

CEA-R-5785



98 006361

ISSN 0429 - 3460



FR9805515

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE

Gestion INIS
Doc. classé le : 9...7/98
FR9805515
I.H.D.D.

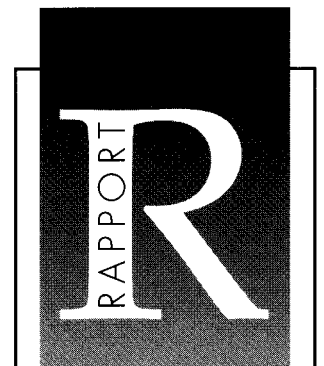
**ÉVOLUTION D'UNE IMPULSION
ÉLECTROMAGNÉTIQUE À SPECTRE
ÉTROIT DANS UN PLASMA
AUTO-GÉNÉRÉ INHOMOGÈNE ET
MODÉRÉMENT INSTATIONNAIRE
(absorption, réflexion,
transmission, décalage spectral)**

par

Patrick COMBIS, Alain SALÈRES

DIRECTION DES RECHERCHES EN ILE-DE-FRANCE
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE THÉORIQUE ET
APPLIQUÉE
CELLULE CONSEIL, EXPERTISE ET ÉVALUATION

CEA /Bruyères-le-Châtel



**RAPPORT
CEA-R-5785**

DIRECTION DE L'INFORMATION
SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE

CEA/SACLAY 91191 GIF-SUR-YVETTE CEDEX FRANCE

DIRECTION DES RECHERCHES EN ILE-DE-FRANCE

1998

RAPPORT CEA-R-5785 - Patrick COMBIS, Alain SALÈRES

“ÉVOLUTION D'UNE IMPULSION ÉLECTROMAGNÉTIQUE À SPECTRE ÉTROIT DANS UN PLASMA AUTO-GÉNÉRÉ INHOMOGÈNE ET MODÉRÉMENT INSTATIONNAIRE (absorption, réflexion, transmission, décalage spectral)”

Sommaire - Nous présentons dans ce rapport une méthode de résolution des équations de Maxwell couplées aux équations fluides. Les équations fluides décrivent, en introduisant des fréquences de collision et d'ionisation, l'évolution des paramètres électroniques (ionisation, vitesse de dérive des électrons, énergie électronique). La méthode de résolution est adaptée aux impulsions électromagnétiques à spectre étroit, c'est-à-dire les impulsions dont l'enveloppe contient un grand nombre d'oscillations du champ électrique. Cette restriction permet de s'affranchir de ces oscillations temporelles rapides et d'obtenir, par la résolution spatiale de l'équation différentielle électromagnétique de Helmholtz, une bonne simulation de l'interaction d'une impulsion électromagnétique avec un plasma inhomogène absorbant de dimensions finies (plasma préformé ou plasma créé par l'impulsion), et de retrouver ainsi le profil de l'impulsion transmise, celui de l'impulsion réfléchie, puis leurs spectres décalés et modifiés par rapport à celui de l'impulsion incidente.

1998 - Commissariat à l'Energie Atomique - France

RAPPORT CEA-R-5785 - Patrick COMBIS, Alain SALÈRES

“TIME EVOLUTION OF AN ELECTROMAGNETIC PULSE IN A LIMITED HOMOGENEOUS PLASMA (absorption, reflection, transmission, spectral shift)”

Summary - In this paper, we study the interaction of a long moderate electromagnetic pulse with a plasma and, particularly, the interaction of a microwave pulse with low pressure self-generated air plasma under breakdown conditions. A fluid model is coupled to Maxwell equations to describe this interaction. Fluid equations describe, using ionization and collision frequencies, the evolution of electronic parameters as electron density, drift velocity and electron energy under the influence of laser pulse electric field. The resolution method is restricted to narrow spectrum pulses when the E.M. signal can be considered as an harmonic plane wave. In this case, Maxwell equations are reduced to spatial dependent Helmholtz equation which is solved in an homogeneous and quasi stationary spatial gradient of electronic density. Our theoretical model allows to perform computer simulations of the electric field inside and outside the inhomogeneous slowly evolving plasma. Finally, we obtain, by Fourier transform, the evolution of the spectrum of reflected and transmitted pulses compared to the incident pulse spectrum.

1998 - Commissariat à l'Energie Atomique - France

- Rapport CEA-R-5785-

CEA Bruyères-le-Châtel

Direction des Recherches en Ile-de-France
Département de Physique Théorique et Appliquée
Cellule Conseil, Expertise et Evaluation

ÉVOLUTION D'UNE IMPULSION ÉLECTROMAGNÉTIQUE À SPECTRE ÉTROIT
DANS UN PLASMA AUTO-GÉNÉRÉ INHOMOGÈNE
ET MODÉRÉMENT INSTATIONNAIRE
(absorption, réflexion, transmission, décalage spectral).

par

Patrick COMBIS, Alain SALÈRES

- Février 1998

Sommaire

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Introduction et étude bibliographique | p. 4 |
| I - Équation des ondes et équations fluides dans un plasma | p. 9 |
| II - Résolution des équations pour les impulsions à spectre étroit | p. 13 |
| III- Résolution de l'équation électromagnétique de Helmholtz | p. 16 |
| IV- Cas d'une impulsion qui génère le plasma où elle se propage | p. 21 |
| V - Détermination du décalage spectral | p. 22 |
| VI - Mise à l'épreuve de la méthode : restitution de l'effet Doppler | p. 24 |
| VII - Étude de l'expérience de Kuo et Ren | p. 26 |
| VIII - Conclusion | p. 33 |
| Annexe 1 : Transformée de Fourier d'une fonction bornée continue et dérivable échantillonnée sur des points équidistants | p. 34 |
| Annexe 2 : Calcul du déphasage spectral de l'impulsion transmise dans un plasma homogène sous-dense instationnaire | p. 38 |
| Annexe 3 : Calcul analytique de la variation de fréquence dans un plasma autogénéré, sous-critique, non-réfléchissant, instationnaire et quasi-homogène | p. 41 |
| Annexe 4 : Détermination du champ de claquage dans l'expérience de Kuo et Ren | p. 47 |

Introduction et étude bibliographique

Dans ce travail, on se propose de calculer, de façon théorique et numérique, le décalage en fréquence induit lors de la propagation d'une impulsion électromagnétique dans un plasma collisionnel, et en particulier, la propagation d'une impulsion hyperfréquence intense dans de l'air ionisé par le passage de l'onde. Une étude bibliographique précède la présentation de la théorie et des résultats numériques.

La propagation d'une onde électromagnétique intense dans un gaz (ou un diélectrique) s'accompagne de la création d'un plasma par absorption multiphotonique et ionisation collisionnelle [1]. Le premier processus, important pour l'interaction laser à éclairage élevé et pour des impulsions brèves, est de nature quantique et correspond à l'absorption simultanée des photons nécessaires à l'ionisation des atomes constituant le gaz. Le second est le mécanisme classique d'ionisation par avalanche dans un gaz traversé par des micro-ondes [2]. Les électrons libres, accélérés dans le champ électrique associé à l'onde, gagnent suffisamment d'énergie pour ioniser les atomes par collision et engendrer ainsi de nouveaux électrons libres. Il en est ainsi dès que le champ électrique dépasse une valeur seuil qui dépend : de la pression et de la nature du gaz, de la fréquence de l'onde, de la fréquence de collision des électrons avec les atomes, de la durée de l'impulsion électromagnétique [1, 3].

Pour les deux mécanismes, il en résulte une diminution rapide de l'indice de réfraction du milieu qui se traduit par un décalage et un élargissement du spectre associé à l'onde incidente. Ces effets, décrits par Bloembergen [4] il y a plus de 20 ans, sont dus à la modulation de la phase induite lors de la création par laser d'un plasma faiblement ionisé de fréquence plasma ω_p . En effet, l'équation de dispersion simplifiée $k^2 c^2 + \omega_p^2 - \omega^2 = 0$ d'un plasma sans collision de longueur ℓ , permet d'associer à l'impulsion transmise, pour un milieu où l'ionisation évolue rapidement, un décalage de la fréquence laser vers le bleu [5,6] de valeur $\Delta\omega \approx -(1/c) \partial \left[\int_0^\ell \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2} dz \right] / \partial t$ [7].

-
- [1] D.C. Smith and R.G. Meyerand, "Principles of laser plasmas", edited by G. Bekefi J. Wiley and Sons New York, "Laser radiation induced breakdown", p. 457- 507 (1976)
 - [2] L. Gould and L.W. Roberts, "Breakdown of air at microwave frequencies", J.of Appl. Phys., Vol. 27(10), p. 1162 - 1170 (1956)
 - [3] R. Roussel- Dupré, "Optimization of high power microwave device parameters for maximum air transmission", SPIE, vol. 1872 p. 212 - 233 (1993)
 - [4] N. Bloembergen, "The influence of electron plasma formation on superbroadening in light filaments", Opt. comm., Vol. 8(4) p.285 - 288 (1973)
 - [5] E. Yablonovitch, "Self - phase modulation of light in a laser breakdown plasma", Phys. Rev. Lett., Vol. 32(20) p 1101 - 1104 (1974)
E. Yablonovitch, "Self - phase modulation and short pulse generation from laser breakdown plasmas", Phys. Rev. A, vol. 10(5), p. 1888 - 1895 (1974)
 - S.P. Kuo and H. Ren, "Frequency up conversion of high - power microwave pulse propagating in a

Ce décalage et l'élargissement du spectre de l'impulsion incidente ont été observés dans le passé dans diverses expériences laser à éclairage modéré :

- les expériences de Yablonovitch ^[5] où la focalisation des impulsions de quelques nanosecondes délivrées par un laser CO₂ dans divers gaz produit une ionisation collisionnelle pour un éclairage supérieur à 10¹¹ W/cm².

- les expériences de Corkum ^[8] où le décalage vers le bleu a été produit par les impulsions picosecondes d'un laser CO₂.

- les expériences réalisées à Limeil ^[9] avec un laser néodyme YAG délivrant des impulsions de 180 ps, focalisées à plus de 10¹³ W/cm² dans de l'azote. Celles-ci mettent en évidence l'apparition de quelques satellites, sur le spectre élargi et décalé vers le bleu, attribués aux divers degrés de charge produits lors de l'ionisation du gaz.

Plus récemment, Wilks *et al* ^[10] et Gildenburg *et al* ^[11] ont suggéré qu'il était possible, avec des lasers de durée sub-picoseconde réalisant des éclairages permettant des énergies d'oscillation des électrons supérieures à l'énergie d'ionisation de l'atome, de contrôler l'ionisation par le champ associé à l'onde (ionisation par effet tunnel) et le décalage en fréquence vers le bleu.

Cette ionisation par le champ et le décalage vers le bleu du spectre du rayonnement transmis ont été mis en évidence dans les expériences de Wood, Downer et de leurs collaborateurs ^[12]. L'interaction a été réalisée avec un laser à 620 nm délivrant des impulsions de 100 fs dans les gaz rares (He, Ar, Kr, Xe) avec des éclairages atteignant 10¹⁶ W/cm². Une simulation numérique détaillée a été effectuée par Rae et Burnett ^[13] qui ont pu reproduire les résultats expérimentaux en considérant des

-
- self-generated plasma", J. of Appl. Phys., Vol. 71 (11), p. 5376 - 5380 (1992)
- [6] T. Dewandre, J. R. Albritton and E.A. Williams, "Doppler shift of light reflected from expanding plasmas", Phys. Fluids, 24(3) p. 528 - 536 (1981)
- [7] Cette relation est démontrée dans les annexes 3 et 4
- [8] P. Corkum, "Amplification of picosecond 10mm pulses in multiatmosphere CO₂ lasers" IEEE J. Quantum Electron. 21, p. 216 - 232 (1985)
- [9] J.L. Bocher, J.C. Griessmann, M. Louis - Jacquet and M. Decroisette, "Self phase Modulation in the breakdown of gases by ultra short pulses", Opt. Com. Vol. 16(2) p. 262 - 265 (1976)
- [10] S.C. Wilks, J.M. Dawson, and W.B. Mori, "Frequency Up - Conversion Electromagnetic Radiation with use of an underdense Plasma", Phys. Rev. Lett. Vol. 61(3) p. 337 - 340 (1988)
- [11] V.B. Gildenburg, A.V. Kim and A. Sergeev, J.E.T.P. Letter, Vol. 51(2), p. 105 - 107 (1990)
- [12] W. M. Wood, G. Focht, and M.C. Downer, "Tight focusing and blue shifting of millijoule femtosecond pulse from a conical axicon amplifier", Optics letters, Vol 13(11), p. 984 - 986 (1988)
- W. M. Wood, C.W. Siders, and M.C. Downer, "Measurement of femtosecond ionization dynamics of atmospheric density gases by spectral shifting", Phys. Rev. Lett., vol. 67(25), p. 3523 - 3526 (1991)
- W. M. Wood, C.W. Siders, and M.C. Downer, "Femtosecond growth dynamics of an underdense ionization front measured by spectral blueshifting", IEEE Transactions on Plasma Sc., vol. 21(1), p. 20 - 32 (1993)
- M.C. Downer, W.C. Banyai, W.M. Wood, D.C. Anacker and J.L. Erskine, "Interaction of super - intense fields with atoms and surfaces", SPIE vol 1209, p. 166 - 174 (1990)
- B.M. Penetrante, J.N. Bardsley, W. M. Wood, C.W. Siders and M.C. Downer, "Ionization induced frequency shift in intense femtosecond ...", J. Opt. Soc. Am. B, vol. 9(11), p. 2032-2040 (1992)
- [13] S.C. Rae and K. Burnett, "Detailed simulations of plasma induced spectral blueshifting"

éclaircissements plus faibles que dans l'expérience. Par ailleurs, Yablonovitch ^[14] et Downer ^[15] ont montré que le décalage vers le bleu est aussi impliqué dans la conservation de l'énergie dans le cadre des expériences de Freeman *et al* ^[16], d'ionisation multiphotonique au dessus du seuil (l'atome absorbe plus de photons que nécessaire à son ionisation). Ces expériences mettent en évidence l'influence de la durée de l'irradiation sur l'énergie acquise par les photo-électrons.

Le décalage vers les hautes fréquences a aussi été mis en évidence dans des expériences intéressant le domaine hyperfréquence ou micro-onde (100 MHz-100 GHz). Ainsi, la fréquence d'une impulsion micro-onde a augmenté lors de l'ionisation uniforme et quasi-instantanée, réalisée au moyen d'une impulsion laser, d'une cavité emplie d'une vapeur de faible densité (Joshi *et al* ^[17]). Le plasma ainsi créé modifie la fréquence initiale de l'onde incidente ω_i qui devient $\omega = \sqrt{\omega_i^2 + \omega_p^2}$, du fait de la stationnarité du vecteur d'onde k_i (imposée par les conditions aux limites). Cette interprétation résulte des calculs de Jiang ^[18] qui considère une discontinuité temporelle pour rendre compte de la croissance de la fréquence par opposition à la discontinuité spatiale qui conserve la fréquence et introduit une variation du vecteur d'onde. En fait, dans toute expérience il y a coexistence des deux phénomènes et des calculs beaucoup plus sophistiqués sont nécessaires pour évaluer le décalage en fréquence des milieux dispersifs ^[19] lorsque l'ionisation directe ou indirecte a une durée finie.

-
- Phys. Rev.A, vol 46(2), p. 1084 - 1090 (1992)
- [14] E. Yablonovitch, "Energy conservation in the picosecond and subpicosecond photoelectric effect", Phys. Rev. Lett., vol. 60(9) p. 795 - 796 (1988)
- [15] M.C. Downer, W.M. Wood and J.I. Trisnadi, "Comment on energy conservation in the picosecond and subpicosecond photoelectric effect", Phys. Rev. Lett., vol. 65(22), p. 2832 (1990)
- [16] R.R.Freeman, P.H.Bucksbaum, H.Milchberg, S.Darack, D.Schumacher and M.E.Geusic "Above threshold ionization with subpicosecond laser pulses", Phys. Rev. Lett., vol.59(10), p. 1092 - 1095 (1987)
- [17] C.J.Joshi, C.E.Clayton, K.Marsh, D.B.Hopkins, A. Sessler and Whittum, "Demonstration of the frequency upshifting of microwave ...", IEEE Trans. on plasma sc., vol.18(5), p. 814 - 818 (1990)
- [18] C.L. Jiang, "Wave Propagation and dipole radiation in a suddenly created plasma", IEEE Transaction on antenna and propagation, vol.AP- 23(3), p. 83-90 (1975)
- [19] L.B. Felsen and G.M. Whitman, "Wave propagation in time varying media", IEEE Transaction on antenna and propagation, vol.AP- 19(1), p.242 - 253 (1971)
- R.L. Fante, "Transmission of electromagnetic waves into time varying media", IEEE Trans. on antenna and propagation, vol.AP- 23(1)1, p. 417 - 424 (1975)
- D.K. Kalluri, "On reflection from a suddenly created plasma half-space : transient solution", IEEE Transactions on Plasma Science, vol. 16, p.11-16 (1988)
- V.R. Goeti and D.K. Kalluri, "Wave propagation in a switched - on time varying plasma medium", IEEE Transactions on Plasma Science, vol. 17, p.828 (1989)
- D.K. Kalluri and V.R. Goeti, "Frequency shifting of electromagnetic radiation by sudden creation of a plasma slab", J.Appl. Phys, 72(10), p. 4575 - 4580 (1992)
- A.Banos, W.B. Mori, J.M. Dawson, "Computation of the electric field and magnetic fields induced in a plasma created by ionization ...", IEEE Trans. Plasma Sci., vol. 21(1), p.57 - 69 (1993)
- H.L. Rappaport and C.D. Striffler, "Frequency up conversion and time dependant tunnelling of electromagnetic radiation in step - ionized plasmas", Phys. Plasmas 1, p. 780 - 784 (1994)

Par ailleurs, Kuo et ses collègues [20,21] ont réalisé et interprété diverses expériences d'ionisation de l'air et de propagation d'impulsions micro-ondes, de fréquence 3.27 GHz et de durée proche de 1 μ s cadencées de 20 Hz à 60 Hz. Ces impulsions sont délivrées par un magnétron dans une chambre remplie d'air sec à faible pression (entre 0.08 torr et 1 torr). La comparaison entre les spectres des impulsions incidente et transmise, pour une puissance incidente légèrement supérieure au seuil le claquage (apparition d'une lueur dans le plasma), montre une augmentation de la fréquence de quelques dixièmes de MHz. Ce décalage fréquentiel de l'onde transmise augmente ensuite avec la puissance incidente puis s'accompagne, en plus, d'un décalage vers les basses fréquences dû, d'après les auteurs, aux collisions électron-neutre [21].

