230

INIS-KZ-012

УДК 539.517

Е.Е.ДАДАМБАЕВ, Е.Т.ИБРАЕВА

ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ АДРОНОВ НА ЯДРЕ ^9Be ПРИ МАЛЫХ ПЕРЕДАННЫХ ИМПУЛЬСАХ

В данной статье приведен математический расчет дифференциального поперечного сечения упругого рассеяния адронов на ядре ^9Be в трехчастичной $2\alpha N$ модели ядра при промежуточных энергиях. Базисная теория - теория многократного рассеяния Глаубера-Ситенко.

Введение

Достигнутые в последние десятилетия успехи в экспериментальном изучении реакций и упругого рассеяния адронов ($p, \pi^{\pm}$- мезонов и т.д.) на ядрах при промежуточных энергиях стимулировали и их теоретическое изучение на новом уровне понимания как нуклон- ядерного взаимодействия, так и структуры ядра. Теоретическое описание таких процессов показывает, что теория многократного дифракционного рассеяния Глаубера-Ситенко достаточно хорошо воспроизводит многочисленные экспериментальные данные по дифференциальным сечениям и поляризационным характеристикам для разных ядер в широком интервале энергий от сотен *Мэв* до нескольких *Гэв*. Входными параметрами в теории являются параметры амплитуд $\pi - N$ и $\pi - \alpha$ взаимодействий, определяемые из независимых экспериментов по уругому рассеянию. Зная параметры амплитуд и волновые функции (в.ф.) ядра мишени, можно рассчитать амплитуду $\pi -^9 Be$ рассеяния (матричные элементы) , а из него и измеряемые экспериментально величины, такие как дифференциальное и полное сечение, импульсное распределение, поляризация и др..

Вывод формулы сечения $\pi -^9 Be$ упругого рассеяния

Амплитуда рассеяния адронов (пионов) на ядре в дифракционной теории многократного рассеяния / 1 / определяется выражением:

29 - 37

We regret that
some of the pages
in this report may
not be up to the
proper legibility
standards, even
though the best
possible copy was
used for scanning

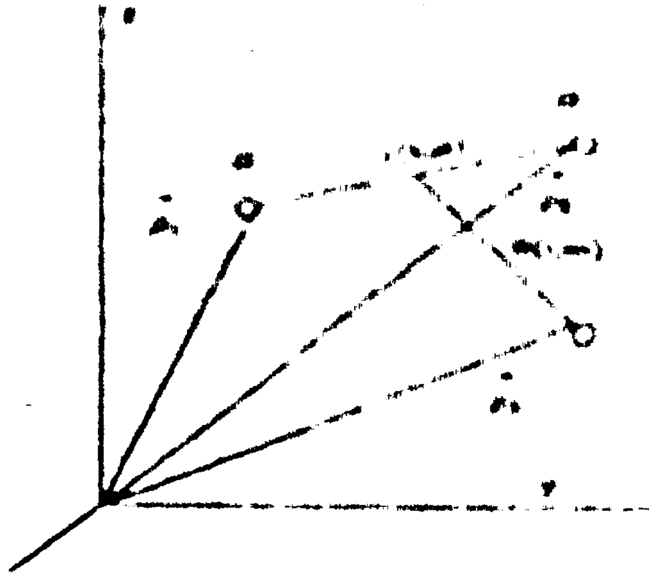

Рис. 1: Трехчастичная $2\alpha N$- модель ядра ^9Be

$$M_{ij}(\vec{q}) = \frac{ik}{2\pi}\int d^2b \prod_{\nu=1}^{A} dr_\nu e^{i\vec{q}\vec{b}} < \Psi_f|\Omega|\Psi_i > \delta^3(\vec{R}_N) \qquad (1)$$

где $\vec{k}$- импульс налетающих адронов; $\vec{b}$- прицельный параметр; $\vec{q}$ - переданный импульс при упругом рассеянии $|\vec{q}| = |\vec{k} - \vec{k}'| = 2k\sin(\frac{\varphi}{2})$, φ- угол рассеяния; $\vec{k}'$ - импульс рассеянных адронов; $\vec{R}_N$- координаты центра масс ядра-мишени; Ψ_i, Ψ_f- в.ф. ядра в начальном и конечном состояниях; Ω- глауберовский оператор многократного рассеяния.

