AM9800009

Препринт ЕФИ-1376(6)-92

ԵՐԵՎԱՆԻ ՖԻԶԻԿԱՅԻ ԻՆՍՏԻՏՈՒՏ

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

YEREVAN PHYSICS INSTITUTE

Н.С.АНАНИКЯН, Н.Ш.ИЗМАИЛЯН,

В.А.ПОГОСЯН

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КАЛИБРОВОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОТТСА И ИХ 1/q - РАЗЛОЖЕНИЕ

29 - 42

Ереван 1992

We regret that some of the pages in this report may not be up to the proper legibility standards, even though the best possible copy was used for scanning

Նախնատիպ ԵրՖԻ-1376(6)-92

Ն.Ս.ԱՆԱՆԻԿՅԱՆ, Ն.Շ.ԻԶՄԱԻԼՅԱՆ,

Կ.Ա.ՕՀԱՆԵՍՅԱՆ

ՓՈԹՍԻ ՏՐԱՄԱՉԱՓԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ՏՈՊՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՏԵՍԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ 1/Q 3-ՏՐՈՀՈՒՄԸ

Փոթսի d-չափ տրամաչափային մոդելում ըստ դաշտային փոփոխականի գումարումը փոխարինված է ըստ հիպերգրաֆի գումարումով՝ վիճակագրական գումարում, որտեղ առավելապես օգտագործվում են տոպոլոգիական ինվարիանտներ /Բետտի թվեր/, որոնք հաշվի են առնում ինչպես կողմնորոշվող, այնպես էլ չկողմնորոշվող մակերևույթները: Եռաչափում և քառաչափում անցկացվել է 1/Q -տրոհումը: Պադե մոտարկումների եղանակով ստացված են բարձրակետը/կիզակետը/ և անցման թաքնված ջերմությունը:

Երևանի Ֆիզիկայի ինստիտուտ

Երևան 1992

1. Введение

Изучение калибровочных моделей на решетках - один из основных методов получения физических результатов вне рамок теории возмущения. Калибровочная теория была впервые сформулирована на решетке в 1974г. Вильсоном [1]. Обзор решеточных калибровочных моделей и их применение в КХД был сделан Когутом [2]. В настоящей статье исследована d-мерная калибровочная модель Поттса с числом состояний Q, фактически следующая по простоте после Z_2- симметричной модели. Изучение таких моделей представляет большой интерес, так как группа Z(Q), являясь центром соответствующей калибровочной группы SU(Q), играет существенную роль в явлении заточения кварков [3,4]. Известно, что в пределе $Q\to\infty$ эта модель становится точнорешаемой [5,6]. Точное решение для калибровочных моделей, при конечных Q получено только на специальной бесконечномерной решетке Бете [7,8], чего на стандартных решетках пока получить не удалось. Однако различные приближенные вычисления (метод среднего поля, 1/Q - разложение) указывают на наличие фазового перехода I рода "конфайнмент" - "деконфайнмент".

В настоящей работе, используя полученное авторами [9] представление для статистической суммы d-мерной калибровочной модели Поттса проведено 1/Q-разложение в трех- и четырехмерном пространстве. Показанно, что в четырехмерии такое предстаапение для статистической суммы автоматически учитывает вклад как ориентируемых (S^2- сфера, тор и т. д.) так и неориентируемых (бутылки Клейна и т. д.) поверхностей.

В разделе 2 кратко определена модель и приведены основные формулы. Вывод соотношения дуальности и 1/Q-разложения в трехмерии приведен в разделе 3. Раздел 4 посвящен свойствам модели в четырехмерном пространстве.

2. Модель

Рассмотрим Q-компонентную калибровочную модель Поттса -Z(Q), определенную на d-мерной гиперкубической решетке. Действие такой модели имеет вид

$$S_g = -\frac{K}{Q} \sum_{pl} \sum_{n=1}^{Q} (R_1R_2R_3R_4)^n \qquad (1)$$

где K - температурно-подобный параметр, определяющий флуктуации калибровочных переменных R_i, определенных на ребрах решетки. Первое суммирование в действии ведется по всем плакетам (примитивным двумерным квадратам) на d-мерной решетке, $R_1R_2R_3R_4$ - произведение переменных R_i вокруг одного плакета. Каждая из R_i принимает одно из Q - значений корней Q-й степени из единицы $(R_k = \exp(\frac{2\pi i}{Q}k))$

Поскольку $\frac{1}{Q}\sum_{n=1}^{Q}(R_1R_2R_3R_4)^n = \delta_{R_1R_2R_3R_4,1}$, то статистическая сумма для калибровочной модели Поттса $(Z(Q)=\sum e^{-S_g})$ запишется в виде

$$Z_g = \sum_{\{R_i\}} \sum_{pl} (1+ v\delta_{R_1R_2R_3R_4,1}) \qquad (2)$$

где $v = e^K-1$ и суммирование ведется по всевозможным конфигурациям калибровочных переменных $\{R_i\}$.

