

- on a retrouvé la covariance formelle;
- c'est un outil de vérification des formules d'amplitude ou de sections efficaces;

- $s_T^\mu$  se transforme comme un quadri-vecteur ordinaire.

### Exemple:

Je connais  $\vec{P}_T$  dans le repère du laboratoire, je veux l'évaluer dans un autre repère.

$$|p, s_T, P_L\rangle \xrightarrow{\text{boost}} |p', s'_T, P_L\rangle$$

$$s_T = (0, \vec{P}_T) \text{ ("jauge de radiation")} \xrightarrow{\text{boost}} s' = (s'_0, \vec{s}'_T)$$

"transformation de jauge"  $\Downarrow$

$$s''_T = s'_T - \left( \frac{s'_0}{p'_0} \right) p' = (0, \vec{P}'_T)$$

## 1.5 Polarisation du spin 1 massif

### 1.5.1 Cas non relativiste

Nous adopterons ici la base cartésienne (polarisations linéaires): la "fonction d'onde de spin" non relativiste est un vecteur de notre espace habituel à 3 dimensions

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_1 \hat{x} + \varepsilon_2 \hat{y} + \varepsilon_3 \hat{z}, \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \text{ complexes})$$

soit, avec la notation des kets:

$$|\vec{\varepsilon}\rangle = \varepsilon_1 |\hat{x}\rangle + \varepsilon_2 |\hat{y}\rangle + \varepsilon_3 |\hat{z}\rangle$$

la matrice densité  $\rho_{ij}$  est de dimension  $3 \times 3$ . Pour un cas pur,  $\rho_{ij} = \varepsilon_i \varepsilon_j^*$ . Dans le cas général, elle est décomposable en trois tenseurs irréductibles: trace, partie antisymétrique, partie symétrique de trace nulle:

$$\rho_{ij} = \frac{1}{3} \delta_{ij} + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{S}_{ij} + \rho_{ij}^{(2)}$$

$\vec{P}$ : polarisation (pseudo) vectorielle =  $\langle \vec{S} \rangle$ . Pour un cas pur,  $\vec{P} = i\vec{\epsilon} \times \vec{\epsilon}^*$

$$S^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad S^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{matrices}$$

cartésienne de spin.  $\rho_{ij}^{(2)}$  = polarisation tensorielle = 5 paramètres indépendants.

Examinons les deux principaux types d'états polarisés:

- État polarisé linéairement: soit  $\hat{n}$  un vecteur réel. L'état  $|\hat{n}\rangle$  n'a pas de polarisation *vectorielle*, mais une polarisation *tensorielle*. Exemple:

$$\hat{n} = \hat{z} \rightarrow \rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{n} | \vec{S} | \hat{n} \rangle = 0.$$

De plus  $\vec{S} \cdot \hat{n} | \hat{n} \rangle = 0$ . On a ainsi, par exemple

$$S_x | \hat{x} \rangle = 0, \quad S_y | \hat{x} \rangle \neq 0 \quad \text{mais} \quad \langle \hat{x} | S_y | \hat{x} \rangle = 0$$

- États avec polarisation vectorielle (ou "circulaire") non nulle:  $\vec{\epsilon}$  complexe avec  $\vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon}^* = 1$ . Exemple

$$|S_z = +1\rangle = -\frac{|x\rangle + i|y\rangle}{\sqrt{2}} \quad (\text{remarque: } \vec{\epsilon} \cdot \vec{\epsilon} = 0)$$

$$|S_z = -1\rangle = \frac{|x\rangle - i|y\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\rho(S_z = +1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ces deux états possèdent à la fois une polarisation vectorielle et une polarisation tensorielle (il n'existe aucun état quantique pur sans polarisation tensorielle).

### 1.5.2 Généralisation relativiste

(Voir par exemple Craigie et al., Landau & Lifchitz § 14)

$$\bar{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon^\mu \text{ avec } p \cdot \varepsilon = 0, \varepsilon \cdot \varepsilon^* = -1$$

cas pur

$$\rho^{ij} = \varepsilon^i \varepsilon^{j*} \rightarrow \rho^{\mu\nu} = \varepsilon^\mu \varepsilon^{\nu*}$$

cas non polarisé

$$\rho^{ij} = \frac{1}{3} \delta^{ij} \rightarrow \rho^{\mu\nu} = \frac{1}{3} \left( -g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \right)$$

Dans les deux cas,  $\rho^{\mu\nu} p_\nu = 0$ .

- État longitudinal:

$$\varepsilon_L^\mu \equiv \varepsilon^\mu (\text{hélicité } 0) = \frac{1}{m} (|\vec{p}|, E\hat{p}) = \frac{p^\mu}{m} - \frac{m}{E+|\vec{p}|} (1, -\hat{p})$$

Comparaison entre quadri-vecteur polarisations  $\varepsilon^\mu$  (spin 1) et  $s^\mu$  (spin  $\frac{1}{2}$ )

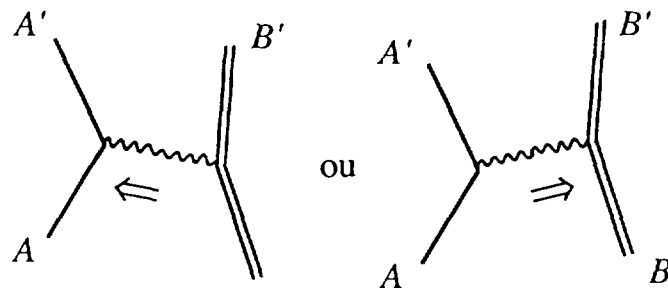
	$\varepsilon^\mu =$ amplitude (cas pur)	$s^\mu \approx$ probabilité (partie polarisée de la matrice densité)
	$\varepsilon^\mu$ réel ou complexe $p \cdot \varepsilon = 0$ $\varepsilon \cdot \varepsilon^* \equiv -1$	$s^\mu$ réel $p \cdot s = 0$ $s \cdot s = -1$ (cas pur seulement)
mélange état "longitudinal"	$\varepsilon$ n'existe pas $\bar{\varepsilon}_\perp = 0$ : hélicité zéro pure	$-1 < s \cdot s \leq 0$ $\bar{s}_\perp = 0$ : hélicité $\frac{1}{2}$ pure ou $-\frac{1}{2}$ pure
état "transverse" (**)	$\bar{\varepsilon}_{//} = 0/m$ : superposition quelconque $\alpha +1\rangle + \beta -1\rangle$	$\bar{s}_{//} = 0/m$ : superposition $\alpha +\frac{1}{2}\rangle + \beta -\frac{1}{2}\rangle$ avec $ \alpha  =  \beta $

Peut-on définir une polarisation et une matrice densité pour une particule vectorielle virtuelle?

- pas de problème pour les polarisations "transverses"
- la polarisation longitudinale  $\varepsilon_L^\mu$  devient  $|p^2|^{-\frac{1}{2}}(|\vec{p}|, E\vec{p})$
- problème pour  $p^2 < 0$  :

1)  $\varepsilon_L \cdot \varepsilon_L^* = +1$  au lieu de  $-1$

2) il faut préciser dans quel sens va la particule



(ça dépend du repère!). Il y a donc 2 matrices densités: une qui dépend de A et A' (figure de droite) et une qui dépend de B et B' (figure de gauche).

(\*\*) " $\frac{0}{m}$ " signifie 0 dans le cas  $m \neq 0$  et indéterminé dans le cas  $m=0$  par suite de l'invariance de jauge.



- On n'a pas de définition non ambiguë de la norme d'un état virtuel: on n'essayera pas de normer la trace de la matrice densité.

## 1.6 Polarisation du spin 1 sans masse.

### 1.6.1 Cas du photon, considéré comme cas limite $m \rightarrow 0$

A la limite  $m \rightarrow 0$ , le quadrivecteur polarisation longitudinal  $\varepsilon_L \equiv p/m$  tends vers l'infini. "Heureusement", le courant est **strictement** conservé d'où un découplage des photons d'hélicité zéro quand  $m \rightarrow 0$ :

$$\text{amplitude d'émission} = \varepsilon^\mu j_\mu \cong \frac{1}{m} p^\mu j_\mu \equiv 0$$

(du moins pour les photons réels).

On ignore donc l'hélicité zéro. Pour les autres états, on a l'**invariance de jauge**

$$\varepsilon^\mu \rightarrow \varepsilon^\mu + c p^\mu$$

( $c p^\mu$  peut être considéré comme le reliquat d'une composante d'hélicité zéro infinitésimale quand  $m \rightarrow 0$ ).

C'est la jauge de radiation  $\varepsilon^0 = 0$ ,  $\vec{\varepsilon} \perp \vec{p}$  qu'on utilise le plus souvent. Ce choix n'est pas invariant de Lorentz. Pour passer de la jauge de radiation dans un repère à celle dans un autre repère, procéder comme avec le 4-vecteur transversité  $s_T^\mu$  (cf. exemple à la fin du § 1.4).

### 1.6.2 Opérateur densité des photons

On peut l'exprimer soit dans la base des polarisations linéaires, soit dans celles des polarisations circulaires ( $\equiv$  hélicités):

$$\begin{aligned} \rho_{\text{opérateur}} &= \sum_{a=x,y} \sum_{b=x,y} |\hat{a}\rangle \rho_{ab}^{(\text{lin})} \langle \hat{b}| \\ &= \sum_{\lambda=-1,+1} \sum_{\lambda'=-1,+1} |\lambda\rangle \rho_{\lambda\lambda'}^{(\text{hél})} \langle \lambda'| \end{aligned}$$

où on a supposé  $\vec{p} \parallel \hat{z}$

### 1.6.3 Décomposition de Stokes de la matrice densité:

On peut décomposer  $\rho_{ab}^{(\text{lin})}$  ou  $\rho_{\lambda\lambda'}^{(\text{hel})}$  sur la base des matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Mais ici  $\sigma_i$  ne doit pas être interprété comme l'opérateur de spin dans la direction 'i'.

Base circulaire:

$$\rho^{\text{hel}} = \frac{1}{2}(1 + h_1\sigma_1 + h_2\sigma_2 + h_3\sigma_3)$$

$$h_i \text{ réels, } h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \leq 1$$

$$\sigma_3 = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| \rightarrow h_3 = \langle \text{hélicité} \rangle$$

$$\sigma_1 = |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| = |\hat{y}\rangle\langle \hat{y}| - |\hat{x}\rangle\langle \hat{x}|$$

$$\Rightarrow h_1 = \text{degré de polarisation linéaire selon } \hat{y}$$

**Exercice:** Montrer de même:

$$h_2 = \text{degré de polarisation linéaire selon } \frac{\hat{x} - \hat{y}}{\sqrt{2}}$$

Base linéaire:

$$\rho^{\text{lin}} = \frac{1}{2}(1 + \ell_1\sigma_1 + \ell_2\sigma_2 + \ell_3\sigma_3)$$

$$\ell_3 = \text{polarisation selon } \hat{x} = -h_1$$

$$\ell_1 = \text{polarisation selon } \frac{\hat{x} + \hat{y}}{\sqrt{2}} = -h_2$$

$$\ell_2 = h_3 = \langle \text{hélicité} \rangle$$

( $\ell_i \equiv \xi_i$  de Landau et Lifchitz ou Craigie et al.;  $h_3 \equiv s_3$ ,  $h_1 \equiv -s_1$ ,  $h_2 \equiv -s_2$  de Jackson "Classical Eledrodynamics".)

#### 1.6.4 Matrice densité "minkovskienne" du photon.

C'est l'analogue de la matrice densité covariante pour les fermions, sauf que les indices de Lorentz remplacent ceux de Dirac. Cas général:

$$\rho^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^N w_i \varepsilon^\mu(i) \varepsilon^{\nu*}(i) + p^\mu C^\nu + C^\mu p^\nu$$

où  $C^\nu$  et  $C^\mu$  sont des quadri-vecteur quelconques [c'est la liberté de jauge. Notons qu'elle est plus générale que celle obtenue par  $\varepsilon^\mu \rightarrow \varepsilon^\mu + cp^\mu$ ]

Dans le cas non polarisé, on peut réduire  $\rho^{\mu\nu}$  à  $-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}$ , dans le cas des photons réels (pour les particules virtuelles, le problème ne se pose pas: elles sont toujours plus or moins polarisées).

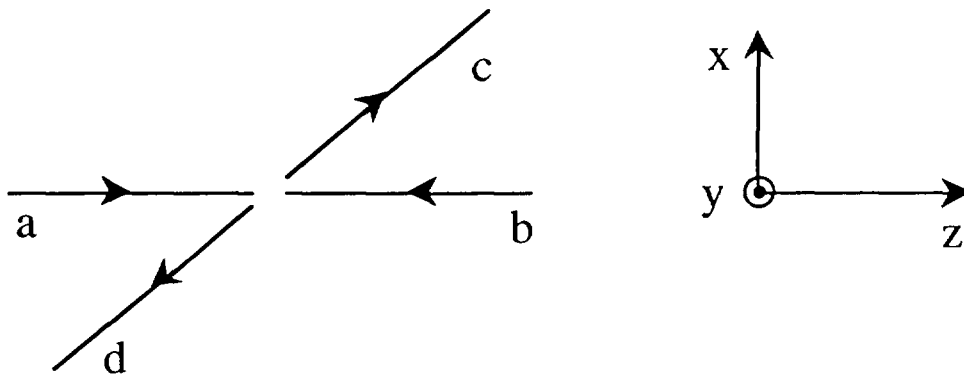
# Chapitre 2

## Asymétries de spin dans les collisions

### 2 → 2

Ce chapitre s'applique essentiellement au sous-processus partoniques. Nous ne traiterons que les cas où les particules polarisées sont de spin 1/2. Les particules non polarisées peuvent être de spin quelconque. Pour les paramètres d'asymétrie, nous suivons la notation de C. Bourrely, E. Leader, J. Soffer.

### 2.1 Terminologie



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(s, t, \varphi; s_a, s_b, s_c, s_d) \equiv \text{section}$$

efficace différentielle totalement polarisée

Dans la figure ci-dessus  $(x, z)$  est le plan de diffusion.  $\varphi$  est l'azimut de ce plan par rapport à un plan de référence  $(x_0, z)$ . À partir d'ici, nous omettrons les arguments  $s, t, \varphi$  ainsi que  $d/d\Omega$ .

Section efficace partiellement polarisées: exemple

$$\sigma(s_b, s_d): \begin{cases} - \text{la polarisation de 'c' n'est pas mesurée} \\ - \text{la particule 'a' n'est pas polarisée} \end{cases}$$

**2.1.1 Asymétries 'à 1 spin' ou 'pouvoir d'analyse'**

$$A_L = \frac{\sigma(\lambda_a = +) - \sigma(\lambda_a = -)}{\sigma(\lambda_a = +) + \sigma(\lambda_a = -)}$$

$$A_S = \frac{\sigma(\bar{P}_{a,T} = \hat{x}) - \sigma(\bar{P}_{a,T} = -\hat{x})}{\sigma(\bar{P}_{a,T} = \hat{x}) + \sigma(\bar{P}_{a,T} = -\hat{x})} \quad (\text{s pour "sideways"})$$

$$A_N = \frac{\sigma(\bar{P}_{a,T} = \hat{y}) - \sigma(\bar{P}_{a,T} = -\hat{y})}{\sigma(\bar{P}_{a,T} = \hat{y}) + \sigma(\bar{P}_{a,T} = -\hat{y})}$$

- $A_L = 0$  si la parité est conservée. Au LEP ou à SLC,  $A_L \neq 0$
- $A_S = 0$  si P conservé
- $A_N \neq 0$  est permis par P. Cependant:
  - (i) il faut que 2 amplitudes de spins aient des phases différentes
  - (ii)  $A_N = 0$  si la symétrie chirale est exacte;
    - à grand transfert d'impulsion  $A_N \rightarrow 0$  (voir plus loin)
- On définit de même les  $A_L$ ,  $A_S$  et  $A_N$  relatifs à une particule finale.