En fait, l'interprétation de l'expérience paraît négliger l'apparition d'une impulsion réfléchi. En effet, la croissance de la puissance incidente se traduit d'abord par l'apparition de l'ionisation du milieu, puis par l'atténuation de l'onde incidente attestée par l'érosion de la queue de l'impulsion [22]. Enfin, la montée rapide de l'ionisation produit un front de plasma qui réfléchit une partie de l'onde incidente et atténué progressivement l'onde transmise selon l'épaisseur du gradient de plasma [23,24].

C'est dans le cadre de l'interprétation de l'expérience hyperfréquence de Kuo [20] que se situe l'étude théorique et numérique que nous présentons, mais les résultats obtenus pourront être étendus à l'interaction entre un laser et un milieu (gaz, métal ou diélectrique). Une reformulation de la théorie usuelle [25] a été effectuée en prenant complètement en considération l'influence des collisions sur l'atténuation du champ électrique, associé à l'onde incidente et réfléchi, et leur effet sur le spectre du rayonnement transmis et réfléchi étudié lors de la montée de l'ionisation. L'étude complète ainsi l'interprétation des spectres obtenus dans une expérience hyperfréquence en prenant en considération un front d'ionisation réfléchissant. Elle étend aussi la théorie

-
- [20] S.P. Kuo, "Frequency up - conversion of microwave pulse in a rapidly growing plasma" *Phys. Rev. Lett.*, vol. 65(8), p. 1000 - 1003 (1990)
 S.P. Kuo, Y.S. Zhang and A. Ren, "Observation of in the propagation of frequency up - conversion a high - power microwave pulse in a self - generated plasma", *Phys. Lett.*, vol. 150, (2), p. 92 - 96 (1990)
 S.P. Kuo, Y.S. Zhang and A. Ren, "Frequency up - conversion of a high - power microwave pulse propagating in a self - generated plasma", *J. Appl. Phys.* 71(1) p. 5376 - 5380 (1992)
- [21] S.P. Kuo and A. Ren, "Frequency downshift in rapidly ionizing media" *Phys. Rev; E*, vol. 49(4), p. 3310 - 3315 (1994)
- [22] S.P. Kuo and Y.S. Zhang, "Bragg scattering of electromagnetic waves by microwave produced plasma layers", *Phys. Fluids B2* (3), p. 667 - 673 (1990)
- [23] S.P. Kuo and Y.S. Zhang, "Propagation of high - power microwave pulses in air breakdown environment", *J. Appl. Phys.* 67(6) p. 2762 - 2766 (1990)
- [24] B. Cros *et al.*, "Ionization induced frequency up-shift of a high power microwave interacting with a plasma", soumis à *Physics of Plasma* (1997)
- [25] V. B. Gildenburg, V. A. Krupnov and V. Semenov, "Frequency self-conversion and reflectionless propagation of an rf electromagnetic ...", *Sov. Techn. Phys. Lett;* Vol. 14, p. 738 - 739 (1988)
 V. B. Gildenburg *et al.*, "Adiabatic frequency up conversion of a powerful electromagnetic pulse producing gas ionization", *IEEE Trans. on Plasma. Sc.*, vol. 21(1), p. 34 - 44 (1993)

décrivant les observations spectrales dans les expériences d'interaction laser avec un solide où la détente d'un plasma inhomogène induit un décalage doppler produit par le mouvement de la surface critique et un décalage pseudo-doppler induit par la variation temporelle du gradient de densité [6,26] (études qui se limitaient à un plasma non-collisionnel alors que, dans le cas de l'interaction laser picoseconde et femtoseconde, la montée de l'ionisation et les collisions dans le milieu peuvent jouer un rôle important pour les éclaircissements inférieurs à 10^{15} W/cm²).

Cependant, les calculs présentés dans notre étude supposent, d'une part, que les champs électriques sont loin de la limite relativiste. Ils ne peuvent donc contribuer à l'interprétation de calculs ou d'expériences mettant en jeu des fronts d'ionisation et de réflexion relativistes surcritiques ou sous-critiques [27] dont l'évolution est conditionnée par la force pondéromotrice [28]. Ils supposent, d'autre part, que l'évolution temporelle de l'enveloppe de l'impulsion électromagnétique est lente devant la période d'oscillation, ce qui les rend inadaptés aux impulsions laser femtoseconde.

Ce travail présente d'abord les équations générales décrivant l'ionisation collisionnelle, la propagation d'une impulsion électromagnétique, son atténuation, sa réflexion et son décalage spectral lors de la montée de l'ionisation dans un plasma auto-généré. Une méthode de résolution des équations différentielles du champ, théorique et numérique, est ensuite proposée et appliquée à la propagation des micro-ondes dans l'atmosphère raréfiée dans le but de restituer les résultats de l'expérience de Kuo *et al* [21].

-
- [26] O.L. Landen, W.E. Alley, "Dynamics of picosecond - laser pulse plasmas determined from spectral shifts of reflected probe pulses", *Phys. Rev. A*, vol. 46(8), p. 5089 - 5100 (1992)
H.M. Milchberg, R.R. Freeman, "Expansion induced Doppler shifts from ultrashort pulse laser produced plasmas", *Phys. Rev. A*, vol. 41(4), p. 2211- 2214 (1990)
R. Sauerbrey, "Acceleration in femtosecond laser - produced plasmas", *Phys. Plasmas* 3, p. 4712 - 4716 (1996)
- [27] M. Lampe and E. Ott, "Interaction of electromagnetic waves with a moving ionization front", *Phys. Fl.*, 21(1), p. 42 - 54 (1978)
W.B. Mori, "Generation of tunable radiation using an underdense ionization front", *Phys. Rev. A*, vol. 44(8), p. 5118- 5121 (1991)
S.C. Wilks, J.M. Dawson, W.B. Mori, T.C. Katsouleas and M.E. Jones, "Photon accelerator", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 62, p. 2600 - 2603 (1989)
E. Esarey, G. Joyce and P. Sprangle, "Frequency up shifting of laser pulses by copropagating ionization fronts", *Phys. Rev. A*, vol. 44(6), p. 3908- 3911 (1991)
R.L. Savage, Jr.C. Joshi and W.B. Mori, "Frequency upconversion of electromagnetic radiation upon transmission into an ionization front", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 68(7), p. 946 - 949 (1992)
R.L. Savage, R.P. Brogle, W.B. Mori, and C. Joshi, "Frequency upshifting and pulse compression via underdense relativistic ionization fronts", *IEEE Trans. on plasma Sc.*, vol. 21(1), p. 5 - 19 (1993)
M.P. Kalashnikov, P.V. Nickles, Th. Schlegel, M. Schnuerer, F. Billhardt, I. Will, and W. Sandner, "Dynamics of laser interaction at 10^{18} W / cm²", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73(2), p. 260- 263 (1994)
E. Lefebvre and G. Bonnaud, "Transparency/Opacity of a solid target illuminated by an ultrahigh intensity laser pulse", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 74(11), p. 2002 - 2005 (1995)
- [28] X. Liu and D. Umstadter, "Competition between ponderomotive and thermal forces in short- scale length laser plasmas", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 69(13), p. 1935 - 1938 (1992)

I - Équation des ondes et équations fluides dans un plasma

Dans un plasma globalement neutre, les quatre équations de Maxwell, s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad , \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{j} \quad (\text{I-1})$$

Dans le cas d'un problème à symétrie monodimensionnelle plane [29] [incidence normale, plasma stratifié suivant l'axe des z], ces équations se résument à l'équation des ondes :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(z,t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial \vec{j}(z,t)}{\partial t} \quad (\text{I-2})$$

où le champ électrique \vec{E} et la densité de courant \vec{j} sont colinéaires et perpendiculaires à la direction de propagation Oz.

La densité de courant \vec{j} , la vitesse fluide des électrons \vec{v} , la densité électronique n_e et la charge de l'électron e ($e > 0$) sont liées par la relation:

$$\vec{j} = - e n_e \vec{v} \quad (\text{I-3})$$

Dans un plasma fortement collisionnel, l'équation de Boltzmann régissant la fonction de distribution des électrons f_e peut être remplacée par les équations d'évolution de trois premiers moments de f_e (densité électronique n_e , vitesse de dérive \vec{v} , énergie U). Les sections efficaces de l'équation de Boltzmann sont alors remplacées par des fréquences de collision. Les trois équations ainsi obtenues sont appelées "équations fluides", elles s'écrivent, de manière générale [30] :

[29] P. Combis, "Propagation d'une impulsion micro-onde intense dans l'atmosphère", rapport CEA/DRIF/DPTA/PPE/LV 96429 DO (1996)

[30] G. E. Sieger, D. J. Mayhall, J. H. Yee, "Numerical simulation of the propagation and absorption due to air breakdown of long microwave pulses", UCRL 96552, Livermore (1987)
R. Roussel-Dupré, (1993), déjà cité
J. H. Yee, R.A. Alvarez, D. J. Mayhall, D.P. Byrne, J. DeGroot, "Theory of intense electromagnetic pulse propagation through the atmosphere", Phys. Fluids, vol. 29, p. 1238-1244 (1986)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_e}{\partial t} = (v_i - v_a)n_e - Rn_en_i - \vec{v} \cdot \text{grad}(n_e) + \text{div}[D \text{ grad}(n_e)] \quad (a) \\ \frac{\partial (n_e \vec{v})}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} n_e \vec{E} - v_m n_e \vec{v} \quad (b) \\ \frac{\partial (n_e U)}{\partial t} = -en_e \vec{E} \cdot \vec{v} - v_u n_e U - v_i n_e \varepsilon_i \quad (c) \end{array} \right. \quad (I-4)$$

- m_e : masse de l'électron
 v_i : fréquence de collision associée à l'ionisation
 v_m : fréquence de collision associée à la vitesse (freinage)
 v_u : fréquence de collision associée à l'énergie (dissipation)
 v_a : fréquence de collision associée à l'attachement
 n_i : densité ionique du milieu
 R : coefficient de recombinaison
 D : coefficient de diffusion
 ε_i : énergie d'ionisation (14 eV pour une molécule d'oxygène ou d'azote)

En symétrie monodimensionnelle, \vec{E} et \vec{v} sont colinéaires et perpendiculaires à la direction de propagation et au gradient de densité électronique, ce qui rend nul le terme en $\vec{v} \cdot \text{grad}(n_e)$. De plus, lorsque les impulsions électromagnétiques que l'on étudie ont des durées inférieures à la microseconde, il est possible de négliger l'attachement et la recombinaison qui sont des phénomènes lents et de traiter la diffusion des électrons comme une perturbation qui n'a d'influence que dans le cas de gradients de densité très raides. Les équations fluides se simplifient alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial n_e}{\partial t} = v_i n_e + \frac{\partial}{\partial z} \left[D \frac{\partial n_e}{\partial z} \right] \cong v_i n_e \quad (a) \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cong -\frac{e}{m_e} E - v_c v \quad , \quad v_c = v_m + v_i \quad (b) \\ \frac{\partial U}{\partial t} \cong -eE v - v_e U - v_i \varepsilon_i \quad , \quad v_e = v_u + v_i \quad (c) \end{array} \right. \quad (I-5)$$

Les relations (I-3) et (I-4-b) sont utilisées pour s'affranchir de \vec{j} dans l'équation des ondes qui devient :

$$\frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(z,t)}{\partial t^2} = k_0^2 \frac{n_e(z,t)}{n_c} \left[E(z,t) + \frac{m_e v_m(z,t) v(z,t)}{e} \right] \quad (I-6)$$

où k_0 est le vecteur d'onde dans le vide ($k_0=\omega_0/c$) et où n_c est la densité de coupure dans le plasma pour une impulsion à spectre étroit centré sur la pulsation ω_0 :

$$n_c=(\epsilon_0 m_e \omega_0^2)/e^2$$

Les équations (I-5) et (I-6) définissent complètement l'étude de l'évolution simultanée d'une impulsion électromagnétique dans un plasma (réflexion, transmission, absorption, évolution de la fréquence) et d'un plasma qui s'ionise sous l'action d'un champ électrique.

Les fréquences de collision sont, d'une part proportionnelles à la densité moléculaire n_a du plasma, d'autre part fonction de l'énergie U atteinte dans le plasma par les électrons. Dans l'air sec, ces fréquences varient suivant les lois données sur la figure ci-dessous [31].

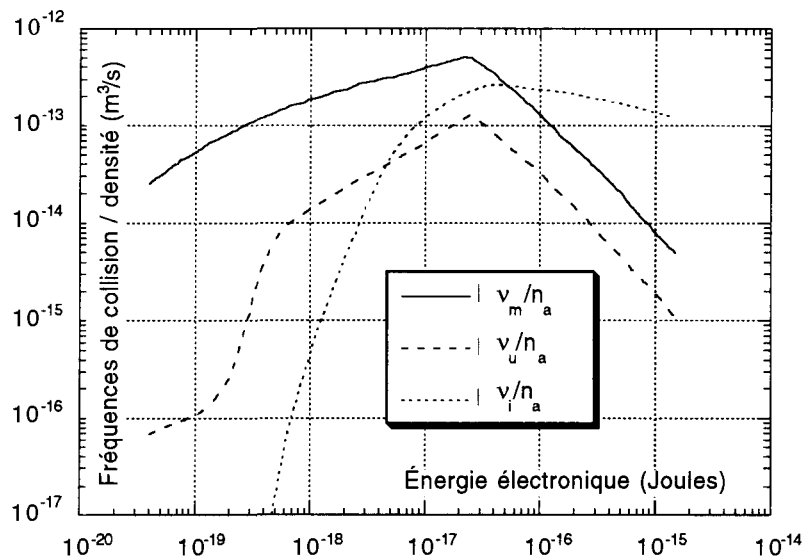


Figure 1 : Fréquences de collision

Ces fréquences de collision sont essentiellement valables dans le domaine des micro-ondes (100 MHz-100 GHz) mais peuvent être utilisées dans le domaine des rayonnements infra-rouges jusqu'à la longueur d'onde du laser CO₂ [32]. Pour les faibles valeurs de la fréquence d'ionisation ν_i , nous avons préféré utiliser les données expérimentales précises compilées par Lupan [33], cette fréquence n'est plus donnée en

[31] G. E. Sieger, D. J. Mayhall, J. H. Yee, (1987), déjà cité

[32] J.H. Yee, D.J. Mayhall, R. Alvarez, "Physical phenomena induced by passage of intense electromagnetic pulses (including CO2 lasers) through atmosphere", UCRL 93523 (1985)

[33] Y. A. Lupan, "Refined theory for RF discharges in air", Sov. Phys. Tech. Phys., vol. 21(11), p. 1367-1370 (1976)

fonction de l'énergie U mais en fonction du champ électrique effectif E_{eff} défini par la relation :

$$E_{\text{eff}} = |E| / \sqrt{2[1 + (\omega_0 / \nu_c)^2]} \quad (\text{I-7})$$

où $|E|$ est le module du champ électrique, la variation de la fréquence d'ionisation déterminée par Lupan, dans l'air sec, est représentée sur la figure suivante :

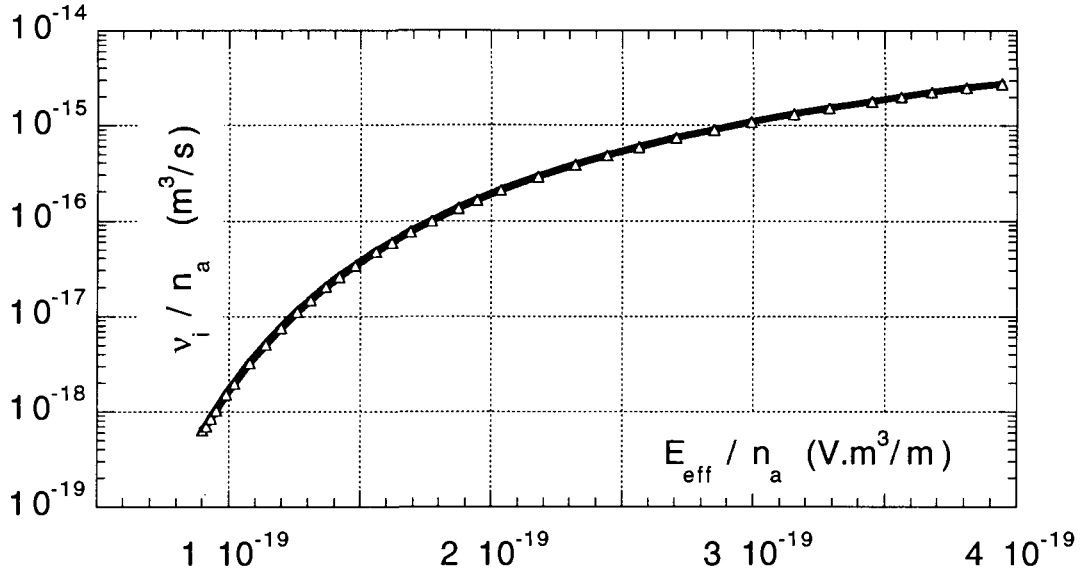


Figure 2 : Fréquence d'ionisation

Dans ce cas, en introduisant la pression p du plasma, la fréquence d'ionisation est donnée en fonction de E_{eff}/p [en V/(cm./Torr)] par la relation :

$$\frac{\nu_i}{p} \text{ (en s}^{-1}\text{/Torr)} = 2.5 \cdot 10^7 \left[1.45 \sqrt{\frac{E_{\text{eff}}}{p}} + 0.01 \frac{E_{\text{eff}}^{3/2}}{p} \right] \exp\left[-\frac{278}{E_{\text{eff}}/p}\right] \quad (\text{I-8})$$

Enfin, d'après Lupan et d'autres auteurs [34], le coefficient de diffusion des électrons D s'exprime en fonction d'une fréquence de collision phénoménologique $\nu_{\text{eff}}(U)$ sous la forme :

$$D(U) = \frac{2}{3} \frac{U}{m_e \nu_{\text{eff}}(U)} \cong \frac{2}{3} \frac{U}{m_e [\nu_m(U) + \nu_i(U)]} \quad (\text{I-9})$$

[34] R. Roussel-Dupré, (1993), déjà cité

II - Résolution des équations pour les impulsions à spectre étroit

Dans toute la suite des calculs, nous allons considérer des impulsions à spectre étroit centré sur la pulsation ω_0 , c'est à dire des impulsions dont l'enveloppe varie lentement vis à vis des oscillations du champ électrique. Dans ce cas, l'impulsion doit donc comporter plusieurs dizaines ou centaines d'oscillations. Avec cette hypothèse, l'onde qui forme l'impulsion peut momentanément être considérée comme une onde plane harmonique de la forme :

$$E(z, t) = E_s(z, t) \sin(\omega_0 t) + E_c(z, t) \cos(\omega_0 t) \quad (\text{II-1})$$

où $E_s(z, t)$ et $E_c(z, t)$ sont des fonctions du temps et de l'espace dont le temps caractéristique de variation temporelle est long devant la période de l'onde :

$$\left\{ \frac{\partial E_s}{\partial t}, \frac{\partial E_c}{\partial t} \right\} \ll \{ \omega_0 E_s, \omega_0 E_c \} \quad (\text{II-2})$$

De la même façon, la vitesse de dérive des électrons v et l'énergie électronique U [$U \propto E \times v \propto E^2$] s'écrivent :

$$\begin{cases} v(z, t) = v_s(z, t) \sin(\omega_0 t) + v_c(z, t) \cos(\omega_0 t) \\ U(z, t) = U_0(z, t) + U_s(z, t) \sin(2\omega_0 t) + U_c(z, t) \cos(2\omega_0 t) \end{cases} \quad (\text{II-3})$$

où v_s , v_c , U_0 , U_s et U_c sont aussi des fonctions variant lentement en fonction du temps.