Если в правой части (2) перемножить все биномы между собой, то получим сумму членов типа $v^f\delta_{\prod_i R_i,1} \ldots \delta_{\prod_i R_i,1}$. Каждому такому члену поставим в соответствие гиперграф G_f [10], образованный f - гранями, входящими в δ-символы данного члена. Тогда, как показанно в работе [9], статистическую сумму модели Поттса можно записать в виде

$$Z_g(Q,v) = \sum_{G_f \subseteq G} v^{f(G_f)} Q^{F-f(G_f)+R_2^2(G_f)} \qquad (3)$$

где суммирование ведется по всем гиперграфам G_f решетки G, F - полное число плакетов решетки G, $R_2^2(G_f)$ - второе число Бетти по модулю 2. Нами выбраны гомологии по модулю 2 с целью учета и неориентируемых поверхностей, которые могут возникнуть в четырехмерных калибровочных моделях. Для высших размерностей d>4 учет чисел Бетти по модулю 2 оказывается недостаточным для описания гиперграфов G_f, построенных из плакетов на гиперкубической решетке, вследствии возникновения групп $Z_p(p>2)$ во второй группе гомологии гиперграфа G_f.

В трехмерии статистическую сумму калибровочной модели Поттса можно выразить полностью через топологические инварианты (числа Бетти) используя теорему Эйлера - Пуанкаре [11] для ориентируемых поверхностей

$$\sum_{n=0}^{2}(-1)^n R_n(G_f) = \sum_{n=0}^{2}(-1)^n \alpha_n(G_f) \qquad (4)$$

где $R_n(G_f)$ - n-ое число Бетти гиперграфа G_f, а $\alpha_n(G_f)$ - n- симплекс гиперграфа G_f. Поскольку гиперграф G_f содержит все вершины (N) и ребра решетки (E), то Эйлеровская характеристика равна $\chi(G_f) = N-E+f(G_f)$. Отметим также, что $R_0(G_f)=1$. Таким образом статистическую сумму (3) можно записать в виде

$$Z_g(Q,v) = Q^{3N}\left(\frac{v}{Q}\right)^{2N+1}\sum_{G_f\subseteq G} v^{R_2(G_f)-R_1(G_f)}Q^{R_1(G_f)} \qquad (5)$$

где использовано, что полное число ребер (E) равно полному числу плакетов (F) на трехмерной решетке и E=3N. На примере трех- и четырехмерных калибровочных моделей Поттса мы показали, что используя только топологические инварианты (числа Бетти) можно выразить статистическую сумму. Представление статистической суммы в виде (3) и (5) оказывается удобным при проведении низко-, высокотемпературных и 1/Q-разложений.

3. Трехмерная калибровочная модель Поттса.

Обратимся теперь к 1/Q-разложению трехмерной калибровочной модели. Действие этой модели дается формулой (1). Интересно отметить, что истинным параметром в скрытой теплоте перехода I рода, в этом случае являетя величина $1/Q^{1/3}$. Известно, что калибровочная модель Поттса в трехмерии является дуальной к спиновой модели Поттса, действие которой имеет вид

$$S = -\beta\sum_{\langle ij\rangle}\delta_{\sigma_i\sigma_j} \qquad (6)$$

где спиновая переменная σ_i, определенная в узлах решетки, принимает значения 0, 1, ... ,Q-1, и сумма в (6) берется по ближайшим соседям на трехмерной решетке.