**2.1.2 Asymétries 'à 2 spins'**

- 1) 2 spins initiaux ou 2 spins finaux. Paramètres de corrélations.

$$A_{LL} = \frac{\sigma(\lambda_a = \lambda_b) - \sigma(\lambda_a = -\lambda_b)}{\sigma(\lambda_a = \lambda_b) + \sigma(\lambda_a = -\lambda_b)}$$

$$A_{SS} = \left\{ \sigma(\vec{P}_{a,T} = \vec{P}_{b,T} = \hat{x}) + \sigma(\vec{P}_{a,T} = \vec{P}_{b,T} = -\hat{x}) - \sigma(\vec{P}_{a,T} = -\vec{P}_{b,T} = \hat{x}) - \sigma(\vec{P}_{a,T} = -\vec{P}_{b,T} = -\hat{x}) \right\} / (\text{somme des 4 termes})$$

$A_{NN}$ : comme  $A_{SS}$  avec  $\hat{x} \rightarrow \hat{y}$

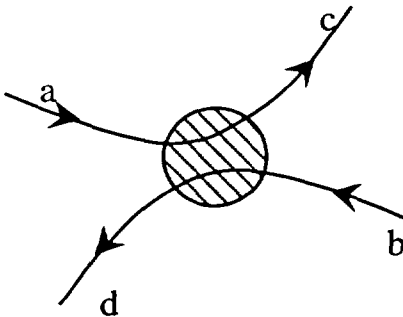
2) 1 spin initial et 1 spin final: les paramètres de dépolarisation  $D_{LL}$ ,  $D_{SS}$ ,  $D_{NN}$  sont définis comme  $A_{LL}$ ,  $A_{SS}$ ,  $A_{NN}$  en remplaçant, par exemple,  $\vec{P}_b$  par  $\vec{P}_c$ .

- Les asymétries à 2 spins ci-dessus ne sont pas interdites par P.
- Il y a des asymétries mixtes telles que  $A_{SL}$ .  $A_{SN}$  est interdite par P,  $A_{SL}$  et  $A_{NL}$  sont interdites par l'invariance chirale.

## 2.2 Conséquences de l'invariance chirale (\*)

(cas où les fermions polarisés sont de masses nulles ou négligeables devant les invariants cinématiques  $\sqrt{s}$ ,  $\sqrt{|t|}$ ,  $\sqrt{|u|}$ )

Invariance chirale  $\Rightarrow$  conservation de l'hélicité le long d'une ligne de fermion



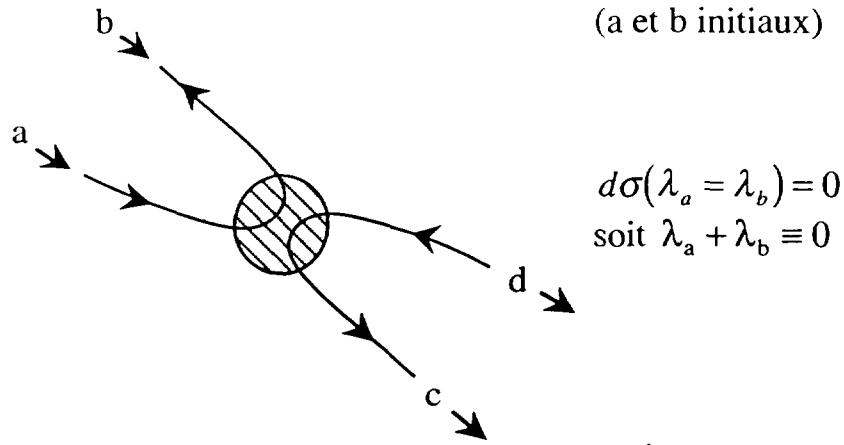
(a initial, c final)

$$d\sigma(\lambda_a = -\lambda_c) = 0$$

soit  $\lambda_a \equiv \lambda_c$

---

(\*) voir K. Hikasa.



⇒ l'hélicité totale fermionique est conservée.

Conséquences pour la transversité:

A) Les asymétries à un spin transverse,  $A_S$  ou  $A_N$ , sont nulles. Exemple:

$$\sigma(\bar{P}_{a,T} = \pm \hat{x}) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda_b \lambda_c \lambda_d} \left| \frac{\langle \lambda_c \lambda_d | T | \lambda_a = +, \lambda_b \rangle \pm \langle \lambda_c \lambda_d | T | \lambda_a = -, \lambda_b \rangle}{\sqrt{2}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} \sigma(\lambda_a = +) + \frac{1}{2} \sigma(\lambda_a = -)$$

$$\pm \frac{1}{4} \sum_{\lambda_b \lambda_c \lambda_d} \langle \lambda_c \lambda_d | T | \lambda_a = +, \lambda_b \rangle \langle \lambda_c \lambda_d | T | \lambda_a = -, \lambda_b \rangle^* + c.c.$$

Le 3<sup>ème</sup> terme (d'interférence) est nul car l'hélicité est non conservée soit dans un facteur, soit dans l'autre.

D'où:

$$\sigma(\bar{P}_{a,T} = \hat{x}) = \sigma(\bar{P}_{a,T} = -\hat{x})$$

soit

$$A_N = 0$$

B) Les asymétries à 2 spins transverses doivent concerner deux fermions externes pouvant partager une même ligne fermionique dans le diagramme d'unitarité.

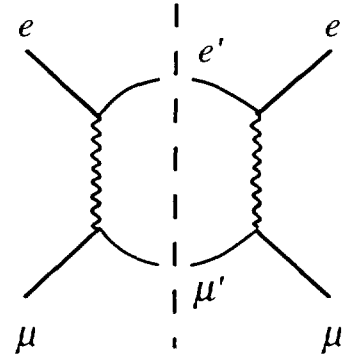
exemple:

$$e^- + \mu^- \rightarrow e'^- + \mu'^-$$

$$A_{SS}(e^- \mu^-) = 0$$

$$D_{SS}(e^- e'^-) \neq 0$$

$$D_{SS}(e^- \mu'^-) = 0$$



**Exercice:** montrer la 3ème relation

**“L'information de transversité ne peut pas quitter une ligne de fermion”.**

(Nous proposerons (§3.4) une démonstration de cette propriété dans l'approche “par la voie -t”).

Exemple: diffusion Møller ( $e \uparrow e' \uparrow \rightarrow e'' e'''$ ) (utilisé à SLAC comme polarimètre du faisceau)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{s} \frac{(3 + \cos^2 \hat{\theta})^2}{\sin^4 \hat{\theta}} \left\{ 1 - P_L P'_L A_{LL} - P_T P'_T A_{NN} \cos(2\phi - \phi_s - \phi_{s'}) \right\}$$

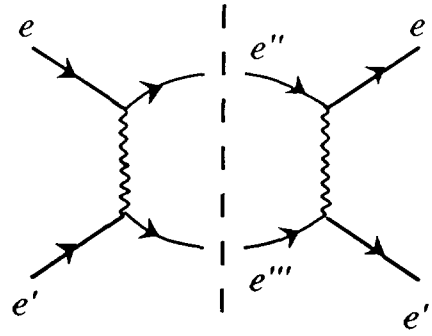
**Exercice:** montrer que la forme ci-dessus implique  $A_{NN} = -A_{SS}$

$$A_{LL} = \frac{7 + \cos^2 \hat{\theta}}{(3 + \cos^2 \hat{\theta})^2} \sin^2 \hat{\theta}$$

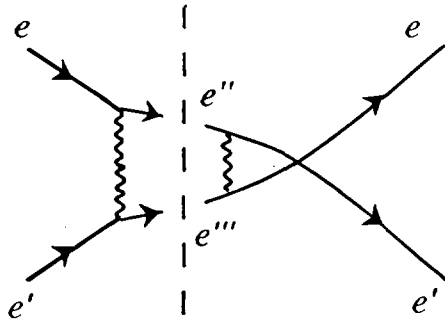
$$A_{NN} = \frac{\sin^4 \hat{\theta}}{(3 + \cos^2 \hat{\theta})^2}$$

diagrammes d'unitarité:





ne contribue pas à  $A_{NN}$



contribue à  $A_{NN}$

C) Invariance de “cardan”

Considérons deux fermions externes polarisés transversalement (les autres fermions ne l'étant pas). La rotation **simultanée** de leur polarisation transverse laisse invariante la section efficace:

$$\sigma(\vec{P}_T = \hat{n} , \vec{P}'_T = \hat{n}')$$

$$= \sigma(\vec{P}_T = R(\hat{p}, \delta) \hat{n} , \vec{P}'_T = R(\hat{p}', \delta) \hat{n}')$$

$\uparrow$   
 rotation d'angle  $\delta$   
 autour de  $\vec{p}$

$\uparrow$   
 rotation du **même**  
 angle  $\delta$  autour de  $\vec{p}'$

- le deux fermions,  $f$  et  $f'$ , peuvent être tous deux entrants, tous deux sortants ou l'un entrant, l'autre sortant
- Application:

$$\text{rotation de } \frac{\pi}{2} : A_{SS} = -A_{NN} \text{ ou } D_{SS} = +D_{NN}$$

Dérivation dans le cas  $f$  et  $f'$  entrants:

$$|f\rangle = |\bar{p}, \bar{P}_T = \hat{n}\rangle = \frac{|\bar{p}, \lambda = +\rangle + |\bar{p}, \lambda = -\rangle e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}$$

$\varphi =$  azimut de  $\hat{n}$  autour de  $\hat{p}$  (idem pour  $|f'\rangle$ )

$$\sigma_\infty = \sum_{\text{autres hélicités}} |\langle \dots | T | f, f', \dots \rangle|^2$$

avec:

$$\begin{aligned} \langle \dots | T | f, f', \dots \rangle = & \frac{1}{2} \{ \langle \dots | T | ++, \dots \rangle + \langle \dots | T | -+, \dots \rangle e^{i\varphi} + \\ & + \langle \dots | T | +-, \dots \rangle e^{i\varphi'} + \langle \dots | T | --, \dots \rangle e^{i\varphi+i\varphi'} \} \end{aligned}$$

Fixons les autres hélicités. La conservation de l'hélicité fermionique totale ne laisse que 3 possibilités:

- seul le premier terme est non nul:  $|T|^2$  est indépendant de  $\varphi$  et  $\varphi'$
- seuls les deuxième et troisième termes sont non nuls. Une "transformation de cardan"

$$\varphi \rightarrow \varphi + \delta$$

$$\varphi' \rightarrow \varphi' + \delta$$

ne modifié  $T$  que par un facteur de phase  $e^{i\delta}$ . Ceci ne modifie pas  $|T|^2$ .

*Généralisation à plus de deux spins:* si la chiralité est conservée dans un processus, la section efficace est invariante par la rotation simultanée, d'un angle  $\delta$  autour de leur impulsion, des polarisations transverses de tous les fermions externes (on peut se restreindre à un sous-groupe de fermions externes "disconnecté" du reste au point de vue des lignes fermioniques).

## 2.3 Notation de la “différentiation par rapport au spin” (\*).

Prenons l'exemple d'une réaction 2 fermions  $\rightarrow$  2 fermions. La section efficace différentielle totalement polarisée  $a + b \rightarrow c + d$  peut s'écrire symboliquement

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{pol.}}(\bar{P}_a, \bar{P}_b, \bar{P}_c, \bar{P}_d) = \\ (1 + P_a^L \delta_a^L + P_a^S \delta_a^S + P_a^N \delta_a^N) \cdot (\text{idem } b) \cdot \left(\frac{\text{idem } c}{2}\right) \cdot \left(\frac{\text{idem } d}{2}\right) \cdot \sigma = \\ 2^{2-N} \left\{ \sigma + P_a^L \delta_a^L \sigma + \dots + P_a^L P_b^S \delta_a^L \delta_b^S \sigma + \dots \right\} \end{aligned}$$

$\sigma$  (non précédé de symbole  $\delta$ )  $\equiv$  section efficace différentielle non polarisée (*sommée* sur tous les spins finaux et *moyennée* sur les spins initiaux)

$\sigma(\bar{P}_a)$   $\equiv$  section efficace différentielle pour une polarisation définie de  $a$ , sommée (resp. moyennée) sur toutes les autres polarisations finales (resp. initiales), et ainsi de suite.

$$\delta_a^L \sigma \equiv \frac{1}{2} \left\{ \sigma(P_a^L = +1) - \sigma(P_a^L = -1) \right\} \quad (\text{a initiale})$$

$$(\text{\grave{a} comparer \grave{a} } \sigma \equiv \frac{1}{2} \left\{ \sigma(P_a^L = +1) + \sigma(P_a^L = -1) \right\})$$

Pour une asymétrie de spin final, on ne met pas de facteur  $\frac{1}{2}$ . Par exemple,

$$\begin{aligned} \sigma &\equiv \sigma(P_d^S = +1) + \sigma(P_d^S = -1) \\ \delta_d^S \sigma &\equiv \sigma(P_d^S = +1) - \sigma(P_d^S = -1) \end{aligned} \quad (\text{d finale})$$

Double différenciation: exemple (a initiale, c finale)

$$\delta_a^N \delta_c^N \sigma = \frac{1}{2} \left\{ \sigma(a \uparrow c \uparrow) - \sigma(a \uparrow c \downarrow) - \sigma(a \downarrow c \uparrow) + \sigma(a \downarrow c \downarrow) \right\}$$

---

(\*) F. Baldracchini et al.

où  $\uparrow$  signifie “polarisé dans la direction N normale au plan de diffusion”.  
Notation mixte avec des  $\delta$  et des  $\bar{P}$ . Exemple

$$\delta_a^L \sigma(\bar{P}_b) = \frac{1}{2} \left\{ \sigma(P_a^L = 1, \bar{P}_b) - \sigma(P_a^L = -1, \bar{P}_b) \right\}$$

- Les  $\delta$  ont des propriétés analogues aux dérivées partielles. En fait, par exemple(\*\*)

$$\delta_a^N \delta_b^N \sigma = \frac{\partial}{\partial P_a^N} \frac{\partial}{\partial P_b^N} \sigma(\bar{P}_a, \bar{P}_b) = 2^{N-2} \frac{\partial}{\partial P_a^N} \frac{\partial}{\partial P_c^N} \sigma^{\text{Pol.}} \Big|_{\bar{P}_a = \bar{P}_b = \bar{P}_c = \bar{P}_d = 0}$$

- Les paramètres d'asymétries s'écrivent simplement en fonction des  $\delta$ :

$$A_N^{(a)} = \frac{\delta_a^N \sigma}{\sigma}$$

$$D_{SS}^{(a,c)} = \frac{\delta_a^S \delta_c^S \sigma}{\sigma}, \text{ etc.}$$

---

(\*\*) L'équation ci-après est formelle en ce sens que  $\sigma^{\text{Pol.}}(\bar{P}_a, \dots, \bar{P}_d)$  ainsi que  $\sigma(\bar{P}_a, \bar{P}_b)$  sont définis physiquement pour  $|\bar{P}_a| = \dots = |\bar{P}_d| = 1$ , mais on oublie cette contrainte pour les prolonger à  $|\bar{P}_i| \neq 1$

# Chapitre 3

## Asymétries de spin dans les collisions inélastiques

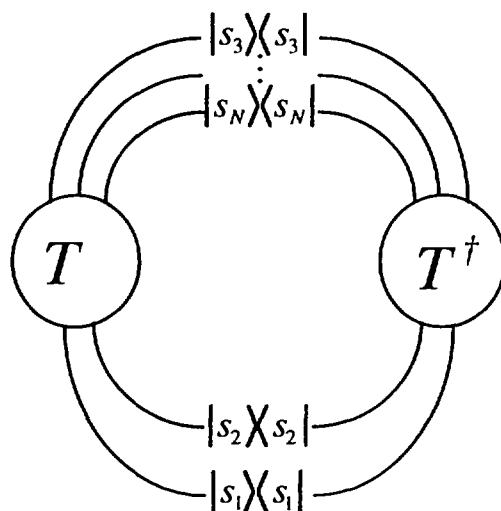
Nous étudions ici la structure générale des sections efficaces totalement ou partiellement polarisées, exclusives, partiellement inclusives ou totalement inclusives.