Remarque fondamentale : La décomposition du champ électrique sous la forme (II-1) n'est pas unique, il est possible de remplacer ω_0 par une fréquence voisine très proche ω_1 ($\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$) et d'exprimer $E(z, t)$ sous la forme :

$$E(z, t) = E_{s1}(z, t) \sin(\omega_1 t) + E_{c1}(z, t) \cos(\omega_1 t) \quad (\text{II-r1})$$

Les fonctions E_{s1} et E_{c1} sont alors reliées aux fonctions E_s et E_c par les formules :

$$\begin{cases} E_s = E_{s1} \cos(\Delta\omega t) - E_{c1} \sin(\Delta\omega t) \\ E_c = E_{c1} \cos(\Delta\omega t) + E_{s1} \sin(\Delta\omega t) \end{cases} \quad (\text{II-r2})$$

$$\begin{cases} E_{s1} = E_s \cos(\Delta\omega t) + E_c \sin(\Delta\omega t) \\ E_{c1} = E_c \cos(\Delta\omega t) - E_s \sin(\Delta\omega t) \end{cases} \quad (\text{II-r3})$$

Puisque $\Delta\omega$ est beaucoup plus petit que ω , E_{s1} et E_{c1} sont aussi des fonctions lentes du temps. On vérifie, de plus, que l'on conserve l'invariance du module du champ :

$$|E(z, t)| = \sqrt{E_s(z, t)^2 + E_c(z, t)^2} = \sqrt{E_{s1}(z, t)^2 + E_{c1}(z, t)^2} \quad (II-r4)$$

Enfin, une variation de la fréquence en fonction de l'espace et du temps peut être prise en compte en supposant que l'incrément $\Delta\omega$ introduit plus haut varie dans l'espace et lentement dans le temps [$\Delta\omega = \Delta\omega(z, t)$]. Dans ce cas, le changement de fonction (II-r2) permet d'intégrer cette dépendance de la fréquence dans les fonctions lentes du temps E_s et E_c .

Les fréquences de collision étant des fonctions de U, elles présentent aussi des termes oscillatoires. Cependant, alors que ces oscillations autour d'une valeur moyenne pouvaient être prises en compte lorsque l'on ne considérait qu'une onde progressive [35], dans le cas d'un plasma réfléchissant elles compliquent trop les calculs. Le problème est alors notablement simplifié si l'on néglige les oscillations de U autour de sa valeur moyenne et que l'on pose :

$$\begin{cases} U(z, t) = \langle U(z, t) \rangle = U_0(z, t) & (a) \\ v_k(z, t) = \langle v_k(z, t) \rangle \approx v_k[U_0(z, t)] \text{ indice } k \in \{i, m, u, c, e\} & (b) \end{cases} \quad (II-4)$$

la relation (II-4-b) reste une bonne approximation des fréquences v_m , v_u , v_c et v_e qui varient lentement avec U mais n'est qu'une approximation assez grossière pour v_i qui varie brutalement et non-linéairement en fonction de U (cf figure 1). Dans le cas de cette approximation, il est donc tout à fait justifié d'utiliser plutôt les données de v_i en fonction de E_{eff} fournies par Lupan [36].

En injectant les développements (II-1) et (II-3) dans l'équation de Newton (I-5-b) et en égalisant les termes en $\sin(\omega_0 t)$ et en $\cos(\omega_0 t)$, on en déduit donc (puisque v_c peut être considéré comme constant), des relations liant les fonctions lentes du temps v_s et v_c à E_s et E_c :

$$v_s = -\frac{e (v_{c0} E_s + \omega_0 E_c)}{m_e (\omega_0^2 + v_{c0}^2)}, \quad v_c = -\frac{e (v_{c0} E_c - \omega_0 E_s)}{m_e (\omega_0^2 + v_{c0}^2)} \quad (II-5)$$

[35] P. Combis (1996), déjà cité

[36] Y. A. Lupan (1976), déjà cité

La relation (I-5-c) permet alors d'obtenir une relation liant U_0 au module $|E|$ de E , puis au champ effectif E_{eff} :

$$\begin{aligned} v_e(U_0) U_0 &= \frac{e^2}{2m_e(\omega_0^2 + v_c(U_0)^2)} v_c(U_0) |E|^2 - v_i(U_0) \varepsilon_i \\ &= \frac{e^2}{m_e v_c(U_0)} E_{\text{eff}}^2 - v_i(U_0) \varepsilon_i \end{aligned} \quad (\text{II-6})$$

C'est cette relation bi-univoque entre U_0 et $|E|$ qui permet de s'affranchir de l'énergie des électrons dans la suite des calculs et de supposer que les fréquences de collisions sont, en première approximation, des fonctions directes du module du champ. C'est d'ailleurs cette hypothèse que Lupan utilise pour obtenir sa fréquence de collision.

L'injection des relations (II-1) et (II-5) dans l'équation des ondes (I-6) et l'égalisation des termes en $\sin(\omega_0 t)$ et en $\cos(\omega_0 t)$ mène à un système d'équation différentielles dépendant de z appelé "équation du champ" ou équation de Helmholtz :

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_s}{dz^2} + \alpha(z, |E|) E_s + \beta(z, |E|) E_c = 0 \\ \frac{d^2 E_c}{dz^2} + \alpha(z, |E|) E_c - \beta(z, |E|) E_s = 0 \end{cases} \quad (\text{II-7})$$

avec :

$$\begin{cases} \alpha(z, |E|) = k_0^2 \left[1 - \frac{n_e(z)}{n_c} \left(1 - \frac{v_m(|E|) v_c(|E|)}{\omega_0^2 + v_c(|E|)^2} \right) \right] \\ \beta(z, |E|) = k_0^2 \frac{n_e(z)}{n_c} \frac{\omega_0 v_m(|E|)}{\omega_0^2 + v_c(|E|)^2} \end{cases} \quad (\text{II-8})$$

On rappelle que le module du champ électrique $|E|$ est lié à E_s et E_c par la relation :

$$|E|(z, t) = \sqrt{E_s(z, t)^2 + E_c(z, t)^2} \quad (\text{II-9})$$

L'équation de Helmholtz doit être résolue à chaque pas d'évolution de l'impulsion laser échantillonnée avec des pas en temps Δt suffisamment courts pour que l'on puisse faire l'hypothèse qu'entre deux instants consécutifs l'onde incidente puisse être

considérée comme une onde plane mais suffisamment longs devant le temps de propagation de l'impulsion dans la longueur de plasma (z_2-z_1) étudiée :

$$\frac{|E|}{\partial|E|/\partial t} \gg \Delta t \gg \frac{z_2 - z_1}{c} \quad (\text{II-10})$$

Pour simplifier considérablement la résolution du système différentiel (II-7) et pour le rendre linéaire, on suppose que, entre les instants t et $t+\Delta t$, les fonctions $\alpha(z, |E|)$ et $\beta(z, |E|)$ ne dépendent du module du champ $|E|$ que par la valeur de ce module à l'instant t (itération antérieure). On trouve finalement, pour une valeur du temps comprise entre t et $t+\Delta t$ les relations définissant les fonctions α et β ainsi que l'équation (linéaire) de Helmholtz :

$$\begin{cases} \alpha(z, t \rightarrow t + \Delta t) = \alpha_t(z) = k_0^2 \left[1 - \frac{n_e(z, t)}{n_c} \left(1 - \frac{v_m[|E|(z, t)]}{\omega_0^2 + v_c[|E|(z, t)]^2} \right) \right] \\ \beta(z, t \rightarrow t + \Delta t) = \beta_t(z) = k_0^2 \frac{n_e(z, t)}{n_c} \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + v_c[|E|(z, t)]^2} \end{cases} \quad (\text{II-11})$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 E_s}{dz^2} + \alpha_t(z) E_s + \beta_t(z) E_c = 0 \\ \frac{d^2 E_c}{dz^2} + \alpha_t(z) E_c - \beta_t(z) E_s = 0 \end{cases} \quad (\text{II-12})$$

III- Résolution de l'équation électromagnétique de Helmholtz

Dans un milieu idéalisé (densité électronique homogène, fréquences de collision indépendantes du champ) les coefficients α et β sont des constantes et le système (II-7) a une solution analytique de la forme :

$$\begin{cases} E_s(z) = [A \sin(kz) + B \cos(kz)] \exp(-\mu z) + [C \sin(kz) + D \cos(kz)] \exp(\mu z) \\ E_c(z) = [A \cos(kz) - B \sin(kz)] \exp(-\mu z) - [C \cos(kz) - D \sin(kz)] \exp(\mu z) \end{cases} \quad (\text{III-1})$$

où A, B, C et D sont les quatre constantes d'intégration et où le vecteur d'onde k et le coefficient d'atténuation μ sont liés aux coefficients α et β par les relations de dispersion :

$$k = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha}{2}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha}{2}} \quad (\text{III-2})$$

D'après la relation (II-1), le champ électrique global prend donc la forme :

$$E(z, t) = \left[A \cos(\omega_0 t - kz) + B \sin(\omega_0 t - kz) \right] \exp(-\mu z) - \left[C \cos(\omega_0 t + kz) - D \sin(\omega_0 t + kz) \right] \exp(+\mu z) \quad (\text{III-3})$$

qui est la composition d'une onde progressive se propageant en s'atténuant vers les valeurs positives de z et d'une onde réfléchie se propageant en s'atténuant vers les valeurs négatives de z . Dans ce plasma homogène idéalisé, une onde unique se dirigeant vers les valeurs positives de z ($C=D=0$) garde cette direction, il en est de même pour une onde unique allant dans le sens inverse ($A=B=0$). Seule la présence d'un gradient de α et β suivant z peut engendrer une onde réfléchie à partir d'une onde incidente.

Imaginons maintenant un plasma stratifié suivant z (symétrie monodimensionnelle plane) d'épaisseur finie sur lequel arrive une onde électromagnétique plane, le rayonnement pénètre à l'avant du plasma où une partie est transmise et absorbée et l'autre réfléchie (et absorbée aussi). A l'arrière du plasma, le rayonnement finit par déboucher. Ainsi que le montre le graphique suivant, il n'y a qu'une onde transmise à l'arrière du plasma et deux ondes (incidente et réfléchie) qui interfèrent à l'avant.

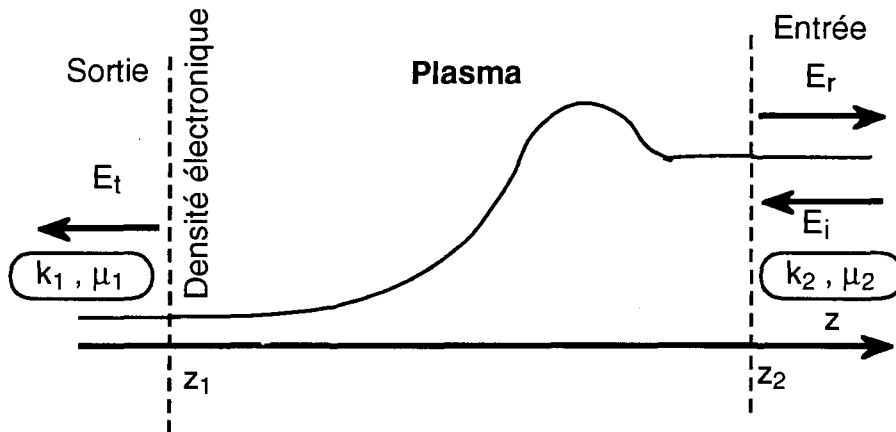


Figure 3 : Schéma des ondes dans le plasma

A l'extérieur du plasma ($z < z_1$ et $z > z_2$), on suppose qu'il existe un plasma idéal où les coefficients k et μ sont égaux aux valeurs qu'ils ont aux interfaces [$k(z < z_1) = k(z_1) = k_1$, $k(z > z_2) = k(z_2) = k_2$, $\mu(z < z_1) = \mu(z_1) = \mu_1$, $\mu(z > z_2) = \mu(z_2) = \mu_2$].

Nous n'avons, a priori, aucune idée des conditions initiales en $z = z_2$ puisque l'onde incidente (condition initiale physique) interfère avec une onde réfléchie qui est

inconnue. Par contre, nous savons qu'en sortie de plasma ($z=z_1$), l'onde transmise E_t est une onde progressive de la forme :

$$E_t(z, t) = \left\{ A \sin[\omega_0 t + k_1(z - z_1)] + B \cos[\omega_0 t + k_1(z - z_1)] \right\} \exp[\mu_1(z - z_1)] \quad (\text{III-4})$$

où A et B sont des constantes quelconques pour l'instant. On en déduit les composantes $E_{t,s}$ et $E_{t,c}$ de ce champ transmis :

$$\begin{cases} E_{t,s}(z) = \left\{ A \cos[k_1(z - z_1)] - B \sin[k_1(z - z_1)] \right\} \exp[\mu_1(z - z_1)] \\ E_{t,c}(z) = \left\{ A \sin[k_1(z - z_1)] + B \cos[k_1(z - z_1)] \right\} \exp[\mu_1(z - z_1)] \end{cases} \quad (\text{III-5})$$

ainsi que leurs dérivées par rapport à z :

$$\begin{cases} dE_{t,s}/dz = \mu_1 E_{t,s} - k_1 E_{t,c} \\ dE_{t,c}/dz = \mu_1 E_{t,c} + k_1 E_{t,s} \end{cases} \quad (\text{III-6})$$

Ces formules permettent d'obtenir les conditions initiales d'intégration du système différentiel (II-7) en $z=z_1$, avec, *a priori*, une indétermination sur deux paramètres A et B seulement :

$$E_s^*(z_1)=A, \quad E_c^*(z_1)=B, \quad E_s'^*(z_1)=\mu_1 A - k_1 B, \quad E_c'^*(z_1)=\mu_1 B + k_1 A \quad (\text{III-7})$$

Avec ces conditions initiales, nous pouvons maintenant résoudre, par une méthode de type Runge-Kutta ou autre ^[37], le système différentiel (II-12) dans un gradient de plasma quelconque et obtenir deux fonctions $E_s^*(z)$ et $E_c^*(z)$ qui ne représentent pas encore les valeurs du champ dans le plasma.

Pour se raccorder aux conditions initiales physiques (champ incident) il faut maintenant remarquer que si $E_s^*(z)$ et $E_c^*(z)$ sont des solutions particulières du système différentiel (II-12), alors toute combinaison linéaire de la forme :

$$E_s(z) = p E_s^*(z) + q E_c^*(z), \quad E_c(z) = p E_c^*(z) - q E_s^*(z) \quad (\text{III-8})$$

où p et q sont des constantes quelconques, est une solution générale du système différentiel.