Статистическая сумма этой модели имеет вид [12]

$$Z_D^{spin}(Q,\beta) = \sum_{D'\subseteq D} \vartheta^{b(D')} Q^{R_0(D')} \tag{7}$$

где $\vartheta = e^{\beta} - 1$, а суммирование проводится по всем подграфам D', состоящих из всевозможного набора ребер основной решетки D, $b(D')$ - число ребер в D', $R_0(D')$ - нулевое число Бетти, равное числу компонент связности. Следует отметить, что в двумерии, где спиновая модель Поттса является самодуальной, Бакстер в 1973 [10] используя полученное им это представление для статистической суммы сумел получить точное решение этой модели в критической точке. Используя теорему Эйлера - Пуанкаре статистическую сумму (7) можно выразить через топологические инварианты

$$Z_D^{spin}(Q,\beta) = \vartheta^{N} \sum_{D'\subseteq D} \vartheta^{R_1(D')-R_0(D')} Q^{R_0(D')} \tag{8}$$

где $R_1(D')$ - первое число Бетти, равное числу петель подграфа D'. Используя тот факт, что сумма Эйлеровских характеристик графа D' и дуального к нему гиперграфа G_f равна 0 $(\chi(D') + \chi(G_f) = 0)$ а также, что $R_0(D') = R_2(G_f)$, легко получить из (8) и (5) соотношение дуальности спиновой и калибровочной моделей Поттса в трехмерии

$$Z_D^{spin}(\vartheta,Q) = \left(\frac{\vartheta}{Q}\right)^{3N} Z_G^{g}(v,Q) \tag{9}$$

где $v\vartheta=Q$.

Заметим, что модель не самодуальна, и следовательно критическую температуру можно найти различными приближенными методами. Мы это сделаем используя 1/Q-разложение. 1/Q-разложение для спиновой и калибровочной моделей эффективно в высокотемпературной области ($v \ll 1$). Используя выражение (5) для статистической суммы калибровочной модели Поттса получим следующее 1/Q-разложение для свободной энергии, приходящейся на один плакет.

$$-K f_g^{h.t.} = 3\ln Q + 3\frac{v}{Q} - \frac{3}{2}\frac{v^2}{Q^2} + \frac{v^3}{Q^3} - \frac{3}{4}\frac{v^4}{Q^4} + \frac{v^5}{Q^5}\left(\frac{3}{4} + v\right) -$$

$$- \frac{v^6}{Q^6}\left(\frac{3}{2} + 6v\right) + \frac{v^7}{Q^7}\left(\frac{45}{7} + 21v\right) - \frac{v^8}{Q^8}\left(\frac{171}{8} + 56v\right) +$$

$$+ \frac{v^9}{Q^9}\left(\frac{169}{3} + 129v + 3v^2\right) + \dots \qquad (10)$$

Аналогично для спиновой модели, используя формулу (8) получим для свободной энергии в $1/Q$-разложении следующее выражение

$$-\beta f_{spin}^{h.t.} = \ln Q + 3\frac{\vartheta}{Q} - \frac{3}{2}\frac{\vartheta^2}{Q^2} + \frac{\vartheta^3}{Q^3}(1+3\vartheta) - \frac{\vartheta^4}{Q^4}\left(\frac{15}{4} + 12\vartheta\right) +$$

$$+ \frac{\vartheta^5}{Q^5}(18\vartheta^2 + 52\vartheta + \dots) + \dots \qquad (11)$$

На языке свободной энергии соотношение дуальности (9) примет вид

$$-\beta f_{spin} = 3\ln\frac{\vartheta}{Q} - K f_g\left(v = \frac{Q}{\vartheta}\right) \qquad (12)$$

Легко видеть, что из этого соотношения можно получить низкотемпературные ($v \gg 1$) разложения.

Сшивая (11) и (12) мы можем получить критическую точку v_c

$$v_c = Q\left(1 + z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{3}z^4 - z^5 + \frac{20}{9}z^6 - \frac{4}{9}z^7 - \right.$$

$$\left. - 8z^8 + \frac{1985}{81}z^9 + \dots \right. \qquad (13)$$

где $z = Q^{-1/3}$.

Скрытую теплоту перехода можно получить вычитая друг от друга производные по температуре от свободных энергий (11) и (12) в критической точке. Эти результаты совпадают с полученными в работах [5], [6], где параметр разложения для свободной энергии выбирается из других соображений, а именно проводится рескейлинг температуры.

Применяя же теорию суммирования по графам и гиперграфам, используя при этом топологические инварианты (числа Бетти), нет необходимости в проведении рескейлинга температуры.

4. Четырехмерная калибровочная модель Поттса.

d-мерные модели Поттса и в частности четырехмерная модель были исследованы при помощи 1/Q-разложений в гамильтоновом подходе [13]. Лагранжева формулировка 1/Q-разложения для калибровочной модели (d=4) приведена в [6], но при этом подходе не учитывается вклад неориентируемых поверхностей, а также необходимо переопределение температурного параметра.