### 3.1 Totalement polarisé, totalement exclusif

$$\sigma = \left| \langle \vec{p}_3 s_3, \dots, \vec{p}_N s_N | T | \vec{p}_1 s_1, \vec{p}_2 s_2 \rangle \right|^2$$

J'ometts les variables  $\vec{p}$  et me place dans l'espace de Hilbert des états de spin

$$\sigma = \langle s_3, \dots, s_N | T | s_1, s_2 \rangle \langle s_1, s_2 | T^\dagger | s_3, \dots, s_N \rangle$$



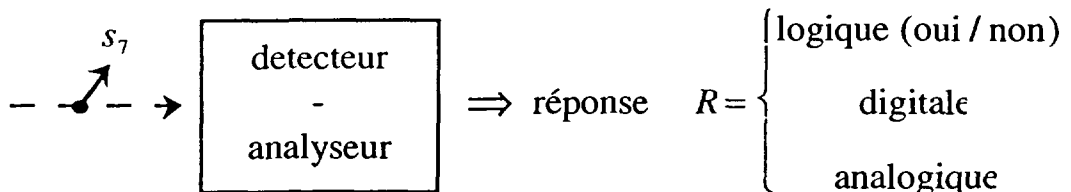
$$= \text{trace } T \rho_1(s_1) \rho_2(s_2) T^\dagger \rho_3(s_3) \dots \rho_N(s_N)$$

où  $\rho_i(s_i)$  est le projecteur sur l'état de spin  $s_i$ :  $\rho_i(s_i) = |s_i\rangle\langle s_i|$  (on devrait en toute rigueur écrire  $\rho_1(s_1) \otimes \rho_2(s_2)$ , etc.).

### 3.2 Généralisation

#### 3.2.1 Cas totalement exclusif mais partiellement polarisé

- le faisceau et/ou la cible sont partiellement polarisés  
 $\rho_1 \rightarrow \sum w_\alpha^{(1)} |\alpha\rangle_{(1)} \langle \alpha|_{(1)}$  = matrice densité, avec trace  $\rho_1 = 1$   
 $\rho_2 \rightarrow \overset{\alpha}{\text{idem}} (2)$
- le détecteur n'analyse pas une certaines polarisations finales, par exemple celle de la particule numéro 5.  
 $\rho_5 \rightarrow \sum_{s_5} |s_5\rangle \langle s_5| = I_{(5)}$   
 (pour les particules finales, on abandonne la normalisation trace  $\rho_i = 1$ )
- le détecteur analyse imparfaitement certaines polarisations, par exemple celle de la particule n. 7



exemple: particule 7 = baryon  $\Lambda$  polarisé

$$R = (\theta, \varphi), \text{ angles de désintégration du } \Lambda \rightarrow p\pi^-$$

A chaque réponse R est associée une **matrice densité d'acceptance**  $\rho_7(R)$ . Ainsi, pour le  $\Lambda$  (dans son référentiel)

$$\rho_7(R) = \rho_7(\theta, \varphi) = \frac{d\Omega}{4\pi} (1 + \alpha \hat{p}_{\text{proton}} \cdot \vec{\sigma})$$

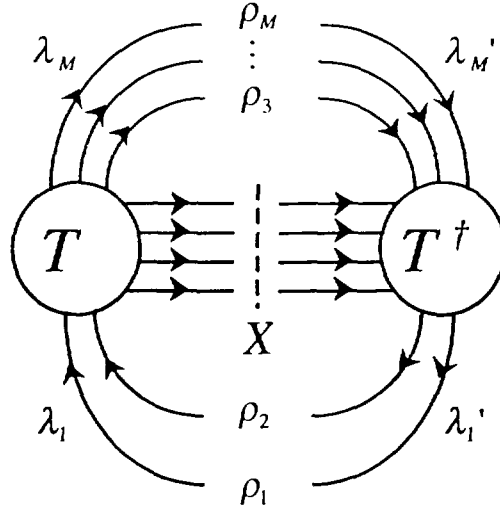
$d\Omega$  = acceptance angulaire;  $\alpha \equiv$  pouvoir d'analyse  $\approx 0.64$

- Les "matrices densité d'acceptance" ne sont pas généralement normalisées à trace  $\rho_i = 1$ .

Dans tous les cas exclusifs, la probabilité d'un événement (c'est-à-dire d'une certaine réponse des détecteurs) est de la forme finale du paragraphe 3.1.

#### 3.2.2 Cas partiellement ou totalement inclusif

On ne compte pas certaines particules. La structure du diagramme d'unitarité devient



Dans la base des hélicités, on peut écrire

$$d\sigma(1,2 \rightarrow 3,\dots,M+X) = \frac{1}{\text{flux}(1,2)} d\{\text{espace de phase}(3,\dots,M)\} \sum_{\lambda_1 \dots \lambda_M} \sum_{\lambda'_1 \dots \lambda'_M} \langle \lambda_1, \rho_1 | \lambda'_1 \rangle \langle \lambda_2, \rho_2 | \lambda'_2 \rangle \langle \lambda_3, \rho_3 | \lambda'_3 \rangle \dots \langle \lambda_M, \rho_M | \lambda'_M \rangle \langle \lambda'_1, \lambda'_2; \lambda_3, \dots, \lambda_M | \Sigma | \lambda_1, \lambda_2; \lambda'_3, \dots, \lambda'_M \rangle$$

$\Sigma =$  discontinuité en  $M_x^2$  de l'amplitude "élastique vers l'avant"

$$1+2+\bar{3}+\dots+\bar{M} \rightarrow 1+2+\bar{3}+\dots+\bar{M}$$

(cf. le théorème optique généralisé de A.H. Mueller - Phys. Rev. D 2 (1970) 2963)

Exemple: Section efficace polarisée inclusive à 1 particule ( $M = 3$  dans la formule ci-dessus)

$$\langle \lambda'_1, \lambda'_2; \lambda_3 | \Sigma | \lambda_1, \lambda_2; \lambda'_3 \rangle = \sum_{N \geq 3} \int \frac{d\bar{p}_4}{(2\pi)^3 2p_4^0} \dots \frac{d\bar{p}_N}{(2\pi)^3 2p_N^0} \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - \dots - p_N) \sum_{\lambda_4 \dots \lambda_N} \langle \lambda_3, \lambda_4, \dots, \lambda_N | T | \lambda_1, \lambda_2 \rangle \langle \lambda'_1, \lambda'_2 | T^\dagger | \lambda'_3, \lambda'_4, \dots, \lambda'_N \rangle$$

$$d\sigma = \frac{1}{\text{flux}} \frac{d\bar{p}_3}{(2\pi)^3 2p_3^0} \text{trace } \Sigma (\rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \rho_3)$$

Avec la normalisation covariante que nous avons choisie pour les ondes planes,

$$\text{flux} = 4 \left[ (p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2 \right]^{1/2}$$

Certaines propriétés de  $\Sigma$  (herméticité, rotation, parité, renversement du temps et permutation de particules identiques) sont exposées en appendice A.

### 3.2.3 Lien avec les $\sigma$ et $\delta\sigma$

... $\delta_j^{\hat{n}}$  ... $\sigma(\bar{P}_k \dots)$  est obtenu en remplaçant dans l'expression précédente

$$- \bar{\rho}_k \text{ par } \bar{\rho}_k(\bar{P}_k) = \frac{1 + \bar{P}_k \cdot \bar{\sigma}}{2}$$

$$- \rho_j \text{ par } \frac{1}{2} \bar{\sigma} \cdot \hat{n} \text{ (particule initiale) ou } \bar{\sigma} \cdot \hat{n} \text{ (part. finale)}$$

-  $\rho_m$  par  $\frac{1}{2} I$  (particule initiale) ou  $I$  (particule finale) si  $\delta_m^{\dots}$  ou  $\bar{P}_m$  ne figure pas (c'est-à-dire si on ne s'intéresse pas à la polarisation de la particule  $m$ ).

Formellement, la matrice  $\Sigma$  peut se décomposer en matrices de Pauli, les coefficients étant des  $\delta^{\dots} \dots \delta^{\dots} \sigma$

$$\Sigma = \left( 1 + \sigma_1^{(a)} \delta_a^{\hat{x}_a} + \sigma_2^{(a)} \delta_a^{\hat{y}_a} + \sigma_3^{(a)} \delta_a^L \right) \otimes (\text{idem } b) \otimes \left( \frac{\text{idem } c}{2} \right) \dots \sigma$$

(nous avons écrit  $\delta_a^{\hat{x}_a}$  et  $\delta_a^{\hat{y}_a}$  au lieu de  $\delta_a^S$  et  $\delta_a^N$  pour être plus général. En effet dans les réactions  $2 \rightarrow N$  avec  $N \geq 3$ , il n'existe pas de "plan de diffusion" pour définir les directions  $S$  et  $N$ . Chaque particule a son système d'axe  $\hat{x}_a, \hat{y}_a, \hat{z}_a$  – cf. paragraphe 1.2.4)

## 3.3 Matrices intervenant dans les asymétries de spin

Dans la formule précédente figurent les matrices  $\sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}$  où  $(k)$  indique sur quelle particule agit la matrice en question.  $(k)$  sera sous-entendu dans ce qui suit.

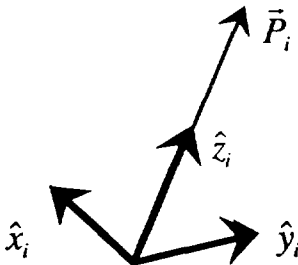
Ayant adopté la base d'hélicité, nous pouvons expliciter ces matrices:



- Polarisation longitudinale:

$$\sigma_3 \equiv \sigma_L = \vec{\sigma} \cdot \hat{p} = \sigma_z (\text{Pauli}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = |+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|$$

Nous rappelons (cf. paragraphe 1.2.4) que toutes les particules n'ayant pas la même direction, on doit considérer autant de systèmes d'axes que de particules, afin de pouvoir écrire

$$\rho_i = \frac{1 + \vec{P}_{T,i} \cdot \vec{\sigma}_T + P_{L,i} \sigma_z}{2}$$


- Polarisation transverse:  $\hat{n} = \cos \varphi \hat{x}_i + \sin \varphi \hat{y}_i$

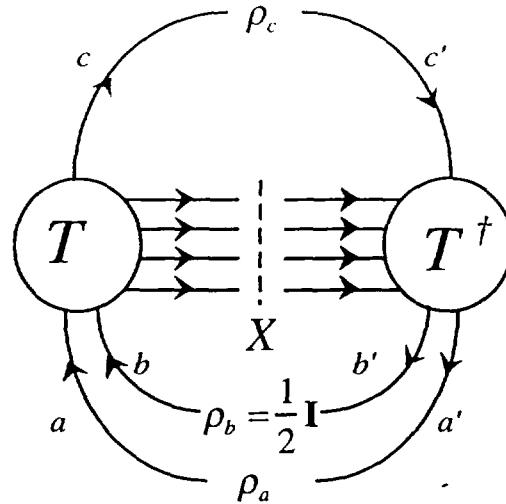
$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} &= \cos \varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin \varphi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{i\varphi} \underbrace{|-\rangle \langle +|}_{\sigma_-} + e^{-i\varphi} \underbrace{|+\rangle \langle -|}_{\sigma_+} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \delta_i^{(\text{transverse})} \sigma$  résulte d'une interférence entre hélicité '+' et hélicité '-' pour la particule i

### 3.4 Analyse “dans les voies t”

#### 3.4.1 Croisement s $\rightarrow$ t des diagrammes d'unitarité

Prenons la réaction  $a \hat{+} b \rightarrow c \hat{+} X$ , par exemple, dont voici le graphe d'unitarité



Par le croisement  $a'$  sortant  $\rightarrow \bar{a}'$  entrant, on transforme la **matrice densité**  $\rho$  en **fonction d'onde de spin** dans la "voie  $t$ "  $a\bar{a}'$ . Idem pour  $b'$  sortant  $\rightarrow \bar{b}'$  entrant et pour  $c'$  entrant  $\rightarrow \bar{c}'$  sortant (le croisement que nous considérons porte sur les particules avec un "prime").

Le croisement renversant les hélicités, nous l'écrivons

$$\langle a', \lambda'_a | \xrightarrow{\text{croisement}} | \bar{a}', -\lambda'_a \rangle \equiv | \bar{a}', \bar{\lambda}'_a \rangle$$

(idem  $b'$ ),

$$| c', \lambda'_c \rangle \xrightarrow{\text{croisement}} \langle \bar{c}', \bar{\lambda}'_c |$$

avec la notation  $\bar{\lambda} \equiv -\lambda$

Étudions par exemple le cas de la particule  $c$ .

- Particule  $c$  non analysée:

$$\begin{aligned} \rho_c = \mathbf{I} &= |+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| \xrightarrow{\text{croisement}} |+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +| \\ &= \sqrt{2} |c\bar{c}', S=0\rangle \end{aligned}$$

- asymétrie d'hélicité  $\delta_c^L \sigma$ :

$$\begin{aligned} \delta_c^L \rho_c = \sigma_z &= |+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -| \xrightarrow{\text{croisement}} |+\rangle \langle -| - |-\rangle \langle +| \\ &= \sqrt{2} |c\bar{c}', S=1, S_z=0\rangle \end{aligned}$$

- asymétrie de spin transverse,  $\delta_c^{\hat{n}}\sigma$ , avec  $\hat{n} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$

$$\begin{aligned} \delta_c^{\hat{n}}\rho_c &= \sigma \cdot \hat{n} = \\ &= e^{-i\varphi}|+\rangle\langle-| + e^{i\varphi}|-\rangle\langle+| \xrightarrow{\text{croisement}} e^{-i\varphi}|+\rangle\langle+| + e^{-i\varphi}|-\rangle\langle-| \\ &= e^{-i\varphi}|c\bar{c}', S=1, S_z=+1\rangle + e^{i\varphi}|c\bar{c}', S=1, S_z=-1\rangle \end{aligned}$$

### Conclusion:

- $\sigma(\dots, c \text{ non polarisé}, \dots)$  correspond à l'état singulet de spin dans la voie  $c\bar{c}'$
- $\delta_c^L \sigma(\dots)$  correspond à l'état triplet d'hélicité totale zéro,
- l'asymétrie transverse  $\delta_c^{\hat{n}} \sigma(\dots)$  correspond à une superposition des états d'hélicité totale  $\pm 1$  dans la voie  $c\bar{c}'$

**Autre langage** (en revenant à la “voie s”)

Étudios, par exemple, cette fois-ci le cas de la particule a:

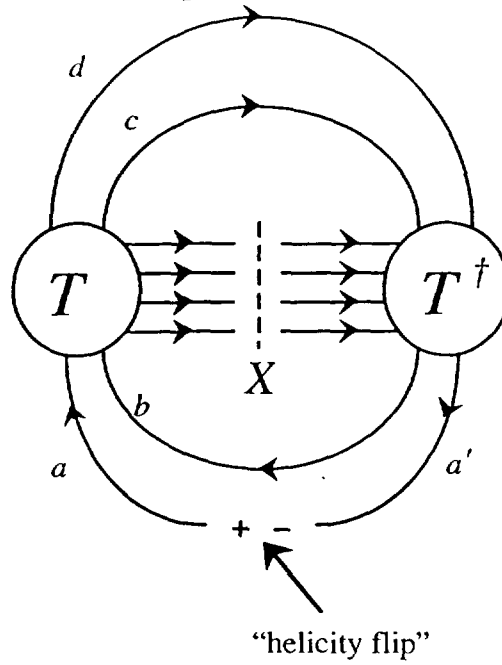
$$\begin{aligned} \sigma(\dots, a \text{ non polarisé}, \dots) \text{ et } \delta_a^L \sigma(\dots) &\Rightarrow S_z(a\bar{a}) \equiv \lambda_a + \bar{\lambda}'_a \equiv \lambda_a - \lambda'_a = 0 \\ &\Rightarrow \text{“helicity non – flip”} \end{aligned}$$

$$\delta_a^{\hat{n}} \sigma(\dots) \Rightarrow S_z(a\bar{a}) \equiv \lambda_a - \lambda'_a = \pm 1 \quad \text{“helicity flip”}$$

### 3.4.2 Application aux asymétries de spin transverse des sous processus durs

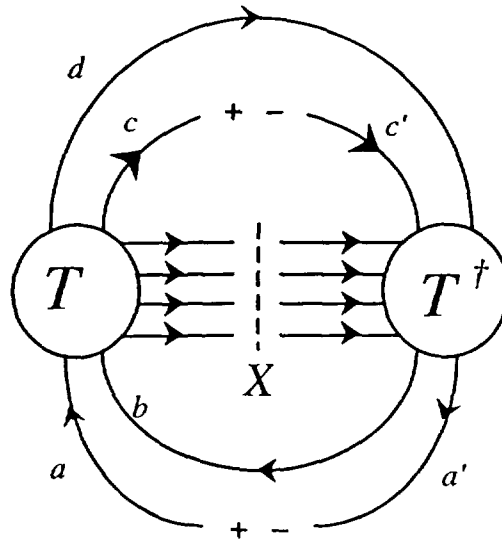
Nous nous placerons dans la limite de masse négligeable: la chiralité est conservée le long d'une ligne de fermion (invariance par transformation chirale).

asymétrie transverse simple



= impossible:  $A_N = 0$

asymétrie transverse double



$D_{NN}^{(a,c)} \neq 0$  seulement si  $a$  est connecté à  $c$  ou  $c'$  (si on referme les lignes,  $a, a', c, c'$  sont sur une même ligne de fermion). On retrouve la propriété B) du paragraphe 2.2.