[37] A. Decoster, A. Pinget, "Simulation numérique d'une onde électromagnétique pénétrant en incidence normale dans un plasma", Rapport CEA/DAM/CEL-V/STEN 93280 DO (1993)

Recherchons maintenant les valeurs p_r et q_r de p et q correspondant à la solution physique recherchée. Dans le plasma "idéal" situé en $z > z_2$ (k_2 et μ_2 constants), le champ électrique est la composition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie, il prend une forme équivalente à la relation (III-3) :

$$E(z, t) = E_i \exp[\mu_2(z - z_2)] \sin[\omega_0 t + k_2(z - z_2) + \varphi_i] + E_r \exp[-\mu_2(z - z_2)] \sin[\omega_0 t - k_2(z - z_2) + \varphi_r] \quad (\text{III-9})$$

où E_i , E_r , φ_i et φ_r sont des constantes. E_i et φ_i sont les données initiales réelles du problème, E_r et φ_r sont des inconnues à déterminer. Les composantes E_s et E_c pour $z > z_2$ prennent donc la forme :

$$\begin{cases} E_s(z) = E_i \exp[\mu_2(z - z_2)] \cos[k_2(z - z_2) + \varphi_i] \\ \quad + E_r \exp[-\mu_2(z - z_2)] \cos[k_2(z - z_2) - \varphi_r] \\ E_c(z) = E_i \exp[\mu_2(z - z_2)] \sin[k_2(z - z_2) + \varphi_i] \\ \quad - E_r \exp[-\mu_2(z - z_2)] \sin[k_2(z - z_2) - \varphi_r] \end{cases} \quad (\text{III-10})$$

On en déduit facilement les relations de continuité des champs E_s et E_c et de leurs dérivées par rapport à z , E_s' et E_c' , en $z = z_2$:

$$\begin{cases} E_s(z_2) = E_i \cos \varphi_i + E_r \cos \varphi_r = p_r E_s^*(z_2) + q_r E_c^*(z_2) \\ E_c(z_2) = E_i \sin \varphi_i + E_r \sin \varphi_r = p_r E_c^*(z_2) - q_r E_s^*(z_2) \\ E_s'(z_2) = \mu_2 E_i \cos \varphi_i - k_2 E_i \sin \varphi_i - \mu_2 E_r \cos \varphi_r + k_2 E_r \sin \varphi_r \\ \quad = p_r E_s'^*(z_2) + q_r E_c'^*(z_2) \\ E_c'(z_2) = \mu_2 E_i \sin \varphi_i + k_2 E_i \cos \varphi_i - \mu_2 E_r \sin \varphi_r - k_2 E_r \cos \varphi_r \\ \quad = p_r E_c'^*(z_2) - q_r E_s'^*(z_2) \end{cases} \quad (\text{III-11})$$

qui permettent de trouver, par élimination de $E_r \cos \varphi_r$ et $E_r \sin \varphi_r$:

$$\begin{cases} p_r = 2E_i \frac{a \cos \varphi_i + b \sin \varphi_i}{D}, \quad q_r = 2E_i \frac{b \cos \varphi_i - a \sin \varphi_i}{D} \\ \text{avec } a = (k_2^2 + \mu_2^2) E_s^*(z_2) + k_2 E_c'^*(z_2) + \mu_2 E_s'^*(z_2) \\ \quad b = (k_2^2 + \mu_2^2) E_c^*(z_2) - k_2 E_s'^*(z_2) + \mu_2 E_c'^*(z_2) \\ D = [k_2 E_c^*(z_2) - \mu_2 E_s^*(z_2) - E_s'^*(z_2)]^2 \\ \quad + [k_2 E_s^*(z_2) + \mu_2 E_c^*(z_2) + E_c'^*(z_2)]^2 \end{cases} \quad (\text{III-12})$$

Le champ électrique réel à l'intérieur du plasma s'écrit finalement :

$$E_s(z) = p_r E_s^*(z) + q_r E_c^*(z) \quad , \quad E_c(z) = p_r E_c^*(z) - q_r E_s^*(z) \quad (\text{III-13})$$

Quelques manipulations algébriques permettent de montrer que le coefficient de réflexion du plasma ne dépend pas de p_r et q_r et s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{E_r}{E_i} = \sqrt{\frac{D^*}{D}} \\ \text{avec } D^* = [k_2 E_c^*(z_2) - \mu_2 E_s^*(z_2) + E_s^*{}'(z_2)]^2 \\ \quad + [k_2 E_s^*(z_2) + \mu_2 E_c^*(z_2) - E_c^*{}'(z_2)]^2 \end{array} \right. \quad (\text{III-14})$$

Les composantes de l'onde réfléchie se déduisent de la relation (III-11) :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{rs} = E_r \cos(\varphi_r) = E_s(z_2) - E_i \cos(\varphi_i) \\ E_{cs} = E_r \sin(\varphi_r) = E_c(z_2) - E_i \sin(\varphi_i) \end{array} \right. \quad (\text{III-15})$$

Récapitulons maintenant les différentes étapes du calcul :

1 - Détermination des coefficients k_1 et μ_1 à la sortie, puis k_2 et μ_2 à l'entrée du plasma.

2 - Résolution des équations du champ depuis l'arrière (où sort de l'onde transmise) vers l'avant (où entre l'onde incidente) avec des conditions initiales quelconques A et B sur les champs mais des conditions initiales adaptées ($\mu_1 A - k_1 B$ et $\mu_1 B + k_1 A$) sur leurs dérivées pour tenir compte de la progressivité de l'onde à l'arrière du plasma. Obtention des solutions numériques $E_s^*(z)$ et $E_c^*(z)$ et de leurs dérivées.

3 - Calcul des coefficients correcteurs p_r et q_r qui permettent de raccorder la solution mathématique trouvée avec la condition initiale physique (champ incident). Utilisation des relations linéaires (III-13) et (III-15) pour obtenir finalement les composantes réelles E_s et E_c du champ électrique à l'intérieur du plasma ainsi que les composantes de l'onde réfléchie.

IV- Cas d'une impulsion qui génère le plasma où elle se propage

Dans le cas où le plasma n'est pas préformé mais se crée au fur et à mesure de la propagation de l'onde dans la chambre, l'ionisation du milieu est régie par la relation (I-5-a) où la fréquence d'ionisation ν_i et le coefficient de diffusion D dépendent directement du module du champ électrique $|E|$ par l'intermédiaire de la relation (II-6) qui exprime U en fonction de $|E|$. Le modèle décrit précédemment permet de déterminer ce module en tout instant et à tout endroit du plasma. On peut alors calculer l'évolution de la densité électronique entre les instants t et $t+\Delta t$ en intégrant, en deux temps, l'équation de l'ionisation-diffusion (I-5-a) :

I- Ionisation exponentielle du milieu, en utilisant la relation :

$$n_e(z, t + \Delta t) = n_e(z, t) \exp\left\{ \nu_i[|E|(z, t)] \Delta t \right\} \quad (\text{IV-1})$$

II - Diffusion des électrons dans le plasma en utilisant un θ -schéma semi implicite de la forme [38] :

$$\begin{aligned} & \frac{n_k^{i+1} - n_k^i}{\Delta t} - \frac{2}{z_{k+1} - z_{k-1}} \left\{ \theta \left[D_k \frac{n_{k+1}^{i+1} - n_k^{i+1}}{z_{k+1} - z_k} - D_{k-1} \frac{n_k^{i+1} - n_{k-1}^{i+1}}{z_k - z_{k-1}} \right] \right. \\ & \left. + (1 - \theta) \left[D_k \frac{n_{k+1}^i - n_k^i}{z_{k+1} - z_k} - D_{k-1} \frac{n_k^i - n_{k-1}^i}{z_k - z_{k-1}} \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{IV-2})$$

où θ est un paramètre pris, en général, égal à 1/2 pour avoir une bonne convergence de l'algorithme. Ce schéma amène à inverser une matrice tri-diagonale dont la dimension est égale au nombre de points du maillage spatial. Les conditions aux limites, en plus de la densité électronique initiale, se résument à évaluer à 0 les deux dérivées sur les bords de l'espace d'intégration (les électrons ne quittent pas le plasma).

La donnée de la densité électronique permet de calculer, à partir de la relation (II-11), les coefficients $\alpha(z,t)$ et $\beta(z,t)$ qui apparaissent dans l'équation du champ (II-12).

L'algorithme de résolution du problème passe donc par les étapes suivantes :

- 1 : Donnée des paramètres initiaux du plasma : densité atomique $n_a(z)$, densité électronique initiale $n_{e0}(z)$, valeurs de $\alpha(z,t=t_1)$ et $\beta(z,t=t_1)$ pour un champ nul, champ

[38] Communiqué par J. Segré du DPTA/SPPE

électrique incident décrit par son module $E_i(t_n, n=1, \dots, N)$ et par sa phase $\varphi_i(t_n, n=1, \dots, N)$.

- 2 : Résolution numérique de l'équation de Helmholtz (II-12) dans ce plasma par la méthode donnée dans le paragraphe III. Les conditions initiales réelles de champ électrique étant $E_i(t=t_1)$ et $\varphi_i(t=t_1)$ (module et phase du champ incident) à l'instant t_1 .

- 3 : Incrémentation de Δt : Nouveau calcul des paramètres du plasma (n_e , α et β) à partir du champ trouvé à l'étape 2 en utilisant la relation (II-6) pour déterminer l'énergie U en fonction de $|E|$, la relation (I-9) pour déterminer le coefficient de diffusion D en tout z , les relations (IV-1) et (IV-2) pour déterminer la densité électronique en tout z et enfin la relation (II-11) pour déterminer les nouvelles valeurs de $\alpha(z)$ et $\beta(z)$ qui seront injectées dans l'équation de Helmholtz.

- 4 : Résolution de l'équation électromagnétique de Helmholtz (II-12) dans ce plasma qui a évolué avec les conditions initiales $E_i(t_2=t_1+\Delta t)$ et $\varphi_i(t_2=t_1+\Delta t)$.

- Répétition successive des étapes 3 et 4 en incrémentant à chaque fois de Δt jusqu'à avoir atteint le temps t_N (fin de l'impulsion).

V - Détermination du décalage spectral

L'impulsion électrique à l'intérieur du plasma s'écrit de manière générale sous la forme :

$$E(z, t) = E_s(z, t) \sin(\omega_0 t) + E_c(z, t) \cos(\omega_0 t) \quad (V-1)$$

où $E_s(z, t)$ et $E_c(z, t)$ sont des fonctions à variation lente. En introduisant le module du champ $|E(z, t)|$ et sa phase $\Phi(z, t)$ qui sont aussi des fonctions à variation lente, il est possible de l'exprimer autrement :

$$\begin{cases} E(z, t) = |E(z, t)| \sin[\omega_0 t + \Phi(z, t)] \\ \text{avec } |E(z, t)| = \sqrt{E_s(z, t)^2 + E_c(z, t)^2} \\ \sin[\Phi(z, t)] = E_c(z, t)/|E(z, t)| \text{ et } \cos[\Phi(z, t)] = E_s(z, t)/|E(z, t)| \end{cases} \quad (V-2)$$

Pour une valeur donnée de z et de t , recherchons maintenant deux valeurs successives du temps t_1 et t_2 , proches de t , pour lesquelles $E(z, t)$ s'annulent :

$$\omega_0 t_1 + \Phi(z, t_1) = k\pi \quad , \quad \omega_0 t_2 + \Phi(z, t_2) = (k+1)\pi$$

La pulsation $\omega(z, t)$ en z à l'instant t est définie par la relation :

$$\omega(z, t) \cdot (t_2 - t_1) = \pi = \omega_0 \cdot (t_2 - t_1) + \Phi(z, t_2) - \Phi(z, t_1)$$

Puisque l'intervalle $(t_2 - t_1)$ est petit devant le temps de variation de $\Phi(z, t)$, on en déduit finalement, par passage à la dérivée, la pulsation du signal en z à l'instant t :

$$\omega(z, t) = \omega_0 + \frac{d \Phi(z, t)}{d t} \quad (V - 3)$$

Une autre manière d'étudier le décalage spectral consiste à comparer la transformée de Fourier de l'impulsion transmise à l'arrière du plasma ou de l'impulsion réfléchie à l'avant avec la transformée de Fourier du champ électrique initial. Le calcul de la transformée de Fourier d'un signal comportant un très grand nombre d'oscillations est donné dans l'annexe 1.

Dans l'annexe 2, on présente un calcul analytique du décalage spectral dans un plasma homogène nettement sous-critique (pas de traitement de la réflexion). Ce calcul simple permet de mettre en évidence quelques points importants :

- Le décalage spectral est indépendant de l'évolution du module du champ
- Il varie linéairement en fonction de la distance parcourue par l'impulsion
- Il est atténué par les collisions mais reste toujours positif (décalage vers les hautes fréquences) dans un plasma où la densité électronique croît.

Dans l'annexe 3, pour le même type de plasma sous-critique non-réfléchissant, on développe un calcul basé sur la notion de phase généralisée qui permet de traiter de manière analytique un plasma auto-généré.

VI - Mise à l'épreuve de la méthode : restitution de l'effet Doppler

Une onde de pulsation ω_0 se propageant à la vitesse c qui se réfléchit sur un miroir se dirigeant vers la source à la vitesse v_f subit un décalage spectral relatif vers les hautes fréquences $\Delta\omega/\omega_0$ égal à $2 v_f/c$. Si le miroir s'éloigne de la source, l'onde réfléchie se décale vers les basses fréquences de la même valeur. Le même effet doit être observé en remplaçant le miroir par un gradient de plasma surcritique se déplaçant à une vitesse constante.

Considérons donc une impulsion quasi-trapézoïdale de fréquence 3.27 GHz, de durée à mi-hauteur 1 μ s, d'intensité moyenne 50 kV/m [39] arrivant sur un front de plasma linéaire de largeur 4 cm, de hauteur $2 n_c$ se déplaçant vers la source de l'onde à la vitesse v_f égale à 10^5 m/s (cf figure 4).

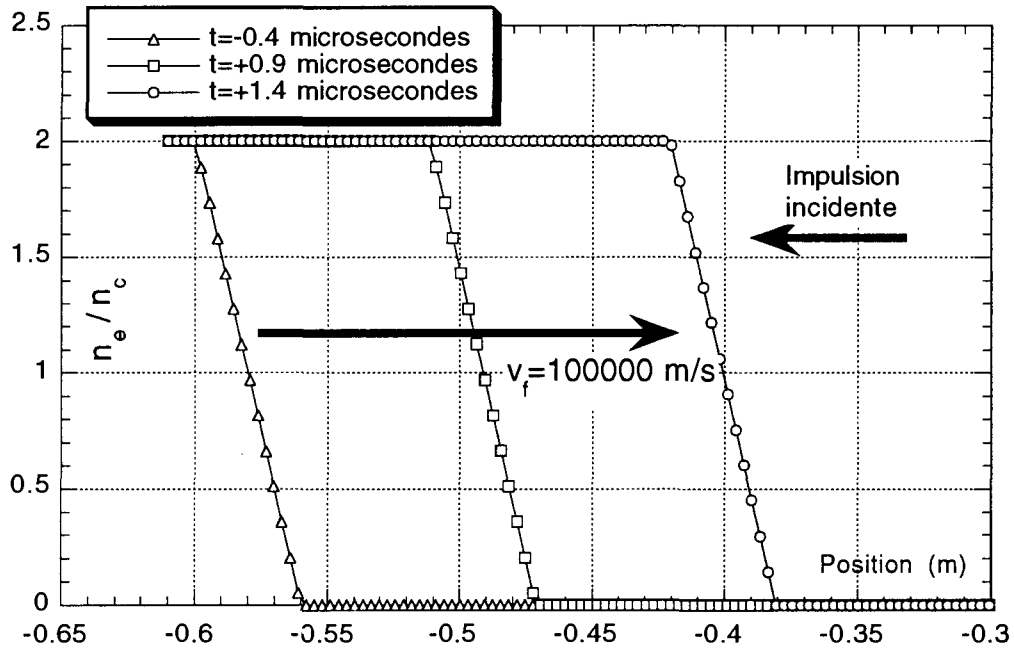


Figure 4 : Schéma du gradient de plasma mobile

[39] S. P. Kuo, A. Ren, G. Schmidt, "Frequency downshift in rapidly ionizing media", Phys. Rev. E, vol. 49(4), p. 3310-3315 (1994)

La figure 5 présente les composantes E_s et E_c du champ réfléchi ainsi que son module $|E|$ calculés à partir du modèle décrit précédemment (300 pas en temps et 200 pas en espace).

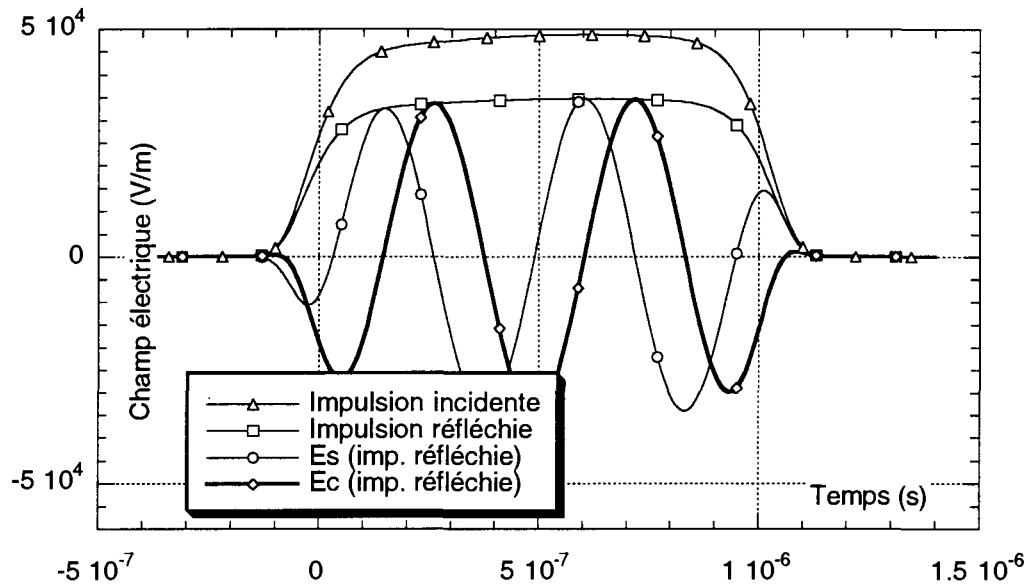


Figure 5 : Champ réfléchi par un front de plasma en mouvement

Les oscillations "lentes" des champs E_s et E_c dépendent de la vitesse du front de plasma, leur fréquence reste très inférieure à la fréquence effective de l'onde (3.27 GHz). La valeur du décalage relatif en fréquence et le spectre des impulsions incidentes et réfléchies, déterminés à partir de E_s et E_c avec la formule (V-3) et par transformation de Fourier sont représentés sur les figures 6-a et 6-b.