Мы рассматриваем упругое рассеяние пионов на ядре ^9Be, в.ф.которого расчитана в трехчастичной $2\alpha N$- модели (рис.1).

Волновая функция ядра в этой модели рассчитана в работе / 2 / с различными реалистичными потенциалами $\alpha-\alpha$ и $\alpha-N$ взаимодействий и представлена в виде разложения по гауссовским функциям:

$$\Psi_i = \Psi_{\lambda l L}(\vec{r},\vec{R}) = \sum_{\mu,m,M_s} < \lambda\mu l m|L M_L >< L M_L \frac{1}{2} M_s|\frac{3}{2} M_J > \\ Y_{\lambda\mu}(\hat{r}) Y_{lm}(\hat{R}) \hat{R} \chi_{\frac{1}{2}M_s} \sum_{i,j} C_{ij}^{\lambda l L} r^\lambda R^l e^{-\alpha_i r^2-\beta_j R^2} \qquad (2)$$

α- частицы считаются бесструктурными, координаты $\vec{r}$ и $\vec{R}$ представлены на рис.1.; l, L- квантовые числа, сопряженные этим координатам. Оператор многократного рассеяния выражается через двухчастичные функции профиля ω_j:

$$\Omega = \sum^{3} \omega_i - \sum^{3} \omega_i\omega_j + \omega_1\omega_2\omega_3 \qquad (3)$$

где

$$\omega_j(\vec{b}-\vec{r}_j) = \frac{1}{2\pi i k}\int d^2q\, e^{-i\vec{q}(\vec{b}-\vec{r}_j)} f_j(\vec{q}) \qquad (4)$$

индексы $j = 1,2$ нумеруют α частицы; $j = 3$- нуклон в ядре ^{9}He, $f_j(q)$ - элементарная амплитуда рассеяния на кластерах ядра-мишени.

Амплитуда рассеяния адронов на α- кластере выражается как:

$$f_{\pi\alpha}(\vec{q}) = \frac{kG_1}{4\pi}(\gamma_1 + i)e^{-\beta_1 q^2/2}\prod_{i=1}^{N}\left(1-\frac{q^2}{t_i}\right) \qquad (5)$$

где $\vec{k}$ импульс π мезона, G_1 полное сечение рассеяния; t_i- комплексный параметр, характеризующий интерференционную картину; β_1- параметр спада, N число минимумов в сечении π - α рассеяния.

Экспериментальные данные по упругому рассеянию пионов на α- частице в области промежуточных энергий показывают два явно выраженных минимума, т.е. можно ограничится $N = 2$. Введя коэффициенты:

$C_0 = 1$, $C_1 = -\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}\right)$, $C_2 = \frac{1}{t_1 t_2}$ и используя биномиальное разложение

$$(A+B)^N = \sum_{n=0}^{N} C_N^n A^{N-n}B^n \qquad (6)$$

где $C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$,

амплитуду (5) можно записать в виде:

$$f_{\pi\alpha} = K_1 e^{-\alpha_1 q^2}\sum_{n_1,n_2} C_{n_1} C_{n_1}^{n_2} q_x^{2(n_1-n_2)} q_y^{2n_2} \qquad (7)$$

где $K_1 = kG_1/(4\pi)(\gamma_1 + i)$; $\alpha_1 = \beta_1/2$; $n_1 = 0,\dots,2$; $n_2 = 0,\dots,n_1$.