# Chapitre 4

## Collision dures inélastiques I–Interface hadron-parton

Les sections efficaces des collisions inélastiques profondes se “factorisent” en fonction de distribution ou de fragmentation, décrivant l'interface hadron↔ parton d'une part et section efficace “dures” du sous-processus partonique d'autre part. Dans ce chapitre, nous étudions le premier aspect.

### 4.1 Distributions partoniques dans les hadrons

#### 4.1.1 Composantes de Fock de la fonction d'onde du hadron

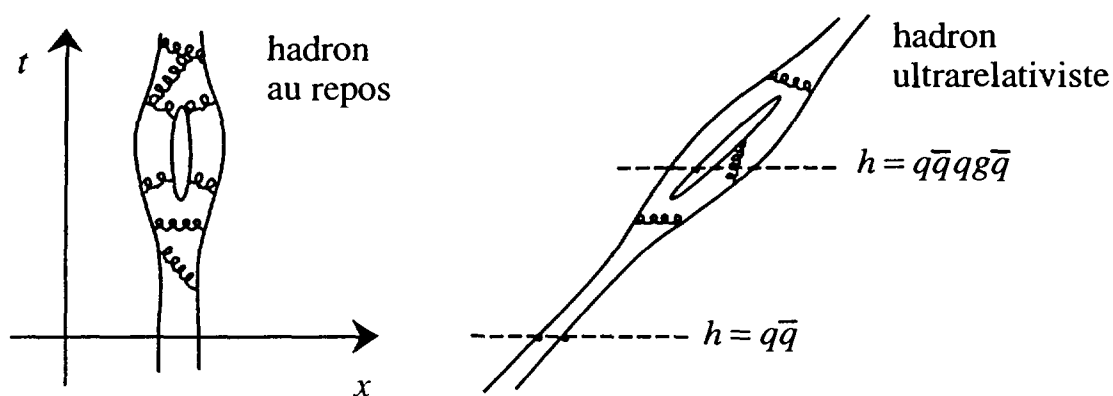


figure représentant l'évolution temporelle d'un hadron.

Comme le montre la figure ci-dessus, le nombre des partons dans un hadron n'est pas fixe. Dans la base partonique, la fonction d'onde du hadron s'écrit symboliquement

$$|\psi\rangle = |q\bar{q}\rangle + |q\bar{q}g\rangle + |q\bar{q}q\bar{q}\rangle + \dots$$

avec, par exemple

$$|q\bar{q}g\rangle = \int d\vec{p}_q d\vec{p}_{\bar{q}} \sum_{\lambda_q \lambda_{\bar{q}} \lambda_g} \psi^{(q\bar{q}g)}(\vec{p}_q, \vec{p}_{\bar{q}}, \lambda_q, \lambda_{\bar{q}}, \lambda_g) |\vec{p}_q, \lambda_q\rangle |\vec{p}_{\bar{q}}, \lambda_{\bar{q}}\rangle |\vec{p}_g, \lambda_g\rangle$$

$\vec{p}_g$ ,  $\vec{p}_q$  et  $\vec{p}_{\bar{q}}$  ne sont pas indépendant:

$$\vec{p}_g = \vec{p}_h - \vec{p}_q - \vec{p}_{\bar{q}}$$

#### 4.1.2 Densité partoniques (à hélicités données)

La densité (dans l'espace des impulsions) du *quark* dans la configuration  $q\bar{q}g$  s'obtient en sommant le carré de  $|\psi|$  sur les impulsions des autres partons:

$$f_{q/h}^{(q\bar{q}g)}(\vec{p}_q, \lambda_q) = \int d\vec{p}_{\bar{q}} \sum_{\lambda_{\bar{q}} \lambda_g} \left| \psi^{(q\bar{q}g)}(\vec{p}_q, \vec{p}_{\bar{q}}, \lambda_q, \lambda_{\bar{q}}, \lambda_g) \right|^2$$

La densité totale de quark sera obtenue en sommant sur les différentes composantes de Fock  $C = q\bar{q}$ ,  $q\bar{q}g$  etc.:

$$f_{q/h}(\vec{p}_q, \lambda_q) = \sum_C n_q(C) f^{(C)}(\vec{p}_q, \lambda_q)$$

où  $n_q(C)$  est le nombre de quark  $q$  dans la configuration  $C$ , par exemple  $n_q(q\bar{q}gq\bar{q}) = 2$

#### 4.1.3 Limite " $\vec{p} \rightarrow \infty$ "

Supposons le hadron ultrarelativiste et écrivons

$$\vec{p}_q = x_q \vec{p}_h + \vec{p}_{q\perp}, \quad \vec{p}_{\bar{q}} = x_{\bar{q}} \vec{p}_h + \vec{p}_{\bar{q}\perp},$$

et ainsi de suite. Alors

$$\psi^{(q\bar{q}g)} \rightarrow_{\infty} \psi^{(q\bar{q}g)}(x_q, \vec{p}_{q\perp}, x_{\bar{q}}, \vec{p}_{\bar{q}\perp}, \lambda_q, \lambda_{\bar{q}}, \lambda_g)$$

$$f_{q/h}(\bar{p}_q, \lambda_q) d^3 \bar{p}_q \rightarrow f_{q/h}(x, \bar{p}_{q\perp}, \lambda_q) dx d^2 \bar{p}_{q\perp}$$

où  $\psi$  et  $f$  ne dépendent pas de  $\bar{p}_h$  ("scaling de Björken").

On intégrera en général sur  $\bar{p}_{q\perp} \Rightarrow f_{q/h}(x, \lambda_q)$ .

Cas analogue: densité du nuage photonique accompagnant une particule chargée. Soit  $h =$  ion lourd ultra relativiste A; selon le point de vue de Weizsäcker et Williams, le champ coulombien du noyau équivaut à un nuage de photons de densité

$$dN_\gamma \cong \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2} \frac{dx}{x} \frac{d^2 \bar{k}_\perp}{\bar{k}_\perp^2} \quad \text{avec les cutoffs}$$

$$xM_A \leq k_\perp \leq \frac{1}{R_A}$$

En intégrant sur  $\bar{k}_\perp$ :

$$f_{\gamma/A}(x) \cong \frac{2Z^2 \alpha}{\pi} \frac{1}{x} \ln \frac{1}{xM_A R_A}$$

(cf. formule 15.59 du livre "Classical Electrodynamics" de Jackson)

#### 4.1.4 Formulation sur le plan nul (ou "cône de lumière")

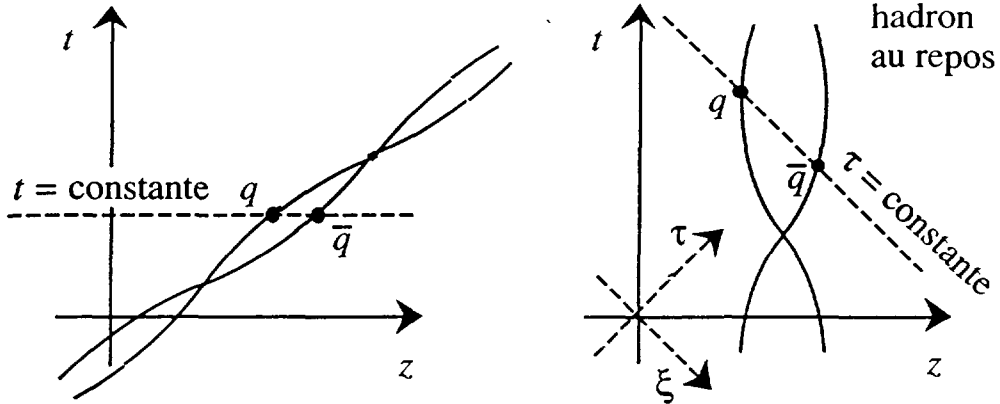
Dans le repère " $\bar{p} \rightarrow \infty$ ", nous avons

$$x = \frac{p_q^L}{p_h^L} \cong \frac{p_q^+}{p_h^+}$$

où  $p^\pm = E \pm p^L =$  coordonnées "de lumière" du 4-vecteur  $p$ .

Les rapports  $p_q^+ / p_h^+$  et  $p_q^- / p_h^-$  sont invariants par boost longitudinal, aussi on peut écrire  $x_q \cong p_q^+ / p_h^+$  aussi bien dans un repère où le hadron n'est pas

rapide, par exemple celui du hadron au repos ( $p_h^+ = p_h^- = m_h$ ).  $\psi(x_q, \bar{p}_{q\perp} \dots)$  est appelé la *fonction d'onde sur le plan nul* du hadron.



La mécanique quantique “sur le plan nul” débute par une redéfinition des variables “temps”, “énergie”, “position”, “impulsion”. Considérons en effet une onde plane:

$$\exp(-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{X}) = \exp\left(-\frac{i}{2} p^- X^+ - \frac{i}{2} p^+ X^- + i\vec{p}_\perp \cdot \vec{X}_\perp\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow & \\ 2\varepsilon \quad \tau & p_\zeta \quad (-2\zeta) & \underbrace{\hspace{2cm}} \\ & & \text{inchangés} \end{array}$$

$$= \exp\left(-i\varepsilon \quad \tau + ip_\zeta \zeta + i\vec{p}_\perp \cdot \vec{X}_\perp\right)$$

↓ ↓

“énergie” “temps”     $(p_\zeta, \vec{p}_\perp)$  = “impulsion”     $(\zeta, \vec{X}_\perp)$  = “position”

## 4.2 Dépendance en spin des densités partoniques

### 4.2.1 Choix d'une description

$f_{q/h}(x, \lambda_q)$  ne contient pas toute l'information sur le spin du quark: qu'en est-il de la polarisation transverse? Pour tenir entièrement compte du spin, nous avons 4 descriptions:



- 1)  $f_{q/h}(x, \bar{P}_h, \bar{P}_q)$  : très parlant, mais pas très économique au sens de l'information (fonction de 7 variables)
- 2) Les différentiations par rapport au spin. Exemple:  $\delta_q^L \delta_h^L f(x)$ .
- 3) La matrice densité
- 4) Les états d'hélicité dans la voie  $t$ :  $h\bar{h} \rightarrow q\bar{q}$

#### 4.2.2 Les différentiations par rapport au spin

En analogie avec les notations du § 2.3, nous pouvons écrire

$$f(x) = \text{moyenne} / \bar{P}_h, \text{ somme} / \bar{P}_q \text{ de } f(x, \bar{P}_h, \bar{P}_q)$$

$$\delta_q^{\hat{n}} f(x, \bar{P}_h) = f(x, \bar{P}_h, \bar{P}_q = \hat{n}) - f(x, \bar{P}_h, \bar{P}_q = -\hat{n})$$

(idem en intervertissant  $h$  et  $q$  mais avec un facteur  $1/2$ )

Dans un baryon, à cause de l'invariance par parité et par rotation autour de  $\bar{p}_h$ , on n'a que trois fonctions indépendantes:

$$q(x) \equiv f_{q/B}(x)$$

$$\begin{aligned} \Delta_L q(x) &\equiv \delta_q^L \delta_B^L f_{q/B}(x) = \\ &f_{q/B}(x, ++) - f_{q/B}(x, +- ) = q_+(x) - q_-(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_T q(x) &\equiv \delta_q^{\hat{n}} \delta_B^{\hat{n}} f_{q/B}(x) = \\ &f_{q/B}(x, \hat{n}, \hat{n}) - f_{q/B}(x, \hat{n}, -\hat{n}) = q_{\uparrow}(x) - q_{\downarrow}(x) \end{aligned}$$

où  $\hat{n}$  est un vecteur transverse (d'azimut quelconque).

$\Delta_L q$  et  $\Delta_T q$  obéissent à des règles de somme;  $\int_0^1 \Delta_L q(x) dx$  est relié à la charge axiale et  $\int_0^1 \Delta_T q(x) dx$  à la charge tenseur du nucléon (cf. Jaffe et Ji; Cortes, Pire et Ralston).

### 4.2.3 La matrice densité

Prenons d'abord le hadron dans un état pur  $|h, \vec{p}_h, s_h\rangle$ . Supposons  $h = \text{proton}$  et étudions sa configuration  $|u_1 u_2 d\rangle$

$$\psi_{h, \vec{p}_h, s_h}^{(3q)}(\vec{p}_1, s_1, \vec{p}_2, s_2, s_3) \equiv (\langle u, \vec{p}_1, s_1 | \otimes \langle u, \vec{p}_2, s_2 | \otimes \langle d, \vec{p}_3, s_3 |) |h, \vec{p}_h, s_h\rangle$$

avec  $\vec{p}_3 = \vec{p}_h - \vec{p}_1 - \vec{p}_2$ . En oubliant tout ce qui n'est pas spin:

$$\psi_{s_h}(s_1, s_2, s_3) \equiv \langle s_1, s_2, s_3 | \psi | s_h \rangle$$

( $\psi_{s_h}$  = fonction d'onde;  $\psi$  = matrice)

La matrice densité de spin du quark  $\underline{d}$  est donnée par

$$f_{d/x}(x) \langle s_3 | \rho^d | s'_3 \rangle = \sum_{s_1, s_2} \langle s_1, s_2, s_3 | \psi | s_h \rangle \langle s_h | \psi^\dagger | s_1, s_2, s'_3 \rangle$$

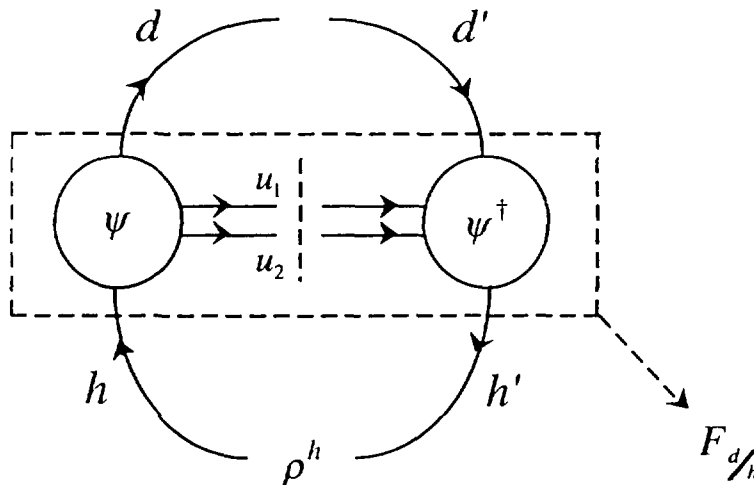
Si maintenant le proton est partiellement polarisé, je remplace  $|s_h\rangle\langle s_h|$  par une matrice densité

$$\rho^h = \sum_{\lambda, \lambda'} |\lambda\rangle \rho_{\lambda\lambda'}^h \langle \lambda'|$$