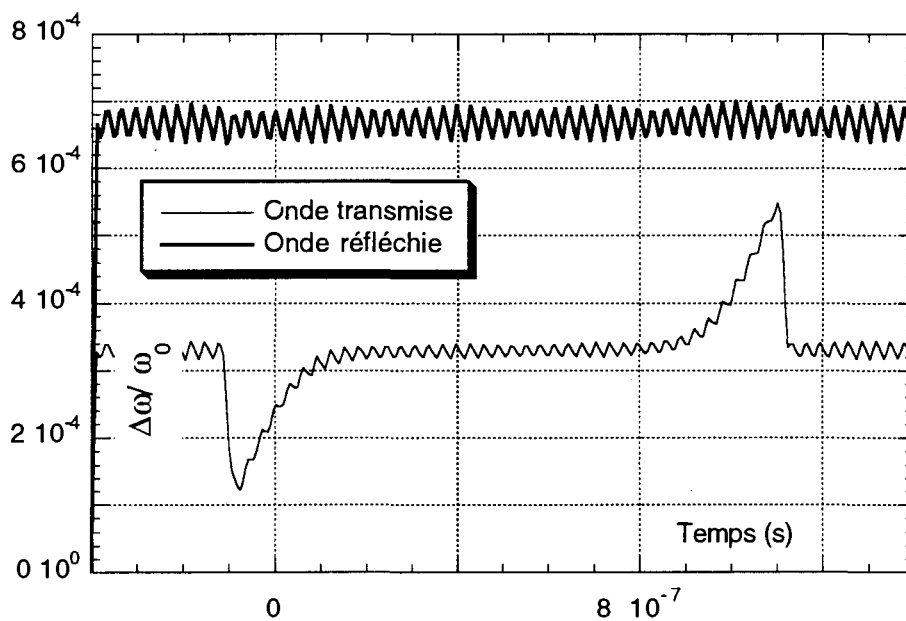


Figure 6-a : Décalage spectral amené par un front de plasma progressant vers la source à une vitesse constante de 10^5 m/s

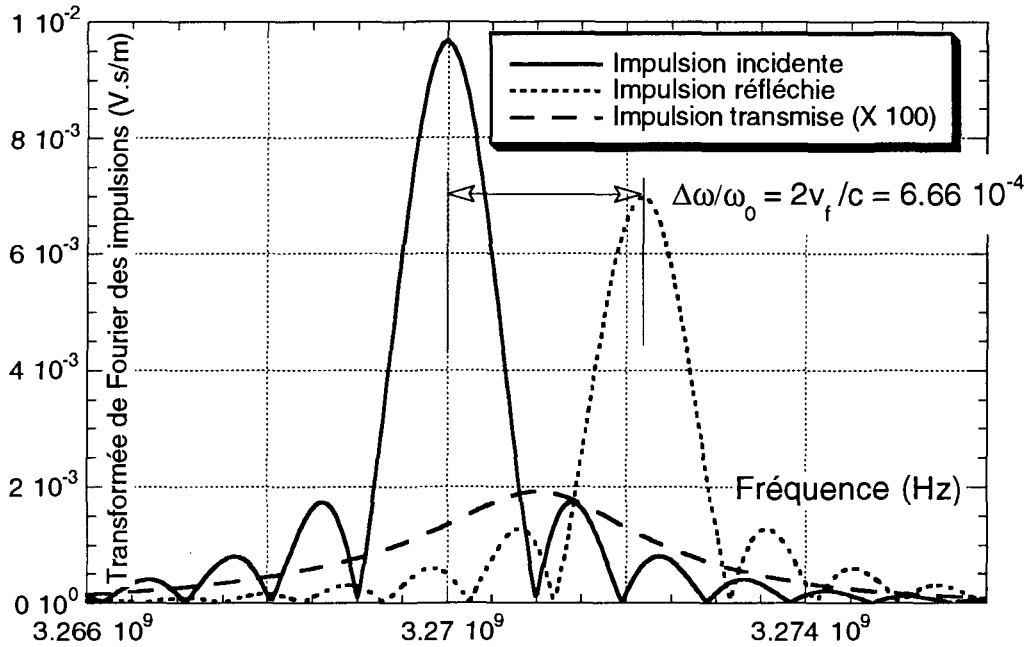


Figure 6-b : Spectres des différentes impulsions

Pour l'onde réfléchie, le décalage spectral relatif vers les hautes fréquences est exactement égal à la valeur théorique attendue ($2v_f/c=6.66 \cdot 10^{-4}$), pour l'onde transmise, il présente une légère variation autour de la moitié de cette valeur.

VII - Étude de l'expérience de Kuo et Ren ^[40]

Au laboratoire du Weber Research Institute (New York), Kuo et son équipe disposent d'une petite chambre anéchoïque cubique de deux pieds (61 cm) de côté ^[41] où il peuvent établir une atmosphère raréfiée et propager des impulsions micro-ondes répétitives (40 impulsions par seconde) de fréquence 3.27 GHz et de largeur à mi-hauteur 1 μ s au moyen d'un générateur dont la puissance crête atteint 1 MW. Un analyseur spectral leur permet d'obtenir simultanément le spectre de l'impulsion émise et celui de l'impulsion transmise au travers du plasma créé dans la chambre par le passage de l'onde. Puisque les parois de la chambre sont totalement absorbantes, le seul phénomène qui peut amener une réflexion des ondes est l'existence d'un gradient de plasma. Nous sommes donc typiquement dans une situation qui peut être décrite au moyen du modèle développé dans les paragraphes III, IV et V : une seule onde en sortie de chambre, interférence de deux ondes en entrée de chambre.

[40] S. P. Kuo, A. Ren, G. Schmidt, (1994), déjà cité

[41] S. P. Kuo, A. Ren, "Frequency up conversion of a high power microwave pulse propagating in a self-generated plasma", J. Appl. Phys. vol. 71(11), p. 5376-5380 (1992)

Nous représentons, sur la figure 7, les spectres obtenus par Kuo et Ren pour diverses valeurs du champ électrique crête. Ce champ électrique est exprimé en fraction du champ électrique lié au seuil de claquage $|E|_{cl}$. Ce champ de claquage n'est pas donné dans l'article de Kuo et Ren mais une étude menée dans l'annexe 4 nous permet de l'évaluer à 38.5 kV/m.

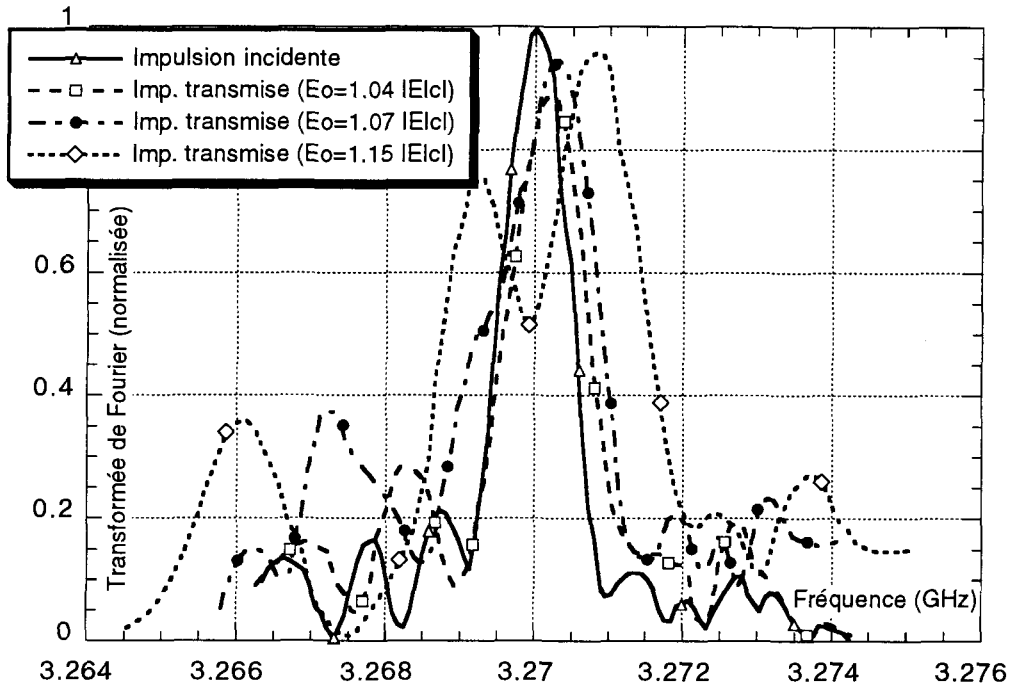


Figure 7 : Spectres expérimentaux obtenus par Kuo et Ren

Pour les deux premières valeurs du champ crête, les auteurs observent un décalage spectral vers les hautes fréquences, mais au delà d'une valeur égale à $1.1 |E|_{cl}$, le spectre semble se dédoubler avec une composante décalée vers les hautes fréquences et une autre décalée vers les basses.

Pour essayer de retrouver ces résultats, nous avons résolu l'équation du champ à l'intérieur du plasma contenu dans la chambre d'expérience en utilisant une impulsion incidente dont l'enveloppe $E_i(t)$ est ajustée par la relation suivante :

$$E_i(t) = E_0 \exp \left[-0.5 \left(\frac{t-t_0}{t_0} \right)^{10} \right] \exp \left[0.15 \sin \left(\frac{t}{t_0} + 0.35 \right) \right]$$

où t_0 est égal à $0.5 \mu s$ et où E_0 est la paramètre qui permet d'ajuster l'énergie transportée par l'impulsion. La période de l'onde étant de $0.3 ns$, il y a au moins 4000 oscillations du champ électrique à l'intérieur de cette enveloppe. Cette impulsion génère un plasma suivant le processus décrit dans le paragraphe V. Le problème est résolu dans un plasma

de pression résiduelle 0.7 Torr et de densité électronique initiale 10^{12} électrons/m³ [42]. L'impulsion est décrite par 300 pas en temps égaux à 6 ns. Le maillage spatial est en progression géométrique de manière à échantillonner finement la face avant du plasma où l'énergie de l'impulsion se dépose préférentiellement. Le spectre de l'onde transmise, obtenu à partir de la donnée de E_s et E_c par la méthode de transformation de Fourier décrite dans l'annexe 1, est analysé sur 200 points de fréquence entre 3.265 et 3.275 GHz.

Les figures suivantes représentent les profils temporels et les spectres des impulsions incidente, transmise et réfléchie, ainsi que la variation temporelle du coefficient de réflexion, de la densité électronique à l'interface plasma vide et enfin, la variation spatiale de la densité électronique maximale atteinte. Ces données sont obtenues pour trois valeurs du paramètre E_0 croissant avec la même progression que les valeurs expérimentales de Kuo et Ren.

- 1 - $E_{01} = 1.04 |E|_{cl} \approx 40$ kV/m , $|E|_{cl} \approx 38.5$ kV/m
- 2 - $E_{02} = 1.07 |E|_{cl} \approx 41.1$ kV/m
- 3 - $E_{03} = 1.15 |E|_{cl} \approx 44.2$ kV/m)

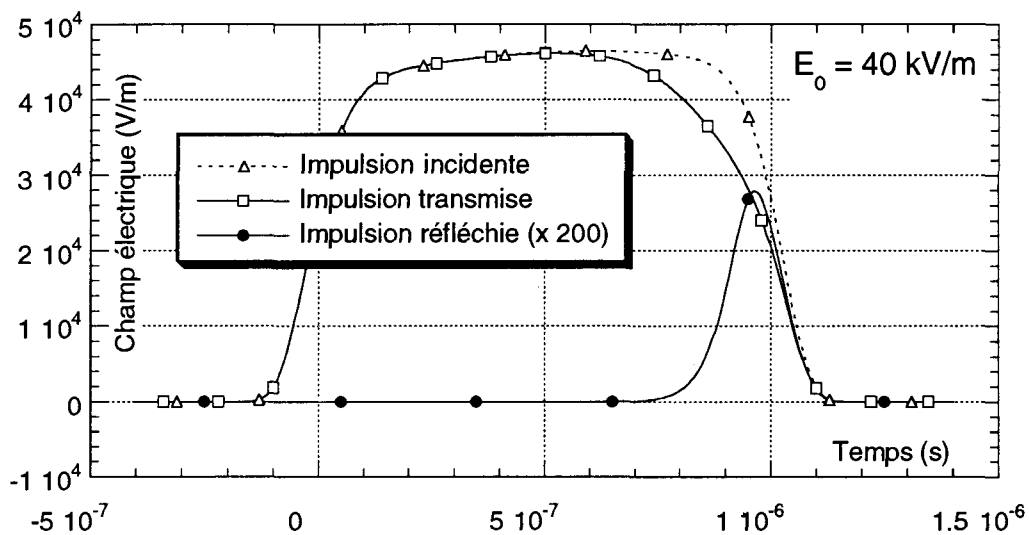


Figure 8 : Impulsions incidente, transmise et réfléchie pour $E_0 = 40$ kV/m

[42] Cette densité électronique résiduelle est due à la recombinaison, à l'attachement et à la diffusion qui font baisser, durant l'intervalle de temps séparant le passage de deux impulsions (25 millisecondes), la densité électronique générée par le passage de l'impulsion précédente.

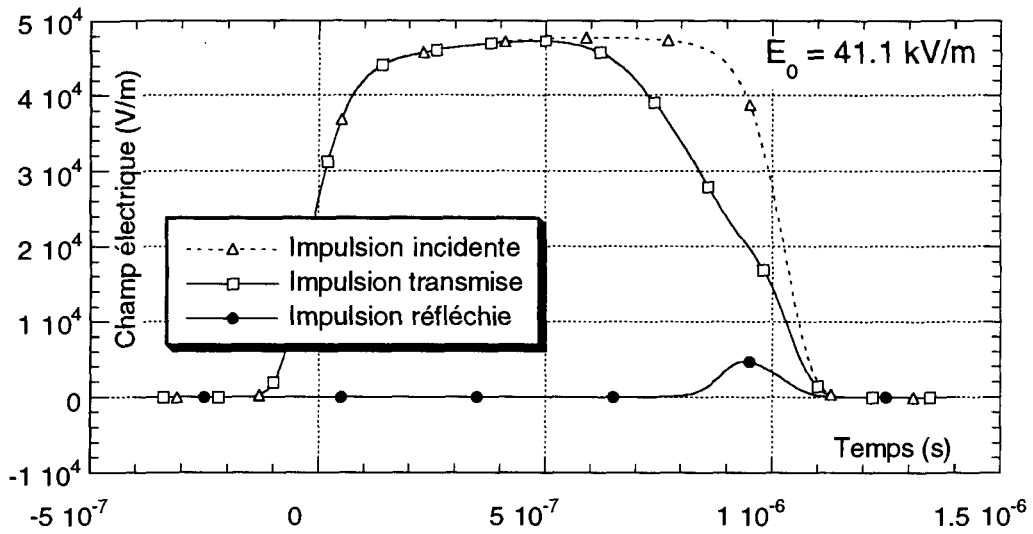


Figure 9 : Impulsions incidente, transmise et réfléchie pour $E_0 = 41.1$ kV/m

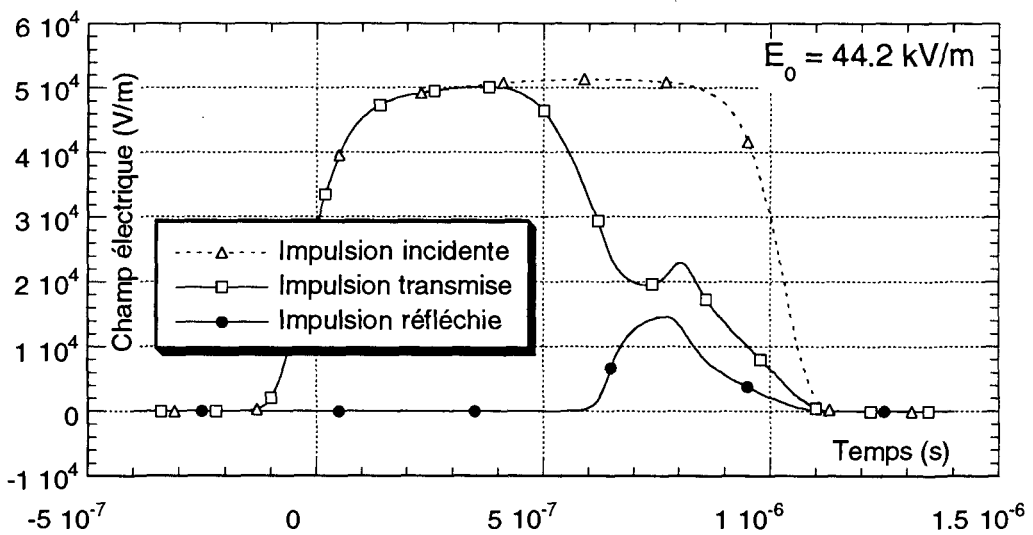


Figure 10 : Impulsions incidente, transmise et réfléchie pour $E_0 = 44.2$ kV/m

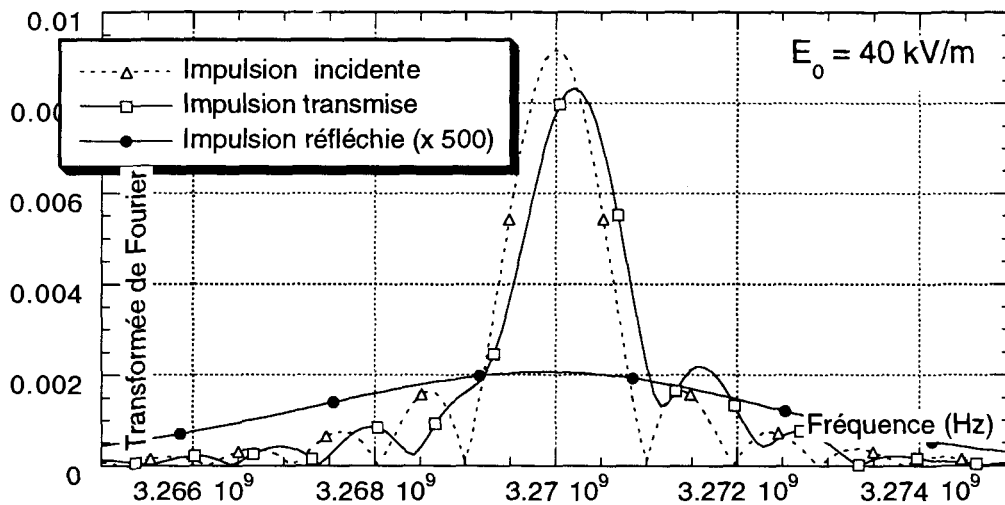


Figure 11 : Spectres des impulsions incidente, transmise et réfléchie pour $E_0 = 40$ kV/m