Подставив теперь амплитуду (7) в профильную функцию (4) и проинтегрировав по $\vec{q}$, получим выражение:

$$\omega_{1,2} = K_3\sum_{\nu_1} A_{\nu_1}(b_x - \rho_{x_{1,2}})^{m_1}(b_y - \rho_{y_{1,2}})^{m_2} e^{-(\vec{b}-\vec{\rho}_{1,2})^2/(4\alpha_1)} \qquad (8)$$

где $\vec{\rho}_{1,2}$- одночастичные координаты α- кластеров в ядре Be^9 (рис.1);

$K_3 = K_1(2^3 i k\alpha_1)^{-1}$

$A_{\nu_1} = C_{n_1}(-1)^{n_1-n_3-n_4}C_{n_1}^{n_2}(2(n_1-n_2))!(2n_2)!\alpha_1^{n_3+n_4-2n_1}$

$$(2^{2n_1}(2(n_1-n_2-n_3))!n_3!(2(n_2-n_4))!n_4!)^{-1}$$

$m_1 = 2(n_1-n_2-n_3)$; $m_2 = 2(n_2-n_4)$; $\nu_1 = (n_1,n_2,n_3,n_4)$;

$n_3 = 0,\dots,n_1-n_2$; $n_4 = 0,\dots,n_2$.

Интегрирование производилось с помощью табличного интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\alpha x^2 \pm \beta x} dx = n! e^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^n \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\alpha^k (\pm\beta)^{(n-2k)}}{(n-2k)!k!} \tag{9}$$

где $[\frac{n}{2}]$- целая часть числа $\frac{n}{2}$

Профильная функция ω_3, в которую вкладывается элементарная амплитуда рассеяния на нуклоне, будет иметь более простой вид:

$$\omega_3 = K_4 e^{-(\vec{\rho}_3 - \vec{b})^2/(2\alpha_2)} \tag{10}$$

где $\vec{\rho}_3$- координата нейтрона в ядре He^6 (рис 1),

$K_4 = K_2(2^2 ik\alpha_2)^{-1}$.

В в.ф. ядра ^9Be необходимо от сферической системы координат перейти к декартовой. Для этого используем формулу разложения сферических гармоник по полиномам / 3 /:

$$r^\lambda Y_{\lambda\mu} = \sqrt{\frac{(2\lambda+1)(\lambda+\mu)!(\lambda-\mu)!}{4\pi}} \sum_{p,q,n} \left(-\frac{r_x + ir_y}{2}\right)^p \left(\frac{r_x - ir_y}{2}\right)^q r_z^n \tag{11}$$

где $p + q + n = \lambda$, $p - q = \mu$.

Применив формулу бинома, чтобы факторизовать степени при $r_{x,y}$, $R_{x,y}$ и обозначив произведение всех констант независящих от координат $\vec{r}, \vec{R}$ одной буквой D_{ξ_1} для произведения в.ф. получим выражение:

$$\Psi_{\lambda l L}\Psi^*_{\lambda' l' L'} = \sum_{\xi_1} D_{\xi_1} \sum_{n_1,n_2,n_3,n_4} exp(-\alpha r^2 - \beta R^2) C_{n_1}^{p_1+p_1'} C_{n_2}^{q_1+q_1'}$$

$$C_{n_3}^{p_2+p_2'} C_{n_4}^{q_2+q_2'} r_x^{n_x} r_y^{n_y} r_z^{n_z} R_x^{m_x} R_y^{m_y} R_z^{m_z} \tag{12}$$

где $D_{\xi_1} = S_1 S_2 C_{ij}^{\lambda l L} C_{i'j'}^{\lambda' l' L'} \delta_{M_S M_S'} (-1)^{p_1+p_1'+p_2+p_2'} 2^{(-n_1-n_2)}$,