Dans la base des hélicités, on a donc

$$\begin{aligned} d(x) \rho_{\lambda_d \lambda'_d}^d &= \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_h \lambda'_h} \langle \lambda_1, \lambda_2, \lambda_d | \psi | \lambda_h \rangle \rho_{\lambda_h \lambda'_h} \langle \lambda'_h | \psi^\dagger | \lambda'_d, \lambda_1, \lambda_2 \rangle \\ &= \sum_{\lambda_h \lambda'_h} \langle \lambda'_h, \lambda_d | F_{d/h}(x) | \lambda_h, \lambda'_d \rangle \rho_{\lambda_h \lambda'_h}^h \end{aligned}$$

représentée graphiquement par



$F(x)$  discontinuité de l'amplitude matricielle d'hélicité "vers l'avant"

$$\bar{d} + \text{proton} \rightarrow \bar{d} + \text{proton}$$

(  $F$  est à  $f$  ce que  $\Sigma$  est à  $\sigma$  dans §3.2.2). En abrégé:

$$f_{q/h}(x) \rho^q(x) = \text{trace}_h F_{q/h}(x) \rho^h$$

Lien avec les notations précédentes 1) et 2):

$$f_{q/h}(x, \vec{P}_h, \vec{P}_q) = \text{trace} \frac{1 + \vec{P}_h \cdot \vec{\sigma}(h)}{2} F_{q/h}(x) \frac{1 + \vec{P}_q \cdot \vec{\sigma}(q)}{2}$$

$$q(x) = \frac{1}{2} \text{trace} F(x) = \langle + + | F | + + \rangle + \langle + - | F | + - \rangle$$

$$\Delta_L q(x) = \text{trace} \left( \frac{1}{2} \sigma_z^h \right) F(x) \sigma_z^q = \langle + + | F | + + \rangle - \langle + - | F | + - \rangle$$

$$\begin{aligned} \Delta_T q(x) &= \text{trace} \left( \frac{1}{2} \sigma_x^h \right) F(x) \sigma_x^q = \langle - + | F | + - \rangle \\ &= \text{partie "helicity - flip" de } F(x) \end{aligned}$$

formule inverse:

$$F_{q/h}(x) = \frac{1}{2} \left\{ f_{q/h}(x) + \Delta_L f_{q/h}(x) \sigma_z^q \otimes \sigma_z^h + \Delta_T f_{q/h}(x) \left[ \sigma_x^q \otimes \sigma_x^h + \sigma_y^q \otimes \sigma_y^h \right] \right\}$$

#### 4.2.4 Voie t

$q(x) \#$  amplitude ( $h\bar{h}'$  singulet (de spin)  $\rightarrow q\bar{q}'$  singulet)

$\Delta_L q(x)$  # amplitude ( $h\bar{h}'$  triplet,  $\lambda_{tot} = 0 \rightarrow$  idem  $q\bar{q}'$ )

$\Delta_T q(x)$  # amplitude ( $h\bar{h}'$  triplet,  $\lambda_{tot} = \pm 1 \rightarrow$  idem  $q\bar{q}'$ )

### 4.3 Positivité, inégalité de Soffer

(Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 1292)

De la relation  $f_{q/h}(x, \vec{P}_h, \vec{P}_a) > 0$ , on tire les inégalités triviales

$$|\Delta_L q(x)| \leq q(x)$$

$$|\Delta_T q(x)| \leq q(x)$$

Autre inégalité (moins triviale\*):

$$|\Delta_x q(x) + \Delta_y q(x)| \leq q(x) + \Delta_z q(x)$$

ainsi que permutations circulaires.

---

(\*) Pour établir ces inégalités on établit d'abord

$$\Delta_+ q = \sum_x \text{Re}(a_x^* b_x + c_x^* d_x)$$

$$\Delta_- q = \sum_x \text{Re}(a_x^* b_x - c_x^* d_x)$$

avec

$$a_x = \langle q+, X | \psi | h+ \rangle$$

$$b_x = \langle q-, X | \psi | h- \rangle$$

$$c_x = \langle q-, X | \psi | h+ \rangle$$

$$d_x = \langle q+, X | \psi | h- \rangle$$

d'où

$$q_+(x) = \sum_x |a_x|^2 = \sum_x |b_x|^2$$

$$q_-(x) = \sum_x |c_x|^2 = \sum_x |d_x|^2$$

On utilise ensuite l'inégalité

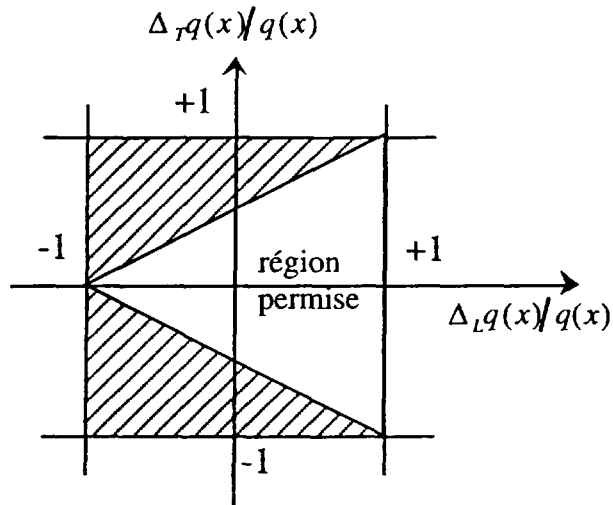
$$2 |\text{Re } a^* b| \leq |a|^2 + |b|^2$$

A cause de l'invariance par rotation autour de  $\bar{p}_h$ ,

$$\Delta_x q = \Delta_y q \equiv \Delta_T q,$$

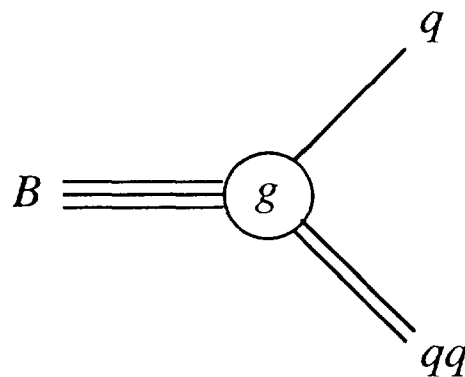
d'où

$$\boxed{|\Delta_T q(x)| \leq q_+(x)} \quad \text{inégalité de Soffer}$$



#### 4.4 Modèle-jouet pour $q(x)$ , $\Delta_L q(x)$ et $\Delta_T q(x)$

Baryon = quark + diquark spectateur scalaire



méthode à la Weizsäcker-Williams

$$f(x, \bar{k}_\perp, s_B, s_q) = \frac{1}{16\pi^3} \frac{x}{1-x} \left| \frac{\langle s_q | V | s_B \rangle}{k^2 - m_q^2} \right|^2$$

avec

$$\langle s_q | V | s_B \rangle = g \bar{u}(\vec{p}_q, s_q) u(\vec{p}_B, s_B)$$

$$k^2 = x m_B^2 - \frac{k_\perp^2 + x m_{qq}^2}{1-x}$$

( $k$  hors couche,  $qq$  sur couche)

Calcul en base d'hélicité et représentation spinorielle

$$u_B(\pm) = \begin{pmatrix} \sqrt{E \pm p} \\ \sqrt{E \mp p} \end{pmatrix} |\pm\rangle \quad (|\pm\rangle = \text{spineur de Pauli})$$

$$u_q(\pm) = \exp\left(-\frac{i}{2} (\hat{z} \times \hat{k}) \cdot \vec{\sigma}\right) \begin{pmatrix} \sqrt{k^0 \pm k} \\ \sqrt{k^0 \mp k} \end{pmatrix} |\pm\rangle$$

(cf. paragraphe 1.2.4. Ici la rotation est d'axe  $\hat{z} \times \hat{k}$  et d'angle  $\theta_k \approx |\hat{z} \times \hat{k}|$ )

Il vient, à la limite  $p_z \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \langle + | V | + \rangle &= \langle - | V | - \rangle = \frac{m_q + x m_B}{\sqrt{x}} \\ \langle + | V | - \rangle &= - \langle - | V | + \rangle^* = \frac{k - ik_y}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

d'où, après intégration sur l'azimut de  $\vec{k}_\perp$ :

$$q_+(x) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{(m_q + x m_B)^2}{1-x} \int_0^\infty dk_\perp^2 \left( \frac{g(k^2)}{k^2 - m_q^2} \right)^2$$

$$q_-(x) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{1-x} \int k_\perp^2 dk_\perp^2 \left( \frac{g(k^2)}{k^2 - m_q^2} \right)^2$$

$$\Delta_L q \equiv q_+ - q_-$$

$\Delta_T q = q_+ \rightarrow$  sature la borne de Soffer

- à la place de  $g$ , on a mis un facteur de forme  $g(k^2)$  qui fait converger l'intégrale
- En non relativiste,  $q = q^+$ ,  $q^- = 0$  (dans ce modèle);  $q_-(x) \neq 0$  est typique d'une fonction d'onde interne relativiste (de même que  $x \neq \frac{m_q}{m_B}$ )

$$\frac{q_-(x)}{q_+(x)} \approx \frac{\langle k_\perp^2 \rangle}{(m_q + x m_B)^2}$$

La composante  $q_-$  est associée à un moment angulaire orbital  $L_Z = +1$ , pour satisfaire  $J_Z \equiv \lambda_B = \lambda_q + L_Z$

origine: la fonction d'onde interne relativiste possède une "grande composante" d'onde S et une "petite composante" d'onde P et d'amplitude

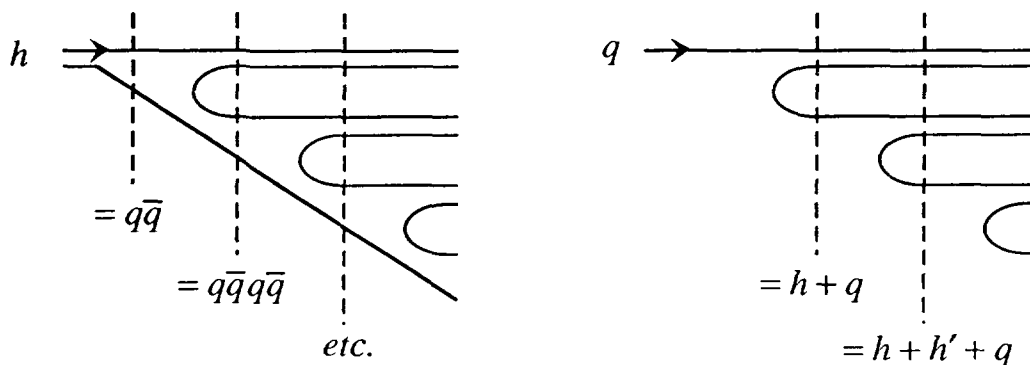
$$\sim \frac{v}{c} \approx \frac{k_\perp}{m_q}$$

Limites du modèle:

- Ne prend pas en compte les états du système spectateur autre que celui de  $J = 0$  (on peut l'améliorer en introduisant des diquarks de spin 1, en s'inspirant de SU(6)).
- N'a pas de mer ni de glu, ni de comportement à la Regge pour  $x \rightarrow 0$ .
- Considère le quark comme non confiné (pôle à  $k^2 = m_q^2$ )

## 4.5 Fonctions de fragmentation

Analogie entre densité de quark dans un hadron ( $h \rightarrow q + X$ ) et fragmentation d'un quark en hadron ( $q \rightarrow h + X$ ):



$$f_{q/h}(x)$$

$$f_{h/q}(z)$$

$$x = \frac{p_q^+}{p_h^+}$$

$$z = \frac{p_h^+}{p_q^+}$$

- Les structures en spin de  $f_{q/h}$  et  $f_{h/q}$  sont similaires. Par exemple

- $f_{h/q}(z) \rho_h(z) = \text{trace}_q F_{h/q}(z) \rho_q$

- $\Delta_T f_{h/q}(z) = \delta_h^{\hat{y}} \delta_q^{\hat{y}} f = \text{trace} \frac{1}{2} \sigma_y(q) F_{h/q}(z) \sigma_y(h)$

- $\left| \Delta_T f_{h/q} \right| \leq \frac{f_{h/q} + \Delta_L f_{h/q}}{2} \quad (\text{Soffer})$



# Chapitre 5

## Collision dures inélastiques

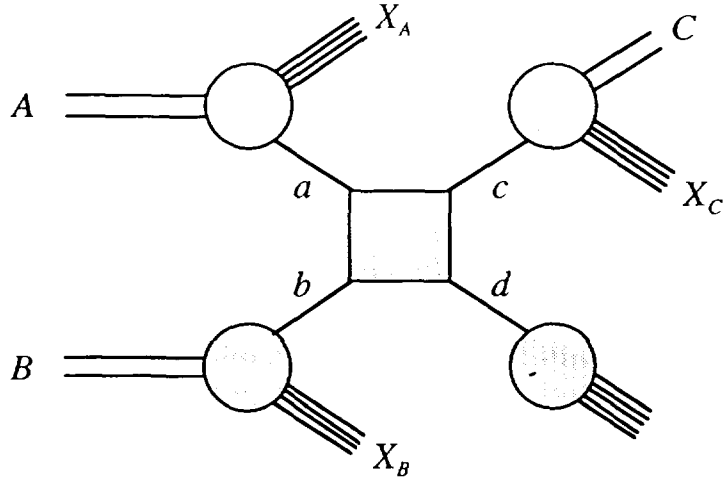
### II–Processus complet

Dans ce chapitre, nous montrons comment “boulonner” l’interface hadrons externes–partons avec le sous-processus dur, en tenant compte des spin internes et externes.

#### 5.1 Factorisation

Nous adoptons le point de vue du modèle naïf des partons. Nous négligerons les masses et les virtualités des partons, les masses des hadrons et les impulsions transverses relatives hadron–parton, ainsi que les violations du “scaling” dues aux corrections radiatives de QCD.

**5.1.1 Premier exemple: production inclusive à grand  $\bar{p}_T$ ,  $A + B \rightarrow C + X$**



Cas non polarisé:

$$E_C \frac{d\sigma}{d^3 \vec{p}_C} = \int f_{a/A}(x_a) dx_a f_{b/B}(x_b) dx_b E_c \frac{d\hat{\sigma}}{d^3 \vec{p}_c} \frac{1}{z^2} f_{c/c}(z) dz$$

Cas d'un sous-processus  $2 \rightarrow 2$ :

$$E_c \frac{d\sigma}{d^3 \vec{p}_c} = 2\hat{s} \delta(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u}) \frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}d\varphi}$$

avec

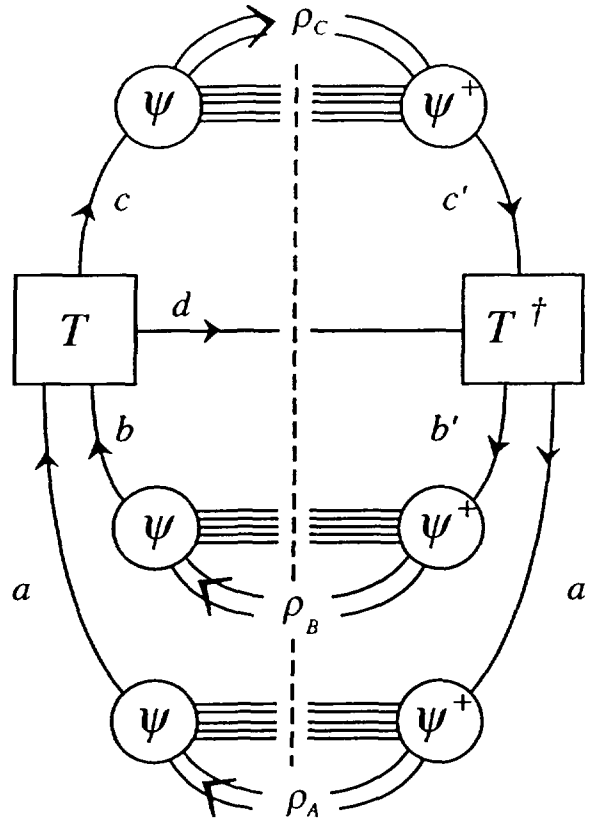
$$\hat{s} \equiv (p_a + p_b)^2 = x_a x_b s$$

$$\hat{t} \equiv (p_a - p_c)^2 = x_a \frac{t}{z} \quad , \quad t \equiv (p_A - p_C)^2$$

$$\hat{u} \equiv (p_b - p_c)^2 = x_b \frac{u}{z} \quad , \quad u \equiv (p_B - p_C)^2$$

Cas polarisé:

Le diagramme d'unitarité s'obtient en "cousant" le diagramme précédent avec son symétrique. La "couture" est directe au niveau des particules non détectées (ensembles  $X_A$ ,  $X_B$ , et  $X_C$ ). Au niveau des particules détectées ou initiales, on intercale une matrice densité de spin. D'où la structure suivante



- Pour passer du cas non-polarisé au cas polarisé, il faut remplacer  $f_{a/A} f_{b/B} \hat{\sigma} f_{c/C}$  par:

$$\langle \lambda_A | \rho_A | \lambda'_A \rangle \langle \lambda'_A, \lambda_a | F_{a/A} | \lambda_A, \lambda'_a \rangle$$

$$\langle \lambda_B | \rho_B | \lambda'_B \rangle \langle \lambda'_B, \lambda_b | F_{b/B} | \lambda_B, \lambda'_b \rangle$$

$$\langle \lambda'_b, \lambda'_a, \lambda_d, \lambda_c | \hat{\Sigma} | \lambda_a, \lambda_b, \lambda'_c, \lambda_d \rangle$$

$$\langle \lambda'_c, \lambda_C | F_{c/C} | \lambda_c, \lambda'_C \rangle \langle \lambda'_C | \rho_C | \lambda_C \rangle$$

( $\rho_C$  = matrice d'acceptance du détecteur "polarisé" de C. Voir les § 3.2.2 et 4.2.3 pour les définitions des matrices  $\Sigma$  et F).