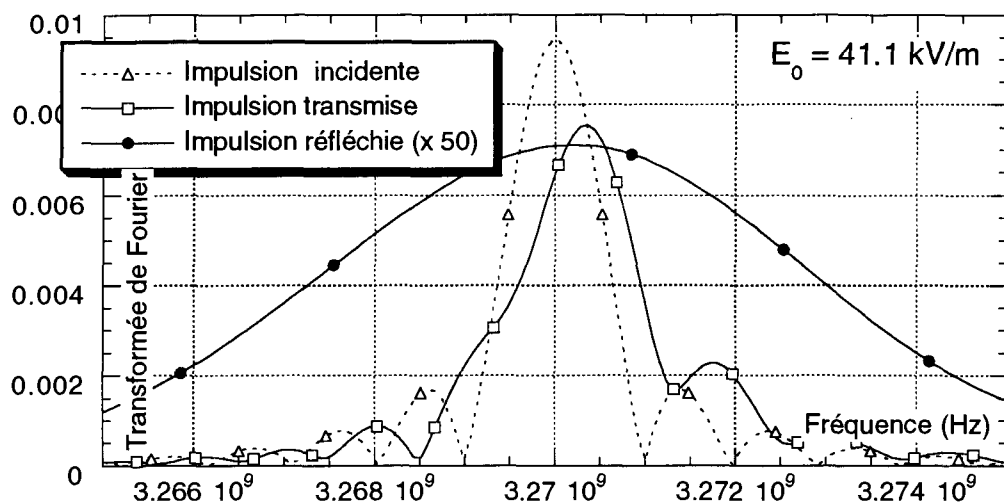


Figure 12 : Spectres des impulsions incidente, transmise et réfléchie pour $E_0 = 41.1$ kV/m

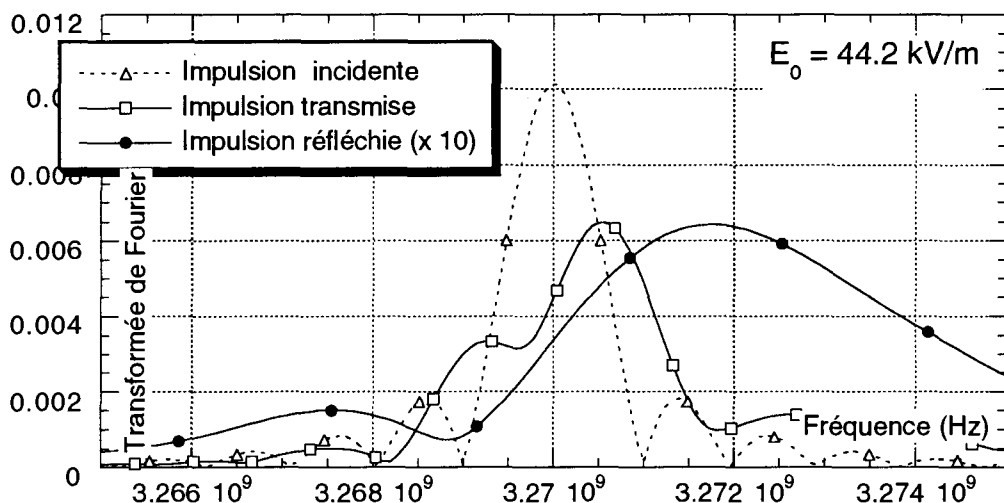


Figure 13 : Spectres des impulsions incidente, transmise et réfléchie pour $E_0 = 44.2$ kV/m

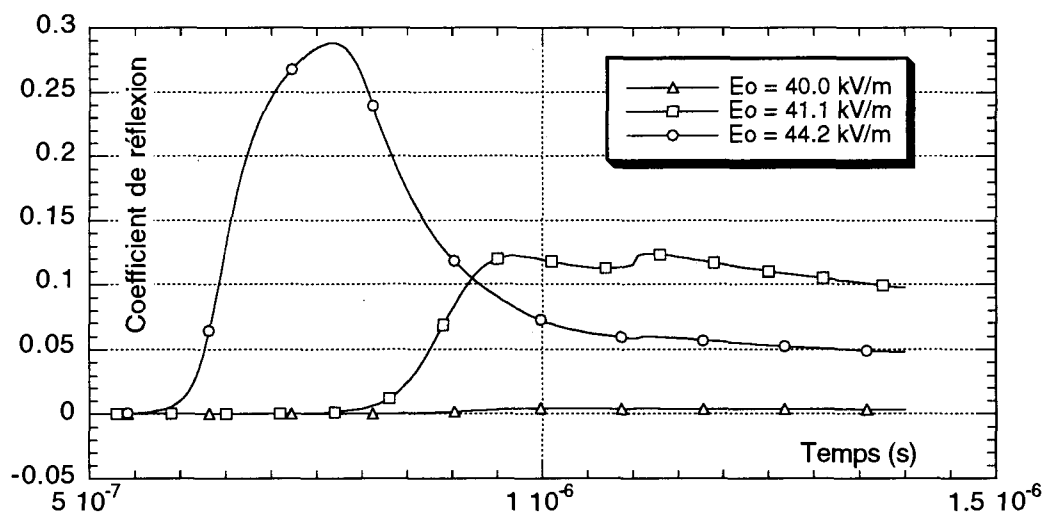


Figure 14 : Variation temporelle du coefficient de réflexion pour différentes valeurs de E_0

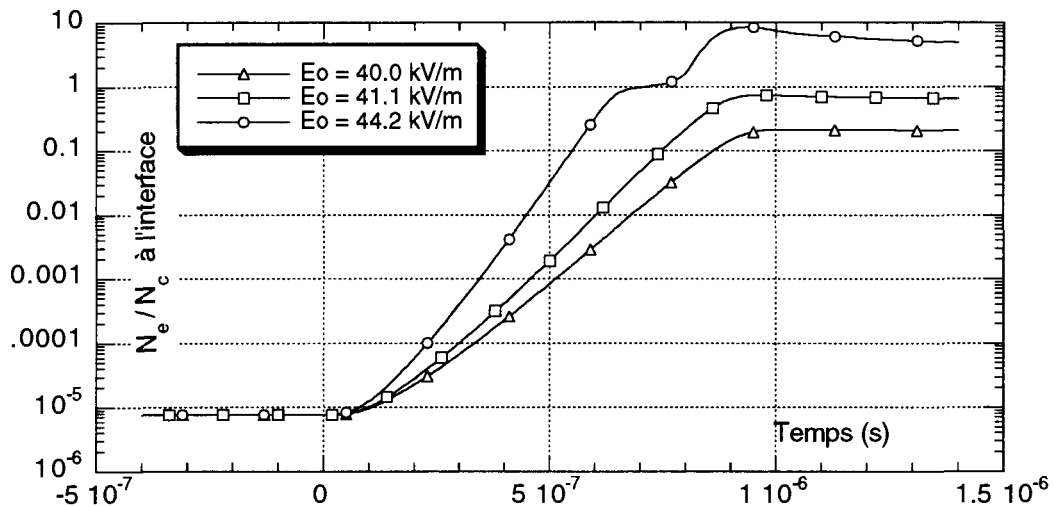


Figure 15 : Évolution temporelle de la densité électronique à l'interface plasma-vide

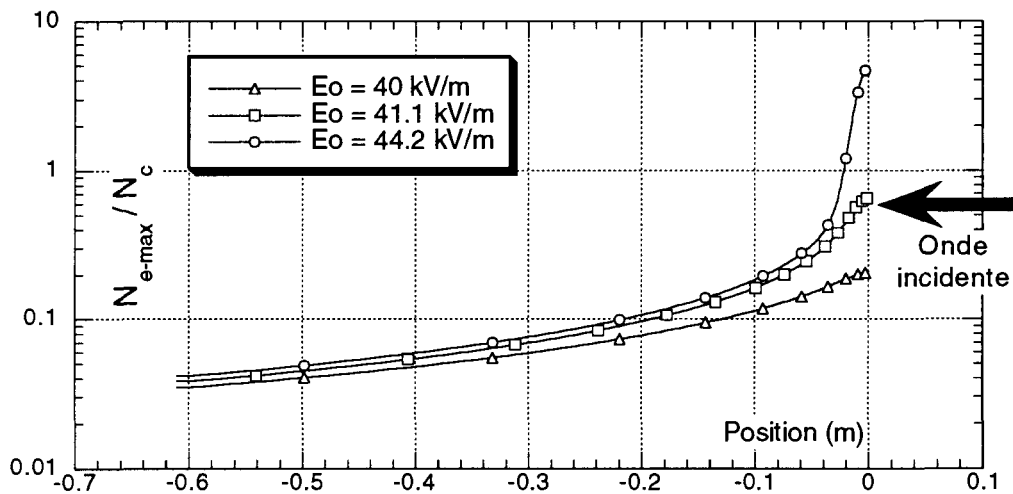


Figure 16 : Variation spatiale de la densité électronique en fin d'impulsion pour différentes valeurs de E_0

À partir de ces trois séries de données, il est possible de faire les commentaires suivants :

- Le profil de l'impulsion transmise dépend très fortement de la puissance de l'énergie incidente, ce profil est modifié par l'absorption et par la réflexion. Dans le cas de l'impulsion la plus puissante, l'absorption et la réflexion deviennent très importantes et absorbent complètement la partie arrière de l'impulsion (érosion de queue).

- La réflexion n'intervient pas pour la plus faible valeur du champ, atteint 12 % pour la deuxième et devient très importante (28 %) pour la plus forte. L'élargissement du gradient de densité électronique dû à la diffusion fait baisser ce coefficient en fin d'impulsion laser.

- L'ionisation reste modérée dans le premier cas ($E_0=40$ kV/m), ce qui explique que la réflexion soit nulle et que l'absorption reste faible. Dans le second cas ($E_0=41.1$ kV/m), on atteint presque la densité de coupure à l'avant du plasma et dans le troisième cas ($E_0=44.2$ kV/m), cette densité de coupure est largement dépassée sur deux centimètres de plasma au niveau de l'arrivée de l'impulsion micro-onde. L'évolution temporelle de cette densité électronique à l'interface plasma-vide met en évidence, en fin d'impulsion, la légère décroissance due à la diffusion électronique.

- Pour l'impulsion la moins puissante, le décalage spectral vers les hautes fréquences de l'impulsion transmise est de 0.20 MHz, dans le deuxième cas, il passe à 0.35 MHz et dans le troisième à 0.56 MHz. Ces résultats correspondent bien aux résultats expérimentaux pour les deux premières valeurs du champ électrique ($\Delta\nu=0.2$ MHz pour $E_0=1.04 E_{c1}$ et $\Delta\nu=0.3$ MHz pour $E_0=1.07 E_{c1}$) mais absolument pas pour la troisième valeur du champ pour laquelle on n'arrive pas à retrouver le dédoublement du spectre. On ne retrouve qu'un léger épaulement qui pourrait évoquer ce pic vers les basses fréquences. Par contre, ce dédoublement apparaît nettement dans le spectre de l'impulsion réfléchie qui a vu un plasma sur-critique sur toute sa durée d'existence.

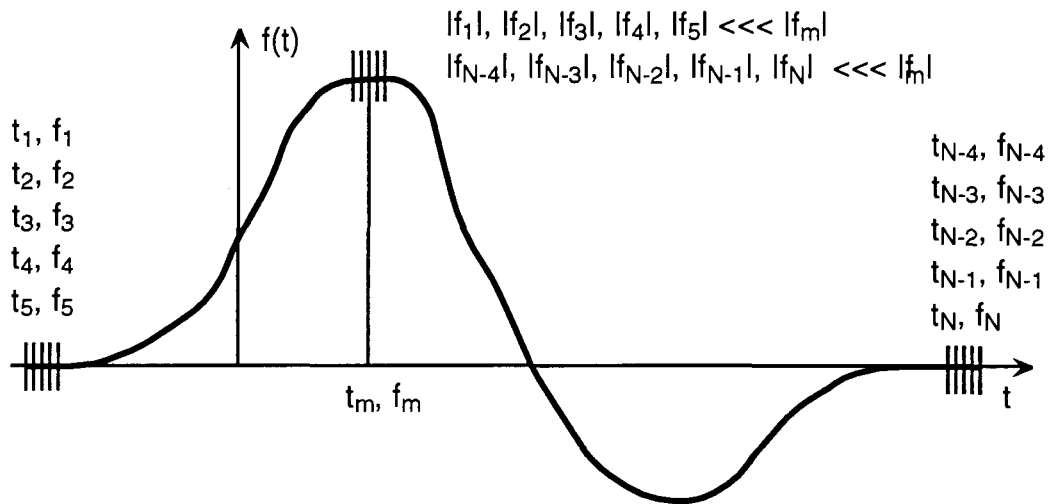
Notre modèle ne permet donc pas de restituer dans sa totalité l'expérience de Kuo et Ren ni de retrouver un décalage vers les basses fréquences du spectre de l'impulsion transmise que l'on retrouve, par contre, pour l'impulsion réfléchie. Le modèle théorique et numérique introduit par ces auteurs semble y arriver mais il néglige complètement la réflexion, ce qui nous paraît intenable dans le cas où le plasma devient sur-critique. En ce qui concerne les résultats expérimentaux, le dédoublement spectral qui apparaît est, sans doute, dû à un phénomène que nous ne pouvons pas prendre en compte (effet bidimensionnel, réflexions parasites, instabilités dans le plasma ...). Il aurait été intéressant, pour aller plus loin dans les comparaisons expérience-théorie, de disposer du profil temporel de l'impulsion transmise.

VIII - Conclusion

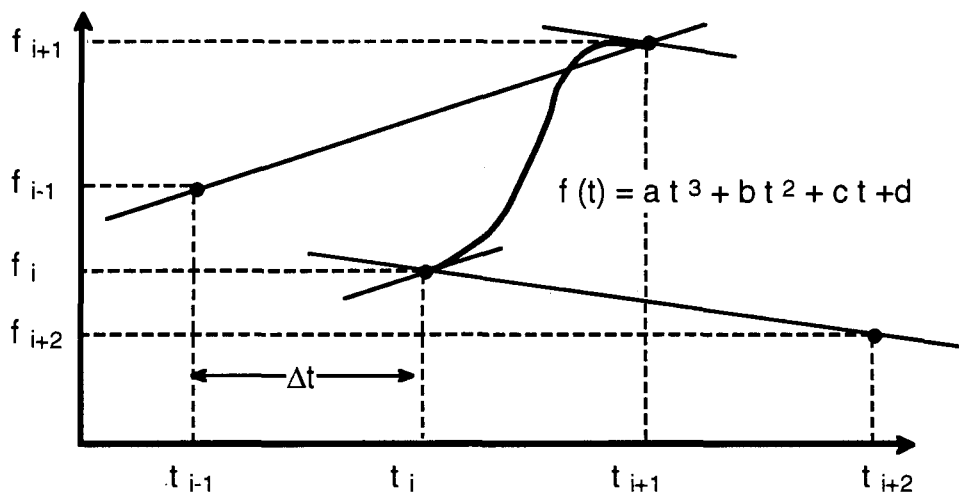
La méthode présentée dans ce rapport, adaptée à la simulation de l'interaction entre un plasma et une impulsion électromagnétique à spectre étroit, amène à résoudre l'équation différentielle électromagnétique de Helmholtz dans un plasma inhomogène et modérément instationnaire. Cette résolution permet d'analyser l'évolution du champ électrique à l'intérieur du plasma (le plasma peut être préformé ou évoluer sous l'action de l'impulsion), ainsi que le profil temporel et le spectre des impulsions transmises et réfléchies. Cette méthode restitue parfaitement l'effet Doppler induit par un gradient de plasma sur-critique se déplaçant à vitesse constante ainsi qu'une partie des résultats expérimentaux obtenus par Kuo et Ren. Elle ne permet cependant pas de retrouver le dédoublement du spectre de l'impulsion transmise qu'ils ont observé pour des valeurs importantes du champ électrique.

Annexe 1 : Transformée de Fourier d'une fonction bornée continue et dérivable échantillonnée sur des points équidistants.

Considérons tout d'abord une fonction $f(t)$ tabulée sur N points équidistants (t_1, \dots, t_N) et telle que ses valeurs extrêmes, sur les deux bords de son intervalle d'existence, soient, en valeurs absolues, beaucoup plus petites que ses valeurs significatives au centre de l'intervalle (au moins un facteur 10^9) (cf schéma).



À partir d'une fonction tabulée sur N points, la fonction continue et dérivable la plus simple qui passe par tous les points est une fonction du type SPLINE. C'est une courbe du troisième degré telle que la pente en un point soit égale à la pente de la droite passant par les points situés immédiatement voisins de ce point (cf schéma).