$\xi_1 = (\mu, \mu', m, m', M_S, M_S', i, i', j, j', p_1, ..., n_2')$

$$S_1 = < \lambda\mu l m | L M_L >< \lambda'\mu' l' m' | L' M_L' >< L M_L \frac{1}{2} M_S | \frac{3}{2} M_J >$$

$$< L' M_L' \frac{1}{2} M_S | \frac{3}{2} M_J' >$$

$$S_2 = ((2\lambda+1)(2l+1))/(4\pi)\sqrt{(\lambda+\mu)!(\lambda-\mu)!(\lambda'+\mu')!(\lambda'-\mu')!}$$

$$\sqrt{(l+m)!(l-m)!(l'+m')!(l'-m')!}$$

$\alpha = \alpha_i + \alpha_i'$, $\beta = \beta_j + \beta_j'$

Покажем теперь как вычисляется один из матричных элементов амплитуды рассеяния пиона на ядре: например матричный элемент M_4 двукратного соударения пиона с нуклоном и с одной из α- частиц. Этот элемент выражается, как.

$$M_4 = \frac{ik}{2\pi} \int_0^\infty e^{iq\theta} d^2 b \delta(\vec{R}_\nu) < \Psi^*_{MJL} | \omega_1 \omega_3 | \Psi_{ML} > \qquad (13)$$

Подставив (8) и (10) в формулу (13), проинтегрируем сначала по прицельному параметру b:

$$M_4 = \frac{ik}{2\pi} \int e^{iq\theta} \omega_1 \omega_3 d^2 b \Psi_{ML} \Psi_{J'\ell' L'} dr dR = \int \Psi \Psi^* d\vec{r} d\vec{R}$$

$$\frac{ikK_6}{2\pi 2^3} \sum_{\ell_i, \lambda, k_n} B_{n_2} exp(-h_1 \rho_1^2 - h_2 \rho_3^2 - h_3 q^2 + h_4 \rho_1 \rho_3 + h_5 \rho_1 q + h_6 \rho_3 q)$$

$$\left(\frac{\rho_{1x}}{2\alpha_1} + \frac{\rho_{3x}}{2\alpha_2} + iq_x\right)^{m_3 - 2b_1} \left(\frac{\rho_{1y}}{2\alpha_1} + \frac{\rho_{3y}}{2\alpha_2} + iq_y\right)^{m_4 - 2b_2} \qquad (14)$$

где $K_6 = K_3 K_4; B_{n_2} = A_{\ell_i}(-1)^{(n_5 + n_6)} C^{n_5}_{m_1} C^{n_6}_{m_2}; n_5 = 0, ..., m_1; n_6 = 0, ..., m_2$

$h_1 = 1/4\alpha_1, h_2 = 1/2\alpha_2 - 1/16 a_1 \alpha_2^2, h_3 = 1/4a_1$;

$h_4 - 1/8a_1 \alpha_1 \alpha_2, h_5 = i/4a_1 \alpha_1, h_6 = i/4a - 1\alpha_2$

$a_1 = 1/4\alpha_1 + 1/4\alpha_2; b_1 = 0, ..., [m_3/2]; b_2 = 0, ..., [m_4/2]$

$m_3 = m_1 - n_5; m_4 = m_2 - n_6$

Теперь в выражении (14) необходимо от одночастичных координат $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2, \vec{\rho}_3$ перейти к координатам Якоби $\vec{r}$ и $\vec{R}$:

$\vec{r} = \vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2, \vec{R} = \frac{\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2}{2} - \vec{\rho}_3, \vec{R}_0 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \vec{\rho}_i - \frac{4}{9}(\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2) - \frac{1}{9}\vec{\rho}_3$

Обратный переход

$\vec{\rho}_1 = \vec{R}_\nu + \frac{\vec{R}}{9} + \frac{\vec{r}}{2}, \vec{\rho}_2 = \vec{R}_\nu + \frac{\vec{R}}{9} - \frac{\vec{r}}{2}, \vec{\rho}_3 = \vec{R}_\nu - \frac{8}{9}\vec{R}$

Вектора $\vec{q}$ и $\vec{b}$ а также одночастичные координаты $\vec{\rho}$ - двумерны. Тогда, подставив в последнее выражение (14) формулу (12), и применив еще раз биномиальное разложение для возникающих полиномов, чтобы факторизовать все переменные по которым производится интегрирование, и проинтегрировав по всем координатам, окончательно получаем следующее выражение:

$$M_4 = \frac{ikK_6 K_8}{2\pi} \sum_{n_3 n_4} B_{n_2} C_{n_3} D_{\ell_i} E_{\ell_i} F_{\ell_i} G_{\ell_i} (q^2)^{m'} e^{-a_4 q^2} \qquad (15)$$