- Sommer sur les variables répétées (après avoir vérifié que chacune apparaît une fois dans un  $\langle \text{bra} |$ , une fois dans un  $|\text{ket} \rangle$ )

### 5.1.2 Autres types de réaction inélastiques à grand transfert

- **diffusion de lepton** Deep Inelastic Lepton Scattering (D.I.L.S.),  
 $\ell + A \rightarrow \ell' + X$

On peut la considérer comme un cas particulier de § 5.1.1. avec

$$B \equiv b = \ell \quad , \quad f_{b/B} = \delta(x_b - 1) \quad , \quad X_B = \{\text{vide}\}$$

$$C \equiv c = \ell' \quad , \quad f_{C/c}(z) = \delta(z - 1) \quad , \quad X_C = \{\text{vide}\}$$

$$A \equiv \text{nucléon}, \quad \hat{t} \equiv (p_\ell - p_{\ell'})^2 = t = -Q^2 \quad , \quad \hat{s} = xs = 2xmE_\ell$$

$$\hat{u} \equiv (p_a - p_{\ell'})^2 = xu = -2xmE'_\ell$$

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dx d\varphi} = \sum_a \frac{d\hat{\sigma}^{(\ell a)}}{dQ^2 d\varphi} f_{a/N}(x)$$

avec

$$\frac{d\hat{\sigma}^{(\ell a)}}{dQ^2 d\varphi} = \frac{\alpha^2 e_a^2}{Q^4} \frac{\hat{s}^2 + \hat{u}^2}{\hat{s}^2} \quad , \quad e_a^2 = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{3}.$$

La fonction  $\delta(\hat{s} + \hat{t} + \hat{u})$  fixe  $Q^2 = 2mx(E_\ell - E'_\ell) = 2mxv$ .

$$\left( \text{nous avons utilisé } \frac{d^3\vec{P}'_\ell}{E'_\ell} = \frac{1}{2s} Q^2 dQ^2 \frac{dx}{x^2} d\varphi; \quad \frac{-\hat{u}}{\hat{s}} = \frac{E'_\ell}{E_\ell} \right)$$

- **Drell-Yan:**  $A + B \rightarrow \ell^+ \ell^- + X$

$a = q, \quad b = \bar{q}$  (ou vice versa). La variable  $\vec{p}_C$  est remplacée par  
 $\{M^2, Y, \hat{\Omega}\}$

avec

$M^2 = (\text{masse})^2$  de la paire  $\ell^+ \ell^- = \hat{s} = x_a x_b s$

$Y = \text{rapidité de la paire } \ell^+ \ell^- = \frac{1}{2} \ln \frac{x_a}{x_b}$

$\hat{\Omega} = (\hat{\theta}, \varphi) = \text{direction du } \ell^- \text{ dans le repère du photon massif}$

$$\frac{d\sigma}{dM^2 dY d\hat{\Omega}} = \frac{1}{s} \sum_{\substack{a=u, d, s, \\ \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}}} f_{a/A} \left( x_a = \frac{M}{\sqrt{s}} e^{+Y} \right) f_{\bar{a}/B} \left( x_b = \frac{M}{\sqrt{s}} e^{-Y} \right) \frac{d\hat{\sigma}(a + \bar{a} \rightarrow \ell^+ \ell^-)}{d\hat{\Omega}}$$

avec

$$\frac{d\hat{\sigma}(a \bar{a} \rightarrow \ell^+ \ell^-)}{d\hat{\Omega}} = \frac{\alpha^2 e_a^2}{12 \hat{s}} (1 + \cos^2 \hat{\theta}), \quad |e_a| = \frac{1}{3} \text{ ou } \frac{2}{3}.$$

- **photons directs:**  $A + B \rightarrow \gamma + X$

prendre  $C = c = \gamma$ ,  $f_{c/c} = \delta(z-1)$  dans § 5.1.1

- **$e^+ e^- \rightarrow h + X$ :**

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dz} = \sum_{a=u, d, \dots, \bar{b}} \frac{d\hat{\sigma}(e^+ e^- \rightarrow a \bar{a})}{d\Omega} f_{h/a}(z)$$

avec

$$z = \frac{E_h + |\vec{p}_h|}{E_a + |\vec{p}_a|}, \quad \frac{d\hat{\sigma}(e^+ e^- \rightarrow a \bar{a})}{d\Omega} = 9 \frac{d\hat{\sigma}(a \bar{a} \rightarrow e^+ e^-)}{d\Omega}$$

- **D.I.L.S. semi-inclusif:**  $A + \ell \rightarrow h + \ell' + X$

$$\frac{d\sigma}{dQ^2 dx d\varphi dz} = \sum_a f_{a/N}(x) \frac{d\hat{\sigma}^{(\ell a)}}{dQ^2 d\varphi} f_{h/a}(z)$$

- $\underline{e^+ e^- \rightarrow h + h' + X}$  (h et h' dans deux jets opposés):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dz dz'} = \sum_{a=u, d, \dots \bar{b}} \frac{d\hat{\sigma}^{(e^+ e^- \rightarrow a\bar{a})}}{d\Omega} f_{h/a}(z) f_{h'/\bar{a}}(z')$$

Ici  $\Omega$  désigne l'axe présumé de la paire  $a\bar{a}$ . A l'ordre le plus bas en  $\alpha_s$ , on peut le remplacer par la direction de  $h$  ou de  $h'$ .

## 5.2 Asymétries à 1 spin

- Les asymétries à 1 spin *transverse* sont supprimées par la conservation de l'hélicité dans les sous-processus durs. Cependant, on observe des  $A_N$  non nuls dans

$$p + p \uparrow \rightarrow p + p$$

$$p + p \uparrow \rightarrow \text{méson} + X$$

$$p + p \rightarrow \Lambda \uparrow + X$$

jusqu'à des impulsions transverses assez grandes ( $p_T \approx 2 \div 3 \text{ GeV}$ ). L'hypothèse la plus orthodoxe est qu'une contamination par des mécanismes "mous" soit "encore" importante à de tels  $p_T$ .

- Les asymétries à 1 spin *longitudinal* ne peut provenir que de la violation de la parité (du moins dans les réactions  $2 \rightarrow 2$ ).

Exemple 1) D.I.L.S. avec un neutrino, avec échange de  $W^\pm$  sur cible polarisée

$$\frac{d\sigma^{(\nu)}(\bar{P}_N)}{dQ^2 dx d\varphi} = \sum_a \frac{d\hat{\sigma}^{(\nu a)}}{dQ^2 d\varphi} f_{a/N} \left( x = \frac{Q^2}{2m\nu}, \bar{P}_N, \lambda_a = \mp \frac{1}{2} \right)$$

( $\lambda_a = -1/2$  pour un quark,  $+1/2$  pour un antiquark)

$$f_{a/N} \left( x, \bar{P}_N, \lambda_a = \mp \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left\{ f_{a/N} (x) \mp P_N^L \Delta_L f_{a/N} (x) \right\}$$

$$\frac{d\hat{\sigma}^{(va)}}{dQ^2 d\varphi} = \frac{G_F^2}{2\pi^2} \times \begin{cases} \cos^2 \theta_c & \text{pour } a = d \\ \sin^2 \theta_c & \text{pour } a = s \\ (\hat{u}/\hat{s})^2 & \text{pour } a = \bar{u} \\ \text{zéro dans les autres cas} \end{cases}$$

(Réf.: F. Halzen, A.D. Martin, Quarks & Leptons)

Cet exemple est assez académique, car il faudrait polariser une cible de très grand volume.

Exemple 2)  $e^+e^- \rightarrow Z^0 \rightarrow \Lambda \uparrow$

(M. Burkardt, R.L. Jaffe, Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 2537; F. Lamarche, the Aleph collaboration, CERN PPE/96-04, submitted to Physics Letters; G. Gustafson, Häkkinen, Phys. Let. B 303 (1993) 350)

$$P_L(\Lambda) = \frac{\sum_f \delta_f^L d\hat{\sigma}(e^+e^- \rightarrow f\bar{f}) \Delta_L f_{\Lambda/f}(z)}{\sum_f d\hat{\sigma}(e^+e^- \rightarrow f\bar{f}) f_{\Lambda/f}(z)}$$

$$f = u, d, \dots, \bar{b}$$

$$\delta_f^L d\hat{\sigma} \equiv d\hat{\sigma}\left(\lambda_f = +\frac{1}{2}\right) - d\hat{\sigma}\left(\lambda_f = -\frac{1}{2}\right)$$

Si on néglige le couplage vectoriel  $v_e = 2 \sin^2 \theta_w - \frac{1}{2}$  devant le couplage axial  $a_e = -1/2$ , ou bien si on mélange les événements  $\theta$  et  $\pi-\theta$ ,

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\Omega} \propto (1 + \cos^2 \theta) (a_f^2 + v_f^2)$$

$$\delta_f^L \frac{d\hat{\sigma}}{d\Omega} \propto (1 + \cos^2 \theta) 2a_f v_f$$

f	u, c	$\bar{u}, \bar{c}$	d, s, b	$\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}$
$2a_f v_f$	0,19	- 0,19	0,35	- 0,35
$a_f^2 + v_f^2$	0,29	0,29	0,37	0,37
$\hat{A}_L \equiv \delta^L \hat{\sigma} / \hat{\sigma}$	0,67	- 0,67	0,94	- 0,93

### 5.3 Asymétries de spin longitudinal doubles

Les asymétries d'hélicités sont immédiates à traiter en employant la base d'hélicité: on n'a à tenir compte que de termes diagonaux ( $\lambda_i = \lambda'_i$ ) dans la formule du paragraphe 5.1.1.

- **D.I.L.S. polarisé longitudinalement:** mesure de  $g_1(x)$  (SMC, SLAC)

$$\frac{d\sigma(P_\ell^L, P_N^L)}{dQ^2 dx d\varphi} = \sum_a \frac{d\hat{\sigma}^{(a)}}{dQ^2 d\varphi} \left\{ f_{a/N}(x) + \hat{A}_{LL} P_\ell^L P_N^L \Delta_L f_{a/N}(x) \right\}$$

la partie non polarisée mesure

$$f_1(x) \equiv \frac{1}{2} \sum_a e_a^2 f_{a/N}(x)$$

la partie polarisée

$$g_1(x) \equiv \frac{1}{2} \sum_a e_a^2 \Delta_L f_{a/N}(x).$$

$$\hat{A}_{LL} = \frac{\hat{s}^2 - \hat{u}^2}{\hat{s}^2 + \hat{u}^2} = \frac{E_\ell^2 - E'_\ell{}^2}{E_\ell^2 + E'_\ell{}^2}$$

### 5.4 Asymétries de spin transverse; mesure de $\Delta_T q(x)$

Méthode naïve: on remplace la base d'hélicité par une **base de transversité**.  
La **quelle?** On a deux choix "naturels": celui du spin **normal** au plan de



diffusion ou celui du spin **dans le plan** de diffusion. **Problèmes:** comment traiter des polarisations qui ne sont ni dans le plan, ni normales au plan? Quel serait le "choix naturel" pour un sous-processus  $2 \rightarrow 3$ ? Une **méthode qui a réponse à tout** est celle exposée plus haut (paragraphe 5.1.1) utilisant la **matrice densité et la base d'hélicité**. Cependant, traitons **d'abord par la méthode naïve** le cas où tous les spins sont **normaux** au plan de diffusion et nous verrons comment généraliser au cas d'une orientation transverse quelconque.

#### 5.4.1 Drell-Yan polarisé transverse

(Réf. : J.P. Ralston et D. Soper; Artru et Mekhfi; Jaffe et Ji).

On réécrit en abrégé la formule pour Drell-Yan du paragraphe 5.1.2:

$$\sigma \propto \sum_a f_{a/A}(x_a) f_{\bar{a}/B}(x_b) \hat{\sigma}$$

Pour des polarisations normales au plan de diffusion dure, la "méthode naïve" donne le résultat correct:

$$A_{NN} \sigma \equiv \delta_A^N \delta_B^N \sigma \propto \sum_a \Delta_T f_{a/A}(x_a) \Delta_T f_{\bar{a}/B}(x_b) \hat{A}_{NN} \hat{\sigma}$$

d'où

$$A_{NN} = \hat{A}_{NN} \frac{\Delta_T f_{a/A}(x_a)}{f_{a/A}(x_a)} \cdot \frac{\Delta_T f_{\bar{a}/B}(x_b)}{f_{\bar{a}/B}(x_b)}$$

avec

$$\hat{A}_{NN} = -\frac{\sin^2 \hat{\theta}}{1 + \cos^2 \hat{\theta}}$$

### 5.4.2 Généralisation à des polarisations quelconques

$$\begin{aligned} \sigma(\bar{P}_A, \bar{P}_B) &\equiv \sigma(\text{non polarisé}) \left( 1 + A_{LL} P_A^L P_B^L \right. \\ &\quad \left. + A_{NN} P_A^N P_B^N + A_{SS} P_A^S P_B^S \right) \\ &= \sigma_{\text{non pol.}} \times \\ &\quad \left\{ 1 + \frac{\sum_{a,b} \hat{\sigma}^{(a+b)} \left( P_A^L P_B^L \Delta_L f_{a/A} \Delta_L f_{b/B} \hat{A}_{LL} + (P_A^N P_B^N - P_A^S P_B^S) \Delta_T f_{a/A} \Delta_T f_{b/B} \hat{A}_{NN} \right)}{\sum_{a,b} \hat{\sigma}^{(a+b)} f_{a/A} f_{b/B}} \right\} \end{aligned}$$

Pour le Drell-Yan,  $b = \bar{a}$  et, à cause de la chiralité,  $\hat{A}_{LL} = -1$ .