Quelques calculs algébriques simples mènent aux valeurs du coefficient a et des dérivées secondes en t_i et t_{i+1} :

$$a = \frac{1}{6} f'''(t) = \frac{f_{i+2} - 3 f_{i+1} + 3 f_i - f_{i-1}}{2 \Delta t^3}, \text{ pour } t_i < t < t_{i+1} \quad (\text{A1-1})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f''(t_i)_{\text{à droite}} = 6 a t_i + 2 b = \frac{2 f_{i-1} - 5 f_i + 4 f_{i+1} - f_{i+2}}{\Delta t^2} \\ f''(t_{i+1})_{\text{à gauche}} = 6 a t_{i+1} + 2 b = \frac{2 f_{i+2} - 5 f_{i+1} + 4 f_i - f_{i-1}}{\Delta t^2} \end{array} \right. \quad (\text{A1-2})$$

Dans le cadre de l'interpolation de type SPLINE, la fonction d'interpolation $f(t)$ est continue et dérivable en t_i , mais les dérivées seconde et troisième de $f(t)$ présentent des discontinuités en t_i .

À partir de ces données, nous pouvons maintenant calculer les deux intégrales définies :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_s(f, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \equiv \int_{t_1}^{t_N} f(t) \sin(\omega t) dt \\ \mathcal{J}_c(f, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \equiv \int_{t_1}^{t_N} f(t) \cos(\omega t) dt \end{array} \right. \quad (\text{A1-3})$$

Puisque $f(t)$ est une fonction du 3ème degré par morceaux, ses dérivées d'ordre supérieur à 3 sont nulles, il existe donc des primitives de $f(t)\sin(\omega t)$ et $f(t)\cos(\omega t)$ qui s'écrivent, à une constante additive près :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int f(t) \sin(\omega t) dt = -\frac{f(t) \cos(\omega t)}{\omega} + \frac{f'(t) \sin(\omega t)}{\omega^2} + \frac{f''(t) \cos(\omega t)}{\omega^3} - \frac{f'''(t) \sin(\omega t)}{\omega^4} \\ \int f(t) \cos(\omega t) dt = +\frac{f(t) \sin(\omega t)}{\omega} + \frac{f'(t) \cos(\omega t)}{\omega^2} - \frac{f''(t) \sin(\omega t)}{\omega^3} - \frac{f'''(t) \cos(\omega t)}{\omega^4} \end{array} \right. \quad (\text{A1-4})$$

Puisque $f(t)$ est continue et dérivable et que sa valeur et celles de sa dérivée aux bornes de l'intervalle d'intégration peuvent être considérées comme nulles, les deux premiers termes des primitives ont une contribution nulle aux intégrales définies \mathcal{J}_s et \mathcal{J}_c , on a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_s(f, \omega) = \left[+\frac{f''(t) \cos(\omega t)}{\omega^3} - \frac{f'''(t) \sin(\omega t)}{\omega^4} \right]_{t_1}^{t_N} \\ \mathcal{J}_c(f, \omega) = \left[-\frac{f''(t) \sin(\omega t)}{\omega^3} - \frac{f'''(t) \cos(\omega t)}{\omega^4} \right]_{t_1}^{t_N} \end{array} \right. \quad (\text{A1-5})$$

On utilise maintenant la relation (A1-2), et le fait que les valeurs de $f(t)$ au voisinage des bornes peuvent être considérées comme nulles, pour écrire :

$$\left\{ \begin{aligned} [f''(t)\sin(\omega t)]_{t_1}^{t_N} &= \sum_{i=1}^{N-1} [f''(t)\sin(\omega t)]_{t_i}^{t_{i+1}} \cong \sum_{i=3}^{N-2} \sin(\omega t_i) \left[\frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{\Delta t^2} \right] \\ [f''(t)\cos(\omega t)]_{t_1}^{t_N} &= \sum_{i=1}^{N-1} [f''(t)\cos(\omega t)]_{t_i}^{t_{i+1}} \cong \sum_{i=3}^{N-2} \cos(\omega t_i) \left[\frac{f_{i+2} - 2f_{i+1} + 2f_{i-1} - f_{i-2}}{\Delta t^2} \right] \end{aligned} \right.$$

On en déduit de même, à partir de la relation (A1-1) :

$$\left\{ \begin{aligned} [f'''(t)\sin(\omega t)]_{t_1}^{t_N} &= \sum_{i=1}^{N-1} [f'''(t)\sin(\omega t)]_{t_i}^{t_{i+1}} \\ &\cong -3 \sum_{i=3}^{N-2} \sin(\omega t_i) \left[\frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta t^3} \right] \\ [f'''(t)\cos(\omega t)]_{t_1}^{t_N} &= \sum_{i=1}^{N-1} [f'''(t)\cos(\omega t)]_{t_i}^{t_{i+1}} \\ &\cong -3 \sum_{i=3}^{N-2} \cos(\omega t_i) \left[\frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{\Delta t^3} \right] \end{aligned} \right.$$

Finalement, les intégrales définies \mathcal{J}_s et \mathcal{J}_c s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{J}_s(f, \omega) &= \sum_{i=3}^{N-2} \left\{ \begin{aligned} &- \cos(\omega t_i) \left[\frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + 2f_{i+1} - f_{i+2}}{\omega^3 \Delta t^2} \right] \\ &+ 3 \sin(\omega t_i) \left[\frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{\omega^4 \Delta t^3} \right] \end{aligned} \right\} \\ \mathcal{J}_c(f, \omega) &= \sum_{i=3}^{N-2} \left\{ \begin{aligned} &+ \sin(\omega t_i) \left[\frac{f_{i-2} - 2f_{i-1} + 2f_{i+1} - f_{i+2}}{\omega^3 \Delta t^2} \right] \\ &+ 3 \cos(\omega t_i) \left[\frac{f_{i-2} - 4f_{i-1} + 6f_i - 4f_{i+1} + f_{i+2}}{\omega^4 \Delta t^3} \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right. \quad (\text{A1-6})$$

Il est intéressant de remarquer que ce sont les discontinuités des dérivées secondes et troisièmes qui permettent de calculer ces intégrales.

Calculons maintenant la transformée de Fourier d'un champ électrique de la forme :

$$E(t) = E_s(t)\sin(\omega_0 t) + E_c(t)\cos(\omega_0 t) \quad (\text{A1-7})$$

qui est une fonction complexe définie par la relation :

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp[-i\omega t] dt = A(\omega) - i B(\omega) \quad (\text{A1-8})$$

avec :

$$\begin{cases} A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} E_s(t) \sin(\omega_0 t) \cos(\omega t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} E_c(t) \cos(\omega_0 t) \cos(\omega t) dt \right] \\ B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} E_s(t) \sin(\omega_0 t) \sin(\omega t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} E_c(t) \cos(\omega_0 t) \sin(\omega t) dt \right] \end{cases} \quad (\text{A1-9})$$

En déplaçant globalement le signal sur l'échelle du temps d'une valeur t_1 , on obtient une nouvelle transformée de Fourier :

$$F_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) \exp[-i\omega(t - t_1)] dt = A_1(\omega) - i B_1(\omega) \quad (\text{A1-10})$$

avec :

$$\begin{cases} A_1(\omega) = A(\omega) \cos(\omega t_1) + B(\omega) \sin(\omega t_1) \\ B_1(\omega) = B(\omega) \cos(\omega t_1) - A(\omega) \sin(\omega t_1) \end{cases} \quad (\text{A1-11})$$

On s'affranchit de la dépendance en t_1 en considérant uniquement le module $|F(\omega)|$ de $F(\omega)$ défini par la relation :

$$|F(\omega)| = \sqrt{A_1(\omega)^2 + B_1(\omega)^2} = \sqrt{A(\omega)^2 + B(\omega)^2} \quad (\text{A1-10})$$

Les produits de fonctions trigonométriques amènent des termes en $(\omega_0 - \omega)t$ et des termes en $(\omega_0 + \omega)t$. Puisque l'on étudie un signal à spectre très étroit centré sur ω_0 , on a toujours $(\omega_0 + \omega) \gg (\omega_0 - \omega)$. D'après les relations (A1-6), ces termes apparaissent en dénominateur élevés à la puissance 3 et 4, il est donc tout à fait légitime de négliger les intégrales où apparaissent des phases égales à $(\omega_0 + \omega)t$.

Pour une fonction à spectre étroit, on en déduit finalement le module de la transformée de Fourier :

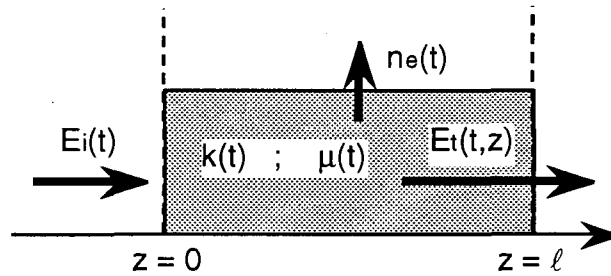
$$|F(\omega)| = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \sqrt{[\mathcal{J}_s(E_s, \omega_0 - \omega) + \mathcal{J}_c(E_c, \omega_0 - \omega)]^2 + [\mathcal{J}_c(E_s, \omega_0 - \omega) - \mathcal{J}_s(E_c, \omega_0 - \omega)]^2} \quad (\text{A1-11})$$

où les fonctionnelles \mathcal{J}_s et \mathcal{J}_c sont définies par la relation (A1-6).

Le module de la transformée de Fourier $|F(\omega)|$ est indépendant de la position du signal sur l'axe du temps, il représente donc physiquement ce que l'on appelle le "spectre" du signal analysé. Malheureusement, en passant à cette fonction, on perd l'information sur la phase du signal et il est impossible de déconvoluer cette fonction pour retrouver, par transformée de Fourier inverse la variation temporelle du signal.

Annexe 2 : Calcul du déphasage spectral de l'impulsion transmise dans un plasma homogène sous-dense instationnaire

Considérons un plasma homogène instationnaire limité par deux parois situées aux abscisses $z=0$ et $z=\ell$ et supposons que l'évolution de ce plasma soit, d'une part, indépendante de l'évolution de l'impulsion électromagnétique qui le traverse et, d'autre part, lente devant la période d'oscillation du champ électrique.



En $z=0$ (entrée du plasma), le champ électrique incident $E_i(t)$ est de la forme :

$$E_i(t) = |E_i|(t) \sin(\omega_0 t + \Phi_0) \quad (\text{A2-1})$$

où $|E_i|(t)$ est l'enveloppe à variation lente du champ électrique incident, ω_0 la pulsation centrale de l'onde et où la phase Φ_0 ne dépend pas du temps (pas de modulation de phase sur la durée de l'impulsion incidente). On suppose que le plasma est suffisamment peu dense (typiquement $n_e/n_c < 0.1$) pour qu'il n'y ait pas réflexion de l'impulsion aux interfaces $z=0$ et $z=\ell$. Comme il n'existe pas de gradient dans le plasma, le champ

électrique se propage donc, dans le milieu, vers les z positifs. D'après la relation (III-1), l'impulsion transmise prend la forme suivante, en tout endroit et à tout instant :

$$\begin{aligned}
 E_i(z, t) &= E_s(z, t) \sin(\omega_0 t) + E_c(z, t) \cos(\omega_0 t) = |E|(z, t) \sin[\omega_0 t + \Phi(z, t)] \\
 &\text{avec} \\
 E_s(z, t) &= e^{-\mu(t)z} [A(t) \sin[k(t)z] + B(t) \cos[k(t)z]] \\
 E_c(z, t) &= e^{-\mu(t)z} [A(t) \cos[k(t)z] - B(t) \sin[k(t)z]] \\
 |E|(z, t) &= \sqrt{E_s^2(z, t) + E_c^2(z, t)} \\
 \sin[\Phi(z, t)] &= E_c(z, t) / |E|(z, t) , \quad \cos[\Phi(z, t)] = E_s(z, t) / |E|(z, t)
 \end{aligned} \tag{A2-2}$$

E_s , E_c , $|E|$, Φ , k , μ , A et B sont des fonctions du temps variant lentement par rapport à la pulsation du champ électrique.

La continuité avec le champ incident $E_i(t)$ en $z=0$ permet de réécrire E_s et E_c sous la forme :

$$\begin{aligned}
 E_s(z, t) &= +e^{-\mu(t)z} |E_i|(t) \cos[k(t)z - \Phi_0] \\
 E_c(z, t) &= -e^{-\mu(t)z} |E_i|(t) \sin[k(t)z - \Phi_0]
 \end{aligned} \tag{A2-3}$$

et d'en déduire la phase $\Phi(z, t)$:

$$\Phi(z, t) = \Phi_0 - k(t) z \tag{A2-4}$$

D'après la relation (V-3), on en déduit la pulsation de l'impulsion à l'intérieur du plasma, en tout point et en tout instant :

$$\omega(z, t) = \omega_0 + \Delta\omega \quad \text{avec} \quad \Delta\omega = \frac{\partial \Phi(z, t)}{\partial t} = -z \frac{\partial k(t)}{\partial t} \tag{A2-5}$$

Remarque : Cette expression vérifie bien la relation :

$$\frac{\partial k(t)}{\partial t} + \frac{\partial \omega(z, t)}{\partial z} = 0 \tag{A2-6}$$

utilisée par Kuo et al ^[43] pour le calcul du déphasage spectral.

[43] S. P. Kuo, A. Ren, G. Schmidt, (1994), déjà cité

Dans la cas d'un plasma fortement sous-dense, l'expression du vecteur d'onde k donnée par la relation (III-2) peut être simplifiée sous la forme :

$$k(t) = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha(t)^2 + \beta(t)^2} + \alpha(t)}{2}} \approx \sqrt{\alpha(t)} \approx k_0 \left[1 - \frac{n_e(t)}{2n_c} \left(1 - \frac{v_m(t) v_c(t)}{\omega_0^2 + v_c(t)^2} \right) \right] \quad (\text{A2-7})$$

Les fréquences de collision v_m ou v_c ($v_c = v_m + v_i$) variant très lentement en fonction de $|E|$ (ou de U , cf figure 1), et donc en fonction du temps, il est possible de négliger leur dérivée temporelle pour obtenir :

$$\frac{\Delta\omega(z, t)}{\omega_0} = \frac{z}{2c} \left[1 - \frac{v_m(t) v_c(t)}{\omega_0^2 + v_c(t)^2} \right] \frac{1}{n_c} \frac{\partial n_e(t)}{\partial t} \quad (\text{A2-8})$$

Cette relation montre que le décalage spectral est indépendant de la variation temporelle du module du champ électrique, qu'il est proportionnel à la distance parcourue dans le plasma, qu'il est nul dans un plasma stationnaire et enfin que, dans un plasma à densité croissante (ou auto-généré), le décalage se fait toujours vers les hautes fréquences ($\Delta\omega > 0$) puisque, v_m étant plus petit que v_c , le facteur correctif amené par les collisions est toujours compris entre 0 et 1. N'oublions cependant pas que la relation (A2-8) n'est valable que dans un plasma homogène et sous-dense dans lequel on peut négliger la réflexion.

Il est possible d'étendre la formulation (A2-8) dans le cas d'un plasma légèrement inhomogène, c'est à dire un plasma dans lequel la longueur caractéristique de variation du gradient de densité électronique est grande devant la longueur d'onde (approximation WKB [44]) :

$$\frac{\partial n_e(z, t)}{\partial z} \ll k_0 n_e(z, t) \quad (\text{A2-9})$$

Le plasma peut alors être considéré comme homogène entre z et $z+dz$, d'après la relation (A2-5), le décalage spectral subit par l'onde entre ces deux valeurs s'écrit donc :

$$d \Delta\omega = - \frac{\partial k(z, t)}{\partial t} dz \quad (\text{A2-10})$$

Dont on déduit, par intégration, le décalage spectral subit entre $z=0$ et $z=\ell$:

[44] W. L. Kruer, "The physics of laser plasma interactions", Addison-Wesley, chap.3, (1988)

$$\Delta\omega_{z=0 \rightarrow \ell} = -\int_0^\ell \frac{\partial}{\partial t} k(z,t) dz = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\ell k(z,t) dz \quad (\text{A2-11})$$

que l'on peut encore écrire, en généralisant la relation (A2-7) aux plasmas à faibles gradients spatiaux :

$$\frac{\Delta\omega_{z=0 \rightarrow \ell}}{\omega_0} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\ell \sqrt{1 - \frac{n_e(z,t)}{n_c} \left[1 - \frac{v_m(z,t) v_c(z,t)}{\omega_0^2 + v_c(z,t)^2} \right]} dz \quad (\text{A2-12})$$

Si l'on néglige les collisions, on trouve, en introduisant la fréquence plasma $\omega_p^2 = n_e \omega_0^2 / n_c$:

$$\Delta\omega_{z=0 \rightarrow \ell} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\ell \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2(z,t)} dz \quad (\text{A2-13})$$

Annexe 3 : Calcul analytique de la variation de fréquence dans un plasma autogénéré, sous-critique, non-réfléchissant, instationnaire et quasi-homogène

Pour illustrer la théorie, considérons le cas d'un plasma suffisamment sous-dense pour que l'on puisse négliger la réflexion. À l'intérieur du plasma, il n'existe donc qu'une impulsion se propageant dans une seule direction (onde transmise) dont le champ électrique est de la forme :

$$E = E_c \cos\omega_0 t + E_s \sin\omega_0 t = E_0(t,z) \cos\phi(t,z) = E_0(t,z) \cos(\omega_0 t + \phi(t,z))$$

$$E_0^2 = E_s^2 + E_c^2 ; \quad \text{tg}(\phi) = -\frac{E_s}{E_c} ; \quad E_s, E_c \approx \exp(-\mu z)$$

L'injection de la formulation de E en fonction de E_0 et ϕ dans la relation (I-6), en supposant que la vitesse vérifie les relations (II-5) où ω_0 est remplacé par $\partial\phi/\partial t$ amène au système d'équations couplées qui suit, déterminant l'amplitude et la phase :

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] E_0 - \frac{\omega_p^2}{c^2} \left(1 - \frac{v_m v_c}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + (v_c)^2} \right) E_0 = 0$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} E_0 - 2 \frac{\partial E_0}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial E_0}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} E_0 + \frac{\omega_p^2}{c^2} \left(\frac{v_m \frac{\partial \phi}{\partial t}}{\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + (v_c)^2} \right) E_0 = 0$$

Pour donner une signification physique à ce système, il est pratique de poser :

$$\omega \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t} = \omega_0 + \frac{\partial \phi}{\partial t} ; \quad k \equiv -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Avec ces notations, le système précédent devient, en négligeant la dérivée temporelle du deuxième ordre de l'amplitude et en prenant la dérivée temporelle de l'équation de dispersion où l'on a supposé $\partial^2 E_0 / \partial z^2 \approx \mu^2 E_0$ où μ est le coefficient d'atténuation introduit en (III-1) :

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial t} + \frac{kc^2}{\omega} \frac{\partial \omega^2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\omega_p^2 \left(1 - \frac{v_m v_c}{\omega^2 + v_c^2} \right) \right) - c^2 \frac{\partial \mu^2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(\omega^2 E_0^2)}{\partial t} + \frac{kc^2}{\omega} \frac{\partial(\omega^2 E_0^2)}{\partial z} =$$

$$E_0^2 \omega^2 \left(-\frac{v_m \omega_p^2}{\omega^2 + v_c^2} + \frac{1}{2\omega^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\omega_p^2 \left(1 - \frac{v_m v_c}{\omega^2 + v_c^2} \right) \right) \right) - \frac{c^2}{2\omega^2} \frac{\partial \mu^2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kc^2}{\omega} \right)$$

Il faut associer à ce système l'équation d'évolution de la densité,

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} \approx (v_i - v_a) n_e ,$$

Le changement de variable, $[t = \tau + z/v_g ; z_1 = z]$ permet de le réduire, en supposant une variation temporelle et spatiale lente de la vitesse $v_g \equiv kc^2/\omega$, une atténuation de l'onde faible, une fréquence d'ionisation v_i qui reste petite devant la fréquence d'échange de quantité de mouvement v_m :

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial z_1} = \frac{1}{v_g} \frac{\partial \omega_p^2}{\partial \tau} \left(1 - \frac{v_m v_c}{v_c^2 + \omega^2} \right) ;$$

$$\frac{\partial(E_0^2 \omega^2)}{\partial z_1} = -\frac{(E_0^2 \omega^2) \omega_p^2}{v_g} \left(\frac{v_m}{v_c^2 + \omega^2} \right) ; \quad \frac{\partial n_e}{\partial \tau} \approx (v_i - v_a) n_e$$

La solution générale doit être déterminée de façon numérique. En effet, les fréquences de collision dépendent de l'amplitude du champ électrique de façon non-linéaire.