где $K_8 = \pi^2((\alpha + 1/16\alpha_1 + 1/64 a_1 \alpha_1^2)(\beta + 1/324\alpha_1 + 32/81\alpha_2 - (1/18\alpha_1 - 4/9\alpha_2)^2/41))^{-1}$

$C_{am_4} = \pi m_3! m_4! a_1^{\delta_1+\delta_2-2} (2(m_3 - 2\delta_1)!\delta_1! (m_4 - 2\delta_2)!\delta_2!)$ [illegible]

$E_{\zeta_3} = C_{v_1}^{p_1+q_1} C_{v_2}^{p'_1+q'_1} C_{v_3}^{p_2+q_2} C_{v_4}^{p'_2+q'_2}$ [illegible]

$F_{\zeta_3} = (v_7 - 7)!!(v_{10} - 1)!! m_{11}! m_{12}!$ [illegible]

$(m_{12} - 2\delta_{10})!\delta_{10}!(m_{17} - 2\delta_{13})!\delta_{13}!$ [illegible]

$G_{\zeta_4} = (i)^{\delta_1+\delta_4}(1/9)^{\delta_{11}+\delta_{14}-\delta_5-\delta_6}(1/2)$ [illegible] a_7 [illegible]

$(1/4\alpha_1)^{\delta_7+\delta_8}\alpha^{-(v_7+1)/2}\beta^{-(v_{10}+1)/2}a_4$ [illegible] $a_5^{\delta_{11}}$ [illegible]

$a_6^{\delta_{11}-\delta_{14}+m_{10}+m_{16}} a_7$ [illegible]

$a_4 = 1/18\alpha_1 - 4/9\alpha_2; a_5 = \alpha + a_2/4 - a_4^2/4a$ [illegible] $a_6 = a_1a_4/2a$ [illegible] $a_1/9;$

$a_7 = \beta + 1/324\alpha_1 + 32/81\alpha_2 - a_2^2/4a_1$ [illegible] $a_1/2a_1$

$\zeta_2 = (n_1, n'_1, n_2, n'_2, \zeta, \zeta_1, \delta_{13}, \delta_{14}); \zeta_3$ [illegible]

$v_7 = n_1 + n'_1; v_{10} = n_2 + n'_2, m_{17} = \delta$ [illegible]

$m_9 = l_2 - v_3 - v_4 + \delta_{15} - \delta_5 + m_7 - \delta_7$ [illegible]

$\delta_{13} = 0, \ldots, [(\delta_{11} + m_9)/2]; \delta_{14} = 0, \ldots, [(\delta_{12} + m_{10})/2];$

$\delta_{17} = 0, \ldots, [m_3/2]; \delta_{18} = 0, \ldots, [m_4/2],$

Остальные матричные элементы вычисляются аналогично. С той лишь разницей, что в них разное число индексов суммирования.

Заключение

Мы показали принципиальную возможность точного аналитического рассчета матричных элементов амплитуды упругого $\pi - {}^9Be$ рассеяния в наиболее общем с математической точки зрения виде. Однако структура формулы такова, что рассчет по ней представляет определенные трудности. Главная из них заключается в том, что число индексов суммирования колеблется от 20 до 40.

Литература

1. Глаубер Р.//- УФН,1971.-т.103.-вып.4.-С.641-673.
2. Кукулин //- Изв.РАН, сер.физ.,1993. т.57. С.176.
3. Варшалович Д.А. Квантовая теория углового момента.-Л.:Наука, 1975.-117с.

This article contains the general derivation of the differential cross section formula of elastic scattering of hadrons on nuclear ${}^9Be$. Obtained formula has an application for different wave functions with various quantum numbers and for different hadrons