Remarques:

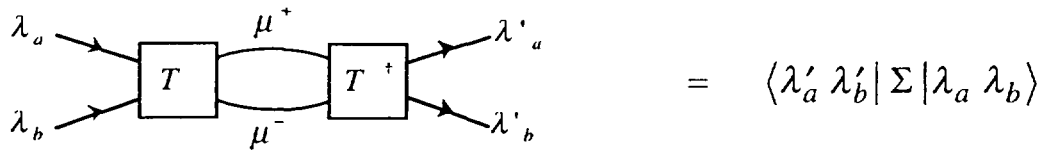
- Cette formule est générale pour tous les sous-processus  $2 \rightarrow 2$  qui conservent la parité, exemple

$$\begin{aligned} qq' \rightarrow qq' \quad , \quad q\bar{q}' \rightarrow q\bar{q}' \\ q\bar{q} \leftrightarrow \gamma g \quad \text{ou} \quad gg \end{aligned}$$

- Il n'y a pas d'asymétries mixtes du type  $\hat{A}_{NL}$ ,  $\hat{A}_{SL}$  (à cause de l'invariance chirale) ou  $\hat{A}_{NS}$  (à cause de la parité)
- Pour une interaction faible, il faut y ajouter des termes à 1 spin du type

$$P^L \hat{A}_L \frac{\Delta_L f}{f}$$

- On a utilisé la propriété  $\hat{A}_{SS} = -\hat{A}_{NN}$
- $(P_A^N P_B^N - P_A^S P_B^S) = -|P_A^T| |P_B^T| \cos[\phi(\bar{P}_A) + \phi(\bar{P}_B) - 2\phi(\mu^+)]$   
où les azimut sont comptés dans le même sens. L'effet "cardan" est ainsi manifeste.
- Si on intègre sur l'azimut  $\phi(\mu^+)$  de la paire, le terme d'asymétrie transverse disparaît (contrairement à l'asymétrie longitudinale). Pour comprendre l'essence de ce phénomène, considérer la matrice  $\hat{\Sigma}$  après avoir sommé sur les hélicités de  $\mu^+$  et  $\mu^-$ :



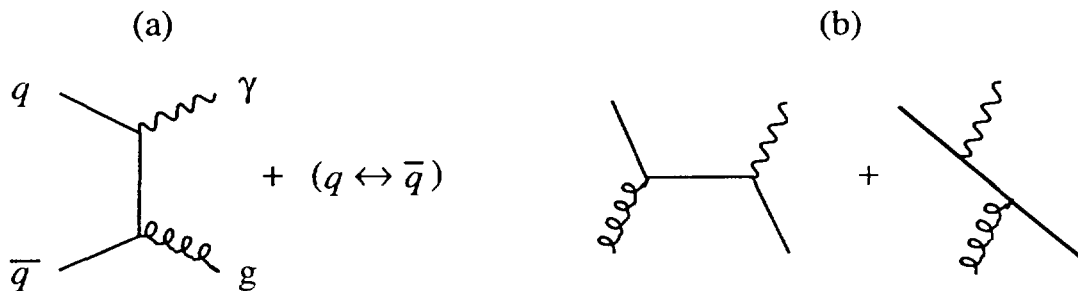
si on intègre sur  $\varphi(\mu^+)$ ,  $\Sigma$ , en tant qu'amplitude "vers l'avant" est invariant par rotation autour de l'axe des z, donc conserve  $J_z$ :

$$\lambda_a - \lambda_b = J_z = J'_z = \lambda'_a - \lambda'_b$$

or l'asymétrie transverse est donnée par l'élément de matrice "helicity flip"  $\langle +, - | \Sigma | -, + \rangle$  où  $J_z \neq J'_z$ . Elle ne peut être que nulle. C'est le "null theorem" de Hikasa. Si on contre on fixe  $\varphi(\mu^+)$ , on abandonne la symétrie de rotation autour de  $\hat{z}$  et l'égalité  $J_z = J'_z$  ci-dessus n'est plus vraie.

### 5.4.3 Point de vue expérimental

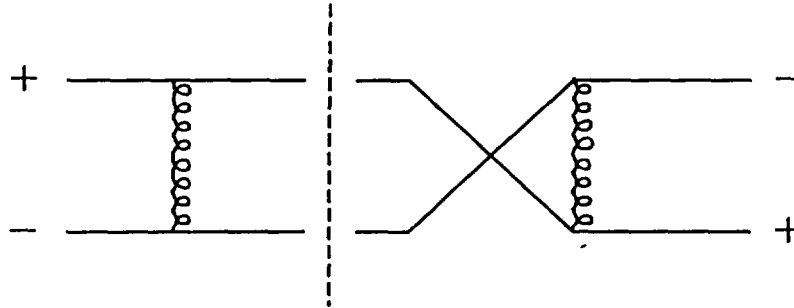
- Si on dispose de faisceaux et cibles (ou 2 faisceaux) de protons polarisés transverse, le processus de Drell-Yan permet de mesurer  $\Delta_T f_{q/N}(x_1) \cdot \Delta_T f_{\bar{q}/N}(x_2)$ .  $\bar{q}$  appartient à la mer et on s'attend à ce que celle-ci soit nettement moins polarisée que la valence. Ce n'est donc pas à priori l'expérience idéale pour mesurer  $\Delta_T q(x)$ . L'idéal serait d'avoir un faisceau d'antiproton polarisé.
- $q\bar{q} \rightarrow \gamma g$  (photon direct plus jet opposé. Voir Fig. a) est considéré par Xiangdong Ji (1992) comme plus intéressant que Drell-Yan à cause de sa plus grande section efficace. Le sous-processus croisé  $gq \rightarrow \gamma q$  (Fig. b) ne contribue pas à l'asymétrie (les gluons n'ont pas de spin transverse), donc la dilue.



- Le sous-processus  $qq \rightarrow qq$  ( $\rightarrow 2$  jets) permet de n'utiliser que des quarks de valence. Cependant  $|\hat{A}_{NN}|$  est borné par  $\frac{1}{11}$ :

$$\hat{A}_{NN} = \frac{-\sin^4 \theta}{11 + 34 \cos^2 \theta + 3 \cos^4 \theta}$$

Il faut que les deux quarks soient de saveur identique, car l'asymétrie résulte du terme d'interférence

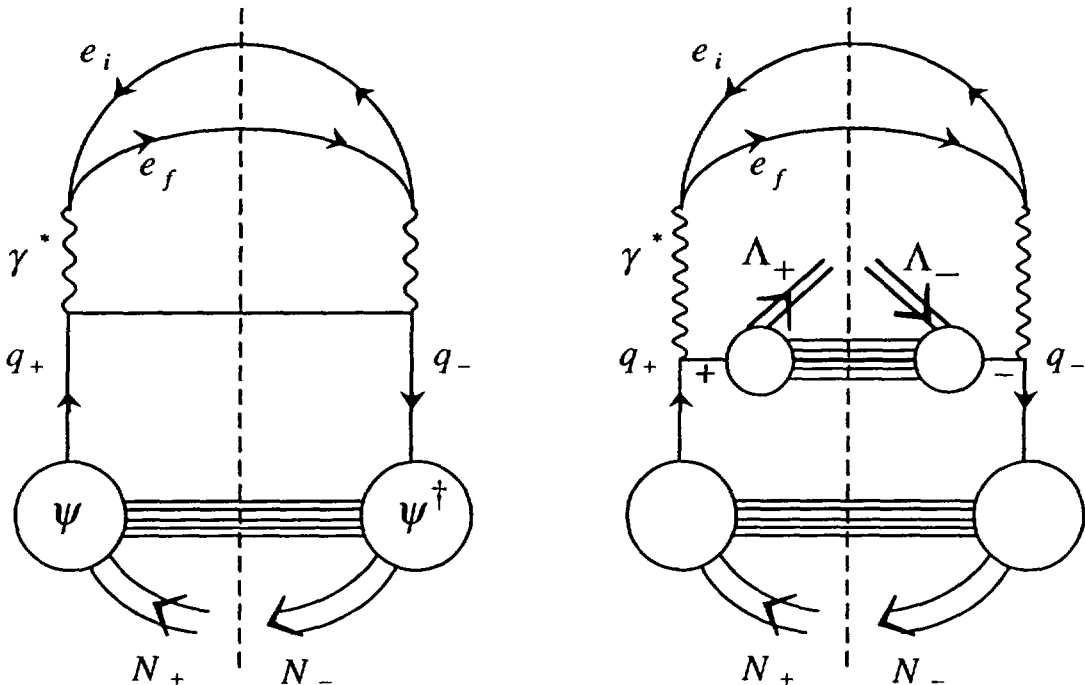


Le bruit de fond est constitué par les autres sources de jets:

$$qq' \rightarrow qq' \text{ (de saveurs différentes), } qg \rightarrow qg \text{ etc.}$$

Pour le diminuer, on peut sélectionner les événements  $pp \rightarrow \pi^+ \pi^+ (\vec{p}_T \text{ grands et opposés}) + X$ , où le sous-processus  $uu \rightarrow uu$  est dominant (X. Artru, Proceedings XXV<sup>ème</sup> Rencontre de Moriond (session hadronique, mars 1990), p. 415, Dennis Sivers, Phys. Rev. D 51 (1995) 4880)

#### 5.4.4 Electroproduction semi-inclusive polarisée transverse



Le D.I.L.S. totalement inclusif ne permet pas de mesurer  $\Delta_T q(x)$ . Ceci se voit immédiatement sur le diagramme de gauche, qui est interdit par la conservation de l'hélicité le long de la ligne de quark. Par contre, si on sélectionne une particule polarisée dans le jet issu du quark final (un  $\Lambda$  polarisé transverse dans le cas de la figure de droite), le diagramme devient permis.

Remarques:

- a) Dans le cas totalement inclusif, il ne sert à rien de polariser les électrons. En fait, les particules de jauge ne peuvent pas transmettre l'information de transversité, contrairement au cas de l'hélicité . Nous retrouvons deux des règles gouvernant les asymétries de spin transverse (cf. paragraphes 2.2 ou 3.4.2):
- il n'y a pas d'asymétrie à 1 spin transverse (sauf corrections en  $m/Q$ )
  - l'information de transversité ne quitte pas une ligne de fermion
- b) Le processus de droite est obtenu de celui de Drell et Yan par croisement

$$\begin{aligned} B_{\text{initial}} &\rightarrow \Lambda_{\text{final}} \\ e_{\text{final}}^+ &\rightarrow e_{\text{initial}}^- \end{aligned}$$

La polarisation du  $\Lambda$  final est donnée par

$$\bar{P}_T(\Lambda) = \Re \bar{P}_T(N) \hat{A}_{NN} \frac{\sum_a \Delta_T f_{q/N}(x) e_a^2 \Delta_T f_{N/a}(z)}{\sum_a f_{q/N}(x) e_a^2 f_{N/a}(z)}$$

où

- $\Re$  est la rotation autour de la normale au plan de diffusion dure (le plan  $e, e'$ ) qui amène la direction du nucléon (supposée opposée à celle de l'électron) sur la direction du Lambda.
- le paramètre de dépolarisation du sous-processus vaut

$$\hat{A}_{NN} = \frac{-2\hat{s}\hat{u}}{\hat{s}^2 + \hat{u}^2} = \frac{2 E_e E_e'}{E_e^2 + E_e'^2}$$

Point de vue expérimental (R.A. Kunne et al., Conf. Proceedings 44, THE ELFE PROJECT, P 401, edited by J. Arvieux and E. De Sanctis-SIF, Bologne, 1993):

- Il faut être (presque) sûr que le  $\Lambda$  provienne de la fragmentation du quark et non de celle du baryon-cible. Donc il faut assez d'énergie pour séparer les deux régions de fragmentation.
- Il y a relativement peu de baryons dans la région du quark, et encore moins de baryons  $\Lambda$  (typiquement 3% des événements).
- D'après le modèle SU(6) non relativiste,  $\Lambda = \text{quark } s + \text{diquark } (ud)$  de spin zéro. Celui impliquerait

$$\Delta f_{\Lambda/s} = f_{\Lambda/s} \quad ; \quad \Delta f_{\Lambda/u} = \Delta f_{\Lambda/d} = 0$$

quelque soit  $z$  et pour  $\Delta = \Delta_L$  ou  $\Delta_T$ . L'expérience ne serait donc sensible qu'à  $\Delta f_{s/N}$  qui est à priori faible. Remplacer le  $\Lambda$  par un  $\Sigma$  éviterait cet inconvénient, mais les  $\Sigma$  sont encore plus rares...Cependant, nous savons que les prédictions non relativistes peuvent être fausses (cf. la "crise du spin") et il se peut que  $\Delta f_{\Lambda/u}$  soit important.

- Cette expérience ne peut déterminer  $\Delta_T f_{a/N}(x)$  et  $\Delta_T f_{\Lambda/q}(z)$  qu'à une constante multiplicative près: multiplier le premier par 2 et le second par 1/2 donne le même résultat. Pour avoir une mesure absolue de  $\Delta_T f_{a/N}(x)$ , il faut mesurer  $\Delta_T f_{\Lambda/a}(z)$  indépendamment dans la réaction

$$e^+e^- \rightarrow \Lambda \uparrow \bar{\Lambda} \uparrow + X$$

où le  $\Lambda$  et le  $\bar{\Lambda}$  appartiennent à des jets  $q$  et  $\bar{q}$  opposés (X. Artru, Proceedings of the XXVIII<sup>ème</sup> Rencontre de Moriond 20-27 mars 1993, K. Chen, G.R. Goldstein, R.L. Jaffe and X. Ji, Nucl. Phys. **B 445** (1995) 380)

# Chapitre 6

## Polarimétrie des quarks

Si on cherche à mesurer  $\Delta_T q(x)$  par l'expérience

$$e^- N \uparrow \rightarrow e^- \Lambda \uparrow + X ,$$

le  $\Lambda$  ne sert en fait que d'analyseur de la polarisation du quark final, le pouvoir d'analyse étant  $\Delta_T f_{N/q} / f_{N/q}$  (ceci est un point de vue plutôt utilitaire; en fait  $\Delta_T f_{N/q}$  est un objet d'étude par lui-même aussi fondamental que  $\Delta_T f_{q/N}$ ).

L'inconvénient de ce polarimètre est d'être peu efficace à cause de la rareté des  $\Lambda$  dans jets. Il serait souhaitable de disposer d'un polarimètre utilisant un méson.

### 6.1 Mesure de l'hélicité

Pour la polarisation d'hélicité, Nachtmann (1977) puis Efremov et al. (1992) ont proposé l' "hélicité du jet" (jet handedness).

Si on se demande "quel méson peut remplacer le Lambda?", on cherche un méson

- de spin  $\neq 0$
- dont on peut mesurer le spin d'après la distribution angulaire des produits de désintégration.

Les  $\rho, k^*$  et  $\phi$  qui se désintègrent en deux corps, ne répondent pas à la question. Dans leur référentiel, la seule corrélation entre le spin et l'impulsion relative serait de la forme  $\vec{S} \cdot \vec{k}_{\text{relatif}}$ . Mais c'est une observable pseudo-scalaire, interdite par la conservation de la parité. Il faut donc au moins trois corps. Le  $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  ne répond pas, lui non plus, à la question. La conservation de la parité impose une amplitude de la forme  $A \vec{\epsilon} \cdot (\vec{p}_+ \times \vec{p}_-)$ . Son module au carré est symétrique en  $\vec{\epsilon}$  et  $\vec{\epsilon}^*$ , donc insensible à  $\langle \vec{S} \rangle$  (cf. § 1.5.1).