Variation lente des fréquences avec l'amplitude du champ :

Cependant, lorsque l'évolution des fréquences avec l'amplitude du champ est lente, il est possible d'obtenir une solution analytique locale simplifiée :

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial z_1} = \frac{v_i \omega_p^2 \left(1 - \frac{v_m v_c}{\omega^2 + v_c^2}\right)}{c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{v_m v_c}{\omega^2 + v_c^2}\right)}} ; \quad \Delta \omega = \omega - \omega_0 = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^l \frac{v_i \omega_p^2 \left(1 - \frac{v_m v_c}{\omega_0^2 + v_c^2}\right) dz}{c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{v_m v_c}{\omega_0^2 + v_c^2}\right)}}$$

$$n_e \approx n_0 \exp v_i \tau ; \quad E_0^2 \omega^2 = E_{00}^2 \omega_0^2 \exp \left(- \int_0^l \frac{v_m \omega_p^2}{\omega_0^2 + v_c^2} \frac{dz}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{v_m v_c}{v_c^2 + \omega^2}\right)\right)}} \right)$$

Si les collisions sont négligées, la variation de fréquence se simplifie selon :

$$\Delta \omega \approx \omega - \omega_0 = \frac{1}{2\omega_0} \int_0^l \frac{v_i \omega_p^2 dz}{c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}}} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^l \sqrt{\omega_0^2 - \omega_p^2} dz \right)$$

Variation rapide de la fréquence d'ionisation avec l'amplitude :

Dans le cas non-linéaire, une solution analytique approchée peut être obtenue en utilisant un développement limité au premier ordre de v_g qui recouvre le domaine de validité des équations précédentes :

$$v_g \approx c \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{v_m v_c}{v_c^2 + \omega^2} \right) \right)$$

La décharge ionisante apparaît dès que $(v_i - v_a) > 0$. Le champ électrique de développement de l'ionisation E_B est donné par la condition $v_i \approx v_a$. Dans le domaine des champs faibles, la fréquence d'ionisation évolue très rapidement avec le champ

électrique [45,46], la fréquence d'échange de quantité de mouvement évoluant plus lentement. Elle peuvent être mise sous la forme analytique :

$$v_i = v_a \left(\frac{E_0}{E_B} \right)^{2\gamma} ; v_{me} = v_{m0} \left(\frac{E_0}{E_B} \right)^\alpha ; (2\gamma \approx 5 ; \alpha \approx 1)$$

La description de l'évolution nonlinéaire de la densité électronique, dans un domaine tel que, $n_e \ll n_c$ (l'annulation de la vitesse de groupe $v_g \approx 0$ détermine n_c la densité critique), est facilitée en posant [43,47] :

$$N = \frac{n_e}{n_c} ; \rho = \int_0^\beta N(\tau, \zeta) d\zeta ; \beta = \frac{\gamma v_m Z_1}{c} ; A = \left(\frac{E_0}{E_B} \right)^{2\gamma} ;$$

Il en résulte la relation $\frac{1}{\gamma A} \frac{\partial A}{\partial Z_1} = \frac{2}{E_0} \frac{\partial E_0}{\partial Z_1}$. L'équation de l'amplitude du champ électrique devient :

$$\frac{\partial E_0^2}{\partial Z_1} = - \frac{E_0^2}{v_g} \left[\frac{v_m \omega_p^2}{\omega^2 + v_c^2} + \frac{v_g}{2\omega^2} \frac{\partial \omega^2}{\partial Z_1} \right] = - \frac{E_0^2}{v_g} \left[\frac{v_m \omega_p^2}{\omega^2 + v_c^2} + \frac{1}{2\omega^2} \frac{\partial \omega_p^2}{\partial \tau} \left(1 - \frac{v_m v_c}{\omega^2 + v_c^2} \right) \right]$$

Le changement de variable spatial en fonction de β et le changement de variable temporel $[\tau_1 = v_a \tau]$ conduisent ensuite au système d'équations sans dimension décrivant :

- l'amplitude :

$$\left(1 + \frac{v_{m0}(v_{m0}(A)^{\frac{1}{2\gamma}} + 2v_a A^{\frac{1+\frac{1}{4\gamma}}})}{\omega^2} \right) \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \approx - \left[1 + \frac{N}{2} \left(1 - \frac{v_{m0}(v_{m0} A^{\frac{1}{2\gamma}} + v_a A^{\frac{1+\frac{1}{4\gamma}}})}{\omega^2 + v_{m0}(2v_a A^{\frac{1+\frac{1}{4\gamma}}}) + v_{m0}(A)^{\frac{1}{2\gamma}}} \right) \right] \\ \times \left[N A^{\frac{1}{4\gamma}} + \frac{v_a}{2\omega^2 v_{m0}} \frac{\partial N}{\partial \tau_1} \left(\omega^2 + v_{m0} v_a A^{\frac{1+\frac{1}{4\gamma}}}) \right) \right]$$

- la densité : $\frac{\partial N}{\partial \tau_1} = N (A - 1)$

-
- [45] V. E. Semenov, "Breakdown wave in the self consistent field of an electromagnetic wave beam", Sov. J. Plasma Phys., vol. 8, p. 347-350 (1982)
[46] Y. A. Lupan, "Refined theory for RF discharges in air", Sov. Phys. Tech. Phys., vol. 21(11), p. 1367-1370 (1976)
[47] D. Anderson, M. Lisak, T. Lewin, "Self-consistent structure of an ionization wave produced by microwave breakdown in atmospheric air", Phys. of Fluids, vol. 29, p. 446-449 (1986)

$$\begin{aligned}
- \text{ la fréquence : } & \frac{\gamma v_{m0}}{v_a} \frac{\partial \omega^2}{\partial \beta} \approx \omega_0^2 \left[\frac{\partial N}{\partial \tau_1} \frac{(\omega^2 + v_{m0} v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})})}{(\omega^2 + v_{m0}(2v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})} + v_{m0} A \frac{1}{2\gamma}))} \right] \\
& \times \left[1 + \frac{N}{2} \left(1 - \frac{v_{m0}(v_{m0} A \frac{1}{2\gamma} + v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})})}{\omega^2 + v_{m0}(2v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})} + v_{m0} A \frac{1}{2\gamma})} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$- \text{ l'épaisseur du milieu : } \quad \frac{\partial \rho}{\partial \tau_1} = \int_0^\beta \frac{\partial N}{\partial \tau_1} d\zeta = \int_0^\beta N(A-1) d\zeta$$

Le système précédent peut être simplifié en utilisant un paramètre a_1 variable avec l'amplitude et proche de 1. Ainsi, l'équation de l'amplitude se réduit à :

$$\frac{\partial A}{\partial \beta} = -a_1 N A ; \quad \frac{\partial A}{\partial \beta_1} = -N A ; \quad N = \frac{\partial \rho}{\partial \beta} ; \quad A = A_0 \exp(-a_1 \rho)$$

$$a_1 = A \frac{1}{4\gamma} \frac{\left[1 + \frac{N}{2} \left(1 - \frac{v_{m0}(v_{m0} A \frac{1}{2\gamma} + v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})})}{\omega^2 + v_{m0}(2v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})} + v_{m0} A \frac{1}{2\gamma})} \right) \right]}{\left(1 + \frac{v_{m0}(v_{m0} A \frac{1}{2\gamma} + 2v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})})}{\omega^2} \right)}$$

L'obtention de l'amplitude nécessite le calcul de ρ . Trois hypothèses rencontrées en pratique seront utilisées selon que ρ est petit ou grand devant 1 et selon les valeurs de A_0 .

Ainsi, la solution analytique de l'amplitude sera obtenue en faisant successivement les hypothèses suivantes :

- $\rho \ll 1$ et A_0 éventuellement proche de 1 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau_1} = \frac{A_0}{a_1} (1 - \exp(-a_1 \rho)) - \rho \approx A_0 \left(\rho - \frac{a_1 \rho^2}{2} \right) - \rho$$

$$\text{Log} \left(\frac{\rho}{\frac{2}{a_1} (A_0 - 1) - \rho} \right) = (A_0 - 1) (\tau_1 + \tau_0) ; \quad \tau_0 = \frac{1}{A_0 - 1} \text{Log} \left(\frac{\rho_0}{\frac{2}{a_1} (A_0 - 1) - \rho_0} \right)$$

$$\rho = \frac{2(A_0 - 1)}{a_1} \frac{(\exp[(A_0 - 1)(\tau_1 + \tau_0)])}{1 + \exp[(A_0 - 1)(\tau_1 + \tau_0)]} ; \quad \rho_0 = \frac{n_0}{n_c} \beta$$

$$\tau_0 = \frac{1}{A_0-1} \text{Ln} \left(\frac{\rho_0 a_1}{2(A_0-1) - \rho_0 a_1} \right) = \frac{1}{A_0-1} \text{Ln} \left(\frac{\frac{n_0}{n_c} \beta a_1}{2(A_0-1) - \frac{n_0}{n_c} \beta a_1} \right)$$

$$\omega_p^2 = \omega_{pc}^2 \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \approx \omega_{pc}^2 2 N_0 (A_0-1) \frac{\rho(1-\rho)}{\rho_0(2(A_0-1)-\rho_0 a_1)} ; \omega_{pc}^2 = \frac{n_c q_e^2}{\epsilon_0 m_e}$$

- ρ peut être très supérieur à 1 ($\rho < \rho_s$) mais A_0 grand devant ρ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau_1} \approx \frac{(A_0 - 1)}{a_1} (1 - \exp(-a_1 \rho))$$

$$\rho = \frac{1}{a_1} \text{Log} (1 + \exp[(A_0 - 1)(\tau_1 + \tau_0)]) \approx \frac{1}{a_1} \text{Log} (1 + a_1 \rho_0 \exp[(A_0 - 1)(\tau_1)])$$

$$\tau_0 = \frac{1}{A_0-1} \text{Log} [(\exp a_1 \rho_0) - 1] \approx \frac{1}{A_0-1} \text{Log} (a_1 \rho_0)$$

$$N = \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \approx \frac{n_0}{n_c} \frac{\exp(A_0 - 1)\tau_1}{1 + \rho_0 a_1 \exp(A_0 - 1)\tau_1}$$

L'atténuation de l'amplitude étant déterminée, il en résulte la variation de fréquence :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega^2}{\partial \beta} &\approx \frac{v_a \omega_0^2}{\gamma v_{m0}} \left(N(A-1) \left(1 + \frac{v_{m0} v_a}{\omega^2} A^{1+\frac{1}{4\gamma}} \right) \left(1 - 2 \frac{v_{m0} v_a}{\omega^2} A^{1+\frac{1}{4\gamma}} - \frac{(v_{m0})^2}{\omega^2} A^{\frac{1}{2\gamma}} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[1 + \frac{N}{2} \left(1 - \frac{v_{m0}(v_{m0} A^{\frac{1}{2\gamma}} + v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})})}{\omega^2 + v_{m0}(2v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})} + v_{m0}(A)^{\frac{1}{2\gamma}})} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

Celle - ci est nulle en $t=0$. En effet, le champ hyperfréquence pénétrant dans un milieu de densité initiale $n_e=n_0$, subit la discontinuité de densité avec variation du vecteur d'onde de $k_0=\omega_0/c$ à $k = \frac{\omega_0}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{v_{m0} v_{c0}}{\omega_0^2 + (v_{c0})^2} \right)}$, sans changement de fréquence.

En supposant de faibles variation de fréquence, près du seuil d'initiation de la décharge, une expression analytique simple de forme comparable à la précédente peut être obtenue :

$$\Delta\omega = \omega - \omega_0 \approx \frac{v_a \omega_0}{2\gamma v_{m0}} \int_0^{\beta_1} \left(N(A-1) \left(1 + \frac{v_{m0} v_a}{\omega^2} A^{1+\frac{1}{4\gamma}} \right) \left(1 - 2 \frac{v_{m0} v_a}{\omega^2} A^{1+\frac{1}{4\gamma}} - \frac{(v_{m0})^2}{\omega^2} A^{\frac{1}{2\gamma}} \right) \right. \\ \left. \times \left[1 + \frac{N}{2} \left(1 - \frac{v_{m0} (v_{m0} A^{\frac{1}{2\gamma}} + v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})})}{\omega^2 + v_{m0} (2v_a A^{(1+\frac{1}{4\gamma})} + v_{m0} (A)^{\frac{1}{2\gamma}})} \right) \right] d\beta \right) \text{ avec } \beta_1 = \frac{\gamma v_m l}{c}.$$

Cette formule analytique simple permet d'évaluer le décalage vers les hautes fréquences lorsque la fréquence d'ionisation v_i évolue fortement avec l'amplitude du champ électrique.

Annexe 4 : Détermination du champ de claquage dans l'expérience de Kuo et Ren

Données expérimentales :

- Pression : 0.7 Torr (93.5 Pa) correspondant à une densité moléculaire n_a égale à $2.3 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$.

- Densité électronique résiduelle n_{e0} égale à 10^{12} m^{-3}

- Impulsion de profil sensiblement rectangulaire ayant une largeur à mi-hauteur Δt égale à $1 \mu\text{s}$ et une fréquence de 3.27 GHz (Pulsation ω_0 égale à $2.055 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$) à laquelle on peut associer une densité de coupure n_c égale à $1.33 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$.

Le claquage est atteint lorsque la densité électronique atteint la densité de coupure n_c , ce qui correspond dans l'expérience à une multiplication de cette densité par un facteur $1.33 \cdot 10^5$ (puisque la densité électronique initiale n_{e0} est déjà égale à 10^{12} m^{-3}). La densité électronique croît exponentiellement en fonction du temps et l'on a :

$$n_c/n_{e0} = \exp(v_{i-cl} \Delta t) = 1.33 \cdot 10^5$$

dont on déduit la fréquence d'ionisation liée au seuil de claquage : $v_{i-cl} = 1.18 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$.

Cette fréquence divisée par la densité moléculaire prend la valeur :

$$v_{i-cl}/n_a = 5.13 \cdot 10^{-16} \text{ m}^3/\text{s}$$

D'après la figure 2 du texte (fréquence d'ionisation de Lupan), il correspond à cette fréquence d'ionisation une valeur de E_{eff}/n_a égale à $2.47 \cdot 10^{-19} \text{ V m}^3/\text{m}$ et donc un champ efficace de claquage $E_{\text{eff-cl}}$ égal à 5.68 kV/m . De même, d'après la figure 1 du texte, l'énergie U_{cl} des électrons correspondant à cette fréquence d'ionisation est égale à $1.0 \cdot 10^{-18} \text{ J}$ et une valeur de la fréquence de collision $\nu_{\text{c-cl}}/n_a$ ($\nu_{\text{c-cl}}/n_a \approx \nu_{\text{m-cl}}/n_a$) égale à $1.9 \cdot 10^{-13} \text{ m}^3/\text{s}$. La fréquence de collision seuil $\nu_{\text{c-cl}}$ est donc égale à $4.37 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$.

Puisque le champ efficace $E_{\text{eff-cl}}$, la pulsation de l'onde ω_0 , le module du champ de claquage $|E|_{\text{cl}}$ et la fréquence de collision $\nu_{\text{c-cl}}$ sont liés par la relation :

$$E_{\text{eff-cl}} = \frac{|E|_{\text{cl}}}{\sqrt{2 \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\nu_{\text{c-cl}}} \right)^2 \right]}}$$

on en déduit finalement la champ de claquage dans l'expérience de Kuo et Ren :

$$|E|_{\text{cl}} = 38.6 \text{ kV/m}$$