Представление для статистической суммы четырехмерной калибровочной модели (3) автоматически учитывает как ориентируемые так и неориентируемые поверхности, ввиду того, что были использованы гомологии по модулю 2, которые являются нечувствительными к ориентации поверхности.

Четырехмерная калибровочная модель Поттса самодуальна (плакет дуален плакету). Эта модель имеет несколько общих черт с точно решаемой двумерной спиновой моделью Поттса. Обе они самодуальны и кроме того имеют схожий вид статистических сумм (3) и (7), хотя до конца не ясен физический смысл симметрии лежащий в основе самодуальности.

Представление (3) для статистической суммы, где суммирование по калибровочным переменным заменено на суммирование по поверхностям очень удобно для вывода соотношения дуальности. Учитывая связь между числом плакетов гиперграфа G_f и дуального ему гиперграфа D_f ($f(D_f)=F-f(G_f)$), а также используя обобщенную теорему двойственности Пуанкаре [9] ($R_2^2(D_f) = R_2^2(G_f) - f + \frac{F}{2}$) соотношение дуальности можно записать в виде

$$Z_G^g(\vartheta,Q) = \vartheta\, Q^{-\frac{F}{2}}\, Z_D^g(Q,v) \qquad (14)$$

где $\vartheta v = Q$

Это же соотношение для свободной энергии

$-\beta f^{g} = \lim_{F\to\infty} \frac{1}{F} \ln Z_G^g$ имеет вид

$$-\beta f(\tilde{v}) = -\beta f(v) + \ln(\tilde{v} / \sqrt{Q}) \qquad (15)$$

Нетрудно заметить, что это соотношение можно использовать и как связь между низкотемпературным и высокотемпературным режимами данной модели, которые совпадают, как это видно из (15), в критической точке $v_c=\sqrt{Q}$ Таким образом в самодуальной четырехмерной калибровочной модели критическая температура вычисляется точно.

d - мерные модели Поттса и в частности четырехмерная модель были исследованы при помощи $1/Q$ - разложений как в гамильтоновом [13] так и в лагранжевом [6] подходах. При этом если в гамильтоновом подходе параметр разложения не зависел от размерности пространства и был равен $1/Q$, то в лагранжевом формализме параметр разложения менялся в зависимости от размерности пространства, что требовало в каждом случае переопределения температурного параметра. Кроме того, в обеих случаях не учитывался вклад неориентируемых поверхностей. Используя же представление (3) для d-мерной калибровочной модели Поттса нетрудно провести $1/Q$ - разложение не требующего переопределения температурного параметра в лагранжевом формализме. Приведем несколько первых членов такого разложения для свободной энергии четырехмерной модели

$$-\beta f^{g} = \ln Q + \frac{v}{Q} - \frac{1}{2}\frac{v^2}{Q^2} + \frac{1}{3}\frac{v^3}{Q^3} - \frac{1}{4}\frac{v^4}{Q^4} + \frac{v^5}{Q^5}\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3}v\right) - \qquad (16)$$

$$- \frac{v^6}{Q^6}\left(\frac{5}{6} + 4v\right) + \frac{v^7}{Q^7}\left(\frac{29}{7} + 14v\right) - \frac{v^8}{Q^8}\left(\frac{113}{8} + \frac{112}{3}v\right) + \ldots$$

Отметим, что такое разложение соответствует высокотемпературной фазе ($v \ll 1$).

Рассмотрим теперь критические явления в $Z(Q)$ калибровочной модели Поттса (d=4). Наличие фазового перехода "конфайнмент" - "свободные заряды" в $Z(Q)$ модели, автоматически приводят к аналогичному фазовому переходу в $SU(Q)$- калибровочной теории [14]. В зависимости от величины

Q фазовый переход может быть I или II рода. Фазовый переход будет I рода, если при этом выделяется скрытая теплота фазового перехода L.

$$L = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{l.t.} - \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{h.t.} \right]_{T=T_c} > 0 \tag{17}$$

где $\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{l.t.}$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)_{h.t.}$ -низко- и высокотемпературные производные свободной энергии в критической точке. Используя соотношение дуальности (15) легко вычислить L зная только высокотемпературное разложение для свободной энергии (16). Дифференцируя (15) по температуре в критической точке ($v=v_c$) получим для $L = 1 - 2\sqrt{Q}\,(\beta f)'_{v_c=\sqrt{Q}}$ следующее разложение

$$L = 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 - 6x^4 + 54x^5 - 214x^6 + 482x^7 + \\ + 162x^8 - 7694x^9 + 42666x^{10} + \ldots \tag{18}$$

где $x = 1/\sqrt{Q}$. Здесь учтены все члены в разложении свободной энергии (16), дающие вклад в скрытую теплоту L вплоть до 10 порядка по x включительно. Следует отметить, что учет даже простейшей неориентируемой поверхности (бутылки Клейна) дает вклад в более высокие порядки разложения в силу того, что для ее конструкции на гиперкубической решетке требуется большое число плакетов, а порядок в $1/Q$-разложении, как это видно из (3), определяется именно этим.