Le méson  $a_1$  répond à la question (cf. A.V. Efremov, L. Mankiewicz et N.A. Törnqvist, Phys. Lett. **B 291** (1992) 473). On a une corrélation du type

$$\vec{S} \cdot (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \text{ ou, dans un repère quelconque, } \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} s^\mu p_1^\nu p_2^\rho p_3^\sigma$$

Du point de vue expérimental, les  $a_1$  sont rares et difficiles à reconstituer. Cependant, une corrélation du type ci-dessus peut exister entre le spin du quark et la distribution angulaire des 3 mésons les plus rapides, même si ces trois particules n'entre pas en résonance, c'est-à-dire quelque soit leur masse invariante. C'est le principe du polarimètre de Nachtmann-Efremov, pour l'hélicité. De manière non-covariante,

$$\langle \lambda_{\text{parton}} \rangle \propto (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_3$$

(si on détecte les 3 particules les plus rapides)

ou

$$\langle \lambda_{\text{parton}} \rangle \propto (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2) \cdot \vec{p}_{\text{jet}}$$

(si on connaît par ailleurs l'axe du jet)

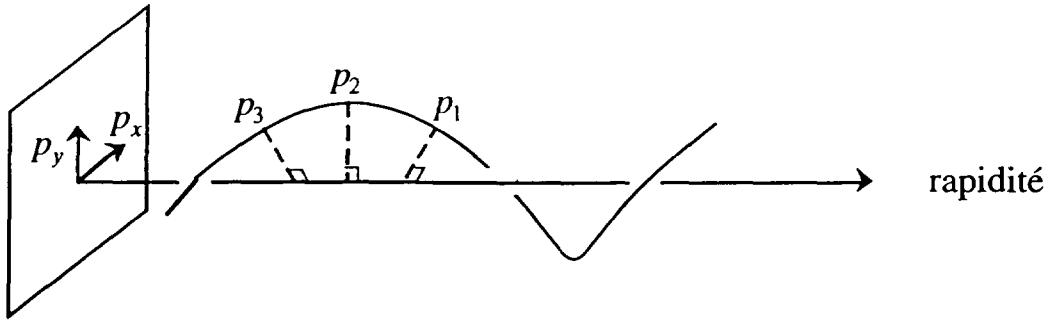
## 6.2 Mesure de la transversité

Pour la *transversité*, Collins a fait remarquer qu'on n'avait besoin que de deux particules (ou une seule si on connaît l'axe du jet) [J.C. Collins (1993)]

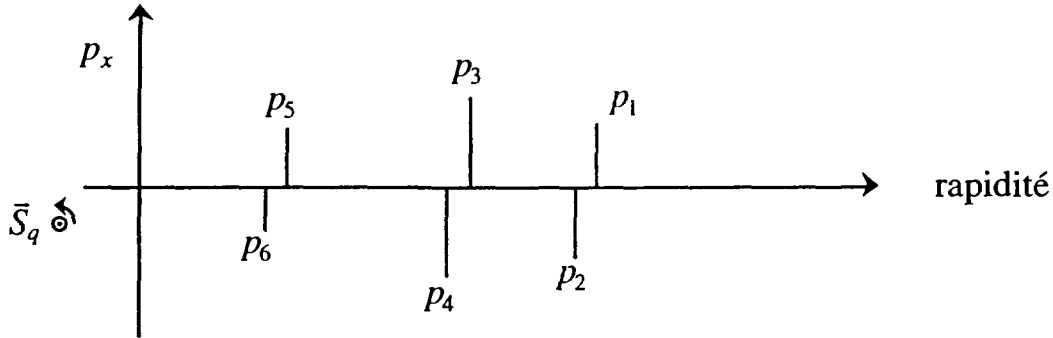
$$\langle \vec{S}_T(\text{quark}) \rangle \propto (\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)_\perp \text{ ou } (\vec{p}_1 \times \vec{p}_{\text{jet}}).$$



Pour visualiser ces deux polarimètres, on peut dire qu'un quark tournant en hélice donne un jet "en hélice"



tandis qu'un quark tournant "en roue" donne un "jet cisailé"



Paramétrisation de l'effet de "cisaillement du jet" ("sheared jet effect" ou "Collins effect")

$$dN(q\uparrow \rightarrow h+h'+X) = f_{hh'/q}(z, z', \bar{r}_\perp) \left\{ 1 + A_{hh'/q}(z, z', \bar{r}_\perp) P_q^T \sin[\phi(\bar{P}_q^T) - \phi(\bar{r})] \right\}$$

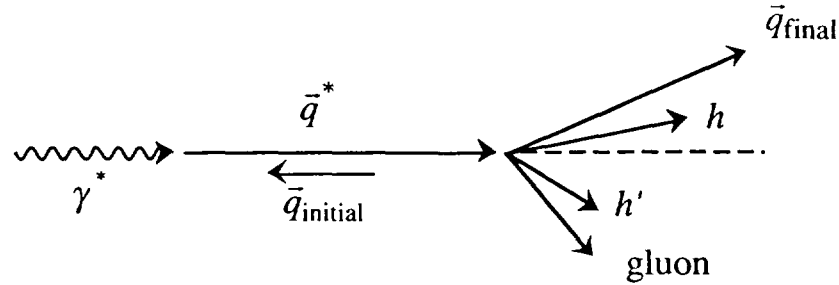
où

$$r_\perp = \frac{z'\bar{p}_\perp - z\bar{p}'_\perp}{z+z'}$$

est le moment relatif transverse de la paire  $(h, h')$ . Si on connaît de façon assez précise l'axe du jet, on peut remplacer  $\bar{p}'$  par celui-ci:

$$dN(q\uparrow \rightarrow h+x) = f_{h/q}(z, \bar{p}_T) \left\{ 1 + A_{h/q}(z, \bar{p}_T) P_q^T \sin[\phi(\bar{P}_q^T) - \phi(\bar{p}_T)] \right\}$$

Application: Dans mesure de  $\Delta_T q(x)$  par le D.I.L.S. semi-inclusif (paragraphe 5.4.4), on peut remplacer le  $\Lambda$  par un ou deux mésons (projet HELP). A très grand  $Q^2$ , il est préférable d'utiliser deux mésons.



Dans ce cas, en effet, le quark émet quelques gluons durs avant d'être piégé dans un hadron. L'effet de cisaillement a lieu au moment du piégeage. C'est donc par rapport à l'impulsion du quark juste avant piégeage ( $\vec{q}_{\text{final}}$ ) qu'il faut définir l'impulsion transverse du hadron, non par rapport à l'axe du jet complet ( $\vec{q}^*$ ). Malheureusement on ne connaît expérimentalement que  $\vec{q}^*$ . Par contre, avec deux mésons, la variable  $\vec{r}_\perp$  ne dépend pas du choix entre  $\vec{q}_{\text{final}}$  et  $\vec{q}^*$  et son azimut mesuré par rapport à  $\vec{q}^*$  est peu différent de celui par rapport à  $\vec{q}_{\text{final}}$ .

Le principe de la "calibration" de ce polarimètre dans les collisions  $e^+e^-$  est exposé dans (X. Artru et J. Collins, Z. Phys. **C 69** (1996) 277).

# Appendice A

## Quelques propriétés des amplitudes d'hélicité

### A.1 Convention de phase des états d'hélicité

- On choisit un système d'axe  $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$
- $|\vec{p}, \lambda\rangle$  sera dénoté parfois  $|\theta, \varphi, \lambda\rangle$  ( $|\vec{p}|$  est omis)
- $|\theta, \varphi, \lambda\rangle = R_z(\varphi) R_y(\theta) R_z(-\varphi) |0, 0, \lambda\rangle = e^{-i\varphi J_z} e^{-i\theta J_y} e^{i\varphi J_z} |0, 0, \lambda\rangle$

C'est la convention de Jacob et Wick. Elle diffère de celle de Bourrely, Soffer et Leader par la rotation initiale  $R_z(-\varphi)$ . Avantage:

$|\theta, \varphi, \lambda\rangle$  est continu en  $\varphi$ , donc continu sur toute la sphère sauf au pôle arrière  $\theta = \pi$ .

### A.2 Opération parité

$$P |\theta, \varphi, \lambda\rangle = \eta (-)^{S-\lambda} e^{2i\varphi\lambda} |\pi - \theta, \varphi + \pi, -\lambda\rangle$$

( $\eta$  = parité intrinsèque = nombre complexe de module 1)

$$\Rightarrow \text{Réflexion par rapport au plan } (\hat{x}, \hat{z}) : P_{I_{xz}} = e^{-i\pi J_y} P$$

$$P_{I_{xz}} |\theta, \varphi, \lambda\rangle = \eta (-)^{S-\lambda} |\theta, -\varphi, \lambda\rangle$$

de même

$$P_{I_{yz}} |\theta, \varphi, \lambda\rangle = e^{i\pi J_x} P |\theta, \varphi, \lambda\rangle = \eta e^{i\pi S} |\theta, \pi - \varphi, -\lambda\rangle$$

### A.3 Renversement du temps

$$T |\theta, \varphi, \lambda\rangle = \xi e^{-2i\varphi\lambda} |\pi - \theta, \varphi + \pi, \lambda\rangle$$

$\eta$  et  $\xi$  sont des facteurs de phases dépendant de la particule. Il y a toutefois un certain arbitraire dans la définition des  $\eta$  et des  $\xi$  (voir par exemple Landau et Lifchitz "Quantum Electrodynamics").

### A.4 Invariance par rotation (autour de $\hat{z}$ ) de la matrice de transition

On utilise

- $R_z(\alpha) |\theta, \varphi, \lambda\rangle = e^{-i\alpha\lambda} |\theta, \varphi + \alpha, \lambda\rangle$
- $T = R_z^\dagger(\alpha) T R_z(\alpha)$

et on l'applique au cas où  $\hat{z}$  est l'axe de la collision

$$\begin{aligned} \langle \theta_3, \varphi_3, \lambda_3; \dots, \theta_n, \varphi_n, \lambda_n | T | \lambda_1, \lambda_2 \rangle &= e^{i\alpha(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \dots + \lambda_n)} \\ &\langle \theta_3, \varphi_3 + \alpha, \lambda_3; \dots, \theta_n, \varphi_n + \alpha, \lambda_n | T | \lambda_1, \lambda_2 \rangle \end{aligned}$$

### A.5 Propriétés de symétrie de la matrice $\Sigma$

$$\langle \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n | \Sigma | \lambda_1, \lambda_2, \lambda'_3, \dots, \lambda'_n \rangle \equiv$$

$$\langle \lambda'_1, \lambda'_2 | T^\dagger | \lambda'_3, \dots, \lambda'_n \rangle \langle \lambda_3, \dots, \lambda_n | T | \lambda_1, \lambda_2 \rangle$$

- $\Sigma$  est hermétique, ou, symboliquement:

$$[\text{prime}] = [*]$$

ce qui veut dire: "interchanger les  $\lambda_i$  et les  $\lambda'_i$  équivaut à remplacer l'élément de matrice par son complexe conjugué".

- invariance par rotation:

$$\begin{aligned} \langle \lambda'_1, \dots, \lambda_n | \Sigma(\theta_3, \varphi_3 + \alpha, \dots, \theta_n, \varphi_n + \alpha) | \lambda_1, \dots, \lambda'_n \rangle = \\ e^{i\alpha(\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2 - \Delta\lambda_3 - \dots - \Delta\lambda_n)} \langle \lambda'_1, \dots, \lambda_n | \Sigma(\theta_3, \varphi_3, \dots, \theta_n, \varphi_n) | \lambda_1, \dots, \lambda'_n \rangle \end{aligned}$$

ce qu'on résume symboliquement par

$$[\varphi + \alpha] = e^{i\alpha(\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_2 - \sum_3^n \Delta\lambda_i)}$$

Invariance par parité, ou plutôt par réflexion  $P_{I_{yz}}$ :

$$\langle \theta_3, \pi - \varphi_3, \lambda_3, \dots, \theta_n, \pi - \varphi_n, \lambda_n | T | \lambda_1, \lambda_2 \rangle e^{i\pi(S_1 - S_2 - S_3 - \dots - S_n)} \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_3 \dots \eta_n} =$$

$$\langle \theta_3, \varphi_3, -\lambda_3, \dots, \theta_n, \varphi_n, -\lambda_n | T | -\lambda_1, -\lambda_2 \rangle$$

d'où:

$$\langle -\lambda'_1, \dots, -\lambda_n | \Sigma(\varphi_i) | -\lambda_1, \dots, -\lambda'_n \rangle = \langle \lambda'_1, \dots, \lambda_n | \Sigma(\pi - \varphi_i) | \lambda_1, \dots, \lambda'_n \rangle$$

soit

$$[-\lambda] = [\pi - \varphi]$$

- Approximation de Born ( $T = T^\dagger$ ) plus invariance par renversement du temps plus hermécité de  $\Sigma$ :

$$[-\varphi] = [*]$$

## A.6 Permutation de particules identiques

Particules identiques initiales:

$$\langle \theta_3, \varphi_3, \lambda_3, \dots | T | \lambda_1, \lambda_2 \rangle = e^{-2i \sum_n \lambda_n \varphi_n} \langle \pi - \theta_3, \pi - \varphi_3, \lambda_3, \dots | T | \lambda_2, \lambda_1 \rangle$$

Cas  $2 \rightarrow 2$  (nous prenons  $\theta_3 \equiv \theta$ ,  $\varphi_3 \equiv \varphi$ ;  $\theta_4 = \pi - \theta$ ,  $\varphi_4 = \varphi + \pi$ )\*

$$\langle \lambda_3, \lambda_4 | f(\theta, \varphi) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle = (-)^{\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_4} e^{2i\varphi(\lambda_1 - \lambda_2)} \langle \lambda_3, \lambda_4 | f(\pi - \theta, \varphi) | \lambda_2, \lambda_1 \rangle$$

(+ pour les bosons, - pour les fermions)

Particules identiques finales

$$\langle \dots, \theta_i, \varphi_i, \lambda_i, \dots, \theta_j, \varphi_j, \lambda_j | T | \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \pm \langle \dots, \theta_j, \varphi_j, \lambda_j, \dots, \theta_i, \varphi_i, \lambda_i | T | \lambda_1, \lambda_2 \rangle$$

Cas  $2 \rightarrow 2$  (avec la convention ci-dessus pour  $|\lambda_3 \lambda_4\rangle$ )

$$\langle \lambda_3, \lambda_4 | f(\theta, \varphi) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \pm (-)^{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4} \langle \lambda_4, \lambda_3 | f(\pi - \theta, \varphi) | \lambda_1, \lambda_2 \rangle$$

Application: l'amplitude  $2 \rightarrow 2$  s'annule à l'équateur ( $\theta = \pi/2$ ) dans les deux cas suivants:

- 1 et 2 identiques,  $\lambda_1 = \lambda_2$  et  $\lambda_3 - \lambda_4$  impair
- 3 et 4 identiques,  $\lambda_3 = \lambda_4$  et  $\lambda_1 - \lambda_2$  impair.

---

\* Notre convention pour l'état  $|\lambda_3 \lambda_4\rangle$  diffère de celle de Jacob et Wick (également Hikasa) par le facteur de phase  $\exp(2i\varphi_4 \lambda_4)$

## Bibliographie

- L. Landau and E. Lifshits, Physique théorique tome 4, *Electrodynamique quantique*, V. Béresteski, E. Lifshits et L. Pitayevski (éditions MIR).
- F. Baldrachini, N.S. Craigie, V. Roberto and M. Socolovsky, Fortschritte der Physik **29** (1981) 505.
- J. D. Jackson, "Classical Electrodynamics" (éditions Wiley)
- K. Hikasa, Phys. Rev. **D 33** (1986) 3203.
- I.G. Knowles, Nucl. Phys. **B 310** (1988) 671.
- G. Sterman et al., Rev. Mod. Phys. **67** (1995) 157.
- X. Artru & M. Mekhfi, Z. Phys. **C 45** (1990) 669.
- R.L. Jaffe, Xiangdong Ji, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 552; Nucl. Phys. **B 375** (1992) 527.
- J.L. Cortes, B. Pire, J.P. Ralston, Z. Phys. **C 55** (1992) 409.
- M. Jacob & G.C. Wick, Ann. of Phys. **7** (1959) 404.
- C. Bourrely, E. Leader and J. Soffer, Phys. Rep. **59** (1980) 95.
- J. C. Collins, Nucl. Phys. **B 394** (1993) 169.
- J. C. Collins, Nucl. Phys. **B 396** (1993) 161.
- A.V. Efremov, L. Mankiewicz and N.A. Törnqvist, Phys. Lett. **B 284** (1992) 394.
- F. Halzen and A.D. Martin, "Quarks and Leptons", John Wiley & Sons, New York, 1984
- J.P. Ralston et D. Soper, Nucl. Phys. **B 152** (1979) 109
- N.S. Craigie, K. Hikada, M. Jacob and F.M. Renard, Phys. Rev **99** (1983) 69.
- Xiangdong Ji, Phys. Lett. **B 284** (1992) 137.