В таблице приведены результаты Паде апроксиманты для скрытой теплоты фазового перехода при различных Q, а также для критического значения Q_c, начиная с которой происходит фазовый переход I рода ($Q > Q_c$).

При $Q \le Q_c$ фазовый переход II рода, что при $Q = 1$ соответствует перколяции плакетов.

Для сравнения приведены результаты для скрытой теплоты полученные методом Монте-Карло [15]. Необходимо отметить, что полученные нами более высокие, чем в работе [6], порядки Паде-апроксиманты, лучше согласуются с данными метода Монте-Карло.

В заключение авторы благодарят С.Г. Матиняна, С.Г. Инджеяна за полезные обсуждения и З.Т. Погосяна за помощь в работе.

Таблица

	Q_c	X_c	L(Q=2)	L(Q=3)	L(Q=10)	L(Q=20)
[3,3]	1,48	0,8226	0,0970	0,2174	0,5066	0,6294
[4,3]	1,42	0,8388	0,1043	0,2214	0,5069	0,6295
[3,4]	1,41	0,8426	0,1055	0,2209	0,5069	0,6295
[4,4]	1,49	0,8191	0,095	0,2161	0,5063	0,6293
[5,4]	1,25	0,8929	0,1214	0,2285	0,5073	0,6295
[4,5]	1,003	0,9986	0,1333	0,2319	0,5074	0,6295
[5,5]	1,39	0,8488	0,1095	0,2240	0,5072	0,6295
Monte-Karlo			0,124	0,229		

Литература

1. Wilson K. Phys. Rev. 1974. v.D10. P.2445.
2. Kogut J. preprint University of Illinois ILL-(TH)-82-46.
3. Mack G. Phys. Lett. 1978. v.B78. P.263.
4. t Hooft G. Nucl. Phys. 1978. v.B138. P.1.
5. Kogut J. Phys. Rev. 1980. v. D21. P.2316.
6. Ginsparg P. et al. Nucl. Phys. 1980. v.B170. [FS1] P.409.
7. Akheyan A.Z., Ananikian N.S. J. of Phys. 1992. v.A25. N11.
8. Ананикян Н.С., Ахеян А.З. ЯФ. 1990. т.51. с.1770.
9. Ananikian N.S., Izmailyan N.Sh. Phys. Lett. 1985. v.B151. P.142.
10. Зыкоа А. А. УМН. 1974. т.29. с.89.
11. Фукс Д.Б., Фоменко А.Т., Гутенмахер В.Л. Гомотопическая топология. Москва: МГУ, 1979.
12. Baxter R. J. Phys. 1973. v.C6. P.1445.
13. Kogut J., Sinclair D. preprint University of Illinois ILL-(TH)-81-39.
14. Frohlich J. Phys. Lett. 1979. v.B83. P.195.
15. Creutz M., Jacobs L. and Rebbi C. Phys. Rev. 1979. v.D20. P.1915.

Рукопись поступила 23 июля 1992 г.

Н.С.АНАНИКЯН,Н.Ш.ИЗМАИЛЯН , В.А. ПОГОСЯН

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ КАЛИБРОВОЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОТТСА И
ИХ $1/Q$ - РАЗЛОЖЕНИЕ

Редактор Л.П.Мукаян
Технический редактор А.С.Абрамян

Подписано в печать 3/IX-92 Формат 60x84/16
Офсетная печать.Уч.изд.л. 0.5 Тираж 110 экз. Ц. 7 к.
Зак.тип.№ 52 Индекс 3649

Отпечатано в Ереванском физическом институте
Ереван 36, ул.Братьев Алиханян, 2

The address for requests:
Information Department
Yerevan Physics Institute
Alikhanian Brothers 2,
Yrevan, 375036
Armenia, USSR

ИНДЕКС 3649

ЕРЕВАНСКИЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